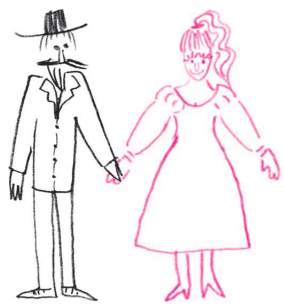
Kaskady i swaty

Przemysław KICIAK
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki,
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki,
Uniwersytet Warszawski



Często pojawiające się w matematyce zadanie polega na skonstruowaniu funkcji $f\colon A \to B$, spełniającej pewne warunki. Między innymi możemy chcieć, aby funkcja ta była różnowartościowa i „na", co gdyby miało miejsce, oznaczałoby równoliczność zbiorów A i B. Punktem wyjścia bywa inna funkcja g, która potrzebnych warunków nie spełnia, ale wystarczy ją tylko trochę zmienić.

Przypuśćmy, że mamy taką funkcję g, dla której istnieje tylko jedna para elementów $x_1 \neq x_2 \in A$, taka że $g(x_1) = g(x_2)$. Wtedy możemy wybrać $y_2 \neq y_1 = g(x_1)$ i przyjąć $f(x_1) = y_1$ i $f(x_2) = y_2$. Jeśli istnieje $x_3 \notin \{x_1, x_2\}$, takie że $g(x_3) = y_2$, to wybieramy $y_3 \in B \setminus \{y_1, y_2\}$ i przyjmujemy $f(x_3) = y_3$, itd. Przyjęcie wartości f dla pewnego x_k „strąca" przywiązanie elementu x_{k+1} do elementu y_k, będącego wartością funkcji g. Nazwiemy to **kaskadą**.

Najprostszym zastosowaniem przedstawionego wyżej sposobu jest udowodnienie, że odcinki $[0,1]$ i $(0,1]$ mają tyle samo punktów. Zaczynając od funkcji g, takiej że $g(0) = 1$ oraz $g(x) = x$ dla każdego $x > 0$, określamy funkcję f, taką że dla każdego $x_k = 1/k$, gdzie k jest liczbą naturalną, przyjmujemy $f(x_k) = x_{k+1}$, a dla każdego $x \in [0,1]$, które nie jest tej postaci, przyjmujemy $f(x) = g(x)$.

Użyjemy metody kaskadowej do udowodnienia **twierdzenia Halla**, znanego też pod nazwą twierdzenia o małżeństwach. Najpierw przypomnijmy problem.

Mamy dane dwa zbiory skończone C i D, których elementy możemy wyobrazić sobie jako chłopców i dziewczyny. Mamy wyswatać chłopców, przy czym każdy z nich ma określony zbiór kandydatek na żonę (upraszczając, powiemy, że je zna), będący podzbiorem zbioru D. Żonę, oczywiście, można mieć tylko jedną, podobnie żadna dziewczyna nie może mieć więcej niż jednego męża. Potrzebna jest zatem funkcja różnowartościowa $f\colon C \to D$, taka że każdy chłopiec x zna dziewczynę $f(x)$. Taką funkcję f nazywamy **skojarzeniem** o liczności równej liczbie chłopców n.

Znajdowanie skojarzenia jest oczywiście problemem grafowym; mamy tu graf dwudzielny, którego każda krawędź łączy chłopca i dziewczynę, którzy się znają. Skojarzenie można utożsamić z odpowiednim podzbiorem krawędzi. Twierdzenie Halla mówi, że skojarzenie o liczności n istnieje (czyli wszystkich chłopców można wyswatać) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $k \leqslant n$, k dowolnie wybranych chłopców zna w sumie co najmniej k dziewczyn.

Konieczność tego warunku (oznaczymy go $(*)$) dla istnienia skojarzenia o liczności n jest oczywista (kto nie jest tego pewny, może przypomni sobie o zasadzie szufladkowej Dirichleta). Udowodnimy, że warunek $(*)$ jest wystarczający, używając indukcji.

Jeśli $n = 1$ i chłopiec zna co najmniej jedną dziewczynę, to można go wyswatać. Przypuśćmy zatem, że $n > 1$ i twierdzenie jest prawdziwe dla $n-1$ chłopców, a ponadto dla ustalonego zbioru n chłopców warunek $(*)$ jest spełniony. Tym bardziej jest on spełniony, jeśli pominiemy jednego (dowolnego) chłopca. Możemy więc znaleźć dziewczyny dla pozostałych $n-1$ chłopców. Pary na razie zaręczamy (zaręczyny, jeśli trzeba, będzie można zerwać). Spróbujemy teraz wyswatać n-tego chłopca; utworzymy z niego zbiór jednoelementowy C_0. Niech D_1 oznacza zbiór tych dziewczyn, które n-ty chłopiec zna. Zbiór D_1 jest niepusty z uwagi na warunek $(*)$. Jeśli jedna z tych dziewczyn nie ma narzeczonego, to możemy ją zaręczyć z n-tym chłopcem. W przeciwnym razie niech C_1 oznacza zbiór chłopców zaręczonych z dziewczynami z D_1. Niech teraz D_2 oznacza zbiór tych dziewczyn, które znają chłopców ze zbioru C_1, ale nie są z nimi zaręczone.

Jeśli któraś z nich nie ma narzeczonego, to możemy znaleźć w C_1 chłopca, który ją zna, odwołać jego dotychczasowe zaręczyny i zaręczyć z tą dziewczyną. Wtedy w zbiorze D_1 pojawia się dziewczyna niezaręczona, którą można zaręczyć z n-tym chłopcem.

W przeciwnym razie kolejne zbiory C_i (chłopców zaręczonych z dziewczynami z D_i) oraz D_{i+1} (dziewczyn, które znają chłopców z C_i, ale nie są z nimi zaręczone) możemy określać podobnie. Jest jasne, że dla każdego i zbiory C_i i D_i **są równoliczne**. Jeśli dla pewnego i w zbiorze D_i znajdzie się niezaręczona dziewczyna, to zaczynając od niej, możemy utworzyć kaskadę. Zrywamy zaręczyny chłopca z C_{i-1}, który ją zna, i z nim ją zaręczamy, a jego dotychczasowa narzeczona z D_{i-1} zostanie nową narzeczoną chłopca z C_{i-2}, itd.

Jeśli nie możemy znaleźć niezaręczonej dziewczyny, to określamy kolejne zbiory chłopców i dziewczyn, ale ten proces musi się zakończyć; chłopców jest skończenie wielu, a więc dla pewnego i otrzymamy $D_i = C_i = \emptyset$. Wtedy nie możemy wszystkich chłopców wyswatać, ale to oznacza, że istnieje zbiór chłopców $C_0 \cup \ldots \cup C_{i-1}$, dla którego zbiór znanych im dziewczyn $D_1 \cup \ldots \cup D_{i-1}$ ma o przynajmniej jedną dziewczynę mniej. No i już. Choć zapewne działalność prawdziwego biura matrymonialnego jest znacznie bardziej skomplikowana.