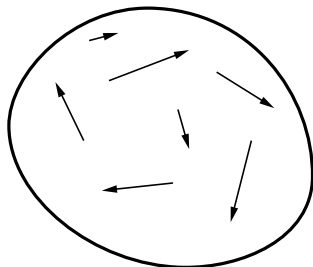


Równanie Naviera–Stokesa

Witold SADOWSKI*

Rozważmy przepływ nieściśliwego płynu w pewnym obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Załóżmy, że wiemy, jaka jest prędkość płynu w każdym punkcie obszaru, to znaczy że znamy pole prędkości, oznaczone u_0 , w chwili początkowej $t = 0$ (rys. 1). Jak będzie wyglądało pole prędkości płynu $u(t)$ w dowolnym momencie $t > 0$?



Rys. 1. Schematyczny obraz pola prędkości w chwili $t = 0$. Na podstawie znajomości prędkości w chwili początkowej powinniśmy – z wykorzystaniem równania Naviera–Stokesa – przewidywać, jaki będzie wektor prędkości w każdym punkcie obszaru Ω dla wszystkich czasów dodatnich.

Odpowiedzi na to pytanie szuka się w oparciu o równanie Naviera–Stokesa. Jest ono zapisaną formalnie regułą, która mówi, jak zmienia się w czasie prędkość płynu. Oczywiście, wektor prędkości u zależy od zmiennej przestrzennej $x \in \Omega$ oraz od czasu $t \geq 0$. Rozwiązanie równania Naviera–Stokesa z warunkiem początkowym u_0 to funkcja u , która spełnia to równanie dla czasów dodatnich i w sposób ciągły osiąga warunek początkowy dla $t = 0$.

Kłopot w tym, że do dziś nie wiemy, czy równanie Naviera–Stokesa można jednoznacznie rozwiązać dla każdego sensownego (to znaczy takiego, który ma skończoną energię) warunku początkowego u_0 . Pomimo niemal stu lat intensywnych badań tego zagadnienia nadal nie wiemy, czy rzeczywiście potrafimy przewidywać przepływ cieczy. Nie wiemy bowiem, czy początkowo ograniczone i gładkie pole prędkości może w pewnej chwili wybuchnąć, czyli osiągnąć w pewnym punkcie x obszaru Ω nieskończoną wartość, jednocześnie cały czas ewoluując do tego momentu zgodnie z równaniem Naviera–Stokesa. Jest to sytuacja krępująca: ciężko bowiem się przyznać, że nie potrafimy rozstrzygnąć, czy podstawowy model w hydrodynamice ma sens...

Składniki równania. Równanie Naviera–Stokesa to w zasadzie II zasada dynamiki Newtona ($F = ma$) zastosowana do płynu. Mówi ono, że wpływ na tempo T , w jakim w danym punkcie zmienia się prędkość płynu, mają cztery składniki:

- A – „dyfuzja” prędkości, czyli swego rodzaju uśrednianie prędkości (proces podobny do tego, gdy barwnik dyfunduje w wodzie i ostatecznie jednorodnie zabarwia szklankę);
- B – „unoszenie” prędkości płynu, czyli konwekcja (tzw. składnik nieliniowy);
- C – siły związane z ciśnieniem (tzw. gradient ciśnienia);
- D – siły zewnętrzne (np. grawitacja).

W dalszym ciągu pominiemy siły zewnętrzne, przyjmując $D = 0$. Równanie Naviera–Stokesa można więc wtedy zapisać w nieco naiwny sposób jako

$$T + A + B + C = 0,$$

lub bardziej konkretnie, z użyciem odpowiednich symboli:

$$(1) \quad u_t - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0.$$

W powyższym wzorze liczba ν mierzy lepkość płynu (tzn. to, czy jest on bardziej podobny do miodu czy do wody), a pozostałe symbole związane są z różniczkowaniem. W związku z tym konieczna jest pewna uwaga.

Do zrozumienia tego tekstu nie jest konieczne rozumienie powyższych symboli. Czytelnicy, którzy z pochodnymi cząstkowymi nie mieli dotąd do czynienia, mogą spokojnie ignorować zapis formalny i czytać sam tekst, spoglądając na symbole jak na graficzne identyfikatory pojęć, których sens zostanie wyjaśniony poniżej bez technicznych zawiłości.

Równanie (1) uzupełniane jest pewnymi dodatkowymi założeniami:

- w chwili $t = 0$ pole prędkości jest równe $u_0(x)$,
- prędkość u jest równa zeru na brzegu obszaru Ω ,

Gradient ciśnienia to wektor wskazujący, w którym kierunku ciśnienie wzrasta najszybciej i którego długość jest proporcjonalna do tempa zmiany ciśnienia.

Dla Czytelników, którzy pochodne cząstkowe znają: u_t oznacza pochodną względem czasu, przez Δu oznaczamy wektor $(\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)$, gdzie

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

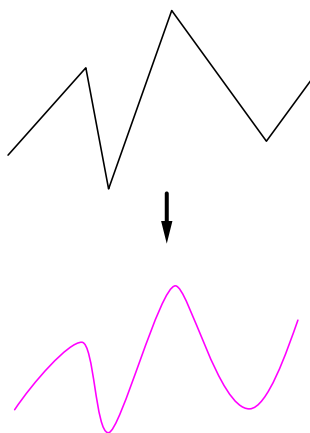
Ponadto przez $(u \cdot \nabla)u$ oznaczamy wektor, którego i -ta współrzędna jest równa sumie

$$u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3}.$$

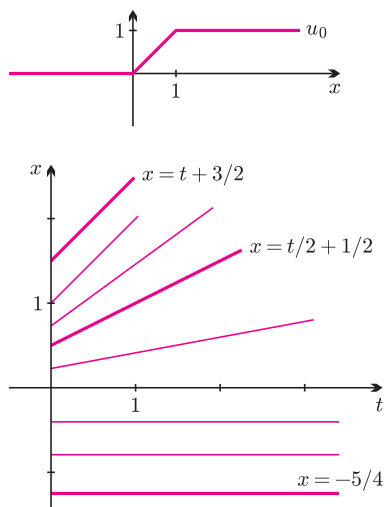
*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Formalnie nieściśliwość oznacza, że dywergencja prędkości u jest równa zeru:

$$\operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0.$$



Rys. 2. Schematyczny obraz działania laplasjanu: wygładzanie rozwiązań z upływem czasu.



Rys. 3. Rozwiązujemy równanie Burgersa.

- Startujemy z punktu $(0, -5/4)$. Mamy $u_0(-5/4) = 0$, więc rysujemy z punktu $(0, -5/4)$ prostą o współczynniku kierunkowym zero. Na tej prostej wartość u jest równa zeru.
- Startujemy z punktu $(0, 1/2)$. Mamy $u_0(1/2) = 1/2$, więc rysujemy z punktu $(0, 1/2)$ prostą o współczynniku kierunkowym $1/2$. Na tej prostej wartość u jest równa $1/2$.
- Startujemy z punktu $(0, 3/2)$. Mamy $u_0(3/2) = 1$, więc rysujemy prostą z punktu $(0, 3/2)$ o współczynniku kierunkowym równym 1 . Na tej prostej wartość u jest równa 1 .

– płyn jest nieściśliwy; oznacza to, że do dowolnej kulki w Ω tyle samo płynu wpływa, co wypływa. Pole prędkości zwane jest wtedy bezźródłowym (bezdwywergentnym).

Trzech bohaterów. Na równanie Naviera–Stokesa można patrzeć jak na bitwę, w której chodzi o to, czy pierwszy składnik równania (pochodna czasowa u_t), a wraz z nią sama prędkość u , ucieknie czy też nie ucieknie do nieskończoności. Walka ta rozgrywa się między trzema pozostałymi „osobami”:

- bohaterem pozytywnym (czyli laplasjanem: $-\Delta u$),
- nieliniowym złoczyńcą: $(u \cdot \nabla)u$ oraz
- „niewidzialnym rozgrywającym” (gradientem ciśnienia: ∇p).

Żeby zatem głębiej zrozumieć, co się dzieje w tym równaniu, dlaczego jest ono tak kłopotliwe i dlaczego kolejne składniki zostały tak a nie inaczej nazwane, spróbujmy lepiej zrozumieć charakterystyki głównych postaci.

Bohater pozytywny. Aby wyjaśnić, dlaczego większość matematyków sądzi, że laplasjan poprawia regularność rozwiązań równania Naviera–Stokesa, przyjrzyjmy się równaniu, w którym występuje tylko pochodna względem czasu i sam laplasjan (przyjmujemy $\nu = 1$):

$$u_t - \Delta u = 0$$

z warunkiem początkowym $u(0, x) = u_0(x)$. Jest to tzw. równanie przepływu ciepła (tym razem u oznacza zwykłą funkcję o wartościach rzeczywistych, a nie pole wektorowe), które opisuje, jak zmienia się w czasie temperatura w obszarze, w którym początkowy rozkład temperatury jest dany przez funkcję u_0 . Okazuje się, że nawet gdy funkcja u_0 nie jest zbyt gładka, to funkcje $u(t)$, opisujące rozkład temperatury w czasie $t > 0$, natychmiast stają się niezwykle regularne i gładkie. Ma to związek z efektem uśredniania (charakterystycznym dla dyfuzji), który ostatecznie prowadzi do tego, że rozwiązania $u(t)$ z upływem czasu coraz bardziej upodobniają się do funkcji harmonicznej, to znaczy takiej, która jest ciągła (tak naprawdę gładka) i ma własność wartości średniej: jej średnia wartość w dowolnej kulce jest równa jej wartości w środku kulki. Bliższa analiza pokazuje też, że laplasjan wypompuje energię z układu tym szybciej, im większe są różnice temperatury (w przypadku równania Naviera–Stokesa: różnice prędkości) i co więcej, dużo szybciej pozbywa się energii ze skal mikroskopijnych niż z tych dużo większych. To przeciwdziała dzikim oscylacjom w małych skalach i wygładza rozwiązanie.

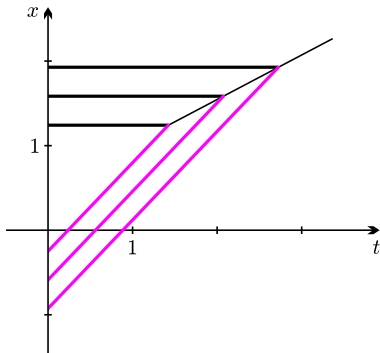
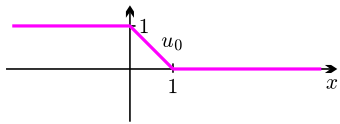
Nieliniowy złoczyńca. W przeciwieństwie do laplasjanu składnik nieliniowy $(u \cdot \nabla)u$ podejrzewany jest przynajmniej o próby (być może nieskuteczne) doprowadzenia prędkości do wartości nieskończonej. Jak się to dzieje? Spójrzmy na równanie, jakie otrzymujemy z równania Naviera–Stokesa po wyrzuceniu laplasjanu

$$u_t + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0,$$

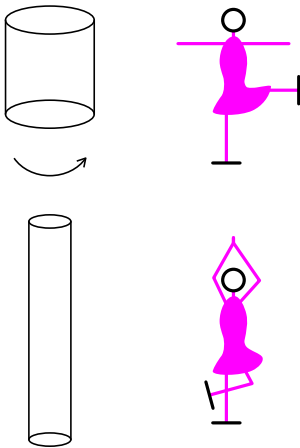
przyjmując warunek początkowy $u(0, x) = u_0(x)$. Ponieważ nadal wymagamy, by u opisywało przepływ nieściśliwy ($\operatorname{div} u = 0$), to powyższe równanie (zwane równaniem Eulera) jest, z grubsza biorąc, tak samo słabo poznane jak równanie Naviera–Stokesa. Dokonajmy jednak kolejnego uproszczenia: zapomnijmy o warunku przepływu bezźródłowego, a ponadto dla pełnego uproszczenia rozpatrzmy przypadek jednowymiarowy (dla zmiennej przestrzennej). Wówczas $(u \cdot \nabla)u$ to po prostu uu_x i dostajemy:

$$u_t + uu_x = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

Takie równanie (zwane równaniem Burgersa) ma dość niepokojące własności. Jakiego rodzaju są to kłopoty, można zrozumieć nawet bez znajomości pochodnych cząstkowych. Istnieje bowiem prosty algorytm rozwiązywania równania Burgersa, gdy tylko ma ono gładkie, regularne rozwiązanie. Robi się to tak. Bierzymy jakikolwiek punkt $(0, b)$ na osi $t = 0$. Patrzymy teraz, jaka jest wartość funkcji u_0 dla $x = b$. Jeśli jest ona równa a ,



Rys. 4. Dla innego warunku początkowego dochodzimy do sprzeczności: na liniach ukośnych wartość funkcji musi być równa 1, a na poziomych – zero. Niestety, linie się zderzają i nawet wygładzenie warunku początkowego nic na to pomóc nie może. . . Jak zatem określać rozwiązanie w spornych punktach? Gdzie ma przebiegać linia skoku (fala uderzeniowa)? I czy takie nieciągłe rozwiązania mają w ogóle sens?



Rys. 5. Zwęźnianie wiru.

Na przykład sinus i kosinus są do siebie prostopadłe na odcinku $(0, \pi)$, bowiem ich iloczyn jest równy $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$, a średnia $\sin 2x$ na $(0, \pi)$ jest równa zero.

to kreślimy prostą wychodzącą z punktu $(0, b)$, która ma współczynnik kierunkowy a , czyli równanie $x = at + b$. Na wykreślonej prostej definiujemy wartość funkcji u jako liczbę a . Jeśli teraz pokryjemy takimi prostymi całą półpłaszczyznę $t \geq 0$, to problem jest rozwiązany, bo każdy punkt (x, t) dla $t \geq 0$ ma określoną wartość funkcji u . Jak to działa na konkretnym przykładzie, można zobaczyć na marginesie (rys. 3). Okazuje się jednak, że dla bardzo wielu warunków początkowych (nawet zupełnie gładkich) nie da się znaleźć rozwiązania ciągłego u określonego dla wszystkich czasów $t > 0$. Tworzą się bowiem tzw. fale uderzeniowe jak na rysunku 4. W ten sposób widzimy, że spokrewnione z równaniem Naviera–Stokesa równanie, które zawiera podobny składnik nieliniowy, dla niektórych warunków początkowych zachowuje się dobrze, a dla innych warunków początkowych na pewno nie daje globalnych w czasie i gładkich rozwiązań (bez względu na to, czy u dla $t = 0$ jest gładkie).

Są też inne przyczyny, dla których składnik nieliniowy ma złą sławę: odwrotnie niż laplasjan pompuje energię ze skal większych do mniejszych, a ponadto z fizycznego punktu widzenia jest on związany z efektem zwęźniania wiru. Efekt ten polega na tym, że jeśli walec wodny wiruje wokół osi i jego promień ulega zmniejszeniu, to prędkość wirowania silnie wzrasta, tak jak w przypadku łyżwiarki robiącej piruet z otwartymi ramionami, która nagle ramiona zbliża do siebie (rys. 5). Czy podobnie może dojść do wybuchu prędkości w przepływie płynu?

Niewidzialny rozgrywający. Wielu osobom wydaje się, że cały kłopot z równaniem Naviera–Stokesa polega właśnie na starciu składnika nieliniowego z laplasjanem. Część fizyków podejrzewa, że zmniejszając lepkość ν , czyli osłabiając laplasjan względem składnika nieliniowego, można doprowadzić do wybuchów rozwiązań. Czy jednak tylko o starciu laplasjanu ze składnikiem nieliniowym tu chodzi?

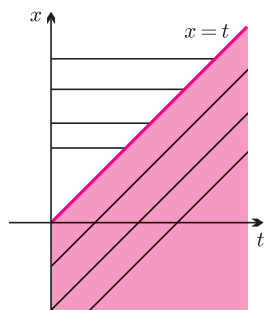
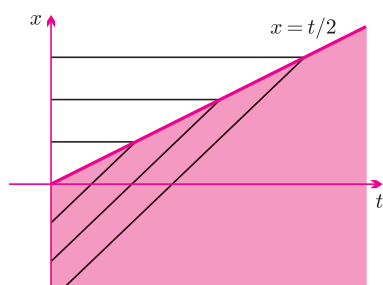
Problem w tym, że równanie z pominiętym gradientem ciśnienia:

$$u_t - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u = f,$$

i w konsekwencji z jednocześnie *ominiętym* warunkiem bezdywergencyjności pola u , ma zupełnie dobre własności: rozwiązania są ograniczone, o ile tylko f jest ograniczona! Wykazali to Andriej Kisieliov oraz Olga Ładyżeńska w 1957 r. W przypadku równania Naviera–Stokesa gradient ciśnienia pełni niejako rolę funkcji f z równania badanego przez Kisieliova i Ładyżeńską. Gdybyśmy zatem wiedzieli, że gradient ciśnienia nie wybucha, to moglibyśmy wnioskować, że u też nie. . . Niestety, nic takiego o ciśnieniu nie wiemy. Widać zatem, że o składniku ∇p można mówić jak o kluczowej postaci równania Naviera–Stokesa. *It is all about pressure. . .* – jak mawia wielu matematyków zajmujących się tym tematem.

Dlaczego jednak ciśnienie nazwaliśmy postacią niewidzialną? Otóż gradient ciśnienia i prędkość u należą do wzajemnie prostopadłych przestrzeni funkcyjnych. Dla części Czytelników może to brzmieć dziwnie, że dwie funkcje są do siebie prostopadłe, ale jest to zupełnie sensowne uogólnienie pojęcia zwykłej prostopadłości wektorów: dwa wektory są prostopadłe, gdy ich iloczyn skalarny jest równy zero, dwie funkcje są prostopadłe, gdy średnia ich iloczynu w przestrzeni jest równa zero. To właśnie z powodu owej ortogonalności (prostopadłości) gradientu i funkcji z zerową dywergencyją (tzn. pola bezźródłowego) w większości sformułowań równania Naviera–Stokesa spotykanych w fachowych artykułach ciśnienie po prostu znika, bo równanie rzutuje się od razu tylko na tę podprzestrzeń, w której „żyje” rozwiązanie u .

Słabe rozwiązania. W badaniach nad równaniem Naviera–Stokesa przełomowe znaczenie miała praca francuskiego matematyka Jeana Leraya z 1934 r. Leray pokazał, że dla każdego sensownego warunku początkowego u_0 można skonstruować tzw. „słabe” rozwiązania u dla wszystkich czasów $t > 0$. Co to znaczy, że rozwiązanie jest „w słabym sensie”? Mówiąc swobodnie, znaczy



Rys. 6. Rozważmy równanie Burgersa z warunkiem początkowym u_0 równym 1 dla x ujemnych i 0 dla x dodatnich. Linie, na których określamy wartość funkcji (zero lub jeden), przecinają się. Ale można zdefiniować słabe rozwiązanie – także za pomocą funkcji testowych. Okazuje się, że u zdefiniowane jak na górnym rysunku (obszar zacieniowany to wartość u równa 1) wszystkie testy przechodzi, a to na rysunku dolnym – nie. Górne jest zatem słabym rozwiązaniem, a dolne nie jest. Widzimy też, że definicja słabego rozwiązania wyznacza w tym przypadku, jak porusza się fala uderzeniowa.

Żeby uniknąć mówienia o całkach, opowiadamy w tym artykule o średnich wartościach. Dlatego o obszarze Ω zakładamy tu, że jest ograniczony i ma objętość 1.

to, że spełnia ono pewną nieskończoną serię testów, które każde „prawdziwe”, regularne rozwiązanie by spełniało. Może się jednak zdarzyć, że pewna funkcja wszystkie te testy przechodzi, a jednak nie spełnia równania w sensie zwykłym. Jest to sytuacja trochę podobna do zdawania matury: każdy w pełni dojrzały matematyk zaliczy serię wymaganych przez nią testów, ale nie jest prawdą, że każdy, kto maturę zaliczy, jest od razu dojrzałym matematykiem.

Spróbujmy dokładniej wytłumaczyć, jakie testy przechodzi słabe rozwiązanie określone na odcinku czasu $[0, T]$. Standardowy test wygląda następująco. Bierzemy dowolną, ale bardzo gładką funkcję wektorową $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, która znika przy brzegu Ω oraz znika dla czasów bliskich $t = 0$ i $t = T$, a także ma zerową dywergencję. Następnie mnożymy przez nią równanie (1), otrzymując:

$$u_t \cdot \varphi - \Delta u \cdot \varphi + (u \cdot \nabla)u \cdot \varphi + \nabla p \cdot \varphi = 0.$$

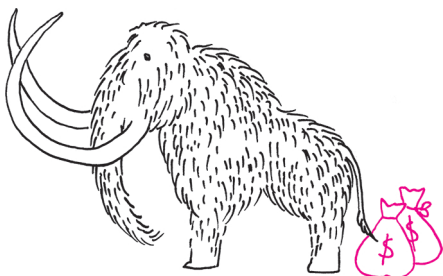
Dla każdego z czterech składników liczymy teraz jego średnią po całej czasoprzestrzeni. Suma tych czterech średnich też, oczywiście, musi być równa zero. Kiedy jednak liczymy średnie, to pewne prawa rachunku całkowego (całkowanie przez części) pozwalają nam przetrząść pochodne na gładką funkcję testującą. To znaczy: gdyby u było prawdziwym gładkim rozwiązaniem, to obliczenie np. średniej iloczynu $u_t \cdot \varphi$ byłoby tym samym, co obliczenie średniej iloczynu $-\varphi_t \cdot u$. Ta ostatnia średnia istnieje może nawet wtedy, gdy samej funkcji u różniczkować się nie da. I na tym właśnie polega pomysł nieskończonej serii testów: pochodne zostają przetrzucone na funkcję próbną, która jest na tyle gładka, że takie różniczkowania zniesie bez problemu, nawet gdyby nasze „słabe rozwiązanie” udźwignąć ich nijak nie mogło. Następnie sprawdzamy, czy suma średnich (obliczonych po odpowiednim przetrzuceniu pochodnych na φ) nadal jest równa zero. Jeśli tak, to test jest zaliczony. Słabe rozwiązanie u spełnia *każdy* taki test. Czy jednak można na nie z powrotem przetrząść pochodne? Gdyby tak było, to w konsekwencji u musiałoby być też rozwiązaniem klasycznym. Ale czy tak jest, nie wie nikt.

Trzy klasyczne wyniki. Skoro zapoznaliśmy się z grubsza z pojęciem słabego rozwiązania, to możemy teraz podać trzy najbardziej fundamentalne wyniki dotyczące równania Naviera–Stokesa. Obecnie wiemy, że:

- rozwiązania słabe istnieją globalnie w czasie, tzn. są określone dla wszystkich $t \geq 0$; można je też tak skonstruować, że ich energia (czyli, z grubsza biorąc, średnia $\frac{1}{2}|u|^2$) maleje w czasie, a warunek początkowy jest przyjmowany w tym sensie, że energia pola $u(t) - u_0$ dąży do zera, gdy $t \rightarrow 0^+$; nie jest jednak obecnie wykluczone, że różne metody konstrukcji słabych rozwiązań prowadzą do różnych słabych rozwiązań dla tego samego $u_0 \dots$;
- rozwiązania klasyczne (czyli takie, które po prostu w zwykły sposób spełniają równanie) istnieją lokalnie w czasie: jeśli tylko warunek początkowy nie jest zbyt „dziki” (tzn. gdy średnia $|\nabla u|^2$ jest skończona), to przynajmniej na pewnym odcinku czasu $[0, T)$ można skonstruować gładkie rozwiązanie;
- jeśli warunek początkowy jest bardzo mały (np. w tym sensie, że średnia $|\nabla u|^2$ jest odpowiednio mała), to rozwiązania klasyczne istnieją globalnie w czasie (czyli dla każdego $t > 0$).

Wiemy też, że rozwiązania klasyczne są zawsze jednoznaczne (nie można mieć dwóch różnych rozwiązań klasycznych dla tego samego u_0).

Słoń Edrissa Titiego. Edriss Titi, jeden z bardziej znanych badaczy równania Naviera–Stokesa, zwykł mawiać, że równanie to jest jak słoń czy też mamut, którego ludzie chcą pokonać, ale wciąż nie potrafią. Zamiast więc mamuta w pełni zwyciężyć, dokonują różnych sztuczek: a to złapią go za ucho, a to pobują się na ogonie, to znów ugoda go w nogę. Metaforę Titiego należy, oczywiście, traktować z pewnym dystansem, ale faktem jednak jest, że w ciągu wielu lat badań udało się dokonać wielu matematycznych „sztuczek”. Wykazano na przykład, że:



- jeśli dochodzi do wybuchu, to i tak zbiór czasów, w jakim słabe rozwiązanie wybucha, jest mały: dla dowolnego $\varepsilon > 0$ można go przykryć serią odcinków o długościach $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ o tej własności, że $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i^{1/2} < \varepsilon$ (czyli tzw. wymiar Hausdorffa zbioru czasów osobliwych nie jest większy od $1/2$); wiedział to już w pewnej formie Leray w 1934 r.;
- zbiór punktów w czasoprzestrzeni, w których być może dochodzi do wybuchu, też jest mały (jego wymiar Hausdorffa nie jest większy niż 1 – to wynik Caffarelliego, Kohna i Nirenberga z 1982 r. w oparciu o wcześniejsze pomysły Scheffera z lat 70.);
- danemu słabemu rozwiązaniu odpowiada sensowny zespół trajektorii cząstek (trajektorii Lagrange’a); to wynika z pracy Foiasa, Guillope i Temama z 1985 r.

Faktów podobnej wagi można podać jeszcze co najmniej kilkanaście. A jednak problem główny pozostaje otwarty i nie bardzo wiadomo, jak te częściowe wyniki nas do jego pokonania zbliżają...

Milion dolarów. Równanie Naviera–Stokesa opisujące przepływ w obszarze trójwymiarowym stało się w ostatnich latach dodatkowo sławne, bowiem zawarto je na liście tzw. siedmiu problemów milenijnych (wytypowanych jako najważniejsze problemy otwarte w matematyce). Żeby przemówić do wyobraźni osób spoza branży, ufundowano konkretną i łatwą do zrozumienia nagrodę w wysokości miliona dolarów za rozwiązanie któregośkolwiek z tych siedmiu problemów. W ten sposób równanie Naviera–Stokesa stało się obecne w tzw. kulturze masowej, co prowadzi czasami do nieoczekiwanych efektów. Na przykład niedawno „eksperti” rozmaitych portali poinformowali opinię publiczną o „geniuszu z Kazachstanu”, który „rozwiązał zagadkę za milion dolarów”. Niestety, w dowodzie Mukhatarbaja Otelbajewa po kilku tygodniach znaleziono błąd. Było jednak dość emocjonująco: w poszukiwaniu pomyłki brało udział wielu matematyków, ostatecznie kontrprzykład (ulepszony potem przez Terrence’a Tao) został podany przez użytkownika o nicku „sup” na jednym z rosyjskojęzycznych portali matematycznych. Wydaje się obecnie, że dowodu Otelbajewa nie da się uratować. Tego rodzaju zdarzenia trafiają się od czasu do czasu, np. w roku 2006 Penny Smith ogłosiła, że ma dowód i nieostrożnie udzieliła na ten temat wywiadu dziennikarce *Nature*. Potem okazało się, że choć sama praca poświęcona równaniu Naviera–Stokesa nie zawierała bezpośrednio błędu, to jednak opierała się na poprzedniej błędnej pracy autorki.

Pomimo zatem tysięcy prac na ten temat, pomimo wysiłków setek matematyków problem regularności rozwiązań Naviera–Stokesa wciąż czeka na ostateczne rozstrzygnięcie. A przecież od momentu podania tych równań przez francuskiego inżyniera Claude-Louisa Naviera w 1822 roku i ich bardziej ścisłego wyprowadzenia przez George’a Gabriela Stokesa w 1845 roku minęło już całkiem dużo czasu...

Sformułowanie problemu milenijnego zostało podane przez Charlesa Feffermana dla przypadku przepływu w obszarze Ω bez brzegu, to jest w całej przestrzeni lub na kostce z okresowymi warunkami brzegowymi. Oczywiście problem dotyczył przepływu w obszarze trójwymiarowym, bo problem przepływu w obszarze dwuwymiarowym został dawno już rozwiązany (nie ma wybuchów w wymiarze 2) przez Olgę Ladyżeńską.



Rozwiązanie zadania M 1442.

Udowodnimy indukcyjnie, że dla $n \geq 3$

$$\frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12} - \frac{1}{2n(n+1)}.$$

Dla $n = 3$ nasza nierówność przyjmuje postać $\frac{1}{27} < \frac{1}{12} - \frac{1}{24} = \frac{1}{24}$. Załóżmy, że nierówność jest prawdziwa dla $n - 1$, gdzie $n \geq 4$. Wówczas

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{(n-1)^3} \right) + \frac{1}{n^3} &< \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2(n-1)n} \right) + \frac{1}{n^3} = \\ &= \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2n(n+1)} \right) + \frac{1}{n^3} - \left(\frac{1}{2n(n-1)} - \frac{1}{2n(n+1)} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2n(n+1)} \right) + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n(n-1)(n+1)} < \\ &< \frac{1}{12} - \frac{1}{2n(n+1)}, \end{aligned}$$

co dowodzi prawdziwości nierówności dla n . W takim razie nierówność jest spełniona dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$.