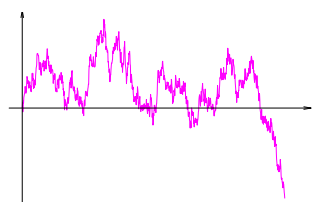


Białostockie korzenie matematyki stosowanej

* Politechnika Białostocka, Wydział Informatyki, Oddział Białostocki PTM

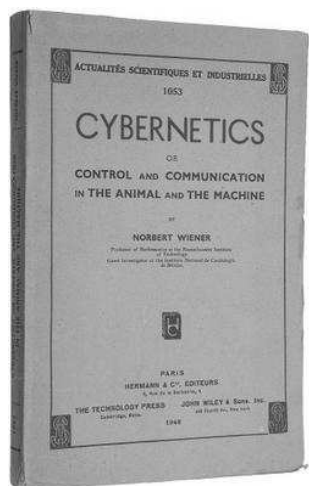


Norbert Wiener



Proces Wienera to jednowymiarowy ruch Browna, czyli proces stochastyczny z ciągłym czasem, z przyrostami o rozkładach normalnych. Takie procesy pojawiają się w ekonomii, finansach, biologii, fizyce, elektronice.

Filtr Wienera to urządzenie (fizyczne lub wirtualne), które eliminuje szum z sygnału poprzez porównanie zakłóconego sygnału i pożądane go sygnału pozbawionego szumu.



„Cybernetyka, czyli sterowanie i komunikacja w zwierzęciu i maszynie” to najbardziej znana książka Wienera. Możliwe, że roczne studia zoologiczne miały tu jakiś wpływ.

Zbigniew BARTOSIEWICZ*

Gdyby Leo Wienera nie ciągnęło tak bardzo w świat, jego syn Norbert, wybitny matematyk i twórca cybernetyki, mógłby urodzić się w Białymstoku, tak jak Leo. Matka Norberta, Bertha Kahn, urodziła się co prawda w USA, ale jej ojciec – Henry Kahn – pochodził z Hesse w Niemczech (1231 km od Białegostoku). Zarówno Kahnowie, jak i Wienerowie byli europejskimi Żydami z interesującymi rodowodami. Leo Wiener wymieniał słynnego filozofa żydowskiego Majmonidesa (1135–1204) jako jednego ze swych przodków.

Tak więc Norbert Wiener przyszedł na świat 26 listopada 1894 roku nie w Białymstoku, tylko w Columbi, w stanie Missouri, gdzie jego ojciec Leo był profesorem języków germańskich i romańskich na tamtejszym uniwersytecie. Wkrótce Leo stracił swą posiadłość i przeniósł się do Bostonu, gdzie został wykładowcą języków słowiańskich, w tym polskiego, na Uniwersytecie Harvarda. Nieco później na tymże uniwersytecie czternastoletni Norbert studiował przez rok zoologię. Chciał studiować medycynę, ale uznano, że był za młody. Nie były to jednak jego pierwsze studia. Wcześniej ukończył trzyletnie studia matematyczne w Tufts College, zaczynając je w wieku 11 lat. Studia zoologiczne szybko się zakończyły, bo młody Wiener miał problemy z zajęciami laboratoryjnymi. Norbert przerzucił się na filozofię, a dokładniej na logikę matematyczną. W roku 1912 ukończył studia magisterskie, a rok później, w wieku 19 lat, obronił rozprawę doktorską poświęconą strukturalizmowi algebraicznemu w logice relacji. Potem przez pewien czas wykładał filozofię na Uniwersytecie Harvarda, pracował jako inżynier w General Electric i jako dziennikarz w Boston Herald. W końcu trafił do słynnego dziś MIT, czyli Massachusetts Institute of Technology, gdzie spędził resztę swego życia, wykładając matematykę i wymyślając różne nowe rzeczy. Jego praca naukowa w zakresie matematyki dotyczyła m.in. analizy harmonicznej (np. twierdzenie Paleya–Wienera). Współpracował m.in. z Antonim Zygmundem, światowym autorytetem w tej dziedzinie, któremu pomógł w emigracji do USA w czasie drugiej wojny światowej. Zajmował się też teorią procesów stochastycznych (proces Wienera, równanie Wienera) oraz analizą funkcjonalną (koncepcja przestrzeni zwanej dziś przestrzenią Banacha, wymyślona niezależnie przez Banacha i Wienera).

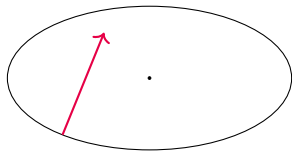
Od lat czterdziestych XX wieku zainteresowania Wienera przesunęły się w kierunku matematyki stosowanej: teorii systemów, teorii sterowania, teorii sygnałów, teorii informacji i cybernetyki, za której twórcę jest uważany. Filtr Wienera pozwalał na redukcję szumu obecnego w sygnale. Był używany przez alianców w czasie drugiej wojny światowej do sterowania artylerią przeciwlotniczą, która skutecznie niszczyła niemieckie pociski V1. Cybernetyka według Wienera to nauka badająca złożone systemy techniczne, biologiczne i społeczne oraz sztuka sterowania takimi systemami. Istotnym aspektem takiego systemu są sprzężenia zwrotne. Chociaż różne działy cybernetyki istniały wcześniej, zasługą Wienera było zebranie tych działów w jedną całość i odpowiednie nazwanie. W latach pięćdziesiątych pojawiła się sztuczna inteligencja (AI – *Artificial Intelligence*), mająca wiele punktów wspólnych z cybernetyką, która zdominowała tę ostatnią i obecnie przeżywa renesans dzięki powiązaniom z informatyką. Zmianę zainteresowań Wienera z matematyki czystej do stosowanej dobrze oddaje tematyka 17 rozpraw doktorskich, których był promotorem. Do roku 1940 dominowały tematy związane z analizą matematyczną i równaniami różniczkowymi. Od roku 1956 tematy nawiązywały do teorii systemów (np. Amar Bose, „Teoria systemów nieliniowych”).

Istotną rolę w edukacji Norberta Wienera odegrał jego ojciec Leo. To on był jego pierwszym nauczycielem. Uczył go zarówno matematyki, którą znał i lubił, jak i języków obcych. Leo był wymagającym nauczycielem, świadomym, że uczy małego geniusza, i oczekującym genialnych rozwiązań stawianych przez siebie problemów. Odcisnęło się to na psychice Norberta, który przez wiele lat miał zaniżone poczucie własnej wartości, szczególnie jeśli chodzi o dokonania matematyczne.

Norbert Wiener zmarł na zawał serca 18 marca 1964 roku w Sztokholmie (758 km od Białegostoku).



Elijah Polak



Funkcjonał $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ osiąga minimum w punkcie $(0, 0)$, w środku elipsy. Kierunek najszybszego spadku $-\nabla f(x, y)$ dla punktu (x, y) leżącego na elipsie nie prowadzi do punktu $(0, 0)$. Elipsa jest *poziomicą* funkcyjonału f . We wszystkich jej punktach f przyjmuje tę samą wartość. Wektor $-\nabla f(x, y)$ jest prostopadły do poziomicy.

Algorytm Polaka–Ribière’a

minimalizacji funkcyjonału f :
Wybierz punkt startowy x_0 ; oblicz:

$$d_0 := -\nabla f(x_0);$$

$$\alpha_0 := \arg \min f(x_0 + \alpha d_0);$$

$$x_1 := x_0 + \alpha_0 d_0;$$

dla $k \geq 1$ wykonaj cykl operacji:

$$d_k := -\nabla f(x_k);$$

$$\beta_k := \frac{d_k^T (d_k - d_{k-1})}{d_{k-1}^T d_{k-1}};$$

$$s_k := d_k + \beta_k s_{k-1};$$

$$\alpha_k := \arg \min f(x_k + \alpha s_k);$$

$$x_{k+1} := x_k + \alpha_k s_k.$$

Przy pewnych warunkach ciąg (x_k) dąży do punktu \bar{x} , w którym funkcyjonał f ma minimum (lokalne lub globalne).

Korzystałem z następujących źródeł:
L. Montagnini “Harmonies of Disorder:
Norbert Wiener: A Mathematician-
Philosopher of Our Time”, Springer 2017;
S.M. Ulam “Przygody matematyka”,
Warszawa 1996;
M.J. Mikoś, Leo Wiener z Białegostoku,
pionier slawistyki w Ameryce Północnej,
hdl.handle.net/11320/7224;
biografie Elijaha Polaka w: J.O. Royset,
Preface, J. Optim. Theory Appl. 169
(2016) 713–718 i “Optimization and
Control with Applications”, Eds. L. Qi,
K. Teo, X. Yang, Springer 2005;
Mathematics Genealogy Project.

Leo Wiener urodził się w roku 1862 w Białymstoku – mieście Żydów, Polaków, Niemców, Rosjan i innych nacji, tworzących wielokulturowy tygiel. To tu 3 lata wcześniej przyszedł na świat Ludwik Zamenhof – najsłynniejszy białostoczanin, twórca języka Esperanto. Leo również miał talent do języków – znał ich ponoć trzydzieści. Miał też zamiłowanie do matematyki. Do gimnazjum uczęszczał w Mińsku i Warszawie. W Warszawie rozpoczął też studia medyczne, które szybko zamienił na inżynierię w Berlinie. W 1882 roku wyruszył w podróż statkiem do Ameryki Środkowej, ale utknął w Nowym Orleanie. Po kilku latach fizycznej pracy został nauczycielem języków i matematyki w Kansas City, a potem profesorem języków germańskich i romańskich w Uniwersytecie Missouri w Columbii. Tam ożenił się z Berthą Kahn. Tam też urodził się ich pierwszy syn, Norbert.

W odróżnieniu od Norberta Wienera, Elijah Polak – wybitny przedstawiciel matematyki stosowanej – urodził się Białymstoku, 11 sierpnia 1931 roku. Podobnie jak Norbert też w rodzinie żydowskiej. Przeżył obozy zagłady w Dachau, Auschwitz, Gros Rosen i Buchenwaldzie. Po wojnie pracował w Polsce jako pomocnik kowala, a potem jako sprzedawca ubrań we Francji. W roku 1949, razem z matką, która też przeżyła zagładę, wyjechał do Australii. Tam ukończył studia pierwszego stopnia na Uniwersytecie Melbourne. Przeniósł się potem do USA, gdzie na Uniwersytecie Kalifornijskim w Berkeley skończył studia magisterskie i obronił doktorat (1961 r.). Promotorem jego doktoratu był Charles Desoer, który sam zrobił doktorat na MIT. Co prawda nie u Wienera, jednak na pewno musiał go tam spotkać.

Polak uzyskał stopień doktora z elektrotechniki (*electrical engineering*), ale tematyka doktoratu (sterowanie optymalne) była na tyle bliska matematyce, że rozprawa i jej autor zostali umieszczeni w bazie *Mathematics Genealogy Project* (MGP), rejestrującej rodowody matematyków. MGP to (skierowany) graf, którego wierzchołkami są matematycy (ze stopniem doktora) i którego krawędzie łączą doktorantów z ich promotorami. W MGP można odtworzyć rodowód matematyczny Polaka. Zawikłana ścieżka prowadzi od Polaka, przez Desoera i kilku fizyków matematycznych, do Siméona Denisa Poissona, który był też moim przodkiem matematycznym. Z kolei przodkowie Poissona to Joseph Louis Lagrange i nauczyciel Lagrange’a Leonhard Euler – jedno z największych nazwisk w matematyce, zarówno czystej, jak i stosowanej.

Poczynając od doktoratu, działalność naukowa Polaka związana jest z optymalizacją, szczególnie od strony numerycznej. Optymalizacja to szukanie ekstremów funkcyjonałów, czyli funkcji o wartościach rzeczywistych, często zadanych na przestrzeniach nieskończenie wymiarowych (np. w problemach sterowania optymalnego). Metody analityczne szukania ekstremów korzystają z twierdzenia Fermata: jeśli funkcja różniczkowalna f ma lokalne ekstremum (minimum lub maksimum) w punkcie \bar{x} , to jej gradient ∇f (wektor pochodnych cząstkowych) jest w \bar{x} równy 0. Znalezienie punktów, w których ∇f się zeruje, nie jest proste, zwłaszcza dla większej liczby zmiennych. W praktyce szuka się więc rozwiązań przybliżonych, korzystając z algorytmów numerycznych i komputera. Optymalizacja jest więc dziedziną leżącą na pograniczu matematyki stosowanej i informatyki. Najprostszy algorytm gradientowy szukania minimum funkcyjonału wykorzystuje fakt, że kierunek $-\nabla f(x)$ jest kierunkiem najszybszego spadku wartości funkcyjonału w punkcie x . Ale zwykle kierunek najszybszego spadku nie prowadzi do celu, czyli do punktu, w którym funkcyjonał przyjmuje wartość najmniejszą. Nie jest też najlepszym kierunkiem, tzn. nie generuje najkrótszej drogi do celu. Można go poprawić, stosując różne modyfikacje bazujące na macierzy pochodnych cząstkowych drugiego rzędu (czyli hesjanie) lub na wartościach gradientu w innych punktach. Elijah Polak jest współtwórcą algorytmu Polaka–Ribière’a, z zastosowaniem metody gradientów sprzężonych, gdzie takie modyfikacje się właśnie stosuje. Jest to jeden z najważniejszych algorytmów optymalizacji numerycznej.

Jesienią 1964 roku Polak przebywał na stażu naukowym w MIT. Nie spotkał tam jednak Wienera, gdyż ten już nie żył od kilku miesięcy. Później spędził dwa lata w Paryżu i wielokrotnie odwiedzał Londyn. O ile mi wiadomo, nie był w Polsce, w szczególności nie odwiedził Białegostoku. Elijah Polak jest obecnie emerytowanym profesorem elektrotechniki i informatyki w Uniwersytecie Kalifornijskim.