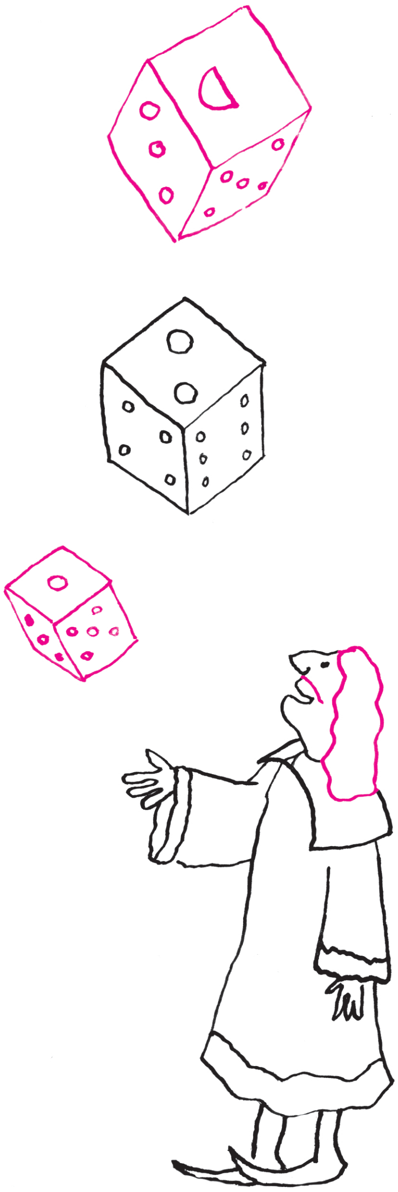
Tak bardzo oczekiwana wartość

Piotr CHRZĄSTOWSKI-WACHTEL[*]



Nazywano ją kiedyś nadzieją. Czasami dodawano przymiotnik „matematyczna”, żeby nie było nieporozumień. Chodziło bowiem o wartość oczekiwaną, czyli o pojęcie znane z rachunku prawdopodobieństwa. Słowo *nadzieja* faktycznie budziło wątpliwości, szczególnie gdy mierzono jakieś negatywnie nacechowane wielkości, jak liczba zgonów, wypadków samochodowych czy strat. Powiedzenie „nadzieja, jeśli chodzi o wysokość straty, wynosi 100 zł” brzmi zupełnie inaczej niż „wartość oczekiwana straty to 100 zł”.

Ze szkoły znamy zapewne ciekawy przypadek rzutu kostką: średnio wypada $3\frac{1}{2}$ oczka. Każdy wynik ważymy bowiem prawdopodobieństwem, z jakim się go spodziewamy – tu wszystkie prawdopodobieństwa wynoszą $\frac{1}{6}$. Łącznie mamy więc $\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 2+\frac{1}{6}\cdot 3+\frac{1}{6}\cdot 4+\frac{1}{6}\cdot 5+\frac{1}{6}\cdot 6=3\frac{1}{2}$. Ale widział kto kiedy kostkę, która tyle właśnie pokazuje? Okazuje się, że ta „typowa” wartość jest w ogóle niemożliwa. Choć jeśli wykonamy odpowiednio dużo doświadczeń i obliczymy średnią z wyników rzutów, to wyjdzie nam coś w okolicy $3\frac{1}{2}$.

Właściwie można powiedzieć, że pojęcie wartości oczekiwanej było obecne u zarania, kiedy powstawał rachunek prawdopodobieństwa. Do Błażeja Pascala zgłosił się jego znajomy, Antoni Gombaud, lepiej znany jako kawaler de Méré, z prośbą, aby rozstrzygnąć sposób podziału puli pieniędzy przy grze w kości, gdy przerwie się grę w momencie, kiedy jedna ze stron wygrywa. W skrócie rzecz biorąc, możemy założyć, że mamy prostą grę, w której z zadanym prawdopodobieństwem, przyjmijmy roboczo że 50%, jeden z graczy wygrywa. Na przykład, gracze rzucają na przemian kośćmi i rundę wygrywa ten, kto pierwszy wyrzuci parę szóstek. Pięć wygranych rund oznacza wygraną całego meczu i, niezależnie od tego, ile punktów zdobył przeciwnik, zgarnia się całą pulę.

Kawaler de Méré zadał Pascalowi pytanie, jak należało pulę podzielić, gdy jego przeciwnik miał 3, a on sam 4 punkty i grę musiano przerwać. Przeciwnik uważał, że w stosunku 3 do 4, czyli zgodnie z liczbą zdobytych punktów. Kawaler de Méré, że w stosunku 1 do 2, gdyż do wygranej jemu brakowało tylko jednego punktu, podczas gdy przeciwnikowi aż dwóch. Pascal przeprowadził rozumowanie, które dla nas dziś jest oczywiste: w połowie przypadków kolejną rundę, a zatem cały mecz wygra kawaler de Méré, a z pozostałej połowy znów połowę stanowi szansa wygrania przez niego całego meczu. Zatem łącznie kawaler de Méré miał aż trzy szanse na cztery, że wygra, podczas gdy jego przeciwnik tylko jedną. Pulę więc należałoby podzielić w stosunku 1 do 3. Zatem ani de Méré, ani jego partner nie mieli racji.

W rzeczywistości kawaler de Méré był zainteresowany innymi, bardziej złożonymi zagadnieniami. Chodziło mu o wyznaczenie takiej liczby rzutów, aby szanse na wygraną przekraczały połowę – wtedy mógł się zakładać na równych zasadach. Empirycznie doszedł, na przykład, do tego, że opłaca mu się przyjąć zakład o to, iż przy 4 rzutach kostką wypadnie co najmniej jedna szóstka. W rzeczywistości prawdopodobieństwo tego zdarzenia to prawie 52%. Nieco trudniej poszło mu z wyznaczeniem najmniejszej opłacalnej liczby rzutów dwiema kostkami tak, aby można się było założyć na równe stawki o to, że wypadną w końcu jednocześnie 2 szóstki. Wyszło mu 24, choć – jak się łatwo możemy dziś przekonać – musiał popełnić błąd (albo też miał nieco zwichnięte kości), gdyż prawdopodobieństwo sukcesu wynosi tu około 0,4914 i dopiero 25 rzutów daje przewagę. Pascal skontaktował się z innym francuskim matematykiem, Piotrem Fermatem. W rezultacie ich wspólnych dociekań powstała wymiana listów o zawartości, która uzasadnia stwierdzenie, że właśnie wtedy powstała teoria prawdopodobieństwa.

Zmienna losowa – wynalazek nieco późniejszy – to po prostu kodowanie niektórych wyników za pomocą liczb. Na przykład możemy kodować sukces przez wartość 1, a porażkę przez wartość 0. Jeżeli znamy prawdopodobieństwo sukcesu p, to możemy się spodziewać, że średnio w n doświadczeniach losowych

Rozwiązanie zadania F 863.
Podniesienie środka ciężkości człowieka o masie m na wysokość h wymaga wykonania pracy $W=mgh$, gdzie g oznacza przyspieszenie spadku swobodnego na powierzchni Ziemi. Uwolnienie się od przyciągania planetoidy o masie M i promieniu R wymaga wykonania pracy równej energii „wiązania grawitacyjnego” $E=-\mathrm{G}Mm/R=W$, gdzie G oznacza stałą grawitacji. Biorąc pod uwagę, że $\mathrm{g}=\mathrm{G}M_{\mathrm{Z}}m/R^2$ oraz związek masy kuli z jej promieniem i gęstością otrzymujemy ostatecznie

$$R_{\mathrm{Z}}h=R^2,$$

co po podstawieniu podanych wartości h i R_{Z} daje

$$R=1955\,\mathrm{m}\approx 2\,\mathrm{km}.$$

Pominęliśmy tu ograniczenie ruchów przez kombinezon kosmonauty.

[*]Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

uzyskamy pn jedynek i $(1-p)n$ zer. Wartość oczekiwana takiej dyskretnej zmiennej losowej to po prostu ważona odpowiednimi prawdopodobieństwami suma jej możliwych wyników.

Problem kawalera de Méré możemy ściśle ująć następująco. Przyjmijmy, że X_n jest taką rodziną zmiennych losowych, że dla ustalonego n wartość zmiennej X_n jest równa 1, jeśli w n kolejnych rzutach dwiema kośćmi wypadną co najmniej dwie szóstki, a 0 – jeśli nie. Pytamy się teraz o to, dla jakiego najmniejszego n wartość oczekiwana $\mathrm{E}(X_n)$ przekracza połowę. Jeśli zatem będziemy w stanie wyznaczać wartości oczekiwane $\mathrm{E}(X_n)$ dla każdego n, to zadanie to zostanie rozwiązane i wynikiem jego będzie wartość n, począwszy od której warto się zakładać o to, że dwie szóstki wypadną jednocześnie w ciągu n rzutów.

Ogólnie, jeśli prawdopodobieństwo jakiegoś zdarzenia wynosi p, a sami mamy nutkę hazardzisty oraz chętnego przeciwnika do zabawy, to mamy prostą strategię zakładania się o to, że to właśnie zdarzenie nastąpi. Załóżmy, że nasz przeciwnik jest skłonny wyłożyć pewną kwotę na zakład, iż nie uda się nam nasze doświadczenie. Postarajmy się ustalić tak nasz udział w zakładzie, aby się nam opłaciło. Dla uproszczenia przyjmijmy, że cała pula po wpłaceniu przez nas stawek ma wartość 1. Ile zatem bylibyśmy skłonni postawić w takim zakładzie? Oznaczmy tę niewiadomą stawkę przez x. Wtedy z prawdopodobieństwem p wygramy $1-x$, a z prawdopodobieństwem $(1-p)$ stracimy x. Chodzi o to, żeby bilans wyszedł dodatni, zatem mamy nierówność $p(1-x)-(1-p)x>0$. Rozwiązując ją, otrzymujemy po prostu $x<p$. Zatem jeśli postawimy mniej niż p-tą część puli przeciw $1-p$, wyjdziemy na tym dobrze, jeśli więcej, to wyjdziemy na tym źle, a jeśli postawimy dokładnie p, to zakład nie będzie faworyzował nikogo z nas. Przy długich seriach wygrana będzie oscylowała wokół zera.

Sytuacja się komplikuje, jeżeli wygrane są duże w porównaniu do prawdopodobieństw. Wyobraźmy sobie takie doświadczenie. Nasz kolega bierze dwie identyczne puszki, monetę i trochę gotówki i wychodzi do sąsiedniego pokoju. Tam rzuca monetą tak długo, aż wypadnie reszka. Notuje liczbę wykonanych rzutów n i do jednej puszki wkłada 3^{n-1} zł, a do drugiej 3^n zł. Zamyka puszki, przynosi je nam i proponuje, żebyśmy wybrali, z której puszki chcemy dostać pieniądze. Możemy jedną z nich otworzyć i przeliczyć gotówkę, a następnie albo ją wziąć, lub też „w ciemno” zdecydować się na drugą puszkę i zadowolić tym, co tam zastaniemy. Jaką strategię powinniśmy przyjąć?

Zauważmy, że uzyskanie n rzutów monetą do pierwszej reszki ma prawdopodobieństwo $\frac{1}{2^n}$, bo musi wypaść dokładnie $n-1$ orłów, a potem reszka. Jeśli widzimy, że w pierwszej puszce jest 3^k zł, to albo $k=0$ (czyli widzimy jedną złotówkę) i wtedy na pewno opłaca się zdecydować na pewne 3 zł w drugiej puszce, albo $k>0$. W tym drugim przypadku jeśli zdecydujemy się na pozostanie przy pieniądzach z pierwszej puszki, to wygramy po prostu 3^k zł. Jeśli natomiast zdecydujemy się na zmianę puszki, to możemy tam zastać albo 3^{k-1} zł, albo 3^{k+1} zł, przy czym to drugie zdarzenie będzie dwa razy mniej prawdopodobne. Para $(3^k, 3^{k-1})$ ma bowiem prawdopodobieństwo $\frac{1}{2^k}$, zaś para $(3^k, 3^{k+1})$ ma prawdopodobieństwo $\frac{1}{2^{k+1}}$. Zatem oczekiwana ilość pieniędzy w drugiej puszce to $\frac{2}{3}\cdot 3^{k-1}+\frac{1}{3}\cdot 3^{k+1}$, co jest większe niż 3^k, bo przecież już sam drugi składnik to dokładnie 3^k.

Dochodzimy do zaskakującego wniosku: zawsze się opłaca wybrać tę drugą puszkę! Ale po co w takim razie w ogóle było otwierać tę pierwszą? I która miałaby niby być ta pierwsza – przecież puszki są nierozróżnialne. Gdybyśmy chwycili najpierw tę drugą i przeliczyli pieniądze, które się tam znajdują, to też opłacałoby się zmienić decyzję? I uzyskać ostro większą wartość oczekiwaną przy zmianie decyzji z powrotem na tę pierwszą? Coś tu nie gra!

Dochodzimy tu do fenomenu znanego w probabilistyce pod nazwą *paradoksu petersburskiego*. Odkryty on został przez Daniela Bernoulliego. Odkrył on, że jeśli prawdopodobieństwa nieskończenie wielu zdarzeń będą odpowiednio duże, to wartość oczekiwana może wyjść nieskończona, mimo że w każdym doświadczeniu

Rozwiązanie zadania F 864.
Stopnienie okołobiegunowych lądolodów oznacza zmianę rozkładu masy planety, a więc także jej całkowitego momentu bezwładności, a moment pędu związany z obrotem planety nie ulegnie przy tym zmianie. Początkowy moment bezwładności wynosi

$$I_0 = 2MR^2/5 + I_p(\theta),$$

gdzie pierwszy składnik to moment bezwładności kuli, a drugi – moment bezwładności obu czap lodowych – każdej o masie $m/2$ i kącie $\theta = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$. Po stopnieniu lodu woda pokryje całą powierzchnię planety – dla uproszczenia obliczeń przyjmijmy, że tworzy na niej warstwę o grubości niezależnej od szerokości geograficznej. Końcowy moment bezwładności planety wynosi więc

$$I_k = 2MR^2/5 + I_p(180^\circ).$$

Kątowa prędkość obrotu zmieni się przy tym z ω_0 na ω_k zgodnie z zasada zachowania momentu pędu: $I_0\omega_0 = I_k\omega_k$. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\omega_k - \omega_0 = \frac{I_1 - I_0}{I_1}\omega_0 = \\ = \frac{-\cos(\theta)(1+\cos(\theta))mR^2}{3\left(\frac{2}{5}MR^2 + \frac{2}{3}mR^2\right)}\omega_0,$$

a po podstawieniu wartości liczbowych i skorzystaniu ze związku prędkości kątowej z okresem obrotu otrzymujemy, że doba zmieni się o $T_k - T_0 \approx 0{,}55$ s.

Dane liczbowe zadania odpowiadają warunkom na Ziemi, ale założony rozkład masy lądolodu i idealnie kulisty kształt powierzchni to oczywiście dosyć grube przybliżenia.

Artykuł analizujący dokładnie tę grę pojawił się w *Delcie* 7/1998.

zyskujemy jedynie skończoną wartość. Tak jest i u nas. Nawet jeśli będziemy wybierali za każdym razem pierwszą puszkę, to wartość oczekiwana wyniesie co najmniej $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{1}{8} \cdot 9 + \frac{1}{16} \cdot 27 + \ldots = \infty$. A jak będziemy kaprysili i zdecydujemy się na branie tej drugiej puszki, to nawet więcej. Zaraz, zaraz. Więcej niż nieskończoność? O ile?

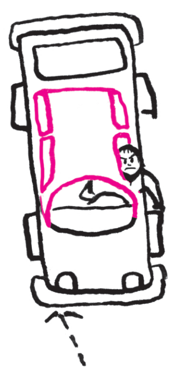
Co najmniej, gdyż w tych obliczeniach zakładamy, że mamy pecha i otwieramy zawsze tę gorszą puszkę, więc w rzeczywistości będzie nawet nieco lepiej.

No właśnie! Nieskończoności nie da się przeskoczyć. Tu mamy do czynienia z nieintuicyjnym pojęciem nieskończonej wartości oczekiwanej. W ujęciu bliskim kawalerowi de Méré po prostu mamy do czynienia z sytuacją, w której zapytani, jaką sumę bylibyśmy w stanie zapłacić, aby w taką grę sobie zagrać, powinniśmy odpowiedzieć: **każdą**. Ciekawe, że gdy psychologowie badali ten aspekt, okazało się, że ludzie nie byli tacy przekonani o opłacalności takiej gry i średnio deklarowali kilkadziesiąt zł.

Mówimy tu o wyidealizowanej sytuacji, w której zakładamy nieograniczoną wypłacalność drugiej strony – w rzeczywistości założenie niezbyt realne.

Opisywany eksperyment dotyczył nieco uproszczonej wersji, oryginalnie badanej przez D. Bernoulliego, w której nie było dwóch puszek, tylko po prostu z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2^n}$ wygrywało się 2^n zł. Łatwo sprawdzić, że wartość oczekiwana jest tu też nieskończona. W opisywanym doświadczeniu średnia wartość deklarowanej stawki do zaakceptowania przez pytanych wyniosła 25. [Ian Hacking, *Strange expectations*, Philosophy of Science 47 (1980), nr 4, 562–567.]

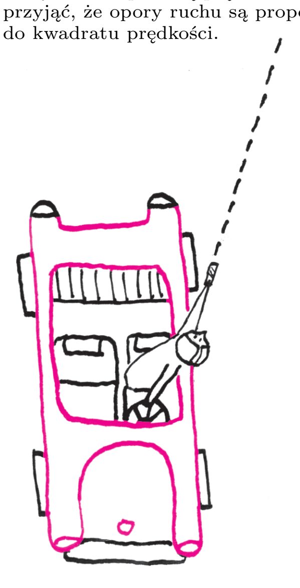
Warto dodać, że Pascal pojęcie nieskończonej wartości oczekiwanej rozumiał na wiele lat przed Bernoullim. Oparł na nim swój słynny zakład. W obliczu nieskończonej szczęśliwości w przyszłym życiu oferowanej przez Boga nie należy kombinować, tylko po prostu żyć zgodnie z przykazaniami. Żadna wartość w doczesnym, skończonym życiu nie zrekompensuje nam braku wiecznego szczęścia. Nie mówiąc już o nieskończonej ujemnej wartości oczekiwanej, jeśli przydarzyłoby się nam przegrać na Sądzie Ostatecznym. Zostawmy może te rozważania teologom, a na własny użytek raczej omijajmy kolektury Lotto, bo tam oczekiwana wartość wygranej oscyluje wokół -50% opłaconej stawki. Więc jeśli nachodzi nas chęć wykupienia losu za 3 zł, to znacznie bardziej opłacalne jest wyrzucenie do kosza przy kolekturze, na przykład, złotówki. W długiej perspektywie wyjdziemy na tej strategii lepiej.



Fuzja Bonda

James Bond jest ścigany przez niegodziwego doktora No. Samochód Bonda rozwija maksymalną prędkość $v_0 = 100$ km/h, ale samochód doktora No rozwija nieco większą prędkość $u_0 = 101$ km/h. James Bond w szkole dla szpiegów słyszał o zasadzie zachowania pędu i postanawia ją wykorzystać – zaczyna strzelać do przeciwnika. Jego samochód wpada w poślizg (pomijamy tarcie i opory ruchu) i dzięki zjawisku odrzutu przyspiesza. Sprawdźmy, ile strzałów (przyjmując, że wciąż chybia) musi oddać James Bond, żeby uciec doktorowi No? Masa pocisku jest równa $m = 10\,\mathrm{g}$, a jego prędkość wylotowa to $w_0 = 400\,\mathrm{m/s}$. Masa samochodu Bonda wraz z pasażerem i amunicją wynosi $M = 1\,\mathrm{t}$.

Jeżeli Czytelnik Praktyczny uzna, że pominięcie oporów ruchu przy prędkości rzędu 100 km/h świadczy o kompletnym oderwaniu autora od rzeczywistości, może – pamiętając o tym, że ta sama cecha dotyczy filmów o agencie 007 – obliczyć, jak często Bond musi strzelać, by utrzymać bezpieczną prędkość. Można przyjąć, że opory ruchu są proporcjonalne do kwadratu prędkości.



Niech v_1 będzie prędkością samochodu Bonda po pierwszym wystrzale. Z zasady zachowania pędu wynika

$$Mv_0 = (M - m)v_1 - m(w_0 - v_0),$$

A stąd

$$v_1 = v_0 + \frac{m}{M - m} w_0.$$

Ze względu na ogromną różnicę mas pominiemy m w mianowniku ułamka w ostatnim równaniu. Powtarzamy to rozumowanie po każdym wystrzale. Po n strzałach Bond porusza się z prędkością

$$v_n = v_0 + n \frac{m}{M} w_0.$$

Bond musi strzelać tak długo, aż jego prędkość przekroczy u_0. To daje

$$n = \left\lceil \frac{u_0 - v_0}{w_0} \frac{M}{m} \right\rceil.$$

Podstawiając dane, otrzymujemy $n = 70$. A zatem lepiej chyba oddać celny strzał albo ścigać się na znacznie lżejszych sankach.

A czy doktor No może skorzystać z metody wymyślonej przez Bonda? Oczywiście, o ile będzie strzelał do tyłu.

Krzysztof REJMER