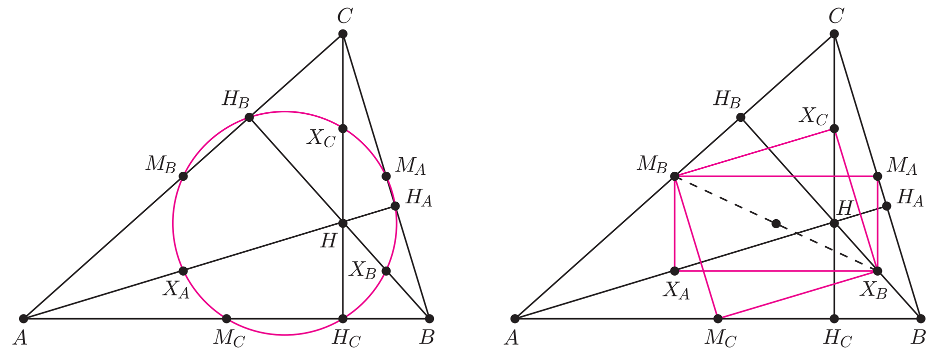
Okrąg dziewięciu punktów i pewne dwa fakty

Michał KIEZA

Trzy niewspółliniowe punkty na płaszczyźnie jednoznacznie wyznaczają okrąg, który przez nie przechodzi. Zatem jeśli pewne cztery punkty leżą na jednym okręgu, to jest to fakt godny odnotowania. W geometrii istnieje niezwykle urocze twierdzenie, które mówi, że aż dziewięć szczególnych punktów trójkąta leży na jednym okręgu.

Twierdzenie. *Dany jest trójkąt ABC, a punkt H to jego ortocentrum. Punkty M_A, M_B i M_C są środkami boków BC, CA i AB tego trójkąta, H_A, H_B i H_C to spodki wysokości poprowadzonych odpowiednio z wierzchołków A, B i C, zaś X_A, X_B i X_C to środki odcinków AH, BH i CH. Wówczas punkty M_A, M_B, M_C, H_A, H_B, H_C, X_A, X_B, X_C leżą na jednym okręgu zwanym okręgiem dziewięciu punktów.*



W literaturze istnieje kilka różnych dowodów tego twierdzenia. Oto szkic najpopularniejszego z nich – uzupełnienie szczegółów może być ciekawym ćwiczeniem dla Czytelników, którzy go nie znają.

Dowód. Zauważmy, że czworokąty $M_AM_BX_AX_B$ oraz $M_BM_CX_BX_C$ są prostokątami o wspólnej przekątnej M_BX_B. Oznacza to, że ich wierzchołki leżą na okręgu o środku w środku odcinka M_BX_B (ten punkt jest także środkiem każdej z pozostałych przekątnych tych prostokątów). Pozostaje jeszcze zauważyć, że każdy z trójkątów $M_BH_BX_B$, $M_AH_AX_A$ i $M_CH_CX_C$ jest prostokątny.

Przypomnijmy, że jeśli wysokości czworościanu przecinają się w jednym punkcie, to spodki wysokości, środki ciężkości ścian czworościanu oraz punkty dzielące odcinki łączące ortocentrum czworościanu z jego wierzchołkami w stosunku $2:1$ (licząc od wierzchołków) leżą na jednej sferze. Jest to *sfera dwunastu punktów*. Pisaliśmy o niej w *Delcie* 1/2011 w artykule *Czworościany ortocentryczne*. W wyższych wymiarach wystarczy zamienić stosunek $2:1$ na stosunek $(n-1):1$, gdzie n oznacza wymiar rozważanej przestrzeni.

Czytelnik Odważny z łatwością sprawdzi, że ten dowód bez kłopotów przenosi się na wyższe wymiary i istnieje odpowiednik okręgu dziewięciu punktów w dowolnym wymiarze. W przestrzeni trójwymiarowej jest to dobrze znana *sfera dwunastu punktów*.

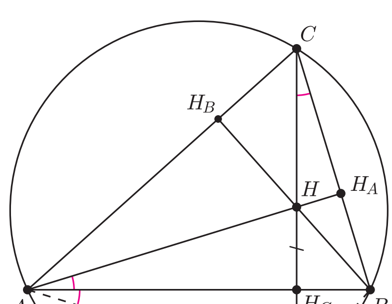
Okazuje się, że okrąg dziewięciu punktów wiąże się ściśle z dwoma dobrze znanymi prostymi faktami.

Fakt 1. *Punkt H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC (rys. 1). Prosta CH przecina bok AB w punkcie H_C, zaś okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie H'_C (różnym od C). Wówczas punkt H_C jest środkiem odcinka HH'_C.* (W skrócie: *ortocentrum trójkąta w symetrii względem jego boków ląduje na okręgu opisanym.*)

Dowód. Zauważmy, że

$$\sphericalangle BAH'_C = \sphericalangle BCH'_C = 90^\circ - \sphericalangle CBA = \sphericalangle BAH$$

i podobnie $\sphericalangle ABH'_C = \sphericalangle ABH$. W takim razie punkty H i H'_C są symetryczne względem odcinka AB oraz $HH_C = H'_CH_C$.

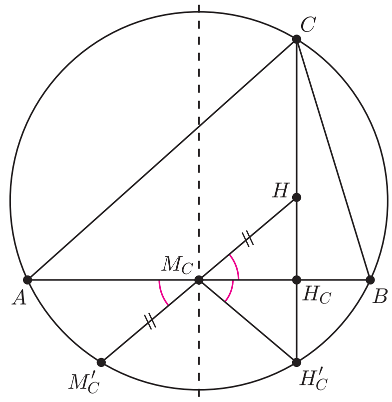


Rys. 1

Fakt 2. *Punkt H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC (rys. 2). Niech M_C będzie środkiem boku AB, zaś M'_C punktem przecięcia półprostej $\overrightarrow{HM_C}$ z okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Wtedy M_C jest środkiem odcinka HM'_C.*

Dowód. Z poprzedniego faktu wnosimy, że

$$\sphericalangle AM_CM'_C = \sphericalangle HM_CB = \sphericalangle H'_CM_CB,$$



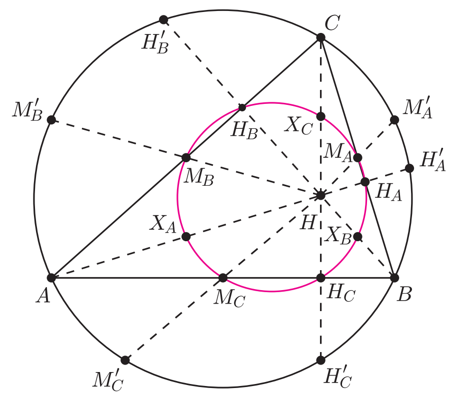
Rys. 2

co oznacza, że proste $M_CM'_C$ i $M_CH'_C$ są symetryczne względem symetralnej odcinka AB. Z drugiej strony symetralna ta jest również osią symetrii okręgu opisanego na trójkącie ABC. To zaś oznacza, że punkty M'_C i H'_C również są względem niej symetryczne. Stąd i z poprzedniego faktu mamy: $M_CM'_C = M_CH'_C = M_CH$.

Teraz możemy w zaskakująco prosty sposób udowodnić twierdzenie o okręgu dziewięciu punktów.

Dowód. Analogicznie do punktów H'_C i M'_C definiujemy punkty H'_A, M'_A, H'_B oraz M'_B. Odnotujmy, że:

- punkty X_A, X_B, X_C są odpowiednio środkami odcinków HA, HB, HC,
- punkty H_A, H_B, H_C są odpowiednio środkami odcinków HH'_A, HH'_B, HH'_C,
- punkty M_A, M_B, M_C są odpowiednio środkami odcinków HM'_A, HM'_B, HM'_C.



Rozważmy teraz jednokładność o środku w punkcie H o skali $\frac{1}{2}$. Z powyższych obserwacji wnioskujemy więc, że przy tej jednokładności:

- punkty X_A, X_B, X_C są odpowiednio obrazami punktów A, B, C,
- punkty H_A, H_B, H_C są odpowiednio obrazami punktów H'_A, H'_B, H'_C,
- punkty M_A, M_B, M_C są odpowiednio obrazami punktów M'_A, M'_B, M'_C.

Jednakże punkty A, B, C, H'_A, H'_B, H'_C, M'_A, M'_B, M'_C leżą na jednym okręgu, zatem ich obrazy również.

To, że powyższego dowodu nie widziałem nigdzie w literaturze, wydaje mi się dość zaskakujące, bowiem fakt, iż okrąg dziewięciu punktów jest obrazem jednokładnym okręgu opisanego w rozważanej w dowodzie jednokładności, jest bardzo dobrze znany. Jedynie Michał Szurek w *Opowieściach geometrycznych* wykorzystuje w podobny sposób fakt 1, ale tamten dowód nie jest tak prosty. To właśnie za jego pomocą dowodzi się, że środek okręgu dziewięciu punktów leży na prostej Eulera i jest środkiem odcinka łączącego ortocentrum ze środkiem okręgu opisanego na danym trójkącie.

Co ciekawe, powyższe rozumowanie można odwrócić (rozważając jednokładność odwrotną do opisanej) i za pomocą okręgu dziewięciu punktów udowodnić dwa przytoczone fakty, a więc okrąg dziewięciu punktów jest z nimi równoważny.

Czytelnik Wnikliwy od razu zauważy, że w ten sposób można otrzymać odpowiedniki faktów 1 i 2 w przestrzeni, zaś Czytelnik Odważny sprawdzi to również w wyższych wymiarach. Czy można je jednak otrzymać inną drogą, co pozwoliłoby na uzyskanie z nich sfery dwunastu punktów? Okazuje się, że tak. Przestrzenny odpowiednik faktu 1 był jednym z zadań na finale LXII Olimpiady Matematycznej. Jedna z kilku możliwych metod przeprowadzenia dowodu to dwukrotne zastosowanie faktu 1 oraz wykorzystanie kilku własności czworościanów ortocentrycznych. To rozumowanie można także zastosować w indukcyjnym dowodzie dla wyższych wymiarów, co z pewnością zainteresuje Czytelnika Odważnego. Przestrzenny odpowiednik faktu 2 udowodnić jest nieco trudniej, bowiem poza przestrzenną wersją faktu 1 należy wykorzystać jeszcze prostą Eulera dla trójkąta będącego podstawą czworościanu. Czytelnik Odważny w celu uogólnienia tego faktu na wyższe wymiary będzie musiał wykorzystać odpowiednik prostej Eulera podany na marginesie.

Przypomnijmy, że w dowolnym trójkącie ABC środek okręgu opisanego O, środek ciężkości G oraz ortocentrum H leżą na jednej prostej. Ponadto $OG : GH = 1 : 2$. Ten fakt można uogólnić na wyższe wymiary. Mianowicie, jeśli sympleks w przestrzeni n-wymiarowej ma ortocentrum H, środek ciężkości G, zaś O jest środkiem sfery (odpowiedniego wymiaru) na nim opisanej, to punkty O, G, H leżą na jednej prostej oraz $OG : GH = (n-1) : 2$.