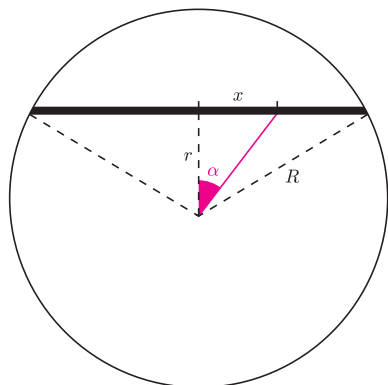




Rozwiązanie zadania F 826.  
Sytuacja opisana w zadaniu przedstawiona jest na poniższym schemacie.



Dla czytelności schemat ten przesadnie ukazuje położenie tunelu względem krzywizny Ziemi. W rzeczywistości odległość między Deltą i Albionem nie przekracza 100 km. Oznacza to, że kąt  $\alpha$  przyjmuje wartości bardzo bliskie zeru. Uzasadnia to przybliżenie

$$r/R = \cos \alpha_{\max} \approx 1$$

oraz

$$x = r \cdot \operatorname{tg} \alpha \approx R\alpha.$$

Przyspieszenie wagonów jest zatem równe iloczynowi promienia Ziemi  $R$  i ich przyspieszenia kąowego  $\varepsilon$  względem środka Ziemi. Składowa siły grawitacji wzdłuż tunelu  $F_{g,w}$  wyraża się wzorem  $F_{g,w} = F_g \sin \alpha \approx F_g \alpha$ , gdzie  $F_g$  jest całkowitą siłą grawitacji działającą na wagon. Dla wagonu o masie  $m$  mamy więc

$$mR\varepsilon + m g \alpha = 0.$$

Równanie to jest identyczne z równaniem ruchu dla wahadła matematycznego o długości  $R$ , wagonik będzie więc wykonywał ruch okresowy o okresie  $T = 2\pi\sqrt{R/g}$ . Podróż z Deltą do Albionu zajmuje pół okresu, zatem szukany czas jest równy  $\frac{1}{2}T = \pi\sqrt{R/g}$ . Podstawiając wartości liczbowe, uzyskujemy czas przejazdu równy 42 minuty, niezależny od odległości między Deltą i Albionem.

## Zliczanie podziałów liczby: algorytm Eulera

Wojciech RYTTER\*

Podziały liczb są ciekawymi obiektami kombinatorycznymi o dosyć skomplikowanych własnościach. W tym artykule przedstawimy dwa algorytmy zliczania takich obiektów. Pierwszy prosty algorytm będzie działał w czasie  $O(n^2)$  i pamięci  $O(n^2)$ , natomiast drugi, pochodzący od Eulera i oparty na tzw. liczbach *pentagonalnych*, w czasie  $O(n\sqrt{n})$  i pamięci  $O(n)$ .

Podział  $\pi = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  liczby naturalnej  $n$  na  $r$  części to przedstawienie tej liczby w postaci sumy  $r$  dodatnich liczb całkowitych

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r, \quad \text{gdzie } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r.$$

Wszystkie podziały liczby  $n$ , w porządku antyleksykograficznym, można wygenerować iteracyjnie następująco. Zaczynamy od trywialnego podziału  $\pi = (n)$ . W celu wygenerowania następnego podziału szukamy pierwszego  $\lambda_i \geq 2$  od prawej strony, zastępujemy  $\lambda_i$  przez  $\lambda_i - 1$ , a pozostałe składniki na prawo dobieramy tak, aby otrzymany podział był jak największy leksykograficznie. Na przykład podziały  $n = 5$  w porządku antyleksykograficznym to:

$$5, \quad 4 + 1, \quad 3 + 2, \quad 3 + 1 + 1, \quad 2 + 2 + 1, \quad 2 + 1 + 1 + 1, \quad 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Oznaczmy przez  $p(n)$  liczbę podziałów liczby  $n$ , mamy:

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176

Dla  $n < 0$  przyjmujemy, czysto formalnie, że  $p(n) = 0$ .

Oznaczmy przez  $p(n, k)$  liczbę podziałów liczby  $n$  na  $k$  części. Algorytm o czasie kwadratowym wyznaczania  $p(n)$  dla  $n \geq 1$  polega na obliczeniu (kwadratowej liczby) wartości  $p(n, k)$  na podstawie rekurencji:

$$p(n, k) = \begin{cases} 0 & \text{dla } k > n \text{ lub } k \leq 0, \\ p(n-1, k-1) + p(n-k, k) & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Rekurencja wynika stąd, że mamy dwa przypadki:

- $\lambda_k = 1$ : Wtedy mamy  $p(n-1, k-1)$  podziałów z pominięciem  $\lambda_k$ .
- $\lambda_k > 1$ : Wtedy możemy odjąć jeden od każdego  $\lambda_i$ , otrzymując podział liczby  $n-k$  na  $k$  części.

W celu szybszego obliczenia  $p(n)$  rozważymy podziały na różne części, tzn.

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_r.$$

Niech  $\tilde{p}(n)$  będzie liczbą takich podziałów. Przez  $p_{\text{even}}(n)$ ,  $\tilde{p}_{\text{even}}(n)$ ,  $p_{\text{odd}}(n)$ ,  $\tilde{p}_{\text{odd}}(n)$  oznaczmy liczbę podziałów  $n$  na parzystą/nieparzystą liczbę części (o różnych rozmiarach w przypadku symboli z  $\sim$ ).

Na przykład  $\tilde{p}(15) = 27$ ,  $\tilde{p}_{\text{odd}}(15) = 14$ ,  $\tilde{p}_{\text{even}}(15) = 13$ , patrz też rysunek 3 (str. 9).

Zauważmy, że liczby  $\tilde{p}(n)$  są przeważnie znacznie mniejsze od liczb  $p(n)$  (choć na początku niewiele się różnią).

Możemy również zdefiniować  $\tilde{p}(n, k)$  – liczbę podziałów  $n$  na  $k$  różnych części. Na przykład  $\tilde{p}(50, 7) = 522$ , co Euler obliczył prawie 300 lat temu bez użycia komputera (ani kalkulatora), odpowiadając na pytanie matematyka Philippe'a Naudégo.

Kluczowa okazuje się funkcja:

$$\Delta(n) = \tilde{p}_{\text{odd}}(n) - \tilde{p}_{\text{even}}(n).$$

Funkcje  $p(n)$ ,  $\tilde{p}(n)$  są bardzo skomplikowane, natomiast zadziwiające jest, że funkcja  $\Delta(n)$  ma bardzo prostą strukturę. Początkowe wartości to:

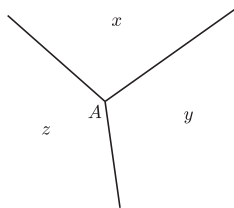
$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\Delta(n)$	1	1	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0

\*Instytut Informatyki,  
Uniwersytet Warszawski



### Rozwiązanie zadania M 1376.

Skoro w wierzchołku  $A$  spotykają się trzy krawędzie, to w tym wierzchołku spotykają się też trzy ściany. Oznaczmy je jak na rysunku.



Weźmy punkt przecięcia prostej  $\ell_x$  z płaszczyzną symetralną odcinka  $AC$  (przyjmujemy definicje i oznaczenia z rozwiązania zadania M 1375). Zauważmy, że należy on też do prostej  $\ell_y$ . Istotnie, należy do płaszczyzny symetralnej  $AB$ , bo prosta  $\ell_x$  jest w niej zawarta, i do płaszczyzny symetralnej  $AC$ . Przecięcie tych płaszczyzn to właśnie prosta  $\ell_y$ . Podobnie, należy on do prostej  $\ell_z$ . Jest więc równo odległy od wszystkich wierzchołków ścian  $x, y, z$ .

Euler odkrył dwie istotne (dla obliczania  $p(n)$ ) własności funkcji  $\Delta$ :

**Własność 1.**  $p(n)$  spełnia rekurencję:

$$(1) \quad p(n) = \sum_{k=1}^n \Delta(k) \cdot p(n-k).$$

**Własność 2.** Jak widać z początkowych wartości,  $\Delta(k)$  jest ciągiem *rzadkim* (bardzo dużo zer). Jest on łatwo obliczalny za pomocą tzw. liczb pentagonalnych. Wartości tego ciągu to zera,  $+1$  lub  $-1$ .

Z tego, że ciąg  $\Delta(n)$  jest bardzo rzadki, wynika, iż przy obliczaniu  $p(n)$  tylko  $O(\sqrt{n})$  składników sumy (1) jest niezerowych.

Zatem  $p(n)$  wyznaczamy w czasie  $O(\sqrt{n})$ , znając  $p(n-1), p(n-2), \dots, p(0)$ . W sumie mamy algorytm działający w czasie  $O(n\sqrt{n})$  i pamięci  $O(n)$ , o ile potrafimy łatwo wypisywać niezerowe wartości  $\Delta(k)$ .

Euler najpierw odkrył własności  $\Delta$  heurystycznie, a dopiero po 10 latach znalazł dowód (być może wcześniej nie miał czasu).

Zdefiniujmy liczby pentagonalne (pięciokątne)

$$pent(i) = (3i-1)i/2.$$

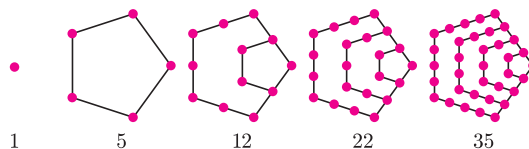
Nazwa pochodzi od interpretacji geometrycznej, podobnie jak dla liczb trójkątnych. Mamy:

$$pent(i) = pent(i-1) + 3i - 2.$$

Liczby pentagonalne będziemy również nazywać liczbami trapezowymi pierwszego typu, a liczby  $pent(i) + i$  liczbami trapezowymi drugiego typu, patrz górny/dolny trapez na rysunku 1 (str. 8).

Oto kilka liczb pięciokątnych:

$i$	1	2	3	4	5	6	7
$pent(i)$	1	5	12	22	35	51	70



Ponadto zdefiniujmy współczynniki pentagonalne:

$$(2) \quad e(k) = \begin{cases} (-1)^{i+1} & \text{jeśli } k = pent(i) \text{ lub } k = pent(i) + i, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

**Lemat kluczowy.**

$$(3) \quad \Delta(k) = e(k).$$

Możemy teraz zapisać algorytm (jedną iterację) wyznaczania  $p(n)$  następująco:

$$(4) \quad p(n) = \sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} \cdot (p(n - pent(i)) + p(n - pent(i) - i)).$$

W równaniu tym korzystamy jedynie z wartości  $i$  takich, że  $pent(i) \leq n$ , mamy jedynie  $O(\sqrt{n})$  takich wartości  $i$  i możemy je wszystkie łatwo obliczyć.

**Twierdzenie.** Liczby  $p(1), p(2), \dots, p(n)$  możemy obliczyć w czasie  $O(n\sqrt{n})$  i pamięci  $O(n)$ .

**Dowód równania (1)**

Uzasadnienie jest sprytną manipulacją algebraiczną, korzystającą z tego, że dwa wielomiany będące tą samą funkcją mają takie same współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej. Sztuczka polega na tym, żeby te same wielomiany przedstawić na dwa różne sposoby, z jednego wymnożenia otrzymujemy wynik, który przyrównujemy do wymnożenia w innej formie. Zdefiniujmy:

$$\phi(x) = (1 + x + x^2 + \dots + x^n), \quad \psi(x) = 1 - x$$

oraz

$$W_1(x) = \prod_{i=1}^n \phi(x^i), \quad W_2(x) = \prod_{i=1}^n \psi(x^i).$$



### Rozwiązanie zadania F 825.

W rozważanej w zadaniu sytuacji stosujemy wyidealizowany opis polegający na przyjęciu, że podłoże jest powierzchnią nieskończenie ciężkiego ciała. Jeśli natomiast przyjmujemy, że ciało, od którego odbija się piłeczka, ma masę  $M$ , to zasadę zachowania pędu i energii dla ruchu jednowymiarowego przy założeniu, że ciężkie ciało początkowo spoczywa, możemy zapisać jako:

$$mv = mv_1 + Mv_2, \\ \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2,$$

gdzie  $v_1$  i  $v_2$  są odpowiednio prędkościami piłeczki i ciężkiego ciała tuż po odbiciu. Są one równe

$$v_1 = -\frac{M-m}{M+m}v$$

oraz

$$v_2 = \frac{2m}{M+m}v,$$

a zatem dla  $M \gg m$  rzeczywiście mamy  $v_1 \approx -v$  oraz  $v_2 \approx 0$ .

WYBÓR  
ZE MNĄ  
NA SPACER



Wprowadźmy notację  $\stackrel{n}{\equiv}$  dla równości wielomianów z dokładnością do potęg wyższych niż  $n$  – inaczej mówiąc, bierzemy resztę z dzielenia przez  $x^{n+1}$ . Zauważmy, że zachodzi dosyć łatwe równanie:

$$(5) \quad W_1(x) \cdot W_2(x) \stackrel{n}{\equiv} 1.$$

Na przykład dla  $n = 1$  mamy  $W_1(x) = 1 + x$ ,  $W_2(x) = 1 - x$  oraz

$$(1 + x)(1 - x) = 1 - x^2 \stackrel{1}{\equiv} 1.$$

Przedstawimy teraz te same wielomiany w innej formie, po wymnożeniu czynników  $\phi(x^i)$  i  $\psi(x^i)$ :

$$(6) \quad \begin{aligned} W_1(x) &\stackrel{n}{\equiv} p(0)x^0 + p(1)x^1 + p(2)x^2 + \dots + p(n)x^n, \\ W_2(x) &\stackrel{n}{\equiv} 1 - \Delta(1)x^1 - \Delta(2)x^2 - \dots - \Delta(n)x^n. \end{aligned}$$

Aby uzasadnić powyższe równości, zauważmy, że przy wymnażaniu czynników  $\phi(x^i)$  w  $W_1(x)$  na wszystkie możliwe sposoby wybieramy z każdego z nich po jednym jednomianie. Każdy taki wybór, w którym iloczyn wybranych jednomianów to  $x^k$  dla  $k \leq n$ , odpowiada podziałowi liczby  $k$ , a jednomian wybrany w  $\phi(x^i)$ , dla  $i \in \{1, \dots, n\}$ , oznacza, ile wystąpień składnika  $i$  znajduje się w tym podziale. Podobnie sytuacja wygląda w przypadku  $W_2(x)$  i czynników  $\psi(x^i)$ ; tutaj jednak dochodzi jeszcze znak jednomianu, wskazujący na parzystość liczby części w odpowiadającym mu podziale.

Z równania (5) dla  $n \geq 1$  wynika, że współczynnik przy  $x^n$  w iloczynie  $W_1(x) \cdot W_2(x)$  wynosi zero. Korzystając z własności (6), możemy ten współczynnik przedstawić jako kombinację iloczynów  $p(i) \cdot \Delta(j)$ , gdzie  $i + j = n$ , w rezultacie otrzymujemy:  $p(n) \cdot 1 - p(n-1) \cdot \Delta(1) - p(n-2) \cdot \Delta(2) - p(n-3) \cdot \Delta(3) - \dots - \Delta(n) \cdot p(0) = 0$ . Stąd bezpośrednio wynika równanie (1).

### Dowód lematu kluczowego (równania (3))

W sekcji tej rozważamy tylko podziały na różne części. Dowód lematu kluczowego wymaga wprowadzenia interpretacji geometrycznej podziałów.

Podział liczby może zostać przedstawiony w postaci diagramu zwanego diagramem Ferrersa. Liczby elementów w poszczególnych wierszach diagramu odpowiadają poszczególnym składnikom  $\lambda_j$ . Diagramy Ferrersa dla przykładowych podziałów liczb 22 i 26 są przedstawione na rysunku 1. Są to bardzo szczególne podziały, które będziemy nazywać trapezowymi.

Podział trapezowy rzędu  $k$  pierwszego typu jest postaci

$$(k + k - 1, k + k - 2, k + k - 3, \dots, k),$$

a drugiego typu – postaci

$$(k + k, k + k - 1, k + k - 2, \dots, k + 1).$$

**Obserwacja.** Podział trapezowy mający  $pent(k)$  lub  $pent(k) + k$  elementów składa się z  $k$  części.

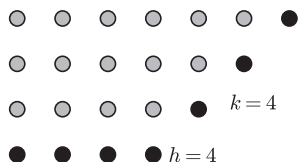
Liczbę  $n$  nazywamy liczbą trapezową, gdy istnieje podział  $n$  będący podziałem trapezowym. Dla danego  $n$  jest zawsze co najwyżej jeden taki podział. Liczby trapezowe są postaci  $pent(j)$  lub  $pent(j) + j$ .

Dla diagramu  $\pi$  (niekoniecznie trapezowego) przez  $k(\pi)$  oznaczmy liczbę elementów na prawej diagonalu, poczynając od prawego górnego elementu. Jeśli odpowiadającym podziałem jest  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ , to  $k(\pi)$  jest największą liczbą naturalną, taką że  $\lambda_i - 1 = \lambda_{i+1}$  dla  $i = 1, 2, \dots, k(\pi) - 1$ . Przez  $h(\pi) = \lambda_r$  oznaczmy długość najkrótszego wiersza diagramu.

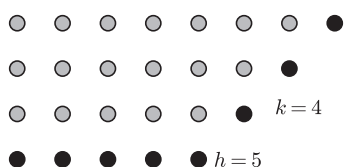
Jeśli podział  $\pi$  nie jest trapezowy oraz  $h(\pi) \leq k(\pi)$ , to  $F(\pi)$  definiujemy jako podział powstający z  $\pi$  poprzez dodanie do każdego z pierwszych  $h(\pi)$  wierszy po jednym elemencie i usunięcie najkrótszego (dolnego) wiersza, patrz rysunek 2.

Podziały o parzystej/nieparzystej liczbie części nazywamy parzystymi/nieparzystymi. Zauważmy, że funkcja  $F$  zmienia parzystość podziału.

$$n = (3k - 1)k/2 = 7 + 6 + 5 + 4$$

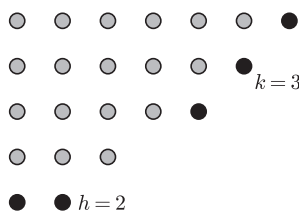


$$n = (3k + 1)k/2 = 8 + 7 + 6 + 5$$



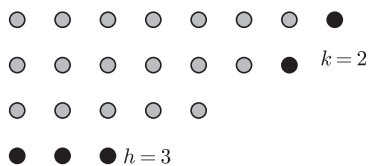
Rys. 1. Trapezy rzędu  $k$  dla  $k = 4$ . Trapez pierwszego typu ma  $pent(k)$  elementów, a drugiego typu ma  $pent(k) + k$  elementów. Podziały odpowiadające tego typu trapezom nazywamy podziałami trapezowymi.

$$23 = 7 + 6 + 5 + 3 + 2$$



↑ bijekcja

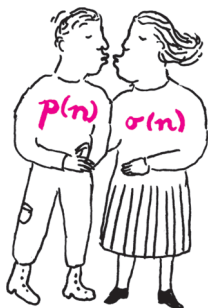
$$23 = 8 + 5 + 7 + 3$$



Rys. 2. Działanie funkcji  $F$ .

$14 + 1 \leftrightarrow 15$   
 $13 + 2 \leftrightarrow 12 + 2 + 1$   
 $12 + 3 \leftrightarrow 11 + 2 + 1$   
 $11 + 4 \leftrightarrow 10 + 4 + 1$   
 $10 + 5 \leftrightarrow 9 + 5 + 1$   
 $9 + 6 \leftrightarrow 8 + 6 + 1$   
 $8 + 7 \leftrightarrow 7 + 6 + 2$   
 $7 + 5 + 2 + 1 \leftrightarrow 8 + 5 + 2$   
 $7 + 4 + 3 + 1 \leftrightarrow 8 + 4 + 3$   
 $9 + 3 + 2 + 1 \leftrightarrow 10 + 3 + 2$   
 $8 + 4 + 2 + 1 \leftrightarrow 9 + 4 + 2$   
 $6 + 5 + 3 + 1 \leftrightarrow 7 + 5 + 3$   
 $6 + 4 + 3 + 2 \leftrightarrow 5 + 4 + 3 + 2 + 1$   
 $6 + 5 + 4$  podział trapezowy

Rys. 3. Zgrupowanie podziałów nietrapezowych liczby  $n = 15$  zgodnie z działaniem funkcji  $F$ .



Zachodzi następujący, dosyć oczywisty fakt.

**Własność funkcji  $F$ .** Funkcja  $F$  jest bijekcją między nietrapezowymi podziałami  $n$  z  $h(\pi) \leq k(\pi)$  i nietrapezowymi podziałami  $n$  z  $h(\pi) > k(\pi)$ .

Na mocy tej własności otrzymujemy:

$$(7) \quad \tilde{p}_{\text{odd}}(n) - \tilde{p}_{\text{even}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } n \text{ jest nieparzystą liczbą trapezową,} \\ -1 & \text{gdy } n \text{ jest parzystą liczbą trapezową,} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Stąd:

$$\tilde{p}_{\text{odd}}(n) - \tilde{p}_{\text{even}}(n) = e(n) \quad \text{dla każdego } n.$$

### Nieoczekiwana relacja między funkcjami $p(n)$ i $\sigma(n)$

Jako ciekawostkę podamy, bez uzasadnienia, pewien związek dwóch pozornie odległych funkcji  $p(n)$  i  $\sigma(n)$ , przy czym  $\sigma(n)$  oznacza sumę dzielników liczby  $n$  (włącznie z  $n$ ). Mamy

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\sigma(n)$	1	3	4	7	6	12	8	15	13	18	12	28	14	24	24

Dla funkcji  $\sigma$  zachodzi prawie taka sama rekurencja jak dla  $p(n)$ , jedyna różnica to zastąpienie  $p(0)$  przez  $n$  we wzorze (1):

$$(8) \quad \sigma(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta(k) \cdot \sigma(n-k) + \Delta(n) \cdot n.$$

**Przykład.** Dla  $n = 15$  mamy:

$$\begin{aligned} \sigma(15) &= \sigma(15-1) + \sigma(15-2) - \sigma(15-5) - \sigma(15-7) + \sigma(15-12) + 15 = \\ &= 24 + 14 - 18 - 15 + 4 + 15 = 24, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(15) &= p(15-1) + p(15-2) - p(15-5) - p(15-7) + p(15-12) + p(0) = \\ &= 135 + 101 - 42 - 22 + 3 + 1 = 176. \end{aligned}$$

Korzystając ze związku liczb  $\Delta(k)$  z liczbami pentagonalnymi, wszystkie wartości  $\sigma(n), \sigma(n-1), \dots, \sigma(1)$  można obliczyć, tak jak poprzednio, w czasie  $O(n\sqrt{n})$  i pamięci  $O(n)$ . Zachodzi również inny zadziwiający związek:

$$(9) \quad \sigma(n) = \sum_{k=1}^n k \cdot \Delta(k) \cdot p(n-k).$$

Jeśli  $n = \prod p_i^{m_i}$  jest rozkładem  $n$  na czynniki pierwsze, to

$$\sigma(n) = \prod (p_i^{m_i+1} - 1) / \prod (p_i - 1).$$

Wydaje się, że wyznaczanie  $\sigma$  dla wszystkich liczb  $1, 2, \dots, n$  za pomocą wzoru (8) i liczb pentagonalnych jest jednak wygodniejsze niż przy zastosowaniu ostatniego wzoru.

**Australijski matematyk** Kurt Mahler wykazał, że liczba

**0,12345678910111213141516171819202122232425262728293031323334353637383940...**  
(każdy wie, jak dalej)

nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach wymiernych. Liczby takie stanowią większość liczb rzeczywistych, ale na odkrycie pierwszej takiej liczby czekano aż do 1844 roku (Joseph Liouville). To, że liczba  $\pi$  też jest taka, udało się wykazać dopiero w 1882 roku Ferdinandowi Lindemannowi.

M. K.