

## Relacje



### Rozwiązanie zadania F 974.

Pomiary Dulonga i Petita były wykonywane w temperaturach bliskich temperatury pokojowej – badali oni pierwiastki, które w tej temperaturze występują w stanie stałym, to znaczy, że ich atomy tworzą regularną sieć krystaliczną. W temperaturze pokojowej główny wkład do ciepła właściwego pochodzi od drgań sieci krystalicznej. W temperaturze  $T$  energia drgań każdego z atomów wynosi  $6kT/2 = 3kT$ , to znaczy: po  $kT/2$  na każdy ze stopni swobody (zmiana energii potencjalnej i kinetycznej drgań w każdym z trzech kierunków przestrzennych;  $k \approx 1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K jest stałą Boltzmana). Takie samo rozumowanie prowadzi do wniosku, że dla związku chemicznego w stanie stałym każdy z atomów też da wkład  $3kT$  do energii wewnętrznej kryształu. Wniosek: w stanie stałym ciepło molowe związku o  $m$  atomach w cząsteczce wynosi w przybliżeniu  $3mR$  (prawo Koppa–Neumanna). Dla FeO,  $c_p \approx 6R$ .

Mając dane dwa zbiory  $A$  i  $B$ , **relacją** zdefiniowaną pomiędzy tymi dwoma zbiorami matematycy nazywają po prostu podzbiór zbioru wszystkich par elementów, w których pierwszy jest ze zbioru  $A$ , a drugi ze zbioru  $B$ . Inaczej mówiąc, element ze zbioru  $A$  i element ze zbioru  $B$  mogą być w danej relacji lub w niej nie być. Relacje często występują na świecie, np. *posiadanie psa* jest relacją pomiędzy zbiorem wszystkich ludzi a zbiorem wszystkich psów. Człowiek o imieniu Dionizy jest w tej relacji z psem Dingiem wtedy i tylko wtedy, gdy Dingo jest jego pupilem.

Szczególnie interesujące wydają się relacje zdefiniowane na jednym zbiorze, czyli gdy  $A = B$ . Na przykład relacja  $\leq$  zdefiniowana na liczbach rzeczywistych. Liczba  $a$  jest w relacji  $\leq$  z liczbą  $b$ , jeśli  $a$  nie jest większe od  $b$ . Innym przykładem jest relacja *koloru* zdefiniowana na zbiorze wszystkich samochodów, gdzie dwa samochody są w tej relacji, jeśli są tego samego koloru. Jeszcze inny przykład to relacja *małżeństwo* zdefiniowana na zbiorze wszystkich ludzi.

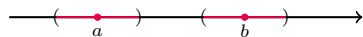
Można badać cechy poszczególnych relacji. Powiemy, że dana relacja jest **zwrotna**, jeśli każdy element jest w relacji z samym sobą. Z wyżej wymienionych przykładów relacja  $\leq$  oraz relacja koloru mają tę cechę (ale małżeństwo już nie). Relacja jest **symetryczna**, jeśli z tego, że element  $a$  jest w relacji z elementem  $b$ , wynika, że element  $b$  jest w relacji z elementem  $a$ . Widzimy, że relacja koloru oraz małżeństwo są przykładami takich relacji, zaś relacja  $\leq$  nie jest. I w końcu, relacja jest **przechodnia**, jeśli z tego, że  $a$  jest w relacji z  $b$  i  $b$  jest w relacji z  $c$ , wynika, że  $a$  jest w relacji z  $c$ . Jasne jest, że  $\leq$  oraz relacja tego samego koloru są przykładami tego typu relacji.

Relacja, która jest równocześnie zwrotna, symetryczna i przechodnia, nazywana jest **relacją równoważności**. Taka właśnie jest relacja koloru. Takie relacje mają wyjątkową cechę: generują podział danego zbioru na rozłączne podzbiory, których każde dwa elementy są w relacji. W wypadku relacji koloru jest to podział wszystkich samochodów na zbiory samochodów w poszczególnych kolorach: żółte, czerwone, niebieskie itd. Tak utworzone podzbiory matematycy nazywają **klasami abstrakcji**. Zauważmy również, że każdy podział rozważanego zbioru generuje na nim relację równoważności, w której dwa elementy są w relacji, o ile znajdują się w tej samej części podziału. Tę równoważność pomiędzy relacjami równoważności i podziałami matematycy nazywają **zasadą abstrakcji**.

Michał KORCH



## Zbieżność



Rys. 1. Gdyby  $a, b$  były granicami pewnego ciągu, to w każdym z kolorowych przedziałów musiałyby znaleźć się prawie wszystkie wyrazy tego ciągu, a to jest sprzeczność.

**Zbieżność** to jedno z najważniejszych pojęć analizy matematycznej, odnoszące się najczęściej do ciągów i funkcji (oraz rozmaitych obiektów matematycznych skonstruowanych przy ich użyciu, np. szeregów czy ciągów funkcyjnych). Tu zajmujemy się zbieżnością ciągów liczbowych. Mówimy, że ciąg liczbowy  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest zbieżny, jeśli istnieje taka liczba  $a$ , że dowolnie blisko niej znajdują się *prawie wszystkie* (czyli wszystkie poza skończoną liczbą) wyrazy ciągu. Innymi słowami, jeśli dla każdego  $\varepsilon > 0$  możemy odrzucić skończoną liczbę początkowych wyrazów ciągu, tak by wszystkie pozostałe należały do przedziału  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , to mówimy, że **ciąg jest zbieżny do  $a$** , i oznaczamy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Z tej definicji w łatwy sposób wynika na przykład, że ciąg może mieć co najwyżej jedną granicę (rys. 1).

Przykładem ciągu zbieżnego jest ciąg  $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ , który jest zbieżny do zera. Ciągi, które nie są zbieżne, nazywamy **rozbieżnymi**. Rozbieżny jest np. ciąg o wyrazach  $a_n = (-1)^n$ ; istotnie, nie może on spełniać definicji zbieżności – żaden przedział długości 1 (co odpowiada  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ) nie zawiera prawie wszystkich wyrazów tego ciągu.

Warto wspomnieć o szczególnym przypadku ciągów, które nie są zbieżne – o ciągach rozbieżnych do nieskończoności (nazywanych również ciągami zbieżnymi do granicy niewłaściwej). Są to ciągi spełniające następujący warunek: dla dowolnej liczby  $M$  można odrzucić skończenie wiele wyrazów ciągu, tak by