Po co mi nieskończoność?

Jerzy TYSZKIEWICZ
Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki,
Uniwersytet Warszawski

Po to, żeby twierdzenie o pełności zachodziło.

Wiem, że po tej deklaracji nie mam wyjścia i muszę wytłumaczyć, o co chodzi.

Zajmuję się logiką. Logika dla matematyków to trochę jak gramatyka historyczna dla polonistów: nauka o języku, którym się posługują. Język ten jest złożony z formuł, będących napisami, które z kolei wyrażają własności struktur matematycznych, na przykład podzbiorów prostej (których jest nieskończenie wiele) albo algebry wartości logicznych **prawda** i **fałsz**, która jest skończona.

Jednym z najważniejszych w logice jest twierdzenie o pełności dla logiki pierwszego rzędu, które udowodnił jako pierwszy Kurt Gödel.

Orzeka ono, że każdą własność struktur matematycznych, którą da się wyrazić w logice pierwszego rzędu i która przysługuje wszystkim bez wyjątku strukturom, można także udowodnić, posługując się formalnym systemem dowodowym. Własności przysługujące wszystkim strukturom nazywa się tautologiami i można o nich myśleć jako o fundamentalnych prawach matematycznego świata, sformułowanych za pomocą sztywnego, skodyfikowanego języka logiki. Z kolei system dowodowy opiera się na ściśle określonych manipulacjach na napisach, którymi są formuły logiki, w oderwaniu od wszelkich intuicji czy odwołań do świata struktur. Formułę, dla której znajdzie się dowód w tym systemie, nazywa się twierdzeniem.

Twierdzenie o pełności mówi, że zbiory tautologii i twierdzeń są identyczne: jak coś jest prawdziwe w każdej strukturze, to ma także formalny dowód, a jak ma dowód, to jest prawdziwe we wszystkich strukturach.

Nieformalnie, matematyk ścisły formalista (tak sobie wyobrażam użytkowników systemu dowodowego) i matematyk odwołujący się do rozumienia i znaczenia formuł (powiedzmy o nim, że to matematyk platonista) tworzą i badają **tę samą** matematykę.

Kluczowe dla twierdzenia o pełności jest to, że dopuszczone są w nim także struktury nieskończone jako obiekty, których własności wyraża logika. Z twierdzenia Trachtenbrota wynika, że dla zbioru formuł prawdziwych we wszystkich strukturach skończonych (ale niekoniecznie prawdziwych w strukturach nieskończonych) nie dałoby się stworzyć stosownego systemu dowodowego. W świecie bez struktur nieskończonych drogi matematyka-formalisty i matematyka-platonisty by się rozeszły.

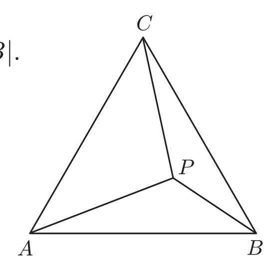
Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1390. Dany jest punkt P wewnątrz trójkąta równobocznego ABC (rys. 1). Udowodnić, że

$$|\sphericalangle PAB - \sphericalangle PAC| \geqslant |\sphericalangle PBC - \sphericalangle PCB|.$$

Rozwiązanie na str. 3



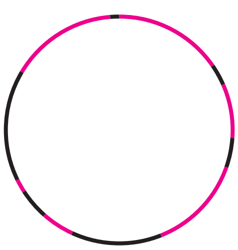
Rys. 1

M 1391. Udowodnić, że równanie

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

nie ma rozwiązania w liczbach całkowitych dodatnich.
Rozwiązanie na str. 6

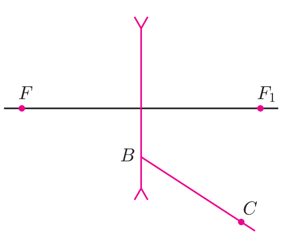
M 1392. Pokolorowano pewne odcinki okręgu o łącznej długości większej niż połowa obwodu tego okręgu (rys. 2). Udowodnić, że istnieją dwa punkty antypodyczne, tzn. symetryczne względem środka okręgu, które są pokolorowane.
Rozwiązanie na str. 13



Rys. 2

Przygotowali Andrzej MAJHOFER i Michał NAWROCKI

F 835. Na rysunku 3 przedstawiono bieg promienia BC wychodzącego z soczewki rozpraszającej, której ogniska znajdują się w punktach F i F_1. Znaleźć metodą geometryczną bieg promienia padającego na soczewkę w punkcie B.
Rozwiązanie na str. 17



Rys. 3

F 836. Podniesienie stanu wody w zbiorniku prowadzi do jej „przelania się" przez tamę. Ile razy wzrośnie masa wody przelewającej się przez tamę w jednostce czasu, jeśli poziom wody nad krawędzią tamy wzrośnie k razy? Zakładamy, że w obu przypadkach poziom wody nieznacznie przewyższa tamę.
Rozwiązanie na str. 8