Niewymieniależność

Łukasz RAJKOWSKI

Wyobraź sobie, Czytelniku, że na skutek wieloletnich ćwiczeń i poznania kilku szulerskich sztuczek udało Ci się zwiększyć swoje szanse na wygraną w grze blackjack do $\frac{4}{5}$. Kuszony wizją bajecznego bogactwa w końcu zdecydowałeś się odwiedzić kasyno, by tam spożytkować swoje niesamowite umiejętności. Z miną zawodowego pokerzysty przysiadłeś się do odpowiedniego stolika i zacząłeś grać. Oznaczmy przez $X_1, X_2, \ldots$ wyniki kolejnych gier, tzn. X_k wynosi 1, jeśli w k-tej grze odniosłeś sukces oraz 0 w przeciwnym przypadku. W naszych rozważaniach przyjmiemy, że zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są *niezależne*, co w tym prostym przypadku oznacza dokładnie tyle, że dla dowolnego zero-jedynkowego ciągu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zachodzi

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = x_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_n = x_n),$$

co, uwzględniwszy Twoje nadludzkie zdolności gry w blackjacka, pozwala nam stwierdzić, że

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \left(\frac{4}{5}\right)^{s_n} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-s_n},$$

gdzie $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Zauważmy, że zgodnie z powyższą równością prawdopodobieństwo uzyskania dowolnego skończonego ciągu wyników w kolejnych grach nie zależy od kolejności, w jakiej te wyniki zostaną ustawione – innymi słowy, dla dowolnej permutacji σ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ zachodzi

$$\mathbb{P}(X_1 = x_{\sigma(1)}, X_2 = x_{\sigma(2)}, \ldots, X_n = x_{\sigma(n)}) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n).$$

Własność tę nazywamy *wymienialnością* (ang. *exchangeability*) ciągu zmiennych $X_1, X_2, \ldots$. Ciąg wyników niezależnych powtórzeń dowolnego doświadczenia stanowi zatem ciąg wymienialny, jak się jednak zaraz okaże, nie jest to jedyna sytuacja, w jakiej możemy tę cechę zaobserwować.

Blackjack jest kasynowym odpowiednikiem polskiej gry karcianej oczko. Jako gra kasynowa daje, oczywiście, nieznaczną przewagę krupierowi.

W przypadku zmiennych losowych o dowolnym rozkładzie wymienialność definiuje się jako niezależność rozkładu wektora $(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(n)})$ od wyboru permutacji σ.

Załóżmy bowiem, że krupier – zaniepokojony Twoimi nadspodziewanie dobrymi rezultatami w blackjacku – zaproponował następujące urozmaicenie rozrywki. Tym razem masz rozpocząć grę od wyboru jednej z dwóch pozornie identycznych talii, przy czym jedna z nich jest zupełnie uczciwa, a druga – przeznaczona dla gości specjalnych – niezupełnie, co objawia się zmniejszeniem Twoich szans na wygraną do $\frac{1}{5}$. Abstrahując od absurdalności opisanej sytuacji, przypuśćmy, że zdecydowałeś się przystać na ofertę krupiera. Zauważmy, że tym razem opisane w poprzednim akapicie zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są zależne – intuicyjnie można się w tym miejscu powołać na fakt, że przegrana w pierwszej grze wpłynie na Twoją ocenę szans wygranej w drugiej grze (każe Ci bowiem przypuszczać, że wybrałeś nieuczciwą talię), a takie wnioskowanie nie może mieć miejsca przy zmiennych niezależnych. Mamy jednak w tej sytuacji do czynienia z *warunkową niezależnością* – jeśli bowiem mielibyśmy pracującego w kasynie przyjaciela, który zdradziłby nam, czy wybraliśmy uczciwą talię, to żadna informacja o dotychczasowym przebiegu naszych zmagań nie wpłynęłaby na ocenę szans na sukces w przyszłych rozgrywkach. Istotnie, jeśli przyjaciel opisał talię jako uczciwą, to nawet gdybyśmy doświadczyli 10 przegranych pod rząd, nasze szanse na powodzenie w 11 rozgrywce wciąż ocenialibyśmy na $\frac{4}{5}$ (o ile jeszcze nie zaczęliśmy się zastanawiać, czy aby na pewno nasz przyjaciel jest naszym przyjacielem). Jeśli więc przez Θ oznaczymy naszą szansę na sukces przy grze wybranymi kartami ($\Theta = \frac{4}{5}$ dla uczciwej talii, w przeciwnym przypadku $\Theta = \frac{1}{5}$), to dla dowolnej liczby naturalnej n oraz permutacji σ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ możemy zapisać

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_1 = x_{\sigma(1)}, \ldots, X_n = x_{\sigma(n)}) = \\
&\quad = \mathbb{P}\big(X_1 = x_{\sigma(1)}, \ldots, X_n = x_{\sigma(n)} \,\big|\, \Theta = \tfrac{1}{5}\big) \cdot \mathbb{P}\big(\Theta = \tfrac{1}{5}\big) + \\
&\quad\quad + \mathbb{P}\big(X_1 = x_{\sigma(1)}, \ldots, X_n = x_{\sigma(n)} \,\big|\, \Theta = \tfrac{4}{5}\big) \cdot \mathbb{P}\big(\Theta = \tfrac{4}{5}\big) = \\
&\quad = \mathbb{P}\big(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n \,\big|\, \Theta = \tfrac{1}{5}\big) \cdot \mathbb{P}\big(\Theta = \tfrac{1}{5}\big) + \\
&\quad\quad + \mathbb{P}\big(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n \,\big|\, \Theta = \tfrac{4}{5}\big) \cdot \mathbb{P}\big(\Theta = \tfrac{4}{5}\big) = \\
&\quad = \mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)
\end{aligned}$$

Dla formalnego uzasadnienia wystarczy np. sprawdzić, korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite, że

$$\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) = \frac{4}{25} \neq$$
$$\neq \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 1)$$

Rozwiązanie zadania M 1469.
Z nierówności Schwarza otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_i + b_i} \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2.$$

Stąd i z warunku z zadania

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = 2 \sum_{i=1}^{n} a_i$$

otrzymujemy tezę.

Oznacza to, że podobnie jak w poprzednim przypadku kolejne wyniki tworzą ciąg wymienialny. Analogiczne rozumowanie moglibyśmy przeprowadzić, gdyby zmienna, pod warunkiem której kolejne gry są niezależne z tym samym prawdopodobieństwem sukcesu, była dużo bardziej skomplikowana (na przykład gdybyśmy na początku w jednostajny sposób losowy wybierali z odcinka $[0,1]$ prawdopodobieństwo wygranej w kolejnych grach). Rozważania te prowadzą do naturalnego pytania: czy możemy skonstruować nieskończony ciąg doświadczeń losowych o wymienialnych rezultatach (w sensie sukcesu lub porażki) w inny sposób niż poprzez niezależne kopie tego samego eksperymentu z losowo wybranym na początku prawdopodobieństwem sukcesu?

Zanim odpowiemy na to pytanie, zastanówmy się, w jaki sposób możemy w trakcie rozgrywki z krupierem przekonać się, którą z talii wybraliśmy – innymi słowy, jaką wartość zmiennej Θ wylosowaliśmy. Odpowiedź jest mocno intuicyjna – spodziewamy się, że wraz ze wzrostem liczby gier coraz lepszym przybliżeniem prawdopodobieństwa wygranej będzie udział naszych zwycięstw we wszystkich dotychczasowych grach. Przekładając tę intuicję na wprowadzone oznaczenia, możemy zapisać

$$\Theta = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}. \tag{1}$$

Powyższa zależność okaże się wskazówką do uzasadnienia, że jeśli nieskończony ciąg doświadczeń $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ jest wymienialny, to istnieje zmienna – wyżej określona Θ – pod warunkiem której zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają ten sam rozkład.

Rezultat ten jest znany wśród probabilistów i statystyków pod nazwą twierdzenia de Finettiego.

Wyobraź sobie teraz, Czytelniku, że krupier zaproponował Ci nową grę i z jego wieloletniego doświadczenia wynika, że rezultaty kolejnych rozgrywek tworzą ciąg wymienialny. Przypuśćmy, że chwilę po rozpoczęciu zabawy przysiada się do Ciebie wysoki, elegancko ubrany dżentelmen o prawym oku czarnym, a lewym zielonym. Nachyla się do Twojego ucha i szepcze z cudzoziemskim akcentem „Annuszka kupiła już olej słonecznikowy, a po setnej grze będziesz miał dwadzieścia wygranych", po czym ulatnia się tak nagle, jak się pojawił. Coś w jego wyglądzie każe Ci zawierzyć usłyszanej przepowiedni, dlatego czym prędzej sięgasz po coś do pisania i obliczasz, w jaki sposób uzyskana informacja wpływa na Twoją ocenę opłacalności gry w kolejnych rundach. Przyjmując oznaczenie $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ na liczbę sukcesów po n-tej rozgrywce oraz dając wiarę zapewnieniom krupiera o wymienialności ciągu wyników, stwierdzamy, że

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \frac{\mathbb{P}(S_n = s_n)}{\binom{n}{s_n}} \qquad (\text{gdzie } s_n = \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i), \tag{2}$$

gdyż każdy z $\binom{n}{s_n}$ n-wyrazowych ciągów wyników z s_n sukcesami jest równie prawdopodobny. Spróbujmy teraz obliczyć prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów w n-tej rundzie, gdzie $n < N = 100$. Pamiętajmy, że po N-tej rundzie mamy mieć na koncie $K = 20$ zwycięstw. Każda z permutacji tych N przyszłych wyników jest równie prawdopodobna, zastanówmy się zatem, jak wiele z nich oznacza k sukcesów po n rundach. Najpierw musimy wybrać k zwycięskich rund spośród pierwszych n na $\binom{n}{k}$ sposobów, następnie $K-k$ pozostałych sukcesów spomiędzy $N-n$ końcowych rozgrywek na $\binom{N-n}{K-k}$ sposobów. Ponadto zwycięskie rundy możemy pomieszać na $K!$ sposobów, a przegrane na $(N-K)!$, co przy $N!$ wszystkich możliwych permutacji daje nam równość

$$\mathbb{P}(S_n = k \,|\, S_N = K) = \frac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{K-k} K!(N-K)!}{N!} = \binom{n}{k} \frac{(K)_k (N-K)_{n-k}}{(N)_n},$$

gdzie $(x)_l = x(x-1)(x-2)\ldots(x-l+1)$. Niestety, w kasynie nie powinniśmy liczyć na pomoc sił nadprzyrodzonych, jednak uzyskana wyżej równość i tak może być użyteczna dla naszych celów. Zauważmy bowiem, że nawet jeśli nie znamy wartości S_N, to – korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo

Rozwiązanie zadania M 1470.
Odp. Tak!

Oznaczmy chłopców $C_0, \ldots, C_9$, a dziewczyny – $D_0, \ldots, D_9$. Niech dla każdego $i = 0, \ldots, 9$, chłopiec C_i zadzwoni do D_i, D_{i+1} oraz D_{i+3} (gdzie $D_{10} = D_0$, $D_{11} = D_1$ i $D_{12} = D_2$). Wówczas zostanie wykonanych łącznie 30 połączeń i pierwszy warunek będzie spełniony w sposób oczywisty. Aby sprawdzić drugi warunek, spójrzmy na tabelę połączeń („1" oznacza, że C_i zadzwoni do D_j).

$$\begin{bmatrix}
1&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&1&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&1&1&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&1&1\\
1&0&1&0&0&0&0&0&0&1
\end{bmatrix}$$

Gdyby drugi warunek nie był spełniony, to na wszystkich 4 wierzchołkach pewnego prostokąta byłyby jedynki, a to nie ma miejsca (między jedynkami w jednym wierszu odległości mogą wynosić odpowiednio 1 lub 9, 2 lub 8 i 3 lub 7, a każda z tych odległości jest realizowana przez co najwyżej jedną parę jedynek).

całkowite – możemy uzyskać

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{K=k}^{N} \mathbb{P}(S_n = k \,|\, S_N = K) \cdot \mathbb{P}(S_N = K) =$$

$$= \binom{n}{k} \sum_{K=k}^{N} \frac{(K)_k (N-K)_{n-k}}{(N)_n} \cdot \mathbb{P}(S_N = K).$$

Przyjmijmy teraz oznaczenie $\Theta_m = \frac{S_m}{m}$, co pozwoli powyższą zależność przepisać w postaci

$$\mathbb{P}\Big(\Theta_n = \frac{k}{n}\Big) = \binom{n}{k} \sum_{K=k}^{N} \frac{(K)_k (N-K)_{n-k}}{(N)_n} \cdot \mathbb{P}\Big(\Theta_N = \frac{K}{N}\Big).$$

Jest ona prawdziwa dla dowolnych liczb naturalnych $k < n < N$. Ustalmy teraz k, n i zwiększajmy N. Niestety, nie możemy jeszcze stwierdzić, że zmienne Θ_N zbiegają w jakimś sensie do jednej zmiennej. Wszystkie jednak są zmiennymi na $[0,1]$ – okazuje się, że w tej sytuacji jest im na tyle ciasno, że jesteśmy w stanie wybrać z nich podciąg (Θ_{N_i}) zbieżny (w pewnym sensownym sensie) do konkretnej zmiennej losowej Θ na $[0,1]$. Wyobraźmy sobie teraz, że wspomniany wcześniej tajemniczy cudzoziemiec zdradził nam, że gdybyśmy grali w nieskończoność, zmienna Θ osiągnęłaby wartość θ. Przeprowadzając poprzednie rozumowanie, moglibyśmy wówczas dojść do równości

Sensownym sensem jest w tym wypadku zbieżność według rozkładu. Wnioskujemy ją z twierdzenia Helly'ego, zastosowanego do dystrybuant zmiennych Θ_N.

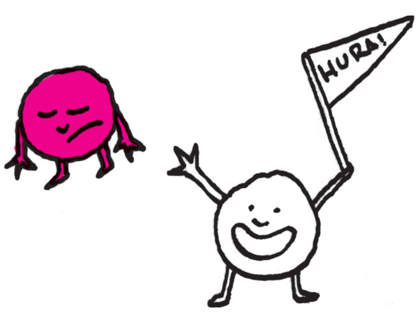
$$(3) \qquad \mathbb{P}\Big(\Theta_n = \frac{k}{n} \,\Big|\, \Theta = \theta\Big) = \binom{n}{k} \sum_{K=k}^{N_i} \frac{(K)_k (N_i-K)_{n-k}}{(N_i)_n} \cdot \mathbb{P}\Big(\Theta_{N_i} = \frac{K}{N_i} \,\Big|\, \Theta = \theta\Big).$$

dla dowolnej liczby naturalnej i. Okazuje się teraz, iż wraz ze wzrostem i

- $\mathbb{P}\big(\Theta_{N_i} = \frac{K}{N_i} \,\big|\, \Theta = \theta\big)$ „koncentruje się" wokół $\frac{K}{N_i} = \theta$, tzn. jeśli wybierzemy dowolnie małe otoczenie θ, to suma wspomnianych prawdopodobieństw dla $\frac{K}{N_i}$ spoza tego otoczenia będzie zbiegała do 0,
- różnica między $\frac{(K)_k (N_i-K)_{n-k}}{(N_i)_n}$ a $\big(\frac{K}{N_i}\big)^k \big(1 - \frac{K}{N_i}\big)^{n-k}$ zbiega do 0. By się o tym przekonać, wystarczy sprawdzić, że oba ciągi są ograniczone, a ich iloraz zbiega do 1.

Pod warunkiem $\Theta = \theta$ zmienne Θ_{N_i} zbiegają według rozkładu do stałej, a zatem zbieżność ta jest również według prawdopodobieństwa, co tłumaczy pierwszą kropkę.

Powyższe uwagi miały za zadanie skłonić Czytelnika, by uwierzył, że dysponując odpowiednim zapasem cierpliwości i zręcznością w posługiwaniu się *epsilonami* i *deltami*, można wykazać, że prawa strona równania (3) zbiega do $\binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k}$ przy $i \to \infty$, co oczywiście pociąga za sobą $\mathbb{P}(S_n = k \,|\, \Theta = \theta) = \binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k}$. Korzystając z „warunkowego" odpowiednika równości (2), dostajemy zatem



$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n \,|\, \Theta = \theta) = \theta^{s_n}(1-\theta)^{n-s_n} = \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}.$$

Oznacza to dokładnie tyle, że przy ustalonej wartości zmiennej Θ wymienialne zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz wszystkie mają ten sam rozkład o prawdopodobieństwie sukcesu wskazywanym przez Θ. Innymi słowy, pracujący w kasynie analityk nie byłby w stanie, bazując wyłącznie na wynikach, odróżnić naszej gry od takiej, która polegałaby na niezależnych powtórzeniach tej samej rozgrywki z prawdopodobieństwem sukcesu określonym *a priori* przy użyciu zmiennej Θ. A skoro tak, to na mocy równości (1) zmienna ta – określona wcześniej jako granica podciągu $(\Theta_{N_i})_{i=1}^{\infty}$ – jest również granicą całego ciągu $(\Theta_N)_{N=1}^{\infty}$, której istnienia nie mogliśmy wcześniej założyć.

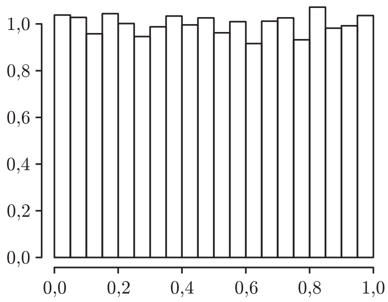
W tym miejscu mowa o granicy „prawie na pewno", o czym doskonale wiedzą Czytelnicy znający Mocne Prawo Wielkich Liczb.

Czy jednak krupier byłby w stanie zaproponować nam grę, w której istnienie wspomnianej granicy byłoby nieoczywiste? Okazuje się, że tak, i przykład nie jest specjalnie skomplikowany. Wyobraźmy sobie, że postawiono przed nami urnę, w której znajdują się dwie kule – jedna biała, druga czarna. W każdej rundzie wyciągamy z urny jedną kulę, a następnie wkładamy ją z powrotem wraz z jeszcze jedną kulą tego samego koloru. Rundę uznajemy za wygraną, jeśli wyciągnęliśmy w niej kulę białą. Oczywiście, kolejne rozgrywki nie są powtarzaniem tego samego doświadczenia – każde wyciągnięcie białej kuli zwiększa prawdopodobieństwo sukcesu w kolejnej rundzie. Łatwo można jednak

wykazać, że otrzymywane wyniki tworzą ciąg zmiennych wymienialnych. Aby się o tym przekonać, wystarczy w tym przypadku stwierdzić, że zamiana ostatnich dwóch wyników w dowolnym ciągu początkowych rezultatów nie zmieni nam prawdopodobieństwa jego uzyskania pod warunkiem wcześniejszych wyników. Niech zatem $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$ będzie ciągiem n pierwszych wyników. Jeśli $x_{n-1} = x_n$, postulowana równość jest oczywista. Bez straty ogólności przyjmijmy zatem $x_{n-1} = 1 = 1 - x_n$ i wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n \,|\, X_1 = x_1, \ldots, X_{n-2} = x_{n-2}) = \\
&\qquad = \frac{1+s_{n-2}}{n}\left(1 - \frac{2+s_{n-2}}{n+1}\right) = \frac{(n-1-s_{n-1})(1+s_{n-2})}{n(n+1)} = \\
&\qquad = \left(1 - \frac{1+s_{n-2}}{n}\right)\frac{1+s_{n-2}}{n+1} = \\
&\qquad = \mathbb{P}(X_{n-1} = x_n, X_n = x_{n-1} \,|\, X_1 = x_1, \ldots, X_{n-2} = x_{n-2}).
\end{aligned}$$

Okazuje się, że jeśli na początku w urnie znajdowało się b kul białych i c czarnych, to zmienna Θ ma rozkład beta o parametrach b i c. W szczególności dla $b = c = 1$ (i tylko w tym przypadku) jest to rozkład jednostajny na $[0,1]$, o czym przyjemnie jest się przekonać, przeprowadzając komputerową symulację opisanego procesu. Poniżej znajduje się histogram 10000 wartości średniej liczby sukcesów w 1000 początkowych rundach.

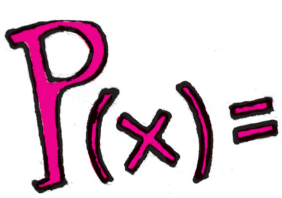


Zgodnie z naszymi wcześniejszymi obserwacjami oznacza to ich niezależność i ten sam rozkład pod warunkiem znajomości (istniejącej) granicy $\Theta = \lim \sum_1^n X_i/n$ – gdyby tajemniczy cudzoziemiec zdradził nam jej wartość θ, to szansę na sukces w **każdej** kolejnej rundzie ocenialibyśmy właśnie na θ. Wydaje się to dosyć zaskakujące, zwłaszcza jeśli przeprowadzimy podobne rozumowanie przy założeniu, że początkowo w urnie znajdowały się jedna kula biała i 100 czarnych oraz dostaliśmy informację $\Theta = 0{,}999$ – choć serce drżałoby z trwogi, zimna kalkulacja nakazywałaby już w pierwszej rundzie stawiać na szali zwycięstwa wszystkie nasze oszczędności, dom, psa i ubranie, gdyż szansa na sukces i tak wynosiłaby 99,9%! Cały sekret tkwi w fakcie, że pozornie duże prawdopodobieństwo porażki w pierwszym losowaniu jest „pożerane" przez informację o tak dużej (lecz również tak mało prawdopodobnej) wartości Θ. Przy naszych założeniach prawdopodobieństwo zdarzenia, że Θ jest nie mniejsze od 0,999, jest rzędu… 10^{-297}. Nie trzeba wielkiej przenikliwości umysłu, by stwierdzić, że w tej sytuacji nasz cudzoziemiec z pewnością nie jest żadnym Bułhakowowskim Wolandem, a jedynie zwykłym hochsztaplerem. No, może nie *z pewnością*, a *prawdopodobnie*, więc może na wszelki wypadek uważajmy na plamy rozlanego oleju…

Matematyka jest jedna: wielomiany mogą wszystko

*Tomasz KOBOS**

Jednomiany postaci $f(x) = x^n$ są jednymi z pierwszych funkcji rzeczywistych, z którymi mamy do czynienia w naszym matematycznym życiu. Odrobinę później poznajemy ich kombinacje o współczynnikach rzeczywistych, czyli tytułowe **wielomiany**. Jest więc to pojęcie elementarne, które powinno być doskonale znane każdemu maturzyście. Tym bardziej może zadziwiać, jak często wielomiany i ich podstawowe własności stanowią klucz do wielu trudnych problemów, które na pozór nic z wielomianami wspólnego nie mają. Zaprezentujemy to na przykładach z algebry, teorii liczb i kombinatoryki.



Zadanie 1. Niech a, b, c, d będą takimi liczbami rzeczywistymi, że

$$a + b + c + d > 0, \qquad ab + ac + ad + bc + bd + cd > 0,$$
$$abc + abd + acd + bcd > 0, \qquad abcd > 0.$$

Wykazać, że $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.

Rozwiązanie. Czytelnik doświadczony w dziedzinie rozwiązywania problemów olimpijskich z całą pewnością natychmiast skojarzy dany warunek ze wzorami Viète'a. Jest to istotnie dobry trop. Rozważmy bowiem wielomian $P(x)$, którego pierwiastkami są liczby a, b, c, d, czyli

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s.$$

Z danych założeń i wspomnianych wzorów Viète'a wynika bezpośrednio, że $p, q, r, s > 0$. Jeżeli więc $x \leqslant 0$, to oczywiście $P(x) > 0$. Widzimy zatem, że żaden z pierwiastków P nie może być liczbą ujemną, co kończy rozwiązanie.

*doktorant, Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński