# Klub 44

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie $S$ oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a $N$ – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2017

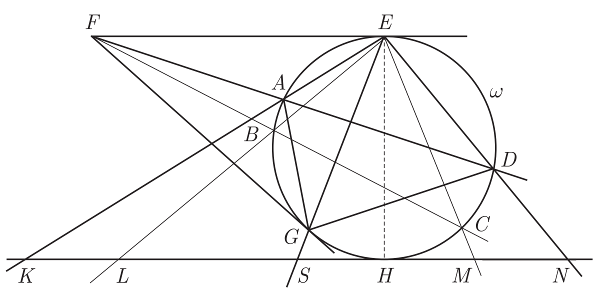
*Redaguje Marcin E. KUCZMA*

Przypominamy treść zadań:

**737.** Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg $\omega$, przy czym proste $BC$ i $AD$ przecinają się w takim punkcie $F$, że prosta $EF$ jest styczna do $\omega$. Druga prosta styczna do okręgu $\omega$, równoległa do $EF$, przecina proste $EA$, $EB$, $EC$, $ED$ odpowiednio w punktach $K$, $L$, $M$, $N$. Udowodnić, że odcinki $KL$ i $MN$ mają jednakową długość.

**738.** Wypisując, jedna za drugą, wszystkie liczby całkowite dodatnie, mające (w systemie dziesiętnym) co najwyżej $n$ cyfr, piszemy łącznie $c_n$ cyfr (np. $c_1 = 9$, $c_2 = 189$); w tym $z_n$ zer (np. $z_1 = 0$, $z_2 = 9$). Czy równość $z_n = c_{n-1}$ jest spełniona dla wszystkich liczb naturalnych $n \geqslant 2$?

**737.** Prowadzimy z punktu $F$ prostą różną od $FE$, styczną do okręgu $\omega$ w punkcie $G$. Prosta przechodząca przez punkty $K, L, M, N$ jest styczna do okręgu w punkcie $H$ i przecina prostą $EG$ w punkcie $S$. Pokażemy, że $S$ jest środkiem odcinka $KN$.




Ponieważ

$$|\sphericalangle EKS| = 90^\circ - |\sphericalangle HEA| = |\sphericalangle EHA| = |\sphericalangle EGA|,$$

uzyskujemy podobieństwa

$$\triangle EKS \sim \triangle EGA; \quad \text{i analogicznie} \quad \triangle ENS \sim \triangle EGD.$$

Stąd wynikają proporcje $|KS| : |GA| = |ES| : |EA|$ oraz $|NS| : |GD| = |ES| : |ED|$; a z nich –

$$\frac{|KS|}{|NS|} = \frac{|GA| \cdot |ED|}{|EA| \cdot |GD|}. \tag{1}$$

Dalej, zauważamy kolejne pary trójkątów podobnych (odpowiednie kąty równe):

$$\triangle EDF \sim \triangle AEF \qquad \text{oraz} \qquad \triangle AGF \sim \triangle GDF.$$

To daje proporcje $|ED| : |EA| = |DF| : |EF|$ oraz $|GA| : |GD| = |GF| : |DF|$, z których wynika, że prawa strona wzoru (1) jest równa $|GF| : |EF|$, czyli 1.

Punkty $K$, $L$ leżą po jednej stronie punktu $S$; punkty $M$, $N$ po drugiej. Uzyskana równość $|KS| : |NS| = 1$ oznacza, że $S$ jest środkiem odcinka $KN$. Przez analogię, ten sam punkt $S$ jest też środkiem odcinka $LM$. Stąd wniosek, że odcinki $KL$ i $MN$ są przystające.

**738.** Różnica $c_n - c_{n-1}$ to liczba cyfr użytych do zapisania wszystkich liczb $n$-cyfrowych. Jest tych liczb $10^n - 10^{n-1}$, czyli $9 \cdot 10^{n-1}$; zatem $c_n = c_{n-1} + n \cdot 9 \cdot 10^{n-1}$. W zapisie każdej z nich cyfra wiodąca jest różna od zera; po jej odrzuceniu, pozostała część zapisu to *dowolny* ciąg długości $n-1$, złożony z *dowolnych* cyfr (formalnie – słowo z alfabetu 10-elementowego).

Jest tych słów $9 \cdot 10^{n-1}$, jest w nich więc $(n-1) \cdot 9 \cdot 10^{n-1}$ cyfr, a wszystkie cyfry są równouprawnione. Dziesiąta część spośród nich to zera. To znaczy, że w zapisie wszystkich liczb $n$-cyfrowych mamy $(n-1) \cdot 9 \cdot 10^{n-2}$ zer. Tak więc $z_n = z_{n-1} + (n-1) \cdot 9 \cdot 10^{n-2}$. Pisząc $c'_n = z_{n+1}$ widzimy, że ciągi $(c_n)$ i $(c'_n)$ spełniają identyczną zależność rekurencyjną. Ponieważ $c'_1 = z_2 = 9 = c_1$, wynika stąd, że $c'_n = c_n$ (dla $n \geqslant 1$), czyli $z_n = c_{n-1}$ (dla $n \geqslant 2$).

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 731 ($WT = 3{,}13$) i 732 ($WT = 1{,}78$) z numeru 12/2016

| | | |
|---|---|---|
| Roksana Słowik | Knurów | 38,41 |
| Franciszek S. Sikorski | Warszawa | 38,39 |
| Patryk Jaśniewski | Gdańsk | 37,77 |
| Adam Dzedzej | Gdańsk | 35,68 |
| Marcin Małogrosz | Warszawa | 35,19 |
| Jerzy Cisło | Wrocław | 31,28 |
| Marcin Kasperski | Warszawa | 30,79 |

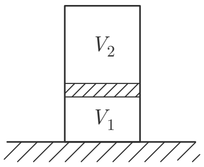
## Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/2016

*Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA*

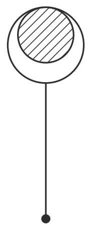
Przypominamy treść zadań:

**634.** W pionowym, zamkniętym naczyniu znajduje się tłok, który może przemieszczać się bez tarcia (rys. 1). Z obu stron tłoka znajdują się jednakowe masy tego samego gazu doskonałego. W temperaturze $T_0$, jednakowej w całym naczyniu, objętość gazu nad tłokiem jest $k$ razy większa niż objętość gazu pod tłokiem. Jaki będzie stosunek tych objętości, gdy temperatura wzrośnie do wartości $T$?

**635.** Do dolnego końca pręta o długości $l$ przyczepiono małą kulkę o masie $m$, a do górnego końca rurkę w kształcie walca o wewnętrznym promieniu $R$. Masy pręta i rurki są zaniedbywalne. Rurka nasunięta jest luźno na nieruchomą, poziomą oś (rys. 2). Współczynnik tarcia między wewnętrzną powierzchnią rurki i osią jest równy $\mu$. Dla jakich wartości kąta $\varphi$ odchylenia pręta od pionu tak skonstruowane wahadło może znajdować się w równowadze?




Rys. 1



Rys.2

**634.** Oznaczmy przez $p_1$ i $p_2$ ciśnienia w dolnej i górnej części naczynia w temperaturze $T_0$, a przez $p_3$ i $p_4$ odpowiednie ciśnienia w temperaturze $T$. Różnica ciśnień związana jest z ciężarem tłoka i nie zależy od temperatury

$$p_2 - p_1 = p_4 - p_3. \tag{1}$$

Całkowita objętość naczynia wypełniona gazem nie zmienia się, zatem

$$V_1(k+1) = V_3(x+1), \tag{2}$$

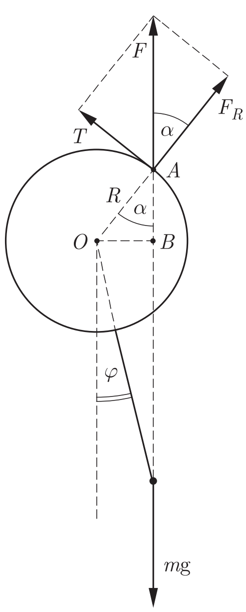
gdzie $V_1$ i $V_3$ to początkowa i końcowa objętość gazu w dolnej części naczynia, a $x$ jest szukanym stosunkiem objętości w stanie końcowym. Masy gazu w obu częściach naczynia są takie same, z równań Clapeyrona wynikają więc związki $p_2 = p_1/k$ oraz $p_4 = p_3/x$. Podstawiając je do równania (1), otrzymujemy

$$\frac{p_1}{p_3} = \frac{k(x-1)}{x(k-1)}. \tag{3}$$

Stosując równania Clapeyrona do gazu w dolnych częściach naczynia oraz uwzględniając równania (2) i (3), dostajemy

$$\frac{p_1V_1}{p_3V_3} = \frac{T_0}{T} = \frac{k(x^2-1)}{x(k^2-1)}.$$

Wprowadzając oznaczenie $a = \dfrac{T_0(k^2-1)}{Tk}$, możemy napisać równanie kwadratowe na szukaną wielkość $x$ w postaci $x^2 - ax - 1 = 0$. Dodatni pierwiastek tego równania ma postać $x = \left(a + \sqrt{a^2+4}\right)/2$. Dla $k = 1$, co odpowiada nieważkiemu tłokowi, $x = 1$, czyli objętości gazów nad i pod tłokiem są takie same. Dla dowolnego $k > 1$, gdy temperatura dąży do nieskończoności, wartość $x$ również dąży do 1. W bardzo wysokiej temperaturze ciśnienia gazów w obu częściach naczynia są na tyle duże, że wpływ siły ciężkości tłoka można pominąć.




Rys. 3

**635.** Na wahadło odchylone od pionu działają trzy siły: siła ciężkości $mg$ zaczepiona w środku kulki oraz siły reakcji $F_R$ i tarcia $T$ w punkcie $A$ styczności osi z wewnętrzną powierzchnią rurki (rys. 3). Suma momentów tych sił względem dowolnego punktu wynosi zero, zatem proste, wzdłuż których działają siły, muszą się przecinać w jednym punkcie. Wynika stąd, że punkt $A$ leży na przecięciu prostej pionowej, przechodzącej przez środek masy kulki z wewnętrzną powierzchnią rurki. Gdy środek kulki przemieszczony jest w prawo lub w lewo na odległość większą niż promień $R$, równowaga jest niemożliwa.

Gdy kąt $\varphi$ odchylenia wahadła od pionu jest maksymalny, tarcie statyczne osiąga największą możliwą wartość $T = \mu F_R$. Ponieważ w stanie równowagi wypadkowa $F$ sił tarcia i reakcji skierowana jest pionowo w górę, zachodzi związek $\operatorname{tg}\alpha = T/F_R = \mu$. Odcinek $OB$ na rysunku 3 możemy wyrazić przez kąty $\varphi$ i $\alpha$ wzorem $(l+R)\sin\varphi = R\sin\alpha$, stąd

$$\sin\varphi = \frac{\mu R}{(l+R)\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Wartość kąta granicznego $\varphi$ nie zależy od masy kulki. Dla $\mu \to 0$ stan równowagi możliwy jest tylko dla pionowego położenia wahadła. Gdy $\mu \to \infty$, $\alpha \to \pi/2$ i $\sin\varphi = R/(l+R)$, wtedy maksymalne odchylenie kulki w prawo dąży do $R$. Gdy występuje tarcie w osi, wahadło może znaleźć się w równowadze także w położeniu odwróconym, kiedy kulka znajduje się powyżej osi.