Człapanie do nieskończoności

Tomasz MAŁOLEPSZY[*]

Matematyka, jak przystało na królową nauk, jest dyscypliną dość trudną i wymagającą umiejętności abstrakcyjnego myślenia. Jeżeli przyjąć za Galileuszem, że matematyka jest alfabetem, za pomocą którego Bóg opisał wszechświat, to trzeba przyznać, że jest to alfabet dość złożony i nie jest łatwo nauczyć się dobrze nim posługiwać. Jednym z jego ważniejszych elementów jest niewątpliwie nieskończoność. Próba zrozumienia nieskończoności dla człowieka, który w istocie rzeczy żyje otoczony wielkościami skończonymi (a przynajmniej takie mu się one na pierwszy rzut oka wydają), często opiera się na swoistym przeniesieniu doświadczeń czy intuicji znanych mu z jego „skończonego" świata, co zwykle kończy się niepowodzeniem. Dobrym tego przykładem są szeregi, czyli obiekty matematyczne, które (niezbyt precyzyjnie pisząc) uogólniają pojęcie sumy na przypadek nieskończenie wielu składników.

Szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ jest zbieżny, gdy istnieje skończona granica ciągu sum częściowych $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Jeżeli ciąg S_n nie ma skończonej granicy, szereg nazwiemy rozbieżnym.

Już ze szkoły średniej wiadomo, że taka uogólniona suma nieskończonej ilości dodatnich składników może być skończona (przekonuje o tym chociażby wzór na sumę składników nieskończonego ciągu geometrycznego o ilorazie q w przypadku, gdy $|q| < 1$). Gdy pojawia się zatem problem obliczenia sumy odwrotności wszystkich liczb naturalnych, czyli szeregu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, intuicja podparta wyliczeniem kilku jego początkowych sum częściowych sugeruje, że wielkość ta jest skończona, a nawet niezbyt duża. To podejrzenie wzmacnia użycie dowolnego kalkulatora czy komputera – od pewnego momentu pojawiające się na ich ekranach sumy częściowe S_n nie ulegają zmianie. Czy zatem rzeczywiście szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, zwany szeregiem harmonicznym, jest zbieżny? Otóż nie! Co więcej, nawet nietrudno to wykazać. Wystarczy w tym celu zauważyć, że pewne sumy częściowe szeregu harmonicznego łatwo oszacować z dołu w następujący sposób:

$$\begin{aligned} S_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) > \\ &> 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = \\ &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}}_{k \text{ razy}} = 1 + \frac{k}{2}, \end{aligned}$$

a otrzymane dolne oszacowanie przy $k \to \infty$ dąży przecież do nieskończoności.

Wiemy już, że szereg harmoniczny jest rozbieżny, w jaki sposób możemy jednak znaleźć liczbę składników n, dla których S_n przekroczy zadaną z góry liczbę? Próba odpowiedzi na to pytanie poprzez zwyczajne dodawanie kolejnych składników naszego szeregu nie zaprowadzi nas daleko, nawet jeśli wspomożemy się komputerem. Z pomocą przyjdzie nam, oczywiście, matematyka, a konkretnie całki. Zauważmy bowiem, że dla dowolnego $k = 2, 3, \ldots$ oraz $x \in [k-1, k)$ mamy oczywistą nierówność $\frac{1}{x} > \frac{1}{k}$, zachodzi więc również

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x > \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k},$$

a zatem

$$\int_{1}^{k} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{2} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{3} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = S_k - 1.$$

W analogiczny sposób, biorąc jako punkt wyjścia nierówność $\frac{1}{x} < \frac{1}{k}$ prawdziwą dla każdego $x \in (k, k+1]$, $k = 1, 2, \ldots$, możemy otrzymać

$$\int_{2}^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x < S_k - 1,$$

[*]Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii, Uniwersytet Zielonogórski

Przypomnijmy, że $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln b - \ln a$.

co ostatecznie prowadzi do następującego oszacowania sum częściowych S_k szeregu harmonicznego:

$$1 + \ln k > S_k > 1 + \ln(k+1) - \ln 2, \qquad k \geqslant 2. \tag{1}$$

Każdy ciąg ograniczony i monotoniczny jest zbieżny.

Co więcej, można również wykazać, że przy $k \to \infty$ istnieje skończona granica ciągu $r_k := S_k - \ln k$. Wynika to z faktu, że ciąg $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jest ściśle malejący, o czym świadczy poniższy rachunek

$$r_k - r_{k+1} = \ln(k+1) - \ln k - \frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{1}{k+1} > 0,$$

oraz ograniczony, gdyż z (1) otrzymujemy

$$1 > S_k - \ln k > 1 + \ln(k+1) - \ln 2 - \ln k > \ln \frac{k+1}{k} > 0.$$

Oznaczając jego granicę przez γ i ponownie wykorzystując monotoniczność ciągu $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ oraz (1), możemy zapisać

$$\gamma < S_k - \ln k < 1, \quad k \geqslant 2, \tag{2}$$

Ostatnia nierówność mówi nam, że w praktyce S_k dość dokładnie można przybliżyć przez $\ln k$. Stała γ pełni na tyle istotną rolę w matematyce, że otrzymała nawet swoją nazwę (nazywa się ją stałą Eulera bądź czasami stałą Eulera–Mascheroniego). W porównaniu z dwiema najsłynniejszymi stałymi, czyli e oraz π, nadal niezbyt wiele o niej wiadomo (kwestią otwartą jest chociażby to, czy γ jest liczbą algebraiczną; nie wiadomo nawet, czy jest ona liczbą wymierną).

Mówimy, że liczba rzeczywista jest *algebraiczna*, jeśli jest pierwiastkiem pewnego wielomianu o całkowitych współczynnikach.

Korzystając z (1), łatwo oszacować sumę kolejnych składników szeregu harmonicznego. I tak, na przykład, S_{100} znajduje się między $1 + \ln 101 - \ln 2 \approx 4{,}9$ a $1 + \ln 100 \approx 5{,}6$, zaś $S_{1000000}$ między 14,1 a 14,8. Podobnie łatwo oszacować, ile trzeba dodać kolejnych składników tego szeregu, aby przekroczyć ustaloną wartość. Jak Czytelnik sądzi, kiedy S_k przekroczy 100? Stanie się to, gdy dodamy mniej więcej $e^{100} \approx 10^{43}$ pierwszych składników szeregu harmonicznego. To naprawdę ogromna liczba. Nawet najszybszy polski superkomputer, Zeus, o mocy obliczeniowej równej mniej więcej $234{,}3 \cdot 10^{15}$ operacji zmiennoprzecinkowych wykonywanych na sekundę, musiałby obliczać tę sumę (przy założeniu, że dodanie dwóch kolejnych składników to jedna operacja) bez przerwy przez… około 10^{18} lat (wiek Wszechświata szacuje się raptem na 10^{10} lat)! Ta bardzo wolna rozbieżność szeregu harmonicznego jest jedną z jego wielu interesujących własności.

Inne ciekawe własności szeregu harmonicznego:

1. Oznaczmy przez $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ sumy częściowe szeregu harmonicznego. Nazywa się je *liczbami harmonicznymi*. Okazuje się, że wśród tych liczb tylko jedna, a mianowicie H_1, jest całkowita. Co więcej, również sumy postaci $\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k}$ nie dają liczb całkowitych, z wyjątkiem jednego przypadku: $m = n = 1$.

2. Równość $\sum_{k=m_1}^{n_1} \frac{1}{k} = \sum_{k=m_2}^{n_2} \frac{1}{k}$ zachodzi jedynie dla $n_1 = n_2$ i $m_1 = m_2$.

3. Jeżeli z szeregu harmonicznego usuniemy wszystkie składniki zawierające w mianowniku ustaloną cyfrę (kombinacje cyfr), to otrzymamy szereg zbieżny (wynik Kempnera z 1914 roku).

Nasuwa się naturalne pytanie: czy w klasie szeregów o dodatnich wyrazach a_n istnieją może **jeszcze** wolniej rozbieżne szeregi? Nim odpowiemy na to pytanie, musimy sprecyzować, co będziemy rozumieli pod pojęciem wolniejszej rozbieżności. Niech zatem dane będą dwa szeregi rozbieżne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ o wyrazach dodatnich. Powiemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest *wolniej rozbieżny* niż szereg $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{A_n} = 0$$

(czyli od pewnego indeksu wyrazy pierwszego szeregu będą „znacząco” mniejsze od wyrazów drugiego). Okazuje się, że w rozważanej przez nas klasie możemy konstruować szeregi tak wolno zmierzające ku nieskończoności, jak tylko chcemy. Swoistą „maszynką” do ich tworzenia jest bowiem następujące twierdzenie, pochodzące od Abela i Diniego:

Twierdzenie 1. *Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{A_n}$, gdzie $A_n = a_1 + \ldots + a_n$, również jest rozbieżny i to wolniej.*

Powyższe twierdzenie orzeka w szczególności, że nie istnieje szereg „najwolniej” rozbieżny.

Zapewne najbardziej znaną rodzinę coraz wolniej rozbieżnych szeregów tworzą

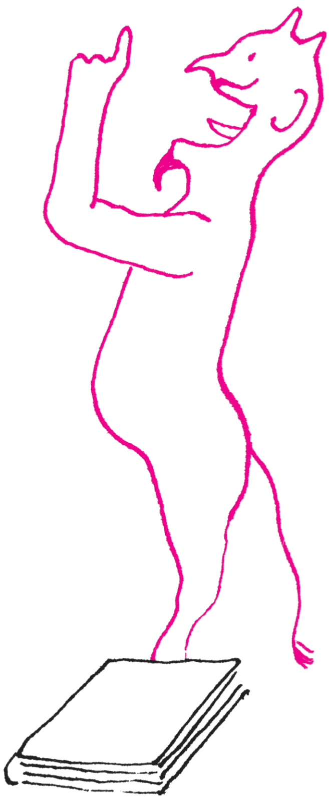
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}, \quad \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \ln k \ln(\ln k)}, \quad \sum_{k=16}^{\infty} \frac{1}{k \ln k \ln(\ln k) \ln(\ln(\ln k))}, \quad \ldots,$$

czyli, po przenumerowaniu składników, szeregi

$$\text{(S1)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)},$$

$$\text{(S2)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)\ln(k+2)\ln(\ln(k+2))},$$

$$\text{(S3)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+15)\ln(k+15)\ln(\ln(k+15))\ln(\ln(\ln(k+15)))}, \quad \ldots$$



Aby uwidocznić, jak wolno ich sumy częściowe zbiegają do nieskończoności, wystarczy ponownie przeprowadzić rozumowanie, które pozwoliło nam uzyskać wzór (2) dla szeregu harmonicznego (zauważmy, że w każdym z przypadków funkcje pod znakiem szeregu są ściśle malejące). Otrzymamy wówczas następujące oszacowania sum częściowych S_k pierwszych trzech szeregów tej rodziny, prawdziwe dla $k \geqslant 2$:

- dla szeregu (S1)

$$0{,}42816\ldots < S_k - \ln \frac{\ln(k+1)}{\ln 2} < \frac{1}{2\ln 2} \approx 0{,}72,$$

- dla szeregu (S2)

$$2{,}29992\ldots < S_k - \ln \frac{\ln(\ln(k+2))}{\ln(\ln 3)} < \frac{1}{3\ln 3 \ln(\ln 3)} \approx 3{,}23,$$

- dla szeregu (S3)

$$0{,}66941\ldots < S_k - \ln \frac{\ln(\ln(\ln(k+15)))}{\ln(\ln(\ln 16))} <$$

$$< \frac{1}{16\ln 16 \ln(\ln 16)\ln(\ln(\ln 16))} \approx 1{,}13.$$

Co z nich wynika? Przede wszystkim to, że pojęcie wolnej rozbieżności jest bardzo względne. Szereg harmoniczny, który dąży do nieskończoności w niesamowicie wolnym, wydawałoby się, tempie, przy szeregach (S1)–(S3) zdaje się do niej pędzić wręcz z zawrotną prędkością. Przykładowo, wartość 10 szereg (S1) przekroczy dopiero po dodaniu około $1{,}5 \cdot 10^{4321}$ początkowych swoich wyrazów, zaś szereg (S2) – po zsumowaniu aż $10^{0{,}7\cdot 10^{90}}$ początkowych wyrazów. Dla porównania szereg harmoniczny potrzebuje na to zaledwie 12367 składników. Co ciekawe, to „człapanie” do nieskończoności szeregów (S1)–(S3), a także pozostałych członków tej rodziny, jest tak wolne, że gdy tylko odpowiednio zmniejszymy ich składniki, czyli utworzymy nową rodzinę szeregów postaci

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)[\ln(k+1)]^{\alpha}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)\ln(k+2)[\ln(\ln(k+2))]^{\alpha}},$$

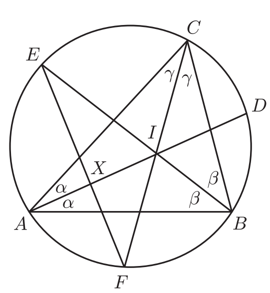
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+15)\ln(k+15)\ln(\ln(k+15))[\ln(\ln(\ln(k+15)))]^{\alpha}}, \quad \ldots,$$

dla dowolnego $\alpha > 1$, to w końcu zatrzymają się one w swym powolnym marszu ku nieskończoności i staną się zbieżne. Z jednej strony jest to na pewno zaskakujący rezultat, gdyż, na przykład, szeregi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \quad \text{i} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)[\ln(k+1)]^{1{,}0000001}}$$

nie wydają się zbytnio różnić na pierwszy rzut oka. Jednakże z drugiej strony, jak już wspomnieliśmy, nasze intuicje w zderzeniu z pojęciem nieskończoności często okazują się błędne. Jest to jednak zrozumiałe, w końcu nawet sam Abel, który był genialnym matematykiem i jak niewielu rozumiał ten „boski alfabet”, powiedział przecież, że „rozbieżne szeregi są diabelskim wynalazkiem”.

Rozwiązanie zadania M 1414.
Niech X będzie punktem przecięcia prostych AD i EF oraz $\alpha = \sphericalangle CAD = \sphericalangle DAB$, $\beta = \sphericalangle ABE = \sphericalangle EBC$, $\gamma = \sphericalangle BCF = \sphericalangle FCA$.



Z trójkąta ABC otrzymujemy $\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$. Ponadto kąty BEF i BCF są oparte na tym samym łuku, a stąd $\sphericalangle BEF = \gamma$, natomiast kąt $\sphericalangle AIE$ jako kąt zewnętrzny trójkąta ABI ma miarę $\alpha + \beta$. W takim razie $\sphericalangle XIE + \sphericalangle IEX = \alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$, więc trójkąt XEI jest prostokątny.