

SPIS TREŚCI

O „wielkim twierdzeniu Fermata” <i>Dr Andrzej Rotkiewicz</i>	str. 1
Jak odkryliśmy hiperjądra atomowe <i>Prof. dr Jerzy Pniewski</i>	str. 4
Zadania <i>Mgr Tadeusz B. Iwiński</i>	str. 5
Sztuka wygrywania <i>Mgr Tadeusz B. Iwiński</i>	str. 6
Pomysł	str. 7
Narzędzia fizyka — Elektromagnesy <i>Dr Zbigniew Płochocki</i>	str. 8
Laboratorium w domu <i>Dr Jan A. Gaj</i>	str. 10
Co może maszyna Turinga, czyli o algorytmach (I) <i>Prof. dr Andrzej Mostowski</i>	str. 12
Równania różniczkowe <i>Dr Henryk Kolakowski</i>	str. 14
Ciekawe — i nie tylko	str. 16
Jak zdeformować prosiaka, czyli o graficznym przedstawianiu wyników	str. 17

„Delta”
matematyczno-fizyczny miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Polskiego Towarzystwa Fizycznego wydawany przy poparciu Polskiej Akademii Nauk oraz Ministerstwa Oświaty i Wychowania
Komitet Redakcyjny
prof. dr G. Białkowski
doc. dr A. Blikle
prof. dr A. Hryniewicz
doc. dr B. Iwaszkiewicz
prof. dr J. Janik
doc. dr J. Jatczak
prof. dr Leon Jeśmanowicz — przewodniczący
prof. dr Z. Krygowska
prof. dr K. Leibler
mgr W. Łuczniak
mgr A. Mąkowski
prof. dr A. Pelczyński
prof. dr Arkadiusz Piekara — wiceprzewodniczący
prof. dr J. Rayski
prof. dr W. Rubinowicz
prof. dr A. Schinzel

prof. dr Z. Semadeni
prof. dr M. Subotowicz
dr A. Wakulicz
doc. dr W. Zawadowski

Redaguje Kolegium w składzie:
T. Deskur — red. techn. graf.
doc. dr T. Hofmokl — z-ca red. nacz.
mgr T. B. Iwiński
dr M. Kordos — red. nacz.
dr Z. Płochocki
D. Tys — sekr. red.
opracowanie okładki
art. graf. K. Dobrowolski
Adres Redakcji
ul. Śniadeckich 8,
00-656 Warszawa, PTM

Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo.
Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 30000 egz. Objętość 2 ark.
wyd.; 2,50 ark. druk.;
papier offsetowy III kl., 80 g, 61 × 86
Wydrukowano w Drukarni im. Rewolucji Październikowej,
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 945/74 W-121

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60,— cena prenumeraty półrocznej zł 30,—

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę w miastach wojewódzkich i powiatowych, zamawiać mogą prenumeratę wyłącznie za pośrednictwem miejscowych oddziałów i delegatur RSW-Prasa-Książka-Ruch, w terminie do dnia 25 listopada na rok następny.

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę na wsi lub miejscowościach w których nie ma oddziałów RSW-Prasa-Książka-Ruch, winny opłacać prenumeratę w terenie właściwych urzędach pocztowych.

Prenumeratę krajową dla czytelników indywidualnych przyjmują urzędy pocztowe, listonosze i Centrala Kolportażu RSW-Prasa-Książka-Ruch, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, konto PKO 1-6-100020 w terminie do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych RSW-Prasa-Książka-Ruch, 00-840 Warszawa ul. Wronia 23, konto PKO nr 1-6-100024.

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, pojedynczych numerów i w kontynuacji; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław
w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa
w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

W następnym numerze:

Związki astronomii z fizyką
Uzmiennianie stałych

Dr Andrzej ROTKIEWICZ

Wielki matematyk angielski G. H. Hardy (zmarły w 1947 roku) napisał: „Elementarna teoria liczb powinna być uważana za jeden z najwłaściwszych przedmiotów w początkach wykształcenia matematycznego. Wymaga ona bardzo mało uprzedniej wiedzy, a przedmiot jej jest uchwytny i znajomy, metody rozumowania, które stosuje, są proste, ogólne i nieliczne, i nie ma sobie równej wśród nauk matematycznych w odwoływaniu się do naturalnej ludzkiej ciekawości”. A według opinii jednego z największych matematyków w historii, którego prace leżą u podstaw wielu współczesnych działów matematyki, matematyka niemieckiego Gaussa (1777–1855), „matematyka jest królową nauk, a teoria liczb jest królową matematyki”.

Przedmiotem teorii liczb są między innymi własności liczb pierwszych, a więc takich liczb naturalnych, które mają dokładnie dwa dzielniki naturalne, jak również na przykład teoria liczb zajmuje się rozwiązywaniem równań w liczbach całkowitych. Zagadnienia teorioliczbowe zawiązują zainteresowanie, jakie wzbudzają, nie temu, że mogą przyczynić się do postępu techniki nowoczesnej, lecz tajemnicy, jaką kryją w sobie liczby pierwsze, oraz trudnościom, jakie na przykład napotykamy przy rozwiązywaniu pewnych równań w liczbach całkowitych, których pokonanie wydaje się rzeczą niedostępną dla ludzkiej inteligencji. Teoria liczb, ta „wiecznie młoda” dziedziną matematyki, bo mająca wiele „wiecznie młodych” problemów, stanowi bardzo pociągający rezerwat dla tych, którzy chcą się odsunąć od cywilizacji współczesnej. Nie sposób w jednym artykule omówić tych wszystkich „wiecznie młodych” problemów. Zatrzymajmy się nad jednym z nich, historycznie bezsprzecznie najgłośniejszym, a zwanym „wielkim twierdzeniem Fermata”.

Piotr Fermat (1601–1665) był prawnikiem z Tuluzy; matematyką zajmował się z amatorstwa. Położył on bardzo duże zasługi w teorii liczb, a ponadto jest uważany, obok Leibniza i Newtona, za jednego z twórców rachunku różniczkowego. Otóż Fermat czytając dzieło matematyka greckiego Diofantosa (Diofantos z Aleksandrii urodził się około 250 lat przed naszą erą i był pierwszym, który w sposób systematyczny zajął się rozwiązywaniem równań w liczbach całkowitych) napisał na marginesie ustępu traktującego o rozłożeniu kwadratu liczby naturalnej na sumę dwóch kwadratów liczb naturalnych notatkę następującej treści: „Tymczasem zupełnie niemożliwe jest rozłożenie sześciianu na sumę dwóch sześcianów ani potęgi czwartego stopnia na sumę dwóch potęg czwartych stopni, ani w ogóle jakiegokolwiek potęgi wyższego stopnia na sumę dwóch liczb w tejże potędze. Znalazłem istotnie zadziwiający dowód tego twierdzenia, ale brak tu miejsca, aby go umieścić”. Tak więc Fermat sądził, że udowodnił twierdzenie nazwane później jego nazwiskiem. Jest to jednak mało prawdopodobne i wszyscy poważni matematycy są zdania, że Fermat dowodu poprawnego nie posiadał. W tym miejscu należy jednak podkreślić, że próby udowodnienia „wielkiego twierdzenia Fermata” sprzyjały powstaniu i rozwojowi bardzo głębokich metod badań matematycznych. Sam Fermat rzeczywiście znalazł dowód dla $n = 4$. Dla $n = 3$ dowód znalazł Euler (1707–1783), wielki matematyk szwajcarski (wydanie zbiorowe jego dzieł obejmuje czterdzieści kilka dużych tomów; był on dziesięciokrotnie nagradzany przez Paryską Akademię Nauk), lecz jego dowód był niekompletny. Największe zasługi przy badaniu problemu Fermata położył matematyk niemiecki Kummer (1810–1893), który przy badaniu tego zagadnienia wprowadził liczby algebraiczne powstające z p -tych pierwiastków z jedności, co dało początek algebraicznej teorii liczb. Badania Kummera zostały później uogólnione przez Dedekinda i Kroneckera. Kummer zauważył zjawisko niejednoznaczności rozkładu na czynniki nierozkładalne w ciałach $Q(Z_p)$, gdzie Z_p oznacza p -ty pierwiastek z jedności. Każdy element ciała $Q(Z_p)$ jest postaci:

$$a_0 + a_1 Z_p^1 + a_2 Z_p^2 + \dots + a_{p-1} Z_p^{p-1},$$

gdzie a_0, a_1, \dots, a_{p-1} są liczbami wymiernymi, $Z_p = e^{\frac{2\pi i}{p}}$.

W 1850 roku opublikował Kummer pracę, w której wyróżnił w ciałach $Q(Z_p)$ tzw. liczby idealne, przy pomocy których udało mu się stworzyć namiastkę twierdzenia o jednoznacznym rozkładzie na czynniki nierozkładalne, dzięki czemu w 1850 roku zdołał udowodnić następujące twierdzenie, zwane później „twierdzeniem Kummera”: Jeżeli $p > 2$ jest liczbą pierwszą regularną (liczby pierwsze regularne



nazywa się też liczbami pierwszymi Kummera), to równanie $x^p + y^p = z^p$ nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych x, y, z .

Liczba pierwsza $p > 2$ nazywa się regularną, jeśli

$$p^2 \nmid 1^k + 2^k + \dots + (p-1)^k \quad \text{dla } k = 2, 3, 4, \dots, p-1.$$

Symbol $a|b$ oznacza, że a jest dzielnikiem b , zaś symbol $a \nmid b$ oznacza, że a nie jest dzielnikiem b .

Czytelnik zechce sprawdzić, że liczby 3, 5 i 7 są regularne. Spośród liczb pierwszych nie przekraczających 100 wszystkie są regularne z wyjątkiem $p = 37, 59$ i 67. Do tej pory jednak nie wiemy, czy istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych regularnych. W 1915 roku K. L. Jensen udowodnił, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych nieregularnych. Spośród 302 liczb pierwszych < 2000 jest tylko 118 regularnych. Dziś wiemy, że równanie Fermata $x^n + y^n = z^n$ dla $2 < n < 25\,000$ nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych x, y, z . Ten ostatni wynik został osiągnięty przy użyciu różnych twierdzeń i maszyn matematycznych dopiero w r. 1967. W 1908 roku matematyk P. Wolfskehl z Darmstadtu zapisał Towarzystwu Naukowemu w Getyndze sto tysięcy marek, które miały być wypłacone jako nagroda temu, kto bądź znajdzie ogólny dowód twierdzenia Fermata, bądź wykaże jego fałszywość na jednym choćby przykładzie. Mimo że po 1918 roku nagroda ta uległa dewaluacji, wiele osób (przeważnie niematematyków) ogłaszało własnym nakładem coraz to nowe, ale stale błędne dowody tego twierdzenia. Jakkolwiek zrozumienie, o co idzie w wielkim twierdzeniu Fermata, wymaga zaledwie elementarnych wiadomości z arytmetyki, nie wynika stąd jednak, że istnieje elementarny dowód tego twierdzenia. F. Lindemann (ten sam, który w 1882 roku udowodnił przestępną liczbę π) opublikował w 1901 roku 17-stronicową rozprawę mającą zawierać długo poszukiwany dowód. Gdy mu wskazywano zasadniczy błąd, Lindemann nie zrażony spędził większą część następnych 7 lat na próbach usunięcia błędnej przesłanki, nie dającej się naprawić, i w roku 1907 ogłosił 13-stronicowy dowód, który jednak był pozorny wskutek drobnej omyłki na samym początku.

Chociaż Kummer nie był kandydatem do nagrody Akademii Francuskiej (złoty medal wartości 3 000 franków), ufundowanej w 1849 roku za ewentualny dowód „wielkiego twierdzenia Fermata”, jemu właśnie została ta nagroda przyznana za zasługi, jakie położył w dziedzinie liczb zespolonych.

Dickson w drugim tomie swej historii teorii liczb poświęca 46 stron druku samym sformułowaniom różnych twierdzeń związanych z „wielkim twierdzeniem Fermata”, wymienia ponad 300 prac napisanych na ten temat. Wśród kilkuset autorów (237) tych prac występują nazwiska tak sławnych matematyków, jak: Cauchy, Dedekind, Dirichlet, Euler, Fermat, Gauss, Hilbert, Kronecker, Kummer, Lagrange, Lebesgue, Legendre, Lindemann, Liouville, Lucas, Mertens, Mirimanoff, Poincaré, Van der Corput, Vandiver, Wieferich.

Spośród twierdzeń o elementarnym sformułowaniu warto wymienić następujące twierdzenia:

Twierdzenie Wiefericha (z roku 1909):

Jeśli istnieją liczby naturalne x, y, z spełniające równość $x^p + y^p = z^p$, gdzie p jest liczbą pierwszą > 2 , $(xyz, p) = 1$, wtedy $p^2 | 2^p - 2$.

Twierdzenie Mirimanoffa (z 1910 roku):

Przy założeniach poprzedniego twierdzenia mamy $p^2 | 3^p - 3$.

Wniosek z twierdzenia Fürtwanglera udowodniony przez różnych autorów:

Przy założeniach twierdzenia Wiefericha mamy $p^2 | a^p - a$ dla każdego a mniejszego od 44.

Korzystając z tego wniosku i maszyn matematycznych, matematyk amerykański Lehmer udowodnił, że w przypadku $(xyz, p) = 1$ „wielkie twierdzenie Fermata” jest prawdziwe dla wszystkich $p < 253\,747\,887$.

Jeśli $x^n + y^n = z^n$, $n > 2$, to oczywiście nie może być $x = y$, bo wtedy $2x^n = z^n$, co jest niemożliwe.

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie Grunerta z roku 1856 (dowód twierdzenia Grunerta był też tematem czwartego zadania na finałach dwudziestej drugiej Olimpiady Matematycznej w 1971 roku):

Jeśli liczby naturalne x, y, z, n spełniają warunki:

$$x^n + y^n = z^n, \quad n > 2, \quad \text{to } x > n \quad \text{i} \quad y > n.$$

Dowód:

Nie uszczuplając ogólności możemy założyć, że $x \leq y < z$.

Zatem wobec $x^n + y^n = z^n$ mamy

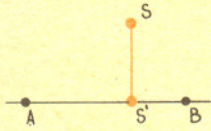
$$x^n = z^n - y^n = (z - y)(z^{n-1} + z^{n-2}y^1 + \dots + y^{n-1}) > 1 \cdot ny^{n-1} \geq nx^{n-1},$$

stąd $x > n$, a ponieważ $x \leq y$ więc także $y > n$.



Rozwiązanie zadania M. 30

Zauważmy najpierw, że szkoła powinna być wybudowana na prostej przechodzącej przez A i B , gdyż w przeciwnym przypadku, przy umieszczeniu jej w punkcie S byłoby oczywiście $AS' < AS$ i $S'B < SB$, a więc $160AS' + 90S'B < 60AS + 90SB$.



Nie może też ona leżeć zewnątrz odcinka AB . Niech odległość AB wynosi a , zaś odległość od A do szkoły — x . Wszystkie dzieci przebywają więc w drodze do szkoły odległość $60x + 90(a-x) = 90a - 30x = f(x)$. Funkcja $f(x)$ jest malejąca, a więc najmniejszą wartość przyjmuje dla możliwie największego x , to znaczy dla $x = a$. Szkołę więc należy wybudować we wsi B . Zauważmy, że gdyby liczby dzieci mieszkających w obydwu wioskach były równe, to szkołę można byłoby wybudować w dowolnym punkcie między A i B .

Czytelnik zechce się zastanowić, jak wygląda rozwiązanie analogicznego zadania w przypadku trzech wiosek.

Nierówność $y > n$ można dowieść inaczej:

Ponieważ $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2$ dla $n = 2, 3, \dots$, więc

$$y^n < x^n + y^n < 2y^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot y^n = \left(y + \frac{y}{n}\right)^n, \text{ czyli}$$

$$y^n < z^n < \left(y + \frac{y}{n}\right)^n, \text{ skąd } y < z < y + \frac{y}{n}, \text{ i, gdyby } y \leq n, \text{ to } y < z < y + 1, \text{ co jest}$$

nierozwiązywalne, bo nie istnieje liczba naturalna między dwiema kolejnymi liczbami naturalnymi.

Pomysł zastosowany w drugim dowodzie pozwala udowodnić następujące twierdzenie:

Jeśli $x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n = t^n$, gdzie x_1, x_2, \dots, x_k, t oznaczają liczby naturalne, $k \geq 2$ i $x_1 < x_2 < \dots < x_k$, to $x_k > n$.

Dowód:

Wobec $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ jest:

$$(1) \quad x_k \geq k.$$

Przypuśćmy, że $x_k \leq n$. Wobec (1) mamy $k \leq x_k \leq n$, skąd

$$(2) \quad n - k + 1 > 0.$$

Wobec $x_k \leq n$, $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ mamy:

$$(3) \quad x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n \leq x_k^n + (x_k - 1)^n + \dots + [x_k - (k - 1)]^n = x_k^n \left[1 + \left(1 - \frac{1}{x_k}\right)^n + \dots + \left(1 - \frac{k-1}{x_k}\right)^n \right] \leq x_k^n \left[1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n + \dots + \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^n \right].$$

Ponieważ $e^x > 1 + x$, dla każdego rzeczywistego x , więc $e^{\frac{x}{n}} > 1 + \frac{x}{n}$, skąd

$$e^x > \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \text{ dla } n = 1, 2, \dots; n > -x.$$

Zatem (3) daje

$$\begin{aligned} x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n &< x_k^n \left(1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \dots + \frac{1}{e^{k-1}}\right) < x_k^n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) = \\ &= 2x_k^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x_k^n = \left(x_k + \frac{x_k}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

Zatem

$$x_k^n < x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n < \left(x_k + \frac{x_k}{n}\right)^n$$

i wobec

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n = t^n$$

mamy

$$x_k^n < t^n < \left(x_k + \frac{x_k}{n}\right)^n,$$

skąd

$$x_k < t < x_k + \frac{x_k}{n}.$$

Zatem wobec $x_k \leq n$ jest $x_k < t < x_k + 1$, co jest oczywiście niemożliwe.

W związku z ostatnim twierdzeniem zauważmy, że Euler w 1778 roku wyraził przypuszczenie, że dla k i n naturalnych, spełniających nierówność $2 < k < n$, równanie

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n = x_{k+1}^n$$

nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych x_1, \dots, x_{k+1} .

Przypuszczenie to zostało obalone w 1966 roku.

Mamy mianowicie

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5.$$

Wynik ten został uzyskany przy pomocy maszyny OCD-66000, która to maszyna sprawdziła też, że każda piąta potęga mniejsza od 144^5 nie jest sumą czterech piątých potęg liczb naturalnych. Przypuszczenie Eulera po 188 latach zostało w ten sposób obalone. A może podobny los czeka „wielkie twierdzenie Fermata”? Nie wiadomo.

Dyskusje trwały i jednocześnie wykonywaliśmy pomiary, które podówczas nie miały tej precyzji, co obecnie, wobec niemożności śledzenia torów poza obrębem jednego płata emulsji fotograficznej. W każdym razie ustaliliśmy, że nawet przy niekorzystnym założeniu wydzielona energia jest co najmniej 10 razy większa niż najwyższe energie wzbudzenia spotykane w procesach jądrowych analizowanych powszechnie.

W tej nie wyjaśnionej sytuacji dwa razy dziennie chodziliśmy na kawę do nowo otwartej w Warszawie kawiarni na MDM, do „Niespodzianki”. I właśnie tam, w tej „Niespodziance”, przy którejś z rzędu kawie, nagle zaświtała nam myśl, że ta energia niewiele się różni od energii odpowiadającej anihilacji masy spoczynkowej mezonu pi, cząstki elementarnej odkrytej parę lat wcześniej. Wtedy wzięliśmy pod rozwagę nową hipotezę, że mezon pi związany siłami elektrycznymi jak elektron w atomie jest wyniesiony razem z fragmentem, a następnie unicestwia się wyzwalaając właśnie tak dużą energię. Hipoteza była niezwykle atrakcyjna, ale szanse wyniesienia tak związanego mezonu wydały nam się znów zbyt małe, choć nie byliśmy w stanie tego wówczas dobrze obliczyć.

Od tej jednak hipotezy już tylko krok dzielił nas od założenia, że to hiperon lambda rozpadający się na mezon i proton jest niezależnym trzecim składnikiem jądrowym w zaobserwowanym fragmencie. I tu otwarcie trzeba przyznać, że założenie nasze było ryzykowne, bo według ówczesnych przewidywań sądzono, iż ów hiperon, czy, jak go wówczas nazywano, cząstka V zero, wyprodukowany w szybkim akcie zderzenia, powinien równie szybko rozpaść się po znalezieniu się w innym jądrze.

Znów przyznam się, że trochę zlekceważyliśmy te obawy, może dlatego, że tak niewiele wiedziano wówczas o cząstkach elementarnych, a może dlatego, że wszystkie inne wyjaśnienia wydawały się nam znacznie mniej sensowne.

Przygotowaliśmy raport do druku i rozesłaliśmy listy do czołowych fizyków kilku krajów; nie pamiętam już do ilu, ale chyba do sześciu. Odpowiedziało niewielu. Pamiętam trzy odpowiedzi. Heisenberg napisał po prostu: „To bardzo interesujący pomysł”. Jeden ze znanych fizyków radził, by w całej dyskusji skreślić pomysł wiązania cząstki V zero, z której to sugestii na szczęście nie skorzystaliśmy. Trzeci napisał ciepły list, ale dopiero po roku, gdy naszą hipotezę potwierdzały już 3 inne obserwacje.

Powiem na koniec, że słuszność naszego zlekceważenia możliwości szybkiego rozpadu hiperonu znalazła wkrótce uzasadnienie w pięknych pracach Paisa i Gellmanna, którzy zauważyli, iż hiperony mają pewną specjalną cechę, nazwaną „dziwnością”, chroniącą je od szybkiego rozpadu. To chyba zamyka historię, którą miałem tu przedstawić.

Sądzę, że to opisałem może zbyt fachowo i że niejednemu z Czytelników przypomina to „Kobrze”, ale rzeczywiście jak w „Kobrze” dość często rozwiązanie poważnego problemu fizycznego wymaga dłuższej i wielostronnej analizy, eliminującej kolejno różne dopuszczalne interpretacje.



Zadania

Redaguje mgr Andrzej MAKOWSKI

M 28. Udowodnić, że jeżeli x jest taką liczbą naturalną, że $2x^2 + 7$ jest liczbą pierwszą, to x jest liczbą złożoną.

Rozwiązanie na str. 16.

M 29. Niech a będzie daną liczbą rzeczywistą różną od zera. Udowodnić, że jeżeli funkcje rzeczywiste zmiennej rzeczywistej f i g spełniają warunek $f(x) + f(a-x) = xg(x)$ dla każdej liczby rzeczywistej x , to funkcja g przyjmuje dla pewnego x wartość 0.

Rozwiązanie na str. 7.

M 30. W wiosce A jest 60 dzieci w wieku szkolnym, w wiosce B — 90. Gdzie należy zbudować szkołę (tylko dla dzieci z tych dwóch wiosek), tak by suma odległości przebywanych przez wszystkie dzieci w drodze do szkoły była najmniejsza (odległość wewnątrz każdej wsi pomijamy).
Rozwiązanie na str. 3.

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

F 10. Wiadomo, że na powierzchni przewodników panuje stały potencjał pola elektrostatycznego. Dzięki tej własności, nawet nie naładowany przewodnik umieszczony w polu elektrostatycznym wytwarza wokół siebie dodatkowe pole pochodzące od ładunków indukowanych na jego powierzchni. Rozważmy na przykład, jak zmieni się jednorodne pole elektrostatyczne, jeżeli umieścimy w nim nie naładowany przewodnik o kształcie kuli. Wykażcie, że w tym wypadku to dodatkowe pole jest równe polu, jakie wytwarzałby dipol umieszczony w środku kuli i skierowany zgodnie z kierunkiem pola jednorodnego.

Obliczcie wartość momentu dipolowego p , jeżeli promień kuli równa się r_0 , a natężenie pola jednorodnego E_0 .

Jak jest rozłożony ładunek indukowany na powierzchni kuli? Rozwiązanie na str. 15.



Mgr Tadeusz B. IWIŃSKI

Profesor S. zażądał przed laty usunięcia z tematów ustnego egzaminu wstępnego z matematyki pewnego zadania z zegarkiem w roli głównej: „Pojęcie «zegarek» do matematyki nie należy i nie mamy prawa na egzaminie z tego przedmiotu żądać od kandydata jakiegokolwiek wiedzy o zegarkach” — uzasadnił.

Omawialiśmy dotychczas problemy trapiące Leśników i Drzewiarzy, troszczyliśmy się o dochody Działkowicza i odzieraliśmy z wszelkiego uroku pewną grę w zapałki. Jak by na sprawę nie patrzeć — nie były to zagadnienia dające się bezpośrednio i w całości zaliczyć do matematyki (patrz obok). Siła matematyki polega jednak między innymi właśnie na tym, że pozwala ona ogołocić pewne problemy czysto praktyczne z całej fabuły, rozwiązać je w sferze czystej abstrakcji, a otrzymane rozwiązanie z powrotem przetłumaczyć na język praktyki. Niezwykle często okazuje się przy tym, że otrzymane rozwiązanie daje się zastosować do znacznie szerszej klasy problemów niż ten, który był rozwiązywany.

Odłożywszy więc na przyszłość rozstrzygnięcie problemu, czy i jak często opłaca się blefować w pokerze, zajmiemy się tym razem wyłącznie matematyką:

Krótki kurs gier 2×2

„Grą 2×2 ” nazywamy opis takiej sytuacji konfliktowej, w której każda ze stron dysponuje dwiema strategiami. Wyborów strategii gracze nie uzgadniają i dokonują ich niezależnie. Ostateczny rezultat gry, zwany wypłatą, zależy tylko od tego, jaka para strategii została wybrana. Zakładamy przy tym, że wypłaty przekazują sobie gracze: wygrana jednego jest jednocześnie przegrana drugiego. Wszystkie informacje o grze zawarte są w „macierzy wypłat” — tabelce podającej, jakie wypłaty pierwszego gracza przyporządkowane są każdej z czterech możliwych par strategii. Na rysunku obok symbole A_1, B_j oznaczają strategie graczy; symbole a, b, c i d — wypłaty dla gracza A. Wypłatami dla gracza B są, zgodnie z założeniem, liczby przeciwne: $-a, -b, -c$ i $-d$.

Rozwiązanie gry polega na wskazaniu każdemu z graczy takiej strategii, która zapewni mu największą, możliwą do osiągnięcia wypłatę — przy założeniu, że jego przeciwnik też gra bezbłędnie.

Sposób budowania rozwiązania gry zależy od postaci macierzy wypłat. Rozwiązanie jest szczególnie proste w wypadku, gdy jeden z graczy dysponuje **strategią dominującą**. W pierwszym z podanych obok przykładów strategią taką posiada gracz A: zastosowanie strategii A_1 daje mu większą wypłatę niż zastosowanie strategii A_2 , niezależnie od tego, co zrobi przeciwnik. Zatem A na pewno nie stosuje strategii dominowanej A_2 . Wiedząc to, gracz B nie może zastosować swej strategii B_1 , która przynosi mu przegrana 3. Rozwiązaniem gry jest więc para strategii (A_1, B_2) : gracz A musi przegrać 1. W drugim z przykładów strategia A_1 jest dominowana przez B_1 (pamiętamy, że wypłaty gracza B są liczbami przeciwnymi do umieszczonych w macierzy wypłat dla A). Rozwiązaniem gry jest więc para złożona z dominującej strategii gracza B i najlepszej obrony gracza A para (A_2, B_1) . Wynikiem gry jest wygrana 1 gracza A.

Zupełnie inaczej wygląda sprawa w takich grach 2×2 , które nie posiadają strategii dominującej. Żadna para strategii nie jest rozwiązaniem takiej gry (zadanie 1).

Tu krótka dygresja. Uważny Czytelnik «Deltę» zauważył zapewne, że w matematyce na ogół jest tak, iż jeśli czegoś nie ma, to się to coś szybko konstruuje: w zbiorze liczb wymiernych były dziury — zatkano je liczbami niewymiernymi («Delta» nr 1); liczby rzeczywiste nie pozwalały rozwiązać równania $x^2 = -1$, skonstruowano więc urojonego sprzymierzeńca («Delta» nr 3); istnieją funkcje ciągle nie posiadające pochodnej w żadnym punkcie — skonstruowano więc teorie pozwalające „różniczkować” nawet funkcje nieciągłe («Delta» nr 4).

W teorii gier postąpiono podobnie: skoro nie każda — taka nawet jak tu rozważane — prosta gra posiada parę strategii stanowiących rozwiązanie, trzeba było tak rozszerzyć pojęcie strategii, by wyeliminować to zasmucające zjawisko. Wprowadzono więc pojęcie strategii mieszanych. Formalnie biorąc strategia mieszana w grze 2×2 jest parą liczb $(x, 1-x)$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Interpretacja strategii mieszanej bywa, jak widzieliśmy, różna. W grze „Morra” («Delta» nr 6) liczby x oraz $1-x$ oznaczały częstości, z jakimi gracz stosuje odpowiednio swą pierwszą i drugą strategię przy wielokrotnym rozgrywaniu. W problemie Działkowicza («Delta» nr 4) strategia mieszana interpretowana była jako częściowe zastosowanie każdej z dwu strategii (w pojedynczej rozgrywce). Możliwe są inne jeszcze interpretacje tego pojęcia. Podstawowe (i jedyne) założenie dotyczące strategii mieszanych jest następujące: jeśli gracz stosuje strategię mieszaną $(x, 1-x)$, to otrzymuje za nią część x ($x \in \langle 0, 1 \rangle$) wypłaty wynikającej z zastosowania strategii pierwszej i część $1-x$ wypłaty wynikającej z zastosowania strategii drugiej

	Gracz B	
	B_1	B_2
Gracz A	A_1	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
	A_2	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Strategię mieszaną można np. rozumieć jako rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze strategii.



(założenie takie przyjmowaliśmy milcząco zarówno w przykładzie Działkowicza, jak i gry „Morra”). Z założenia tego łatwo wnioskujemy, że jeśli gracz A zastosuje strategię $(x, 1-x)$, a gracz B — strategię $(y, 1-y)$, to wynikająca z zastosowania tych strategii wypłata dla A wyniesie:

$$w(x, y) = axy + bx(1-y) + c(1-x)y + d(1-x)(1-y).$$

Sformułowana powyżej definicja rozwiązania gry nie traci sensu przy takim rozszerzeniu pojęcia strategii i pojęcia wypłaty, można więc dalej pytać o istnienie rozwiązania; okazuje się przy tym, że prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Podstawowe twierdzenie teorii gier 2×2 . Każda gra posiada rozwiązanie (w strategiach mieszanych).

Szkic dowodu: Dla gier posiadających strategię dominującą twierdzenie jest już udowodnione. Jeśli gra nie posiada strategii dominującej, to strategią optymalną gracza A jest $(p, 1-p)$, gdzie

$$p = \frac{d-c}{a+d-b-c},$$

a optymalną strategią gracza B jest $(q, 1-q)$, gdzie

$$q = \frac{d-b}{a+d-b-c}.$$

Pozostaje sprawdzić, że wskazana para strategii rzeczywiście jest rozwiązaniem. Sprawdzenie to jest treścią zadań 3 i 4. (Można też dowodzić inaczej — metodą analogiczną do zastosowanej przy rozwiązywaniu problemu Działkowicza). Twierdzenie to załatwia w zasadzie całą teorię gier 2×2 , ponieważ umożliwia nam rozwiązanie każdej takiej gry. Można jednak spróbować rozszerzyć tę teorię odrzucając na przykład założenie, że obaj gracze grają bezbłędnie. Można by wtedy spróbować rozstrzygnąć zagadnienie, które w podręcznikach teorii gier nie jest na ogół omawiane: jak wygrywać na błędach przeciwnika. Problemem tym — niezwykle interesującym z praktycznego punktu widzenia — postaramy się zająć w przyszłości.

Zadania

1. W pierwszym odcinku „sztuki wygrywania” (Delta» nr 2) wprowadziliśmy pojęcie strategii minimaksowych. Wiemy również, że jeśli strategie minimaksowe są w równowadze, to stanowią one rozwiązanie gry. Udowodnić, że jeśli w grze 2×2 strategie minimaksowe są w równowadze, to co najmniej jeden z graczy posiada strategię dominującą, a jest nią strategia minimaksowa.

2. Udowodnić, że jeśli gra 2×2 nie posiada rozwiązania w strategiach czystych, to $a+d \neq b+c$.

3. Sprawdzić, że strategia $(p, 1-p)$ gracza A (p — zdefiniowane w tekście) daje graczowi A wypłatę $v = \frac{ad-bc}{c+d-b-c}$ niezależną od tego, jaką strategię $(y, 1-y)$

stosuje gracz B. Wykazać również, że $w(x, q) = v$ niezależnie od tego, jaką strategię $(x, 1-x)$ stosuje gracz A.

4. Z wyników zadania 3 wywnioskować, że para strategii mieszanych $(p, 1-p)$ i $(q, 1-q)$ jest rozwiązaniem gry.

Rozwiązania na str. 13.

Problem

Zbudować algorytm (por. Algorytmy A. Skowrona) rozwiązywania gier 2×2 . Prosimy o nadsyłanie pomysłów.

Pomysł

Jak wyznaczyć czas trwania błysku lasera impulsowego? Odpowiedź jest bardzo prosta. Istnieją szybkie układy elektroniczne i odpowiednie oscylografiy pozwalające na rejestracje zdarzeń trwających kilka nanosekund ($1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$). Co jednak zrobić jeżeli w pracowni nie ma akurat potrzebnego przyrządu? Kupić — nie zawsze można zrealizować szybko zamówienie, pożyczyc — też jest to kłopotliwe. W tej sytuacji dobry pomysł pozwala czasem na pokonanie nieprzewidywanych na pozór trudności.

Oto historia z Zakładu Optyki Instytutu Fizyki Doświadczalnej UW. W połowie 1973 r. uruchomiono barwnikowy laser impulsowy (patrz «Delta» — 9). Dr Jerzy Krasiński i mgr Stanisław Majewski chcieli określić od razu długość trwania impulsu. Spodziewali się czasów trwania rzędu kilku lub kilkunastu ns. Potrzebnego urządzenia nie było pod ręką, mieli natomiast aparat fotograficzny, parę zwierciadeł, centymetr krawiecki oraz metalowy pręt. To wystarczyło. Pomyślcie przez chwilę, zanim przeczytacie na czym pomysł polegał (c.d. na str. 11).



Rozwiązanie zadania M. 29

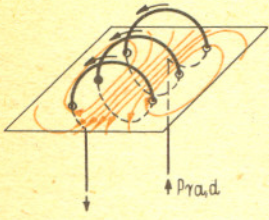
Niech funkcje f i g spełniają warunek $f(x) + f(a-x) = xg(x)$ dla każdego x .

W szczególności dla $x = 0$ i dla $x = a$ otrzymujemy $f(0) + f(a) = 0$, $f(a) + f(0) = ag(a)$.

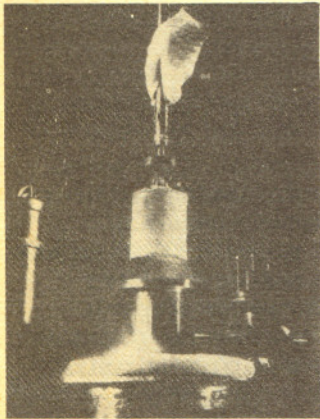
Z tych dwóch równości wynika $ag(a) = 0$

i wobec $a \neq 0$ otrzymujemy $g(a) = 0$.

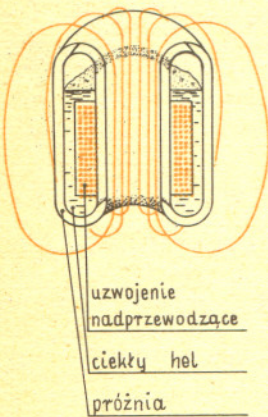
Dr Zbigniew PŁOCHOCKI



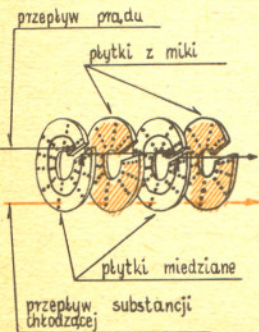
Rys. 1. Obraz pola magnetycznego solenoidu (zwojnicy)



Rys. 2. Widok elektromagnesu nadprzewodnikowego wyjęciu z kąpieli helowej



Rys. 3. Idea budowy elektromagnesu nadprzewodnikowego wytwarzającego pole w obszarze o temperaturze pokojowej



Rys. 4. Zasada budowy cewki typu Bittera. Rysunek pokazuje rozcięcie i rozsunięte dwa zwoje cewki

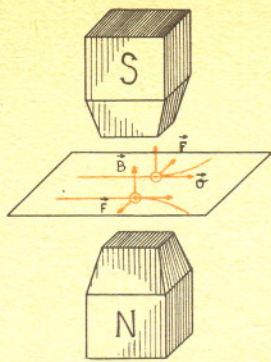
Od dawna fizyka bada własności materiałów i budowę materii obserwując między innymi różne efekty oddziaływania ciał i cząstek z polem magnetycznym. Do tych celów musi dysponować przede wszystkim źródłami pola magnetycznego o kontrolowanej indukcji. Pole magnetyczne Ziemi jest do tych celów za słabe — jego indukcja waha się od około $17 \mu\text{T}$ do niespełna $60 \mu\text{T}$ (mikrotesla to jedna milionowa tesla, a z kolei tesla to jednostka miary indukcji magnetycznej w układzie SI, równa 10 tysiącom gaussów). Także niezadowalające są magnesy trwałe, bo choć są one źródłami pola silniejszego niż ziemskie pole magnetyczne, to jednak praktycznie nie można ich regulować; stosowane są tylko sporadycznie. Wytwarzanie silniejszych pól w sposób kontrolowany wykorzystuje magnetyczny efekt prądu elektrycznego. Polega na tym, że wokół przewodnika z prądem pojawia się pole magnetyczne o liniach obejmujących przewodnik i indukcji proporcjonalnej (w danym punkcie przestrzeni) do natężenia prądu w przewodniku. Zwojnice z prądem wytwarzają więc pole magnetyczne (rys. 1) proporcjonalne do natężenia prądu płynącego przez uzwojenia i do liczby zwojów na jednostkę długości solenoidu.

Efekt można wzmocnić stosując rdzeń z miękkiego materiału ferromagnetycznego, najczęściej z żelaza. Materiał taki silnie magnesuje się w zewnętrznym polu magnetycznym, a po usunięciu pola rozmagnesowuje się praktycznie całkowicie (w przeciwieństwie do tzw. twardych materiałów ferromagnetycznych, które zachowują częściowo stan namagnesowania po usunięciu pola). Wypadkowe pole — zwojnicy i namagnesowanego rdzenia — jest dzięki temu silniejsze od pola samej zwojnicy. W praktyce rdzeń w postaci pierścienia lub ramy ze szczeliną owija się wielokrotnie przewodem; (dodatkowo stosuje się specjalne nabiegunniki, które kształtują odpowiednio pole w szczelinie). Doświadczenia przeprowadza się właśnie w obszarze między nabiegunnikami elektromagnesu.

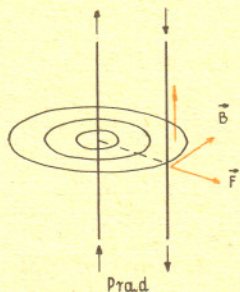
Elektromagnesy z rdzeniem ferromagnetycznym pozwalają bez trudu osiągać pole magnetyczne o indukcji do kilku tesli (kilkadziesiąt tysięcy gaussów). W zakresie silniejszych pól rdzenie ferromagnetyczne przestają spełniać swoją rolę. Przyczyną tego jest istnienie maksymalnego namagnesowania ferromagnetyków, zwanego namagnesowaniem nasycenia. Rdzeń niewiele już wtedy pomaga, a znacznie komplikuje budowę elektromagnesu. Dalsze zwiększenie indukcji wymaga więc przepuszczenia przez uzwojenia silniejszego prądu elektrycznego.

I tu pojawia się pierwsza trudność. Im bowiem silniejszy prąd, tym silniej grzeją się przewody. Trzeba je chłodzić. Wyjątek stanowią elektromagnesy o uzwojeniach wykonanych z nadprzewodników, czyli metali, które oziębione do kilku (niektóre kilkunastu, a ostatnio nawet do 23) kelwinów powyżej zera bezwzględnego przez zanurzenie ich w ciekłym helu — który pod normalnym ciśnieniem wrze w temperaturze nieco ponad 4 K, a pewne ostatnio odkryte nadprzewodniki w ciekłym wodorze, który normalnie wrze w temperaturze ok. 20 K — cechują się oporem elektrycznym dokładnie równym zeru. W nadprzewodniku nie wydzielają się więc ciepło (przy przepływie prądu). Elektromagnesy nadprzewodnikowe (rys. 2) pozwalają bez specjalnych trudności (rys. 3) wytwarzać pole o indukcji nieco ponad 10 T (sto kilogausów). Na drodze do uzyskania lepszych efektów stoją dwie przeszkody. Stan nadprzewodnictwa niszczy nie tylko podwyższona temperatura (ponad określony poziom, inny dla różnych nadprzewodników), ale też: 1° dostatecznie silny prąd i 2° dostatecznie silne pole magnetyczne. Nadprzewodnik staje się wtedy zwykłym przewodnikiem, w którym przepływowi prądu towarzyszy wydzielanie się ciepła.

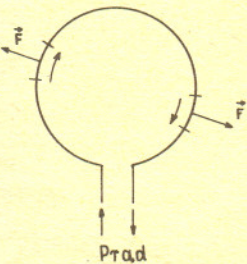
Być może w przyszłości zostaną odkryte materiały nadprzewodnikowe, z których będzie można wykonać uzwojenia elektromagnesów wytwarzających silniejsze pole magnetyczne. Do tego jednak czasu trzeba będzie stosować w tych celach zwykłe przewody i chłodzić je. Najprostszym wyjściem z sytuacji jest zastąpienie drutów po prostu rurkami miedzianymi, przez które podczas pracy elektromagnesu przepływa woda. Rurki miedziane chłodzone wodą nie stwarzają jednak zbyt wielkich perspektyw. Konieczna jest szczególna geometria cewki, tak by miała ona mały opór elektryczny i dopuszcziała intensywne chłodzenie. Najpopularniejszym rozwiązaniem stosowanym obecnie są tzw. cewki typu Bittera (rys. 4), które mają mniejszy opór elektryczny niż cewki nawijane z drutu (o tej samej objętości). Za ich pomocą wytwarza się pola o indukcji nawet do 20 tesli (200 kilogausów). Udoskonalone cewki Bittera pozwalają osiągnąć nawet 25 tesli.



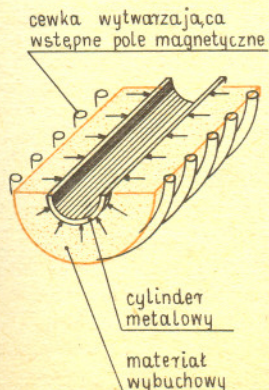
Rys. 6. Pole magnetyczne o indukcji B działa na cząstkę poruszającą się z prędkością v siłą Lorentza F , prostopadłą do wektora prędkości, i do wektora indukcji magnetycznej. Wartość tej siły jest proporcjonalna do wartości obydwu poprzecznych wektorów, a zwrot zależy od znaku ładunku cząstki



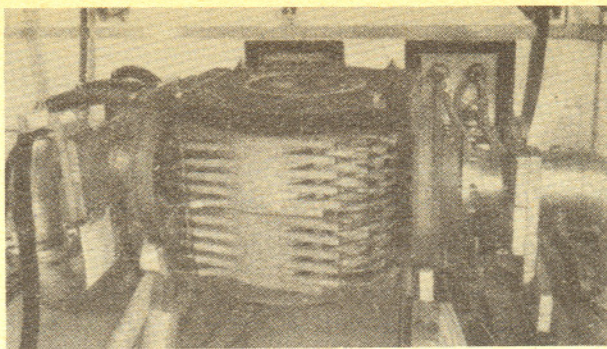
Rys. 7. Odpychanie prawego przewodu przez lewy to wynik działania siły Lorentza F na elektrony poruszające się w pewnym przewodzie (pionowa strzałka)



Rys. 8. Na każdy element obwodu kołowego z prądem działa skierowana od środka obwodu siła magnetodynamiczna



Rys. 9. Idea budowy głowicy elektromagnesu implozyjnego. Strzałki pokazują charakter implozji



Rys. 5. Ogólny widok elektromagnesu Montgomery'ego

I to wydaje się kresem tej metody. Jaka jest skala problemu, niech świadczą liczby. Najsilniejszy obecnie elektromagnes wytwarzający stałe pole magnetyczne (rys. 5), zbudowany przez D. B. Montgomery'ego w National Magnet Laboratory w USA, to zespół cewek miedzianych o masie ponad 4 tony, o średnicy zewnętrznej 90 cm i wewnętrznej niespełna 5 cm. W czasie pracy pobiera on moc 16 megawatów, a chłodzącą go wodę przepuszcza się przez cewki z szybkością 7,5 tysiąca litrów na minutę!

Trudności z szybkim chłodzeniem cewek można jednak ominąć, gdy przez cewki będzie się przepuszczać prąd wprawdzie niezwykle silny, ale krótkotrwały. W praktyce wykorzystuje się do tego dużą baterię kondensatorów, naładowaną do napięcia rzędu kilku lub nawet kilkunastu kilowoltów. W czasie rozładowania baterii przez zwarcie jej cewką elektromagnesu płynie przez cewkę prąd o natężeniu dochodzącym do setek kiloamperów. W ciągu ułamków milisekundy cewka wytwarza wtedy pole indukcji aż do 70 tesli (0,7 megagausa). Cewkom nie grozi stopienie się wskutek wydzielającego się z nich ciepła, gdyż w sumie wydziela się go stosunkowo niewiele.

Jednakże i elektromagnes impulsowe stają w końcu przed naturalną barierą, jaką stanowią potężne siły magnetodynamiczne, rozsadzające cewki. Dwa równoległe przewody prostoliniowe, przez które płynie prąd w przeciwnych kierunkach, odpychają się. Przyczyną tego odpychania jest siła Lorentza (rys. 6), jaką pole magnetyczne jednego przewodu działa na elektrony płynące drugim przewodem (rys. 7). Siła magnetodynamiczna działa też na poszczególne odcinki kołowego przewodu z prądem (rys. 8). Obwód kołowy jest więc jakby rozsadzany od wewnątrz przez swego rodzaju ciśnienie magnetyczne. Im silniejszy prąd płynie przez cewkę, tym większe jest ciśnienie magnetyczne. Na przykład siły magnetodynamiczne działające od środka na cewkę w elektromagnesie impulsowym, wytwarzającym pole o indukcji 50 tesli, są równoważne ciśnieniu wynoszącemu aż około miliarda paskali, czyli niutonów na metr kwadratowy (tzn. ok. 10 tysięcy atmosfer). Ciśnienie magnetyczne wzrasta proporcjonalnie do kwadratu indukcji magnetycznej pola. Kiedy indukcja osiąga wartość ok. 75 tesli, ciśnienie magnetyczne przekracza już wytrzymałość mechaniczną cewki. Materiał zaczyna odkształcać się plastycznie. Przekroczenie tej granicy stało się możliwe dzięki opracowaniu techniki implozyjnej wytwarzania pola magnetycznego. Idea tej metody jest, w uproszczeniu, następująca: rurę cylindryczną wielkości mniej więcej półlitrowej butelki okłada się materiałem wybuchowym (rys. 9), całość owija się cewką z drutu. Przez cewkę przepuszcza się impulsowy prąd, który wewnątrz cewki wytwarza pole magnetyczne o indukcji kilku tesli (kilkadziesiąt kilogausów). Równocześnie odpala się materiał wybuchowy. Powstaje silna implozja, czyli zbieżna ku osi urządzenia fala uderzeniowa biegnąca z szybkością kilku kilometrów na sekundę; fala ta w ciągu kilkunastu mikrosekund zgniata cylinder wraz z „zawartym w nim” polem magnetycznym, wytworzonym przez cewkę. Cylinder metalowy przypomina bardziej sito niż szczelne naczynie na pole magnetyczne. Jednakże przy bardzo szybkim zgniataniu tego „sita” pole nie zdąży całkowicie zeń wypłynąć. Dzięki takiemu „sprasowaniu” pola jego indukcja osiąga wartość setek tesli (kilku megagausów)! W specjalnych elektromagnesach implozyjnych, pracujących w niewielu jeszcze laboratoriach na świecie, uzyskać można pole o indukcji nawet 2000 tesli! W Polsce elektromagnes implozyjne zbudowano w Wojskowej Akademii Technicznej w Warszawie. Oczywiście, metoda implozji jest skomplikowana i wymaga specjalnych warunków laboratoryjnych. Jest więc sens stosować ją tylko wówczas, gdy supersilne pole magnetyczne jest rzeczywiście niezbędne. A taka właśnie sytuacja powstaje w badaniach mających na celu przeprowadzenie kontrolowanej reakcji termojądrowej. Panuje obecnie pogląd, że brak elektromagnesów wytwarzających pole o indukcji co najmniej kilkuset tesli może znacznie opóźnić, a nawet wręcz uniemożliwić przeprowadzenie reakcji termojądrowej w sposób kontrolowany.

MINI — TERMOFOR albo ILE WYNOŚI CIEPŁO KRZEPNIĘCIA UTRWALACZA?

Doświadczenie, które Wam tym razem proponuję, jest bardzo proste.

W odróżnieniu od większości naszych poprzednich eksperymentów nie będziemy niczego budować. Tak się bowiem składa, że mini-termofory są produkowane fabrycznie, i to przez zakład, który najprawdopodobniej nawet tego nie podejrzewa, a mianowicie „Foton” z Bydgoszczy. Tak, nie mylicie się, jest to po prostu utrwalacz fotograficzny, bo skąd by się inaczej wziął w tytule. Ścisłej mówiąc, chodzi mi o główny składnik utrwalacza: tiosiarczan sodu. Na pewno domyślicie się też, co z nim będziemy robić: stopimy go mianowicie zanurzając całą plastikową torebkę (bez otwierania!) w gorącej wodzie i... termoforek gotowy. Dzięki dużej wartości ciepła krzepnięcia torebka z utrwalaczem będzie pozostawała przez dłuższy czas (do pół godziny) bardzo ciepła, dopóki cały tiosiarczan nie zestali się. Oczywiście niewielkie rozmiary naszego mini-termofora ograniczają jego zastosowanie na przykład do rozgrzewania okolicy bolącego zęba.

TO TYLKO TYLE?

— zapytacie rozczarowani. Nie, najciekawsze jeszcze przed nami. Otóż tiosiarczan sodu, jeżeli tylko jest wystarczająco czysty, można łatwo przechłodzić, to znaczy obniżyć jego temperaturę poniżej punktu krzepnięcia zachowując go w stanie ciekłym. Taki stan nie jest stanem równowagi i wystarczy wrzucić do przechłodzonej cieczy kryształek lub wstrząsnąć nią silnie, a zacznie się gwałtowna krystalizacja. W wyniku wydzielania się ciepła krzepnięcia, temperatura podniesie się szybko do punktu krzepnięcia ($+48^{\circ}\text{C}$) i będzie utrzymywać tę wartość do całkowitego zestalenia się tiosiarczanu. A więc wiemy już, co należy robić. Po całkowitym (!) stopieniu tiosiarczanu odkładamy woreczek w spokojne miejsce. Po ostygnięciu do temperatury pokojowej zawartość woreczka powinna pozostać w stanie ciekłym. W razie nagłej potrzeby ulżenia cierpiącej osobie lub zademonstrowania sztuki przed zgromadzoną w tym celu publicznością bierzemy do ręki woreczek i wypowiadając magiczne zaklęcia potrząśamy nim silnie aż do skutku, to znaczy do rozpoczęcia krystalizacji. Mini-termofor rozgrzeje się sam! W razie kupienia utrwalacza w innym opakowaniu lub jeśli woreczek okaże się nieszczelny, możecie przesypać tiosiarczan do butelki, najlepiej plastikowej, na przykład po szamponie, czysto wymytej. Kupujemy jednak tylko taki utrwalacz, który składa się z dwóch części — ta większa to tiosiarczan sodu.

A CO Z TYM CIEPŁEM KRZEPNIĘCIA?

— słyszę już pytanie. Jest duże, ale jakie? Spróbujmy je zmierzyć. W tym celu potrzebna nam będzie już bardziej skomplikowana aparatura, a mianowicie termometr (ze skalą co najmniej do $+50^{\circ}\text{C}$) i termos. Do termosu nalewamy gorącą wodę i wkładamy torebkę z tiosiarczanem, a następnie, w razie potrzeby, zmieniamy gorącą wodę tak, aby osiągnąć stopień praktycznie całego tiosiarczanu. Odrobina powinna pozostać tym razem nie stopiona, aby uniknąć przechłodzenia. Wkładamy termometr — temperatura zawartości termosu będzie równa temperaturze krzepnięcia. Zatykamy teraz wylot termosu watą, aby zmniejszyć parowanie wody, i mierzymy, ile czasu t_x upłynie do chwili całkowitego zestalenia tiosiarczanu. Od tego momentu temperatura zacznie się obniżać (rys. 1). W czasie krzepnięcia wydziela się ciepło

$$Q = mc_k,$$

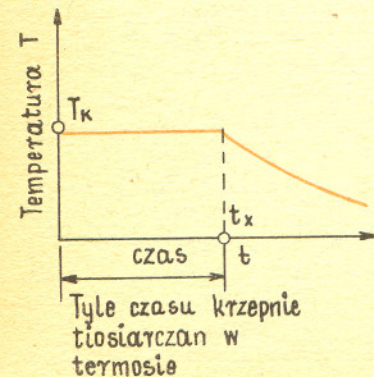
gdzie m jest masą tiosiarczanu, a c_k jego ciepłem krzepnięcia. To ciepło odpływa z termosu do otoczenia. Gdybyśmy znali szybkość odpływu ciepła z termosu, czyli

ilość odpływającego ciepła na jednostkę czasu $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$, moglibyśmy obliczyć ciepło

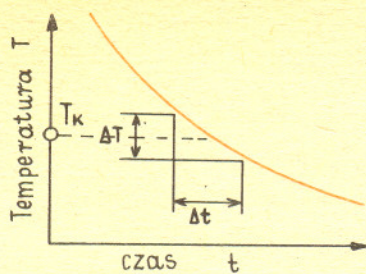
krzepnięcia c_k :

$$c_k = \frac{Q}{m} = \frac{t_x}{m} \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Dla wyznaczenia $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ sporządzimy wykres stygnięcia termosu napełnionego



Rys. 1



Rys. 2

gorącą wodą, to znaczy zależność jego temperatury od czasu (pamiętamy o zatkaniu jego wylotu wata). Wykres będzie wyglądał mniej więcej jak na rys. 2. Ilość odpływającego ciepła

$$\Delta Q = (m_w c_w + m_t c_t) \Delta T,$$

gdzie m_w , c_w , m_t oraz c_t oznaczają masę i ciepło właściwe wody oraz wewnętrznej części termosu. W takim razie określając z wykresu szybkość spadku

temperatury w punkcie krępowienia $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ możemy znaleźć szybkość odpływu ciepła:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = (m_w c_w + m_t c_t) \frac{\Delta T}{\Delta t}.$$

Szybkość odpływu ciepła zależy tylko od różnicy temperatur zawartości termosu i otoczenia. Znalazona w ten sposób szybkość odpływu ciepła jest więc taka sama, jak szybkość odpływu ciepła z termosu przy krępowieniu termosu, czyli jest wartością potrzebną do obliczenia ciepła krępowienia. Podstawiając otrzymujemy:

$$c_k = \frac{t_x}{m} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{t_x}{m} (m_w c_w + m_t c_t) \frac{\Delta T}{\Delta t}.$$

Ciepło właściwe wody i szkła znajdujemy w tabelach. Dla określenia masy wewnętrznej części termosu wystarczy do naszych celów przyjąć, że jest ona równa około jednej trzeciej całkowitej masy szklanego wkładu, który po rozmontowaniu termosu możemy zważyć (ostrożnie, grozi implozją!) na wadze w szkole lub w sklepie.

Życzę Wam sukcesów w badaniach. O wynikach nie zapomnijcie mnie zawiadomić listownie (adres Redakcji podajemy na II stronie okładki). Oczekuję też, jak zwykle, Waszych uwag krytycznych i propozycji co do przyszłej zawartości naszej rubryki.

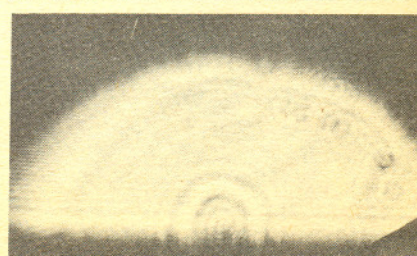
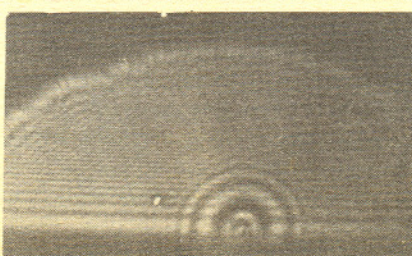
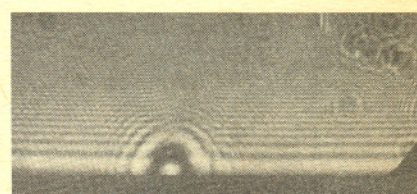
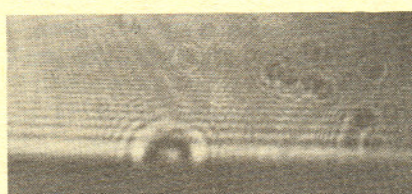
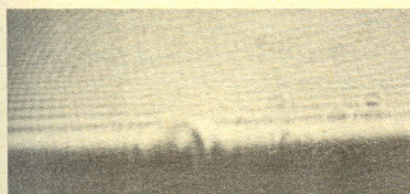
Dok. pomysłu

Oto schemat doświadczenia. Wiązka impulsowego lasera azotowego pompuje laser barwnikowy, który tym samym jest też laserem impulsowym. Wiązkę z lasera barwnikowego dzielimy przy pomocy zwierciadła półprzezroczystego na dwie części. Część A ogniskujemy na powierzchni metalu M. Część B prowadzimy po pokoju po dłuższej ale dobrze zmierzonej drodze i oświetlamy nią z boku miejsce na metalu, na które pada ogniskowana wiązka A. Metal fotografujemy aparatem P o otwartej stale migawce.

Każdy impuls z lasera barwnikowego ogniskowany na metalu powoduje stopienie się i wyparowanie drobnych jego ilości. Wokół punktu padania powstaje gorąca plazma, której rozmiary zwiększają się w miarę trwania impulsu. Zmieniając opóźnienie (a więc różnice dróg przebytych przez wiązkę B i A) możemy fotografować plazmę, a właściwie figury interferencyjne powstające przy przechodzeniu przez nią wiązki B w różnych odstępach czasu od początku impulsu.

Popatrzmy na zdjęcia. Różnica dróg wynosi odpowiednio 108 cm, 248 cm, 400 cm, 630 cm, 950 cm, 1920 cm, co odpowiada opóźnieniom czasowym 3,6 ns, 8,2 ns, 13,3 ns, 21 ns, 31,6 ns, 64 ns. Obserwując rozmiary plazmy w funkcji czasu stwierdzamy, że po początkowym wzroście rozmiary ustalają się. Ustalenie się rozmiarów oznacza, że do plazmy nie dostarczamy już energii a więc, że błysk się skończył. W opisywanym przypadku rozmiary plazmy nie powiększą się przy opóźnieniu powyżej 8 ns. Można więc powiedzieć, że czas trwania impulsu laserowego jest rzędu 10 ns. Zmiana rozmiarów plazmy w powyższych 10 ns pozwala ocenić szybkość wzrostu na 100 km/s.

$$t = \frac{s}{c}, c \approx 300 \text{ tys. km/s}$$



Prof. dr Andrzej MOSTOWSKI, członek rzeczywisty PAN

Według *Malej Encyklopedii Powszechnej* (PWN, Warszawa 1952, s. 18) algorytm jest to „określona metoda postępowania w celu rozwiązania danego zadania rachunkowego, np. algorytm znajdowania pierwiastków kwadratowych”. Słowo „algorytm” jest zniekształconym nazwiskiem astronoma Muhammeda ibn Musa Alchwarizmi, pochodzącego z Uzbekistanu; żył on w pierwszej połowie IX wieku, a działał na dworze kalifa w Bagdadzie. W roku 830 napisał on książkę pt. *Hisāb al-djabr wa'l-mukābala* (czyli nauka o redukcji i przeniesieniach), w której wyłożył znane wówczas wiadomości o tym, co — pod wpływem jego książki — nazwano potem algebrą. Książka ta odegrała w historii matematyki dużą rolę: dzięki niej odkrycia matematyków hinduskich, a w szczególności używane powszechnie dzisiaj cyfry oraz system dziesiętny zapisywania liczb naturalnych, przyjęły się w matematyce arabskiej i w konsekwencji — europejskiej. Umiejętność wykonywania prostych czynności rachunkowych rozwijała się wolno. Znane i powszechnie dziś używane algorytmy, takie jak algorytm dodawania lub algorytm mnożenia liczb zapisanych w układzie dziesiętnym, przyjęły się dopiero w wieku piętnastym.

Dziś nie zaliczamy tych umiejętności do poważnej matematyki. Uczymy się ich w bardzo młodym wieku i traktujemy je jako zupełnie oczywiste. W czasach Alchwarizmiego było inaczej. Formułowanie prostych algorytmów było wtedy poważną i potrzebną działalnością matematyka, głównie dlatego, że system dziesiętny nie był rozpowszechniony.

Niektóre algorytmy są łatwe i znane każdemu, jak np. algorytmy dodawania i mnożenia w układzie dziesiętnym. Łatwo je przeformułować tak, by stosowały się do układu dwójkowego lub jakiegokolwiek innego. Inne algorytmy są trochę trudniejsze, jak na przykład algorytm obliczania pierwiastka kwadratowego albo algorytm pozwalający z rozwinięcia dziesiętnego przechodzić do rozwinięcia dwójkowego. Ale proszę się zastanowić nad algorytmem obliczania pierwiastka kwadratowego z liczby zapisanej w układzie dwójkowym. Na pewno trzeba się trochę pomęczyć, zanim się taki algorytm znajdzie (jest on opisany w książce I. Floresa, *Arytmetyka maszyn cyfrowych*, Warszawa 1970, WNT, ale kto ma poczucie humoru i zna angielski, niech lepiej zajrzy do książki: Ian Syng, *Kandelman's Krim, A realistic fantasy*, London 1957, Jonathan Cape, s. 104). A oto jeszcze jeden niebanalny przykład algorytmu: postępowanie pozwalające wyznaczać kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby π . W zasadzie algorytm taki znalazł już Archimedes.

W wielu przypadkach nie wiemy, czy dane zadanie rachunkowe daje się rozwiązać przy pomocy algorytmu, czy istnieje „określona metoda postępowania”, pozwalająca wyznaczać szukane wielkości. Następujący przykład, w którym taka metoda zapewne istnieje, pochodzi od słynnego matematyka holenderskiego L. E. J. Brouwera (1881–1966): wyznaczyć kolejne liczby n , takie że w rozwinięciu dziesiętnym liczby π stoi jedna za drugą n cyfr 7. Nie wiemy, czy np. 7 jest taką liczbą, i nie mamy pojęcia, jak na to pytanie odpowiedzieć.

Jakkolwiek przypuszczamy, że nie ma algorytmu, który pozwalałby na wyznaczenie tych liczb, to dowodu na to nie posiadamy. Jeśli chcemy na serio odpowiedzieć na pytanie, czy jakieś zadanie daje się rozwiązywać przy pomocy algorytmu, musimy najpierw podać ścisłą matematyczną definicję algorytmu. Tym problemem zajmowano się intensywnie w trzydziestych latach obecnego wieku i zaproponowano szereg definicji, które zresztą wszystkie okazały się równoważne. Naszkicujemy tu pierwszą i chyba najbardziej znaną definicję, pochodzącą od angielskiego matematyka A. M. Turinga (1912–1954).

Przede wszystkim musimy uświadomić sobie, że każdy algorytm jest przepisem na przekształcanie wyrażeń. Na przykład algorytm dodawania liczb zapisanych w układzie dwójkowym pozwala na uzyskanie z dwóch ciągów zer i jedynek nowego takiego ciągu; podobnie jest dla wszystkich innych algorytmów wspomnianych wyżej. Dlatego Turing opisując abstrakcyjne pojęcie algorytmu wyobraża sobie dwustronnie nieskończoną taśmę podzieloną na pola, z których każde zajęte jest przez pewien symbol. Dopuszczamy tylko skończoną ilość symboli s_0, s_1, \dots, s_N , przy czym s_0 możemy uważać za symbol „pusty”, tj. brak jakiegokolwiek symbolu na polu uważamy za równoznaczne z tym, że na polu tym figuruje symbol s_0 . W każdej chwili tylko skończona ilość pól na taśmie jest zajęta przez symbole różne od s_0 .

Taśma jest częścią urządzenia, nazywanego „maszyną Turinga”. Maszyna ta



1. Jeśli strategie minimaksowe są w równowadze, to istnieje taka wypłata, która jest jednocześnie najmniejszą w wierszu i największą w kolumnie. Przypuśćmy, że jest nią a . Wtedy $c < a < b$. Jeśli teraz $d > c$, to B_1 jest dominująca (pamiętamy, że wypłaty dla B mają przeciwny znaki): jeśli $c > d$, to tym bardziej $b > d$ i A_1 jest dominująca.

W pozostałych przypadkach — analogicznie.

2. Jeśli $a + d = b + c$, to albo $a < b$ i $c < d$, albo $a > b$ i $c > d$. W pierwszym przypadku B_1 jest dominująca, w drugim — B_2 jest dominowana, a z założenia nie ma takich strategii.

3. $w(p, y) = ap + c(1-p)y + (bp + d(1-p))(1-y)$.

Łatwo sprawdzamy, że $ap + c(1-p) = bp + d(1-p) = v$, stąd $w(p, y) = v \cdot y + v(1-y) = v$. Dla $w(x, q)$ — analogicznie.

4. Jeśli B stosuje jakąkolwiek strategię, to A stosując strategię $(p, 1-p)$ może zapewnić sobie wypłatę v i nie może zapewnić wypłaty większej. Z drugiej strony B , stosując strategię $(q, 1-q)$, zapewnia sobie to, że A nie otrzyma wypłaty większej niż v .

działa, wykonując kolejno poszczególne kroki; w każdej jednostce czasu maszyna wykonuje jeden krok.

Turing zakłada, że w każdej chwili maszyna znajduje się w pewnym stanie, przy czym ilość możliwych stanów jest skończona. Oznaczmy te stany symbolami q_0, q_1, \dots, q_p . W konkretnej realizacji technicznej stany maszyny są wyznaczone przez wzajemne położenia jej części, a więc dźwignien, kół etc., lub też przez stany elektryczne albo magnetyczne tych jej części, które działają na zasadach elektromagnetycznych. Przy opisie abstrakcyjnym nie musimy się zastanawiać, czym konkretnie są stany. Wystarczy wiedzieć, że w każdej chwili maszyna znajduje się w pewnym stanie.

Zakładamy dalej, że maszyna jest wyposażona w urządzenie, zwane głowicą, która w każdej chwili obserwuje jedno z pól taśmy. Pole to jest w tej chwili wyróżnione. Maszyna jest w stanie wykonywać następujące czynności: (L) — przesunąć taśmę o jedno pole w lewo; (P) — przesunąć taśmę o jedno pole w prawo; (D_j) — usunąć symbol znajdujący się na polu wyróżnionym i zastąpić go symbolem s_j ($j = 0, 1, \dots, N$). Przy czynnościach (L) i (P) następuje zmiana wyróżnionego pola, natomiast przy czynnościach (D_0), ..., (D_N) to samo pole jest wyróżnione po dokonaniu czynności, jakie były wyróżnione przed jej wykonaniem.

Jakie czynności maszyna będzie wykonywać i w jakim porządku, zależy od instrukcji, które musimy ustalić przed uruchomieniem maszyny. Instrukcja składa się z dwu części: warunku, który ustala, kiedy instrukcję można wykonać, oraz instrukcji właściwej. Warunek ma zawsze postać: „jeśli jesteś w stanie q_i , a na polu wyróżnionym jest symbol s_h ”, instrukcja właściwa ma jedną z trzech postaci: „wykonaj czynność (L) i przejdź do stanu q_k ” albo „wykonaj czynność (P) i przejdź do stanu q_k ”, albo „wykonaj czynność (D_j) i przejdź do stanu q_k ”. Ostatecznie więc każdą instrukcję możemy zapisać w jednej z następujących postaci: $q_i s_h P q_k$, $q_i s_h L q_k$, $q_i s_h s_j q_k$, przy czym dwa pierwsze symbole $q_i s_h$ określają warunek wykonalności, a dwa ostatnie tworzą instrukcję właściwą.

Działanie maszyny jest określone przez program, to jest skończony zbiór instrukcji. Instrukcje te nie mogą być zupełnie dowolne, nie możemy bowiem udzielać maszynie dwu sprzecznych instrukcji. Gdybyśmy w programie mieli na przykład instrukcje $q_1 s_1 L q_2$ oraz $q_1 s_1 P q_2$, to maszyna znajdująca się w stanie q_1 z symbolem s_1 na polu wyróżnionym nie wiedziałaby, czy ma wykonać czynność (P), czy (L). Żądamy zatem, aby w programie nie znalazły się dwie różne instrukcje o tych samych warunkach.

Możemy teraz opisać działanie maszyny. Umieszczamy najpierw na taśmie dowolne symbole spośród s_0, s_1, \dots, s_N , tak aby tylko skończona liczba symboli była różna od s_0 . Ciąg tych symboli tworzy tzw. początkowy stan taśmy, albo krótko:

„wejście”. Przyjmujemy umownie, że stanem maszyny w chwili początkowej jest q_0 i że polem wyróżnionym jest ostatnie pole po prawej stronie taśmy, zajęte przez symbol różny od s_0 .

Z chwilą uruchomienia maszyny wyszukuje ona w programie instrukcję, którą może zastosować, tj. taką, że jej warunki zgadzają się ze stanem, w jakim maszyna się znajduje, i z symbolem na polu wyróżnionym.

Po wykonaniu czynności wskazanej przez instrukcję i przejściu do nowego stanu, wyznaczonego przez instrukcję, maszyna znów wyszukuje instrukcję, która daje się zastosować, i powtarza to postępowanie tak długo, jak to jest możliwe.

Może się zdarzyć, że po wykonaniu pewnej ilości poruszeń maszyna nie znajdzie już instrukcji, którą mogłaby wykonać. W tym przypadku maszyna zatrzymuje się. Ciąg symboli figurujący na taśmie w końcowej chwili działania maszyny, czyli tzw. „wyjście”, jest wynikiem algorytmu określonego przez maszynę, zastosowanego do wejścia. Jeśli oznaczmy przez M maszynę, a przez w jej wejście, to wyjście oznaczamy przez $M(w)$.

Druga możliwość jest taka, że maszyna zawsze znajduje instrukcję dającą się zastosować. Nie zatrzymuje się ona wtedy nigdy. Mówimy, że algorytm opisany przez maszynę nie daje się zastosować do wejścia, albo że $M(w)$ jest nieokreślone. Jako prosty przykład określimy maszynę opisującą algorytm dodawania jedynek do liczby zapisanej w rozwinięciu dwójkowym. Algorytm ten jest, jak wiemy, następujący: jeśli ostatnią cyfrą jest 0, to zastępujemy ją przez 1, poprzednich zaś cyfr nie zmieniamy; jeśli ostatnią cyfrą jest 1, to zmieniamy ją na 0 i powtarzamy opisane postępowanie z przedostatnią cyfrą. Ten proces kontynuujemy aż do wyczerpania wszystkich cyfr.

Aby opisać ten algorytm przy pomocy maszyny Turinga, musimy mieć 3 symbole: $s_0, 0, 1$ oraz 3 stany: q_0 (stan, w którym maszyna zmienia cyfrę na polu wyróżnionym), q_1 (stan, w którym maszyna przesuwając taśmę nie mając jedynek do „przeniesienia”), q_2 (stan, w którym maszyna przesuwając taśmę mając jedynek do „przeniesienia”).

Program maszyny składa się z 6 instrukcji:

$$q_0s_01q_2, \quad q_001q_1, \quad q_010q_2, \quad q_10Pq_1, \quad q_11Pq_1, \quad q_20Pq_0.$$

Przypuśćmy np., że wejściem maszyny jest ciąg 1010. Stany maszyny i symbole na taśmie są wówczas następujące („tłusta” czcionka oznacza pole wyróżnione):

$$(1) 1010 q_0, \quad (2) 1011q_1, \quad (3) 1011q_1, \quad (4) 1011q_1, \quad (5) 1011q_1, \quad (6) s_0 1011q_1.$$

Jeśli natomiast wejściem jest ciąg 1111, to działanie maszyny przebiega następująco:

$$(1) 1111q_0, \quad (2) 1110q_2, \quad (3) 1110q_0, \quad (4) 1100q_2, \quad (5) 1100q_0, \\ (6) 1000q_2, \quad (7) 1000q_0, \quad (8) 0000q_2, \quad (9) s_0 0000q_0, \quad (10) 10000q_2.$$

Podany tu przykład jest niezwykle prosty i nie daje pełnego świadectwa tego, co maszyna Turinga może naprawdę zdziałać. Czytelnik, który chciałby się nauczyć, jak z prostych czynności wykonywanych przez maszyny Turinga można składać działania coraz bardziej złożone, musiałby zwrócić się do łatwo zresztą dostępnych opracowań poważniejszych (zob. np. B. A. Trahtenbrot, *Algorifmy i wycisliatelnye awtomaty*, Moskwa 1974). Jakkolwiek jednak złożone będzie działanie wykonywane przez maszynę Turinga, będzie ono miało zawsze charakter algorytmiczny: wykonanie go nie będzie wymagało inteligencji, lecz tylko uwagi i ścisłego przestrzegania instrukcji.

W dotychczasowej części artykułu staraliśmy się być bardzo dokładni. W dalszej części, w której nie możemy już prowadzić wykładu tak ściśle, postaramy się opowiedzieć, jak można skonstruować zadanie rachunkowe, dla którego nie istnieje rozwiązanie przy pomocy maszyny Turinga.

Równania różniczkowe

Dr Henryk KOŁAKOWSKI

Każdy z czytelników spotkał się niejednokrotnie z równaniami algebraicznymi postaci:

$$(1) \quad f(x, y) = 0,$$

gdzie f jest funkcją rzeczywistą określoną na prostokącie $\Omega = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$, tzn. funkcją, która każdej parze liczb $(x, y) \in \Omega$ przyporządkowuje liczbę rzeczywistą $f(x, y)$.

Rozwiązaniem równania (1) nazywa się w szkole każdą parę liczb $(p, q) \in \Omega$ spełniającą warunek:

$$f(p, q) = 0.$$

Można na to spojrzeć inaczej: rozwiązaniem równania (1) będziemy nazywali funkcję

$$y = y(x)$$

określoną na pewnym zbiorze $I \subset (a, b)$, spełniającą warunki:

$$\begin{aligned} \text{jeśli } x \in I, \quad & \text{to } (x, y(x)) \in \Omega, \\ \text{jeśli } x \in I, \quad & \text{to } f(x, y(x)) = 0. \end{aligned}$$

Równaniem typu (1) jest na przykład równanie liniowe

$$Ax + By + C = 0,$$

gdzie A, B, C są liczbami rzeczywistymi i $B \neq 0$. Wówczas jedynym rozwiązaniem jest funkcja

$$y = \frac{-Ax - C}{B}.$$

Rozpatrzmy jeszcze jeden przykład:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad x \in (-1, 1), \quad y \in (-1, 1).$$

Spośród rozwiązań określonych na $I = (-1, 1)$ ciągle są dwa :

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{oraz} \quad y = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Po tym krótkim wstępie przejdziemy do omówienia najprostszych równań różniczkowych.

Definicja: *Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu pierwszego* nazwiemy równanie:

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

gdzie f jest funkcją określoną na prostokącie Ω .

Rozwiązaniem równania (2) nazywamy każdą funkcję $y = y(x)$ różniczkowalną w przedziale I , której wykres leży w zbiorze Ω i która spełnia warunek (2), to znaczy:

$$\text{jeśli } x \in I, \quad \text{to } \frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)).$$

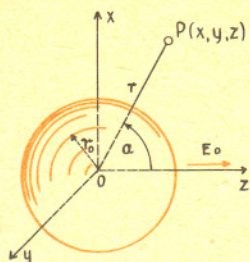
Krzywą $y = y(x)$, $x \in I$ nazywamy krzywą całkową równania (2).





Rozwiązanie zadania F 10

Wprowadźmy układ współrzędnych o początku w środku kuli i z osią z skierowaną równoległe do kierunku jednorodnego pola E_0 (patrz rysunek).



Szukamy powierzchni ekwipotencjalnych pola elektrostatycznego będącego sumą pól: dipola elektrycznego w momencie dipolowym p skierowanym wzdłuż osi z , umieszczonego w początku układu współrzędnych, i jednorodnego pola E_0 .

Potencjał pola dipola w dowolnym punkcie P odległym o r od dipola wynosi (z dokładnością do stałej):

$$V_d(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot z}{r^3},$$

gdzie z jest z -ową współrzędną punktu P , a ϵ_0 — stałą dielektryczną próżni. Potencjał pola jednorodnego równa się (z dokładnością do stałej):

$$V_j(P) = -E_0 z.$$

Całkowity potencjał rozważanego pola elektrostatycznego w punkcie P wynosi:

$$V(P) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3} - E_0 \right) z + V_0,$$

gdzie V_0 jest stałą, skalującą wartość potencjału. Ze względu na walcową symetrię problemu wygodnie jest wprowadzić kąt θ zdefiniowany jako kąt między prostą OP i osią z , liczony od osi. Wówczas: $z = r \cos \theta$

$$V(P) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} - E_0 \right) r \cos \theta + V_0.$$

Z powyższego wzoru wynika, że powierzchnia kuli o promieniu r_0 jest powierzchnią ekwipotencjalną w rozważanym problemie, jeśli

$$p = 4\pi\epsilon_0 E_0 r_0^3,$$

Czyli nie naładowana kula umieszczona w jednorodnym polu wytwarza na zewnątrz dodatkowe pole, równoważne polu wywołanemu przez dipol o momencie dipolowym $p = 4\pi\epsilon_0 E_0 r_0^3$ (wewnątrz kuli pole elektrostatyczne jest równe zero).

Gęstość powierzchniowa ładunków δ równa się wartości wektora indukcji pola elektrostatycznego: $\delta = |D| = \epsilon_0 |E|$. Linie sił pola są prostopadłe do powierzchni przewodnika, czyli w naszym przypadku są równoległe do promieni kuli.

Dlatego:

$$\delta = \epsilon_0 \left(- \frac{dV}{dr} \right) \Big|_{r=r_0} = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta.$$

Gęstość ładunku na powierzchni kuli jest funkcją $\cos \theta$, to znaczy wszystkie punkty leżące na okręgu o promieniu $r \sin \theta$ i osi pokrywającej się z osią z mają taką samą gęstość ładunku. Ładunki dodatnie zgromadzone zostały na prawej półkuli ($\theta < 90^\circ$), natomiast ujemne na lewej ($90^\circ < \theta < 180^\circ$). Największa gęstość ładunku jest dla punktów leżących na osi z .

Uwagi:

1° W teorii równań różniczkowych rozważa się również równania wyższych rzędów. Przykładem równania różniczkowego zwyczajnego rzędu n jest

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x) = a(x),$$

gdzie a_1, \dots, a_n, a są funkcjami ciągłymi w pewnym przedziale I .

2° Oprócz równań zwyczajnych ważną rolę w zastosowaniach odgrywają równania różniczkowe cząstkowe, w których poszukiwana funkcja zależy od dwóch lub więcej zmiennych niezależnych.

3° Potrzeba rozwijania teorii równań różniczkowych wynika między innymi z możliwości opisu wielu zjawisk fizycznych za pomocą takich równań. Np. w ruchu jednostajnie przyspieszonym droga $s = s(t)$, gdzie t oznacza czas, spełnia równość:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = a = \text{const},$$

z której przy założeniu, że $s(0) = \frac{ds(0)}{dt} = 0$, wynika od razu, iż $s(t) = \frac{1}{2} at^2$.

Zauważmy, że rozwiązywanie równania różniczkowego postaci

$$\frac{dy}{dx} = g(x),$$

gdzie g jest funkcją ciągłą w pewnym przedziale, sprowadza się do obliczenia całki nieoznaczonej:

$$y = \int g(x) dx + c.$$

Niech, dla przykładu,

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = x,$$

wówczas $y = \frac{1}{2} x^2 + c$.

Jak widać, przez każdy punkt płaszczyzny przechodzi krzywa całkowa równania (3).

Nasuwać się tu następujące pytania:

1) Jakie warunki powinna spełniać funkcja $f(x, y)$, aby przez każdy punkt prostokąta Ω przechodziła krzywa całkowa równania (2)?

2) Jakie warunki powinna spełniać funkcja $f(x, y)$, aby przez zadany punkt $(x_0, y_0) \in \Omega$ przechodziła dokładnie jedna krzywa całkowa równania (2)?

Właśnie podanie odpowiedzi na wyżej wymienione pytania to jedno z zadań teorii równań różniczkowych zwyczajnych.

Udowodnimy teraz

Twierdzenie: Niech $f: (a, b) \rightarrow R$ i $g: (c, d) \rightarrow R$ będą funkcjami ciągłymi, przy czym $g(y) \neq 0$ dla każdego $y \in (c, d)$. Niech F i G oznaczają ustalone funkcje pierwotne dla funkcji f i g i niech $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in (c, d)$.

Wówczas każde rozwiązanie równania różniczkowego

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

spełniające warunek $y(x_0) = y_0$ jest rozwiązaniem równania algebraicznego

$$(5) \quad G(y) - G(y_0) - F(x) + F(x_0) = 0,$$

i na odwrót: każde rozwiązanie równania (5) jest rozwiązaniem równania (4).

Dowód: Niech $y = y(x)$ będzie rozwiązaniem równania (4) i niech $y(x_0) = y_0$. Wówczas

$$g(y(x)) \frac{dy(x)}{dx} = f(x),$$

czyli $\frac{d}{dx} (G(y(x)) - F(x)) = 0$, a więc $G(y(x)) - F(x) = c = \text{const}$. Podstawiając $x = x_0$

otrzymujemy stąd $c = G(y_0) - F(x_0)$, co oznacza, że $y = y(x)$ jest rozwiązaniem równania (5).

Niech teraz $y = y(x)$ będzie rozwiązaniem równania (5).

Wówczas

$$(6) \quad G(y(x)) = F(x) - F(x_0) + G(y_0).$$

Ponieważ $\frac{dG(y)}{dy} = g(y) \neq 0$, więc istnieje funkcja G^{-1} odwrotna względem funkcji G . Zatem

$$(7) \quad y(x) = G^{-1}(F(x) - F(x_0) + G(y_0)).$$

Widać stąd, że $y = y(x)$ jest funkcją różniczkowalną. Różniczkując funkcję

$$h(x) = G(y(x)) - G(y_0) - F(x) + F(x_0)$$

i korzystając z równości (6) otrzymujemy $g(y(x)) \frac{dy(x)}{dx} - f(x) = 0$, czyli $\frac{dy(x)}{dx} = \frac{f(x)}{g(y(x))}$.

Z równości (7) wynika na koniec, że $y(x_0) = y_0$.

P r z y k ł a d 1: Znajdźmy krzywą całkową równania

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{x}{y} \quad (y > 0)$$

przechodzącą przez punkt $(0, 1)$.

Możemy zastosować udowodnione twierdzenie, biorąc $f(x) = -x$ i $g(y) = y$. Jako funkcje pierwotne weźmy $F(x) = -\frac{1}{2}x^2$ i $G(y) = \frac{1}{2}y^2$. Zatem $F(x_0) = F(0) = 0$, $G(y_0) = G(1) = \frac{1}{2}$.

Ze wzoru (5) mamy więc: $\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 = 0$, czyli $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Jedynym rozwiązaniem tego zadania spełniającym warunek $y(0) = 1$ jest funkcja

$$y = \sqrt{1-x^2}, \quad \text{gdzie } x \in (-1, 1).$$

P r z y k ł a d 2: Ciało stałe o masie m zanurzone w cieczy rozpuszcza się z szybkością proporcjonalną do ilości nierozpuszczonej substancji. Niech $y = y(t)$ oznacza masę substancji rozpuszczonej w czasie t . Jaka to funkcja, jeżeli wiadomo, że $y(0) = 0$?

Otóż masa nierozpuszczonej substancji po upływie czasu t jest równa $m - y(t)$, szybkość rozpuszczania wynosi $\frac{dy}{dt}$, a więc funkcja $y = y(t)$ spełnia równanie

$$\frac{dy}{dt} = k(m-y), \quad (k - \text{współczynnik proporcjonalności}).$$

Czytelnik bez trudu sprawdzi (stosując np. udowodnione wyżej twierdzenie), że jedynym rozwiązaniem naszego zadania jest funkcja $y = m(1 - e^{-kt})$.

O dalsze przykłady zagadnień prowadzących do równań różniczkowych nie jest trudno. Zetknąć się można z nimi w wielu dziedzinach nauki i techniki.

Ciekawe — i nie tylko

O trudnościach związanych z uprawianiem fizyki we współczesnym świecie najlepiej mogą świadczyć bardzo skomplikowane urządzenia badawcze, jakimi muszą się posługiwać dzisiejsi uczeni. «Physics Today», nr 1, 1974, przynosi opis dwóch wielkich komór pęcherzykowych — urządzeń służących do rejestracji torów cząstek elementarnych wytworzonych przy pomocy wielkich akceleratorów (komory są więc tylko jednym z ogniw całego łańcucha narzędzi badawczych współczesnego fizyka cząstek elementarnych, łańcucha, który zaczyna się od akceleratora i kończy się dopiero na komputerze). Największa komora europejska w CERN-ie koło Genewy ma 3,7 m średnicy, a tory cząstek są w niej odchylane przy pomocy pola magnetycznego o natężeniu 2T (20 tys. Gausów). Największa komora amerykańska współpracuje z potężnym akceleratorem rozpędzającym protony do energii 300 GeV, znajdującym się w NAL (National Accelerator Laboratory). Komora ta ma kształt gruszki o największym wymiarze 4,5 m. Mieści się w niej, zależnie od potrzeb, 32 000 litrów ciekłego wodoru, mieszanek neonu z wodorem lub deuteru. Cząstki elementarne odchylane są w tej komorze przy pomocy elektromagnesu dającego natężenie pola rzędu 3T (30 tys. Gausów). Aby wytworzyć to pole, należy przez uzwojenie elektromagnesu przepuścić prąd o natężeniu 5 000 A. Cewka elektromagnesu ma 4,2 m średnicy wewnętrznej i 5,1 m średnicy zewnętrznej. Energia zgromadzona w nim wynosi 400 MJ. Ten sam numer «Physics Today» przynosi również bardzo interesujący artykuł o falach grawitacyjnych i nowych próbach potwierdzenia ich istnienia na drodze eksperymentalnej. Okazuje się, że „stara” aparatura do rejestracji fal grawitacyjnych, jaką posługiwał się John Weber i jego naśladowcy, miała czułość pozwalającą na zarejestrowanie odkształceń bloku aluminiowego, który pełnił w niej funkcję anteny, nie mniejszych niż „zaledwie” 10^{-15} cm. Dodajmy, że typowy wymiar jądra atomowego wynosi 10^{-13} cm. Obecnie sądzi się, że właśnie ta „niska” czułość nie pozwoiliła na bezsporne zarejestrowanie fal grawitacyjnych. W związku z tym uczeni z uniwersytetów w Luizjanie, Stanford i Rzymie budują aparaturę zdolną do rejestracji zmian długości bloku — anteny rzędu 10^{-20} na jednym metrze, co powinno wystarczyć do definitywnego wyjaśnienia zagadki fal grawitacyjnych.

Tematem związanym z falami grawitacyjnymi jest temat „czarnych dziur”, które mogą być jednym ze źródeł tych fal. Interesujący przedruk z często w tej rubryce cytowanego «Physics Today» i traktujący o tych pełnych zagadek obiektach kosmicznych znaleźć można w tegorocznym 3 nrze «Problemów».

W roku bieżącym mija 250-lecie założenia Akademii Nauk ZSRR. Wydarzeniu temu poświęcony jest tegoroczny 1 nr miesięcznika «Priroda». Oprócz historii założenia samej Akademii w 1724 r. przez Piotra Wielkiego znaleźć w nim można także bardzo interesujące artykuły o życiu i pracach najwybitniejszych członków tej instytucji. Z punktu widzenia matematyki i fizyki najbardziej interesujące są sylwetki Michała Łomonosowa, Leonarda Eulera i Igora Kurczatowa. Szczególnie wart polecenia jest artykuł o tym ostatnim uczonym i organizatorze nauki, który w latach II wojny światowej poświęcił swój talent budowie radzieckiej broni atomowej, a w latach powojennych był jednym z pionierów prac nad kontrolowaną syntezą termojądrową.

K. A.



Rozwiązanie zadania M. 28

Podstawiając w miejsce x kolejne liczby naturalne, otrzymujemy 9, 15, 25, 39, 57, 79, 105, 135, 169, 207, 249, 295, ..., widzimy więc, że jeżeli x nie dzieli się przez 3, to $2x^2 + 7$ dzieli się przez 3, co można łatwo wykazać. Jeżeli bowiem x nie dzieli się przez 3, to dla pewnej liczby całkowitej k zachodzi równość $x = 3k \pm 1$, skąd $x^2 = 9k^2 \pm 6k + 1$ i x^2 daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1, $2x^2 + 7$ zaś resztę 0. Liczbę pierwszą jako wartość wyrażenia $2x^2 + 7$ możemy więc otrzymać tylko wtedy, gdy x jest podzielna przez 3. Ponieważ $2 \cdot 3^2 + 7 = 25$ jest liczbą złożoną, więc jeżeli $2x^2 + 7$ jest liczbą pierwszą, to x jest podzielne przez 3 i większe od 3, a więc złożone. Matematycy wypowiedzieli hipotezę, z której wynika, że dla nieskończonego wielu wartości naturalnych x liczba $2x^2 + 7$ jest pierwsza, jednak hipoteza ta jest nieudowodniona.

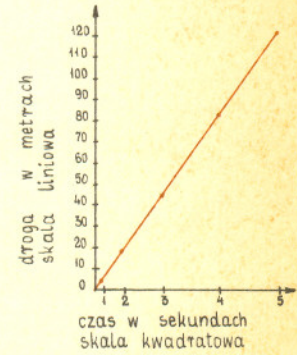
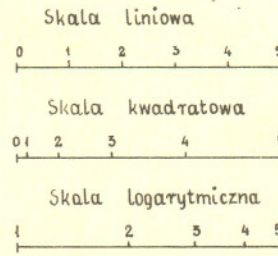
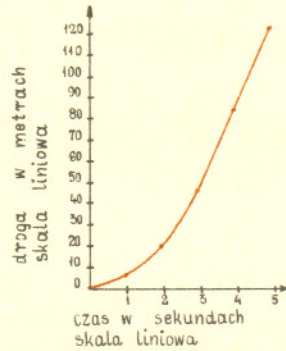
Jak zdeformować prosiaka, czyli o graficznym przedstawieniu pomiarów

Często stawiamy pytanie: „W jaki sposób wielkość fizyczna Y zależy od wielkości X ?”. Szukając odpowiedzi, wykonujemy pomiary i otrzymujemy w wyniku szereg par wartości (x, y) . Pytanie może na przykład dotyczyć zależności drogi S , przebytej przez ciało w swobodnym spadku w polu grawitacyjnym Ziemi, od czasu lotu t . Otrzymane wyniki pomiarów obu wielkości przedstawiamy graficznie na wykresie odkładając na jednej osi współrzędnych wartości x , a na drugiej wartości y . Odkładamy to znaczy przyporządkowujemy liczbom rzeczywistym punkty na osi współrzędnych i wybieramy te punkty, które odpowiadają liczbowym wynikom pomiarów. Przyporządkowywanie to można robić na wiele sposobów. Długość odcinka od początku skali do punktu reprezentującego liczbę na osi może być:

- proporcjonalna do liczby (skala liniowa),
- proporcjonalna do kwadratu liczby (skala kwadratowa),
- proporcjonalna do logarytmu liczby (skala logarytmiczna).

Listy tej oczywiście nie można wyczerpać, ale na szczęście w praktyce używa się tylko ograniczonej liczby skal. Dodatkowe urozmaicenie wynika stąd, że oś rzędnych i oś odciętych mogą mieć różne skale, np. liniowo-logarytmiczną, liniowo-kwadratową itp. Dobór skali jest pozornie mało ważny, wszystkie wykresy zrobione poprawnie zawierają tę samą informację i zmieniając skalę nie możemy jej wzbogacić ani zubożyć. Możemy natomiast zauważyć prawidłowości, które są trudne do uchwycenia w innej prezentacji. Wróćmy do podanego przykładu. Wyniki pięciu — założmy, że bezbłędnych — pomiarów zestawiamy w tabelce podając czas w sekundach, a drogę przebytą w metrach:

t	s
0	0
1	4,9
2	19,6
3	44,1
4	78,5
5	122,6



Narysujmy wykres zależności S od t w skali liniowo(S)-liniowej(t) oraz liniowo(S)-kwadratowej(t). W pierwszym wypadku trudno od razu orzec bez dodatkowego sprawdzenia, jaki charakter ma badana zależność. Krzywa, na której układają się punkty, może być parabolą, ale może być inną funkcją. W skali liniowo-kwadratowej wykresem badanej zależności jest prosta. Możemy stąd od razu odczytać postać funkcji $s = At^2$.

Dobór właściwej skali może być trudny, w każdej obraz badanej zależności jest inny, i tylko przesłanki teoretyczne mogą nam pomóc w decyzji. Popatrzmy na sympatycznego, w skali liniowo-liniowej, prosiaka, którego komputer przerysował w dwudziestu czterech innych skalach. Nie straciliśmy przez to żadnych informacji, nic nie zyskaliśmy poza uzyskaniem całego ogrodu zoologicznego. Sytuację fizyka można często przyrównać do kogoś, kto nigdy w życiu nie widział prosiaka i patrząc na 25 obrazków usiłuje odgadnąć, który z nich oddaje najlepiej cechy badanego zwierzątka (mówimy o cechach, a nie o kształcie, bo ten znamy).

T. H.

