

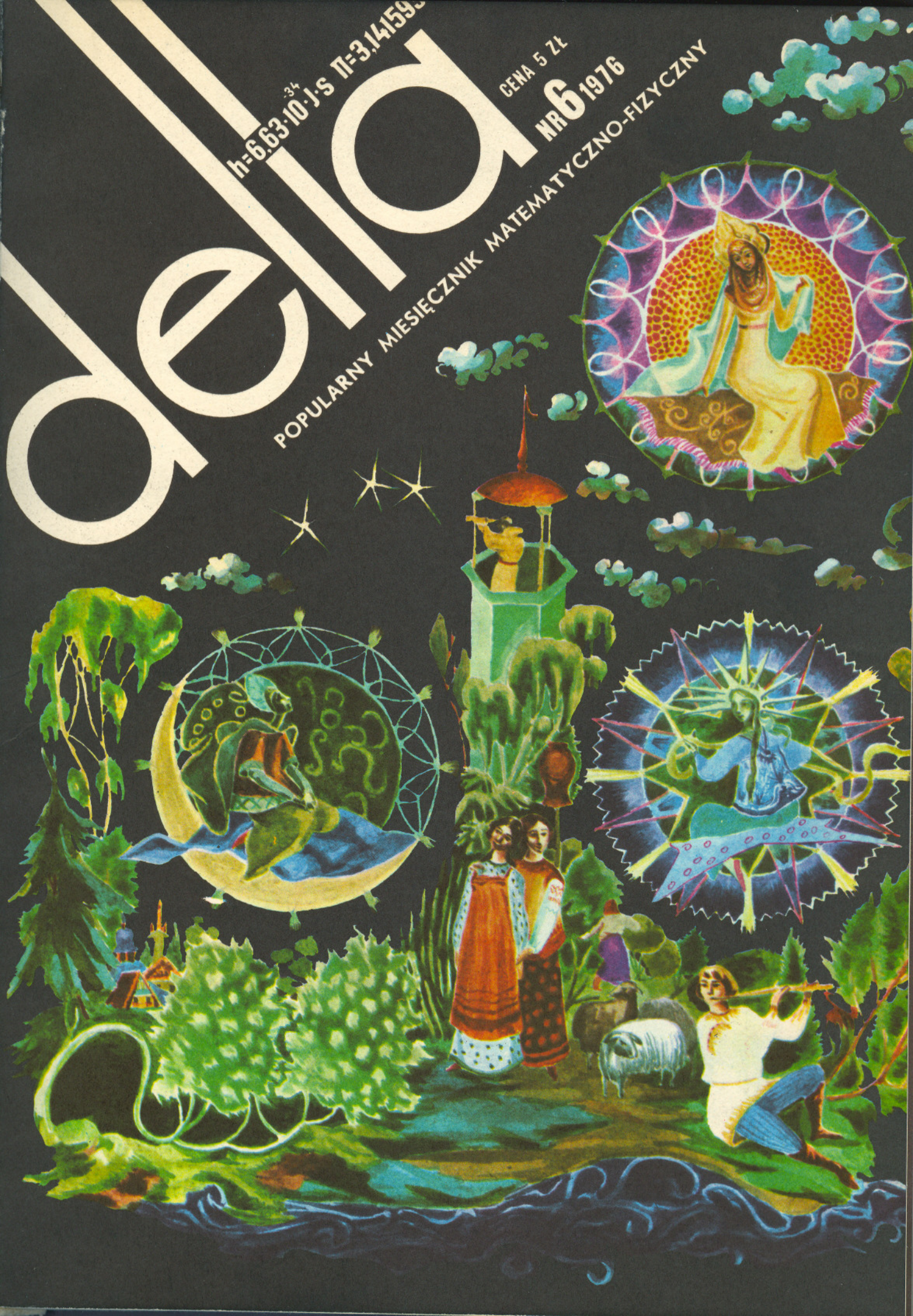
# deia

h=6.63·10<sup>-34</sup> J·s  $\pi=3,141592$

CENA 5 ZŁ

NR 6 1976

POPULARNY MIESIĘCZNIK MATEMATYCZNO-FIZYCZNY



## SPIS TREŚCI

Kosmologia: Przedmiot i metoda	
<i>Dr Bronisław Kuchowicz</i>	str. 1
Laboratorium w domu	
<i>Dr Jan A. Gaj</i>	str. 3
Twierdzenie o kanapkach	
<i>Mgr Krzysztof Nowiński</i>	str. 4
Zadania	str. 5
Konstrukcje geometryczne	
<i>Dr Maciej Bryński</i>	str. 6
Czy oddziaływania słabe są słabsze od elektromagnetycznych	
<i>Doc. dr Michał Świącki</i>	str. 8
Największy wspólny dzielnik jako pewna kombinacja liniowa	
<i>Piotr Wojciechowski</i>	str. 10
Efekt stroboskopowy	str. 12
Skąd się wzięła stodoła	str. 13
Mała Delta	str. 14

„Delta”  
matematyczno-fizyczny miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Polskiego Towarzystwa Fizycznego  
wydawany przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny  
doc. dr J. Bartke  
prof. dr Grzegorz Białkowski — przewodniczący  
doc. dr A. Bączyński  
doc. dr B. Gleichgewicht  
doc. dr K. Goebel  
doc. dr B. Iwaszkiewicz  
doc. dr T. Iwiński  
doc. dr A. Januszajtis  
prof. dr Leon Jeśmanowicz — wiceprzewodniczący  
mgr H. Kaczorek  
prof. dr B. Karczewski  
prof. dr M. Kuczma  
mgr A. Mąkowski  
prof. dr Z. Pawlak  
prof. dr A. Piekara

prof. dr Z. Semadeni  
prof. dr J. Stankowski  
prof. dr M. Subotowicz  
doc. dr S. Turnau  
doc. dr J. Wdowczyk

Redaguje Kolegium w składzie:  
doc. dr T. Hofmokl — z-ca red. nac.  
dr T. B. Iwiński  
dr M. Kordos — red. nac.  
mgr K. Prażmowski — red. techn. graf.  
doc. dr M. Świącki  
D. Tys — sekr. red.  
Adres Redakcji  
ul. Hoża 69 p. 151,  
00-681 Warszawa,

Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo Wrocław, Oddział w Warszawie  
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.; 2,50 ark. druk.;  
papier offsetowy III kl. 80 g, 61 × 86  
Wydrukowano w Drukarni im. Rewolucji Październikowej  
Warszawa, ul. Mińska 65.  
Nr zam. 328/76 J-113

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60, — cena prenumeraty półrocznej zł 30, —

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:  
— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i na cały rok następny  
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.  
Jednostki gospodarki społecznej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.  
Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW oraz prenumeratorzy indywidualni, zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.  
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.

Sprzedż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7

00-068 Warszawa, Poland or with

— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68,

Bundesrepublik Deutschland.

— Earls Court Publications Ltd., 130 Shepherd Bush Centre, London W 12, Great Britain,

— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italy.

Cena 1 egzemplarza zł 5,— in indeksu 35723/35550



## Dr Bronisław KUCHOWICZ

W cyklu artykułów, mniej lub bardziej z sobą powiązanych, mam zamiar przedstawić jedną z najstarszych i zarazem najmłodszych nauk przyrodniczych — kosmologię. Przymiotnik „najstarsza” wiązać się może z tym, że już w w najdawniejszych dokumentach pisanych natrafiać można na początki wyobrażeń kosmologicznych — tj. o budowie Kosmosu, Wszechświata — tak przynajmniej rozumianego, jak mogła go na swym etapie rozwoju, przy ograniczonej bazie obserwacyjnej ówczesna ludzkość pojąć. Wyobrażenia te więcej miały wspólnego z mitami, religią, filozofią, niż z uogólnieniem obserwacji przyrody. Stopniowo gromadziły się obserwacje, długo zresztą nie sięgające poza Układ Słoneczny. Modele Ptolemeusza czy Kopernika stanowiły w swoim czasie nie tylko modele tego Układu, były one zarazem podsumowaniem dostępnej wiedzy o Wszechświecie. Do końca XIX wieku kosmologia i astronomia szły w parze, a zasadniczym obiektem badania tych dyscyplin były, poza ciałami Układu Słonecznego, gwiazdy z naszej Galaktyki. Kosmologia wyodrębniła się z astronomii dopiero z początkiem XX wieku. Uważana jest ona odąd przez jednych za dział astronomii zajmujący się Wszechświatem jako całością (W. Zonn w *Wielkiej Encyklopedii Powszechnej* PWN, Tom 6, str. 82), to znów za dyscyplinę naukową na pograniczu astronomii, fizyki teoretycznej i filozofii, traktującą o Wszechświecie jako całości i o dostępnym obserwacjom obszarze przestrzeni jako części Wszechświata (A. Pacholczyk w „*Postęпах Astronomii*” z 1963 r., str. 15). Jakkolwiek by było (a można by podać jeszcze więcej definicji w ślad za różnymi autorami, ale chyba nie o to nam chodzi), kosmologię można niewątpliwie uważać za naukę przyrodniczą. W tej roli jest ona jednak istotnie odmienna od takich nauk jak chemia, fizyka czy nawet najbliższa jej astronomia. Przedmiot jej studiów, Wszechświat, jest jeden.

We wszystkich naukach przyrodniczych istnieje możliwość badania określonych grup obiektów czy też zjawisk, wynajdywania ich elementów wspólnych, przez umiejętne abstrahowanie od indywidualnych, nieistotnych charakterystyk. Długie serie doświadczeń fizycznych, powtarzanie obserwacji astronomicznych — wszystko to pozwala na dochodzenie do uogólnień, na wykrywanie praw przyrody. Metodologia nauk przyrodniczych pozwala także na sprawdzanie słuszności teorii przez ich laboratoryjne testowanie, przez porównywanie wyników doświadczeń czy obserwacji z przewidywaniami, otrzymanymi z teorii na drodze dedukcyjnej. A jak ma wyglądać sytuacja w kosmologii? Czy można stosować metodę indukcyjną, skoro Wszechświat jest jeden, i nie można obserwacji w nim prowadzonych porównywać z obserwacjami w jakichś innych (może lepszych?) Wszechświatach, gdyż takie nie istnieją? Nie mamy zatem gwarancji tego, że jakaś obserwowana cecha Wszechświata jest jego cechą istotną, a nie przypadkową. Z drugiej znów strony pamiętajmy o tym, że prawa fizyczne, które chcielibyśmy stosować do opisu Wszechświata jako całości, sprawdzone są eksperymentalnie bądź tylko na Ziemi, bądź też w obrębie Układu Słonecznego, a więc w zbyt małym zakresie takich wielkości fizycznych, jak długość, czas czy też masa. Przekonaliśmy się w ostatnim półwieczu, że prawa makrofizyki ziemskiej nie dadzą się przenieść na szczebel poznawania atomowej i jądrowej struktury materii, że muszą być zastąpione przez mechanikę kwantową. Czy wobec tego można prawa te ekstrapolować w drugą stronę i przypuszczać, że będą spełnione w skali dużych odległości (rzędu milionów lat świetlnych), albo w takich szczególnie ekstremalnych warunkach (gęstości powyżej gęstości jądrowej, pola grawitacyjne miliardy razy silniejsze od pola grawitacyjnego Ziemi), jakie mogą wystąpić w innych obszarach kosmosu?

Arystoteles odróżniał fizykę ziemską, fizykę ruchów prostoliniowych, od fizyki niebios, operującej pojęciem ruchów kołowych. Długo dochodziła ludzkość do uznania faktu, że fizyka jest jedna.

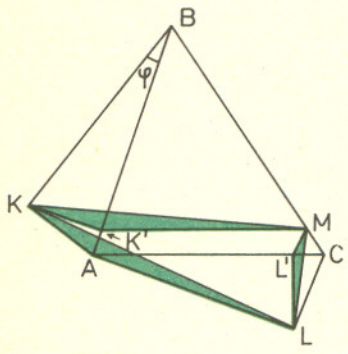




Rozwiązanie zadania M88.

Mamy:  $L'C = L'L \operatorname{tg} \varphi = AL' \operatorname{tg}^2 \varphi$  i  $K'A = KK' \operatorname{tg} \varphi = K'B \operatorname{tg}^2 \varphi$ . Stąd

$$\frac{MC}{MB} = \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{L'C}{AL'} \text{ i } \frac{MC}{MB} = \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{K'A}{K'B}$$



i dalej

$$\frac{MB}{MC} + 1 = \frac{AL'}{L'C} + 1, \frac{K'A}{K'B} + 1 = \frac{MC}{BM} + 1$$

czyli

$$\frac{BC}{MC} = \frac{AC}{L'C}, \frac{BC}{BM} = \frac{AB}{K'B}$$

a więc  $BC:AC = MC:L'C$  i  $BC:BA = BM:BK'$ .

Wnioskujejmy stąd, że  $ML' \parallel AB$  i  $K'M \parallel AC$ .

Oznaczając kąt  $BAC$  przez  $\alpha$  mamy:

$$\sphericalangle ML'L = 90^\circ + \alpha, \sphericalangle KAL = 90^\circ - \varphi + \alpha + \varphi = 90^\circ + \alpha, \sphericalangle KK'M = 90^\circ + \alpha.$$

Mamy  $\frac{ML'}{AB} = \frac{MC}{BC} = \frac{MC \operatorname{ctg}^2 \varphi + MC}{MC} = \sin^2 \varphi$ , skąd, wobec równości  $KA = AB \sin \varphi$ , otrzymujemy  $ML' = AB \sin^2 \varphi = KA \sin \varphi$ .

Podobnie  $\frac{K'M}{AC} = \frac{BM}{BC} = \frac{BM}{BM + BM \operatorname{tg}^2 \varphi} = \cos^2 \varphi$ , a więc wobec

$$AL = AC \cos \varphi, \text{ otrzymujemy } K'M = AC \cos^2 \varphi = AL \cos \varphi.$$

Mamy więc  $\frac{ML'}{KA} = \sin \varphi, \frac{KK'}{KA} = \cos \varphi, \frac{LL'}{AL} = \sin \varphi, \frac{K'M}{AL} = \cos \varphi$ ,

co kończy żądany dowód.

Uwaga. Zadanie to jest związane z zadaniem 8 z zawodów stopnia pierwszego XXVI Olimpiady Matematycznej. Z otrzymanego wyniku można łatwo wyprowadzić, że trójkąt  $KLM$  jest prostokątny (zob. „Znane twierdzenie Pitagorasa”, «Delta» 2/1976).

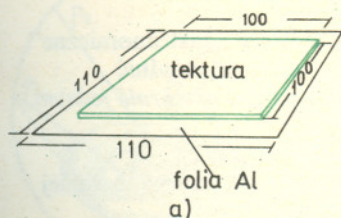
Nie można zaprzeczyć temu, że poznanie nasze wciąż jeszcze jest w istotny sposób ograniczone, że w warunkach naszych skromnych laboratoriów ziemskich (czymże są one bowiem w porównaniu z takimi choćby laboratoriami Przyrody, jak wnętrza gwiazd czy przestrzeń kosmiczna!) wiele przejawów praw fizycznych ujęć mogło naszej uwadze, nie odgrywają one bowiem żadnej roli przy tak małych np. odległościach, jakie występują na Ziemi. Z obserwacji natomiast materii we Wszechświecie można dojść nawet do nowych, nieznanych jeszcze praw fizycznych, które mogą mieć doniosłe znaczenie dla przyszłego rozwoju fizyki i techniki.

Kosmologia uogólnia dane astronomii pozagalaktycznej, zajmującej się podstawowymi składnikami Wszechświata — galaktykami (nie jest jeszcze w pełni rozstrzygnięte zagadnienie istnienia tworów wyższych rzędów, tzn. gromad galaktyk, gromad tychże gromad itp.), abstrahując od właściwości jednostkowych galaktyk i ich układów. Poza tym korzysta ona jeszcze z szeregu innych dyscyplin astronomicznych, o których mowa będzie w drugiej części artykułu. Uogólnienie to odbywa się dzięki zastosowaniu teorii fizycznych, w pierwszym rzędzie ogólnej teorii względności, stanowiącej współczesną teorię przestrzeni, czasu i grawitacji, następnie termodynamiki, mechaniki statystycznej, elektrodynamiki, fizyki jądrowej. Ogólna teoria względności pozwala na zbudowanie tzw. modeli kosmologicznych, konstrukcji teoretycznych opisujących zachowanie się Wszechświata jako całości. Konstrukcji takich jest wiele, przybierają coraz to nowe. A czy odzwierciedlają one cechy charakterystyczne rzeczywistego Wszechświata? Bywa z tym różnie. Aż chce się zacytować Lema z jego rozdziału „Szaleństwo z metodą” w słynnej książce „Summa Technologiae” (cytowane według wydania III, Wydawnictwo Literackie, Kraków 1974): „Wyobraźmy sobie szalonego krawca, który szyje wszelkie możliwe ubrania... Nie ciekawi go świat, nie bada go. Szyje ubrania. Nie wie dla kogo. Nie myśli o tym. Niektóre są kuliste, bez żadnych otworów; innym wszywa rury, które nazywa „rękawami” lub „nogawkami”. Ilość ich jest dowolna... Krawiec dba tylko o jedno: pragnie być konsekwentny... Gdy przystępuje do sporządzania nowego (ubrania), przyjmuje określone założenia. Nie zawsze są takie same. Ale postępuje dokładnie w myśl raz powziętych założeń i pragnie, by nie wynikała z nich sprzeczność”.

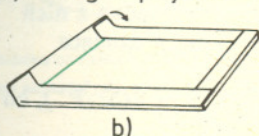
Gdy ten szalony krawiec jest teoretykiem — kosmologiem, wystarczy mu skonstruowanie kolejnego modelu Wszechświata. Ubranie wiesz się w szafie, model trafia na łamy czasopisma naukowego. A dalsze losy modelu? Trzeba go, jak ubranie, przymierzyć, sprawdzić w jaki sposób opisuje Wszechświat. Dotąd była dedukcja, odtąd wkracza empiria. U podstaw współczesnego przyrodoznawstwa tkwi przecież następujące paradoksalne (tylko pozornie!) sformułowanie metodologiczne: „Teoria naukowa jest tym lepsza, im łatwiej ją można obalić”. Określony model kosmologiczny musi więc zasugerować dokonanie obserwacji, za pomocą których można by go obalić (albo i potwierdzić, ale to ostatnie zadanie jest trudniejsze i w zasadzie niewykonalne).

Wyniki obserwacji pozwalają na wyeliminowanie przynajmniej części proponowanych modeli teoretycznych jako odpowiadających rzeczywistości Wszechświata. Inne jeszcze modele dadzą się jako tako, po pewnych „przeróbkach” dopasować do istniejących danych. I tu nasuwa się wątpliwość: Wszak Wszechświat jest jeden, jedyny, czy nie powinien być więc opisany jednoznacznie, za pomocą jednego tylko modelu? Cóż jednak na to poradzić, gdy brak danych obserwacyjnych nie pozwala na rozróżnienie pomiędzy kilkoma różnymi modelami, gdy wszystkie wydają się, przynajmniej chwilowo, równie dobrze do opisu Wszechświata pasować. Nie wiemy, czy Wszechświat jest otwarty czy zamknięty, i nie wiadomo, czy w najbliższej przyszłości uda się odpowiedź na to pytanie uzyskać. Wystarczy wspomnieć, że gdy na Sympozjum Międzynarodowym pod nazwą „Konfrontacja danych kosmologicznych z teoriami”, które odbyło się w Krakowie w 1973 roku podczas uroczystości kopernikowskich, przewodniczący urządził dla żartu głosowanie, 7 obecnych głosowało za modelem otwartym, mniej więcej tyleż osób za modelem zamkniętym, reszta zaś (około 200 osób) wstrzymała się od głosu, uważając (nie bez racji), że przemówią w końcu fakty.

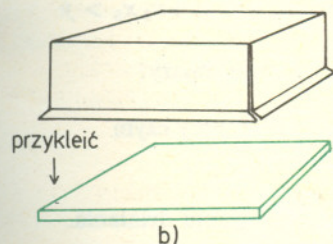
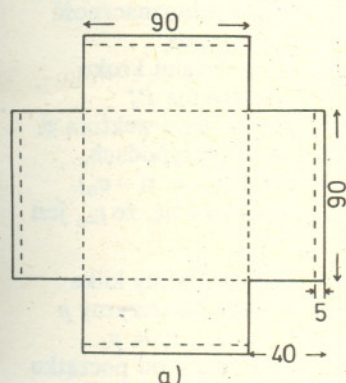
Przejszć więc trzeba do faktów. Jest ich już w kosmologii kilka. Pozwalają one na wybór pewnej określonej grupy modeli kosmologicznych do opisu Wszechświata, tzw. modeli ewolucyjnych rozszerzającego się Wszechświata. Jeszcze pół wieku temu fakty owe, stanowiące o specyfice współczesnej kosmologii jako nauki przyrodniczej, były nieznanymi. A już w 1973 roku można było na pierwszym tego rodzaju sympozjum międzynarodowym porównywać wyniki obserwacji kosmologicznych z przewidywaniami teorii. Jakże to obserwacje? Jakże teorie? Mówić o nich będziemy w następnych numerach „Delt”.



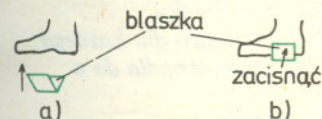
zagiąć brzegi i przykleić



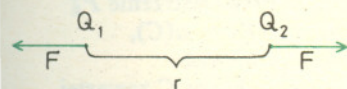
Rys. 1



Rys. 2



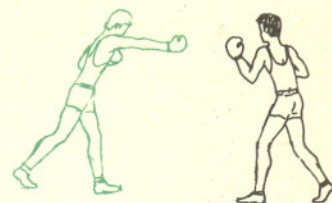
Rys. 4



Prawo Coulomba: Dwa nieruchome punktowe ładunki elektryczne  $Q_1$  i  $Q_2$  równoimienne (różnoimienne) odpychają (przyciągają) się z siłą wprost proporcjonalną do iloczynu  $Q_1 Q_2$  i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości  $r$  między nimi:

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

Przez odpowiednie sumowanie (całkowanie) można na podstawie prawa Coulomba określić siłę także między ciałami o ładunku nie punktowym, a rozłożonym na jakimś obszarze.



Rys. 3

Dr Jan A. GAJ

## RING WOLNY: WALKI W WADZE PAPIEROWEJ

Tak, będziemy organizować mecz bokserski między zawodnikami z papieru. Wolę walki, siłę mięśni i kondycję prawdziwych pięściarzy zastąpią im siły elektrostatyczne, opisywane przez fizyków *prawem Coulomba*. Do wykonania ringu i bokserów będą nam potrzebne następujące

Materiały i narzędzia

- 1) błona fotograficzna (najlepiej zdjęcie rentgenowskie) lub inna podobna folia z tworzywa sztucznego,
- 2) folia aluminiowa (może być z opakowania czekolady),
- 3) kawałek grubej tektury,
- 4) trochę niezbyt cienkiego papieru,
- 5) mały kawałek cienkiej blaszki — na przykład takiej, jaka służy do zamykania torebek z rodzynkami,
- 6) nożyczki, linijka, ołówek, klej lub taśma klejąca.

Macie już wszystko? Możemy więc zacząć budować

### RING

Jego podłogą będzie kwadratowy kawałek grubej tektury oklejony folią aluminiową (rys. 1). W odróżnieniu od prawdziwego ringu, będzie on miał również ściany i dach, wykonane z przezroczystej folii. W razie użycia błony fotograficznej musimy oczywiście zmyć z niej emulsję, co łatwo robi się w gorącej wodzie. Następnie wytniemy z niej (błony) kawałek według rys. 2a i po odpowiednim wygięciu przykleimy do podłogi (rys. 2b) — ring już gotowy. Chętni mogą namalować słupki i liny. Co nam jeszcze potrzebne?

Oczywiście

### BOKSERZY

Wytniemy ich z papieru. Powinni mieć wysokość nieco mniejszą od ringu. Dla leniwych podajemy rysunek 3 do skopiowania. Z wyposażenia bokserów istotne dla nas będą jedynie buty. Wykonamy je z kawałków blachy zaciskając je na nogach zawodników (rys. 4). Zapomnieliśmy umieścić bokserów na ringu przed sklejeniem go? Żaden kłopot, ring ma przecież szczeliny w bocznych krawędziach, przez które bokserzy będą wchodzić i wychodzić. Gotowe?

### RING WOLNY, PIERWSZE STARCIE

Żeby zagrać zawodników do walki, pocieramy wierzch ringu kawałkiem wełny (np. szalikiem). Po paru ruchach o ile całość jest sucha, bokserzy poderwą się i zaczną energicznie poruszać się po ringu w sposób przypominający prawdziwą walkę pięściarską. Na ogół (zależy to od rodzaju użytej folii) po wstępnej rozgrzewce wełną, do utrzymania bokserów w walce wystarczy po prostu pocierać ring dłonią (suchą!). Jeżeli pozostawimy ring w spokoju zawodnicy po chwili zatrzymają się, a następnie po jakimś czasie upadną na podłogę. Oczywiście ten, który utrzyma się dłużej — wygrywa. Można urządzać zawody z udziałem wielu bokserów, którzy walcząc kolejno ze sobą wyłonią wreszcie mistrza. Za przyklepnięcie się do sufitu — dyskwalifikacja. Ktoś mówi, że po co to robić, skoro taka zabawka ukazała się kiedyś w sprzedaży? Nie zmuszajmy go, widać przeznaczona mu tylko połowa przyjemności, podobnie jak „wędkarzowi” przynoszącemu swą zdobycz ze sklepu Centrali Rybnej.

Mgr Krzysztof NOWIŃSKI

W poprzednim artykule („Delta” nr 11/1975) zapowiedzieliśmy „gastronomiczne” wnioski z Twierdzenia o Antypodach. Obiecaliśmy mianowicie udowodnić „Twierdzenie o Kanapkach”: *Kanapkę z masłem i szynką można przekroić jednym cięciem płaskiego noża połowiąc i chleb i masło i szynkę.*

Nie możemy, niestety, prowadzić ścisłego dowodu na podstawie tak niematematycznych sformułowań. Trzeba więc nasze twierdzenie napisać bardziej „naukowo”. Będzie ono brzmiało tak:

Niech  $C$ ,  $M$  i  $S$  będą zbiorami otwartymi zawartymi w pewnej kuli o środku w początku układu współrzędnych i promieniu  $R$ . Niech ponadto jeden z nich (np.  $C$ ) będzie spójny. Przy tych założeniach istnieje płaszczyzna  $p$  dzieląca przestrzeń na dwie półprzestrzenie  $P^+$  i  $P^-$  takie, że:

$\mu(C \cap P^+) = \mu(C \cap P^-)$ ,  $\mu(M \cap P^+) = \mu(M \cap P^-)$  oraz  $\mu(S \cap P^+) = \mu(S \cap P^-)$ , co właśnie oznacza, że płaszczyzna  $p$  połowi  $C$ ,  $M$  i  $S$ .

A oto idea dowodu: Niech  $v$  będzie wektorem o długości 1. Możemy go utożsamiać z punktem ze sfery jednostkowej (dlaczego?). Oznaczmy przez  $p_v$  płaszczyznę prostopadłą do  $v$  i połowiącą zbiór  $C$  (jej istnienie i jednoznaczność trzeba będzie oczywiście udowodnić). Niech  $P_v^+$  będzie półprzestrzenią wyznaczoną przez  $p_v$  rozciągającą się w kierunku wektora  $v$ . W drugim kroku dowodu pokażemy, że miary przecięć zbiorów  $M$  i  $S$  z półprzestrzenią  $P_v^+$  (będziemy je oznaczać odpowiednio  $m(v)$  i  $s(v)$ ) są ciągłymi funkcjami wektora  $v$ . Gdy teraz przypomnimy sobie jeden z wariantów Twierdzenia o Antypodach, okaże się, że istnieje wektor  $v_0$  taki, że  $m(v_0) = m(-v_0)$  oraz  $s(v_0) = s(-v_0)$ . Jeżeli teraz zauważymy, że  $p_v = p_{-v}$ , a ponadto  $P_v^+ = P_{-v}^-$ , to okaże się, że  $p_{v_0}$  jest poszukiwaną płaszczyzną.

Zanim przystąpimy do realizacji tego programu działania, przypomnijmy kilka prostych faktów z geometrii analitycznej. Jak wiadomo, równanie płaszczyzny  $p$  prostopadłej do wektora  $v = (v_1, v_2, v_3)$  ma postać  $v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = y$ , przy czym jeśli  $v$  jest wektorem jednostkowym, to  $y$  jest odległością  $p$  od początku układu współrzędnych  $O$  (braną ze znakiem „-” gdy  $O \in P_v^+$ ). Półprzestrzenie  $P_v^+$  i  $P_v^-$  są wyznaczone odpowiednio przez nierówności  $v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 > y$  oraz  $v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 < y$ .

Przypomnijmy ponadto potrzebne nam w dowodzie fakty z teorii miary:

1. Każdy zbiór otwarty i ograniczony ma miarę.
2. Miara sumy zbiorów jest mniejsza lub równa sumie ich miar, przy czym jeśli zbiory te są rozłączne, to zachodzi równość. Wynika stąd
3. Jeżeli  $A \subset B$ , to  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

Możemy teraz zacząć realizację kolejnych kroków naszego programu działania.

Pierwszym krokiem będzie dowód

Lematu.

Niech  $C$  będzie zbiorem otwartym i spójnym zawartym w kuli  $K$  o środku w początku układu współrzędnych i promieniu  $R$ . Przy tych założeniach dla każdego wektora jednostkowego  $v$  istnieje dokładnie jedna płaszczyzna  $p$  prostopadła do  $v$  i połowiąca zbiór  $C$ .

Dla dowodu rozpatrzmy funkcję  $h(y)$  określoną na odbinku  $\langle -R, R \rangle$  i przypisującą zmiennej  $y$  miarę przecięcia zbioru  $C$  z półprzestrzenią  $P_y^+$  położoną „powyżej” płaszczyzny o równaniu  $v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = y$ . Półprzestrzenie  $P_R^+$  i  $P_{-R}^+$  wyglądają tak jak na rysunku i jak łatwo zauważyć  $h(-R) = \mu(C)$ , natomiast  $h(R) = 0$ . Jeżeli teraz  $y_1 < y_2$ , to  $h(y_1) \geq h(y_2)$ , ponieważ  $C \cap P_{y_1}^+ \supset C \cap P_{y_2}^+$ . Równocześnie  $h(y_1) - h(y_2)$  jest miarą części zbioru  $C$  zawartej między płaszczyznami  $p_{y_1}$  i  $p_{y_2}$ . Zbiór ten jest zawarty w walcu o promieniu  $R$  i wysokości  $y_2 - y_1$ . Wobec tego  $h(y_1) - h(y_2) \leq \pi R^2 (y_2 - y_1)$ , skąd już łatwo wynika ciągłość funkcji  $h$ . Jeżeli teraz przypomnimy sobie twierdzenie Darboux,

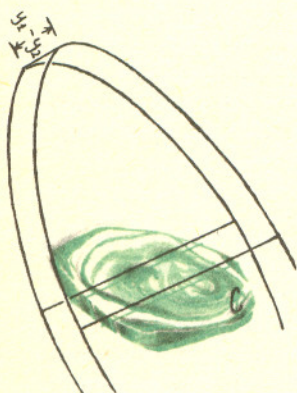
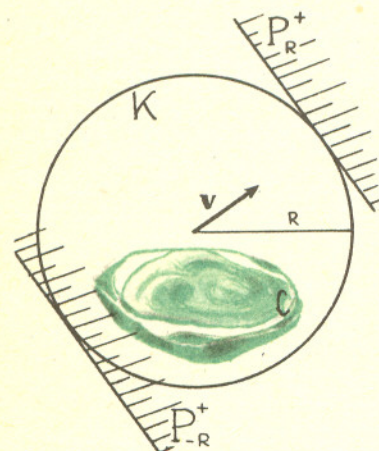
to łatwo zauważymy, że dla pewnej wartości  $y_0$  funkcja  $h$  przybiera wartość  $\frac{\mu(C)}{2}$

i wobec tego płaszczyzna  $p_{y_0}$  połowi  $C$ . Jeżeli teraz  $y \neq y_0$  np.  $y > y_0$ , to z założenia otwartości i spójności zbioru  $C$  wynika, że między płaszczyznami  $p_y$  i  $p_{y_0}$  leży podzbiór  $C$  otwarty i niepusty, więc o mierze niezerowej, wobec czego  $h(y) \neq h(y_0)$ . Wynika stąd, że  $y_0$  jest jedyną wartością spełniającą warunki lematu.

Zbiór otwarty — taki, do którego każdy punkt należy wraz z pewnym swym otoczeniem (kulą o środku w tym punkcie).

Zbiór otwarty w przestrzeni trójwymiarowej jest spójny, jeśli każde dwa jego punkty można połączyć łamaną zawartą w tym zbiorze. (Zbiór spójny odgrywa rolę kromki chleba; masło i szynka mogą być niespójne.)

Jeśli  $A$  jest zbiorem otwartym ograniczonym, to można mu przyporządkować miarę  $\mu(A)$ , która jest uogólnieniem objętości. Można sobie wyobrazić, że zbiory  $C$ ,  $M$ ,  $S$  są na tyle „porządne”, że mają objętość i przez  $\mu(C)$ ,  $\mu(M)$ ,  $\mu(S)$  rozumieć objętości.



Tw. Darboux: Jeśli funkcja ciągła na przedziale  $\langle -a, b \rangle$  przyjmuje wartości  $m$  i  $M$  ( $m < M$ ), to przyjmuje wszystkie wartości zawarte pomiędzy  $m$  i  $M$ , w szczególności przyjmuje wartość  $\frac{1}{2}(M+m)$ . (Funkcja  $h$  jest ciągła na  $\langle -R, R \rangle$  i przyjmuje zarówno wartość zero, jak i wartość  $\mu(C)$ .)

Niech teraz  $v_1$  i  $v_2$  będą dwoma różnymi wektorami jednostkowymi i niech  $p_{v_1}$  i  $p_{v_2}$  będą płaszczyznami odpowiadającymi im na mocy lematu. Kulę  $K(O, R)$ , w której leżą zbiory  $C, M$  i  $S$  rzutujemy na płaszczyznę wyznaczoną przez wektory  $v_1$  i  $v_2$  (obrazami płaszczyzn  $p_{v_1}$  i  $p_{v_2}$  będą proste).

Z rysunku łatwo wywnioskować (i nietrudno dokładnie udowodnić), że koło będące przekrojem płaszczyzny  $p_{v_2}$  z kulą  $K$  leży między płaszczyznami  $p_1$  i  $p_2$  równoległymi do  $p_{v_1}$ , a których odległość jest nie większa niż  $2R \sin \varphi$  ( $v_1, v_2$ ).

Wynika stąd, że zbiory  $M \cap P_{v_1}^+$  i  $M \cap P_{v_2}^+$  różnią się o podzbiory warstwy kuli  $K$  pomiędzy płaszczyznami  $p_1$  i  $p_2$  i wobec tego miary  $M \cap P_{v_1}^+$  i  $M \cap P_{v_2}^+$  różnią się co najwyżej o miarę tej warstwy, mniejszą od  $2\pi R^3 \sin \varphi$  (dlaczego?).

Jeżeli teraz wektory  $v_1$  i  $v_2$  są bliskie, to  $\sin \varphi$  ( $v_1, v_2$ ) jest mały i mały jest również moduł różnicy  $m(v_1)$  i  $m(v_2)$ , a więc funkcja  $m$  jest ciągła. Analogiczne rozważania przekonują nas o ciągłości funkcji  $s$ . W poprzednim artykule udowodniliśmy, że dla dwóch dowolnych funkcji ciągłych o wartościach

rzeczywistych  $f_1$  i  $f_2$  określonych na sferze dwuwymiarowej istnieje punkt  $x$  taki, że  $f_1(x) = f_1(-x)$  oraz  $f_2(x) = f_2(-x)$ . Zastosujmy to twierdzenie do funkcji  $m$  i  $s$ . Okaże się, że dla pewnego wektora  $v$  mamy  $m(v) = m(-v)$  i  $s(v) = s(-v)$ .

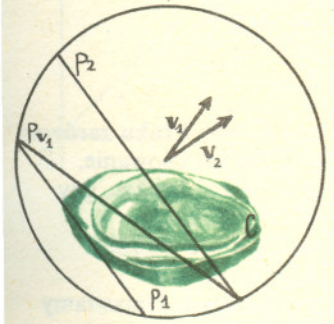
Ale wektory  $v$  i  $-v$  różnią się tylko zwrotem i wobec tego płaszczyzna  $p_v$  jest prostopadła do  $-v$  i ponieważ na mocy lematu istnieje dokładnie jedna płaszczyzna połówiąca  $C$  i prostopadła do danego wektora, więc  $p_{-v} = p_v$ . Teraz jest już jasne, że  $P_{-v}^+ = P_v^-$  i  $\mu(M \cap P_v^-) = m(v) = m(-v) = \mu(M \cap P_v^+)$ , a więc płaszczyzna  $p_v$  połówi zbiór  $M$ . Analogicznie sprawdzimy, że połówi ona również  $S$ . Można kroić!!

Na zakończenie dwa pytania pod adresem Czytelników: Czy istnieje podobne twierdzenie „płaskie”, tzn. mówiące o podzbiórach płaszczyzny? (Zob. Dwudziesta Czwarta Olimpiada Matematyczna WSiP 1974, str. 42.) Czy można zastąpić miary zbiorów jakimiś innymi ich funkcjami? (np. średnicami?)

Na zakończenie dwa pytania pod adresem Czytelników:

Czy istnieje podobne twierdzenie „płaskie”, tzn. mówiące o podzbiórach płaszczyzny? (Zob. Dwudziesta Czwarta Olimpiada Matematyczna WSiP 1974, str. 42.)

Czy można zastąpić miary zbiorów jakimiś innymi ich funkcjami? (np. średnicami?)



$p_1$  — odcina co najmniej tyle, co  $p_{v_1}$ , zaś  $p_2$  — co najwyżej tyle, co  $p_{v_1}$ .



## Zadania

Redaguje mgr Andrzej MAKOWSKI

M 88. Dany jest trójkąt ostrokątny  $ABC$ . Na zewnątrz niego konstruujemy takie dwa trójkąty  $ABK$  i  $CAL$ , że  $\sphericalangle BKA = \sphericalangle ALC = 90^\circ$ ,  $\sphericalangle ABK = \sphericalangle CAL = \varphi < 90^\circ$ . Niech  $K'$  i  $L'$  będą rzutami prostokątnymi punktów  $K$  i  $L$  odpowiednio na boki  $AB$  i  $AC$ ,  $M$  zaś takim punktem odcinka  $BC$ , że  $CM = MB \operatorname{tg}^2 \varphi$ . Udowodnić, że trójkąty  $ML'L$ ,  $KK'M$  i  $KAL$  są podobne w stosunku  $\sin \varphi : \cos \varphi : 1$ . (Jerzy Mitek)

Rozwiązanie na str. 2

M 89. W szeregu ustawiono  $n$  uczniów ( $n \geq 2$ ) ponumerowanych kolejno liczbami od 1 do  $n$ . Na daną komendę uczeń może zamienić się miejscem z innym uczniem lub pozostać na miejscu. Czy jest możliwe, by po dwóch komendach uczniowie ustawili się w szeregu tak, by pierwszy uczeń miał numer  $n$ , a następnie kolejne numery od 1 do  $n-1$ ?

Rozwiązanie na str. 11

M 90. Ciąg  $s_m$  określony jest dla  $m \geq 4$  wzorami

$$s_4 = 1, \\ s_{m+1} = s_m + 1 \cdot (m-2) + 2 \cdot (m-3) + \dots + (m-3) \cdot 2 + (m-2) \cdot 1.$$

Udowodnić, że  $s_m = \binom{m}{4}$ .

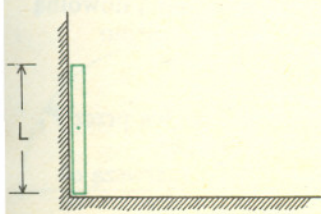
Rozwiązanie na str. 6

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

F 30. Jednorodny pręt o długości  $L$  stoi pionowo na gładkiej podłodze przy ścianie o gładkiej powierzchni (patrz rysunek). Dolny koniec pręta został delikatnie popchnięty i zaczął swobodnie odsuwać się po płaszczyźnie prostopadłej do ściany.

Pod jakim kątem pręt będzie nachylony do podłogi w momencie, w którym górny koniec pręta oderwie się od ściany?

Rozwiązanie na str. 11





Rozwiązanie zadania M90.

Drugi z wzorów definiujących ciąg  $(s_m)$  możemy zapisać w postaci  $s_{m+1} = s_m +$   
 $\sum_{k=1}^{m-2} k(m-k-1)$ , a więc (piszemy  $\sum$  zamiast

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m-2} s_{m+1} &= s_m + \sum_{k=1}^{m-2} km - \sum_{k=1}^{m-2} k(k+1) = \\ &= s_m + m \sum_{k=1}^{m-2} k - \sum_{k=1}^{m-2} k^2 - \sum_{k=1}^{m-2} k = \\ &= s_m + (m-1) \sum_{k=1}^{m-2} k - \sum_{k=1}^{m-2} k^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ponieważ } \sum_{k=1}^n k &= \frac{1}{2} n(n+1), \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{więc } s_{m+1} &= s_m + \frac{1}{2} (m-1)^2(m-2) - \\ &- \frac{1}{6} (m-2)(m-1)(2m-3) = \\ &= s_m + \frac{1}{6} (m-1)(m-2)(3m-3-2m+3) = \\ &= s_m + \frac{1}{6} m(m-1)(m-2) = \\ &= s_m + \binom{m}{3}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że  $s_3 = 1 = \binom{4}{4}$ .

Załóżmy, że dla pewnego  $m > 4$  jest  
 $s_m = \binom{m}{4}$ . Wówczas  $s_{m+1} = s_m + \binom{m}{3} =$   
 $= \binom{m}{4} + \binom{m}{3} = \binom{m+1}{4}$ , co wynika z  
 łatwej do sprawdzenia tożsamości  $\binom{n}{k} +$   
 $\binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ .  
 Tak więc przez indukcję udowodniliśmy, że  
 dla  $m > 4$  jest  $s_m = \binom{m}{4}$ .

## Dr Maciej BRYŃSKI

Z konstrukcjami geometrycznymi spotykamy się niemal na każdym kroku zarówno w samej geometrii, jak i wszędzie tam, gdzie geometria znajduje zastosowanie. Można skonstruować środek danego odcinka, można skonstruować trójkąt, gdy dane są jego trzy boki, albo gdy dane są dwa boki i kąt między nimi itp. A czego nie można skonstruować? O odpowiedź na to pytanie nieco trudniej. Spróbujemy jednak znaleźć tę odpowiedź. Musimy w tym celu dokładnie sprecyzować, co będziemy rozumieli przez konstrukcję geometryczną. Umawiamy się, że mamy do dyspozycji cyrkiel i linijkę. Za pomocą tych przyrządów możemy wykonywać następujące czynności:

- prowadzić prostą przez dane dwa punkty;
- wykreślać okrąg o środku w danym punkcie i o promieniu równym odległości dwóch danych punktów;

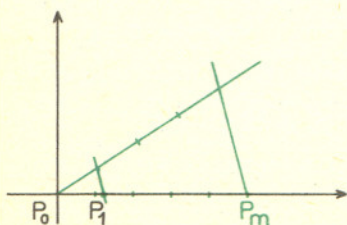
c) wyznaczać punkty przecięcia tak wykreślonych prostych i okręgów. W wyniku wielokrotnego stosowania tych czynności otrzymujemy na płaszczyźnie coraz to nowe punkty, które uznajemy za punkty konstruowalne. Przestrzegamy przy tym surowo umowy, że wolno wykonywać tylko czynności a), b) lub c), nie wolno więc np. dla wykreślenia prostych równoległych wykorzystywać faktu, że dwie krawędzie linijki pozwoliłyby na narysowanie pewnej pary prostych równoległych. Problem, który nas interesuje, brzmi następująco: Dane są punkty  $P_1, P_2, \dots, P_n$  płaszczyzny. Czy dowolny punkt płaszczyzny możemy uzyskać w wyniku czynności a), b), c) stosowanych początkowo do danych punktów, a następnie do punktów danych i otrzymanych w wyniku już zastosowanych czynności a), b), c)?

Odpowiedź jest negatywna. Postaramy się znaleźć kryterium pozwalające ocenić, jakie punkty można skonstruować. W tym celu rozważmy na płaszczyźnie układ współrzędnych, przy czym dla wygody przyjmijmy, że wśród punktów danych znajdują się punkty  $(0,0)$  i  $(1,0)$ . Dla dalszych rozważań potrzebne nam będzie pojęcie ciała liczbowego. Ciałem liczbowym nazywamy taki niepusty zbiór liczb, że wynik każdego z czterech działań arytmetycznych: dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia (z wyjątkiem dzielenia przez 0) wykonanych na elementach tego zbioru również jest elementem tego zbioru. Ciałami liczbowymi są na przykład: zbiór liczb wymiernych, zbiór liczb rzeczywistych, zbiór liczb postaci  $a + b\sqrt{2}$ , gdzie  $a, b$  są wymierne itp. Nie są natomiast ciałami: zbiór liczb całkowitych, zbiór liczb niewymiernych itp. (Czytelnik z pewnością bez trudu uzasadni powyższe stwierdzenia.)

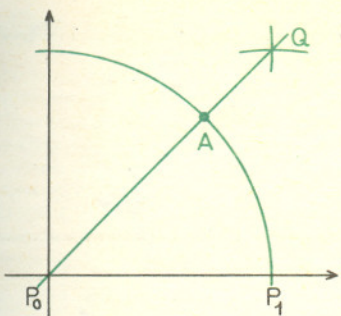
Powróćmy do płaszczyzny z przyjętym układem współrzędnych i danymi punktami, wśród których są  $(0,0)$  i  $(1,0)$ . Niech  $K$  będzie najmniejszym ciałem liczbowym zawierającym współrzędne wszystkich danych punktów. Okazuje się, że wśród punktów, które można skonstruować z danych punktów, są wszystkie te punkty płaszczyzny, których współrzędne należą do ciała  $K$ . W ten sposób nie wyczerpiemy jednak wszystkich punktów, które można skonstruować. To ostatnie zdanie uzasadnimy rozważając następujący przykład.

Przypuśćmy, że dane są tylko  $P_0 = (0,0)$  i  $P_1 = (1,0)$ . Wtedy ciało  $K$  jest ciałem liczb wymiernych. Jak skonstruować punkt, którego współrzędne są ustalonymi z góry liczbami wymiernymi? Wystarczy skonstruować każdą z tych współrzędnych na odpowiedniej osi. Mamy więc skonstruować odcinek, którego długość równa jest ustalonej liczbie wymiernej dodatniej (liczbie ujemnej  $x$  odpowiada punkt osi liczbowej leżący symetrycznie względem początku układu do punktu odpowiadającego liczbie dodatniej  $-x$ ). O ile ta liczba wymierna jest liczbą naturalną  $m$ , to konstrukcja polega na odłożeniu na osi  $m$ -krotnie odcinka  $P_0P_1$ . Dla liczby  $m/n$  postępujemy jak następuje: na pierwszej osi współrzędnych odkładamy punkty  $P_1$  i  $P_m$  odpowiadające liczbom 1 i  $m$ , rysujemy inną dowolną prostą przechodzącą przez początek układu  $P_0$  i odkładamy na niej kolejno  $n$  równych odcinków, z których pierwszy ma początek w  $P_0$ .

Łączymy koniec tego  $n$ -tego odcinka z punktem  $P_m$ , a następnie do poprowadzonego tak odcinka rysujemy prostą równoległą przechodzącą przez  $P_1$  (poprowadzenie równoległych jest oczywiście konstrukcyjnie wykonalne). Z twierdzenia Talesa wynika, że poprowadzona tak prosta przetnie pierwszą oś współrzędnych w punkcie odległym od  $P_0$  właśnie o  $m/n$ .







Wskazemy teraz punkt, który można skonstruować przy danych tylko punktach  $P_0 = (0,0)$  i  $P_1 = (1,0)$ , choć jego współrzędne nie będą liczbami wymiernymi. Rozważmy mianowicie punkty przecięcia okręgu o środku w punkcie  $P_0$  i promieniu 1 i prostej przechodzącej przez punkty  $P_0 = (0,0)$  i  $Q = (1,1)$ . Otrzymamy równania tych linii

$$x^2 + y^2 = 1,$$

$$x - y = 0,$$

z których wynika, że punktami przecięcia są  $A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ,

$$B = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Okazuje się, że wyznaczenie współrzędnych punktów uzyskanych w wyniku konstrukcji, to jest będących punktami przecięcia dwóch prostych lub prostej i okręgu lub dwóch okręgów, sprowadza się do rozwiązywania równań liniowych lub kwadratowych. Wynika stąd, że jeśli np. choć jedna współrzędna interesującego nas punktu jest pierwiastkiem wielomianu stopnia 3 nierozkładalnego na czynniki stopnia niższego nad ciałem  $K$ , to punktu tego skonstruować nie można. Podobny wniosek otrzymuje się dla przypadku, gdy choć jedna współrzędna takiego punktu jest liczbą przestępną nad  $K$ , tzn. nie jest pierwiastkiem żadnego niezerowego wielomianu o współczynnikach z  $K$ . Te wyniki pozwalają odpowiedzieć na pytania, które postawili starożytni Grecy.

Chodzi tu o tak zwane konstrukcje platońskie.

1. **Kwadratura koła.** Problem polega na tym, czy można skonstruować kwadrat o polu równym polu danego koła. Odpowiedź jest negatywna, gdyż w przypadku, gdy promień danego koła wynosi 1, pole tego koła wynosi, jak wiadomo,  $\pi$ , a więc bok poszukiwanego kwadratu miałby długość  $\sqrt{\pi}$ . Dla rozwiązania zadania należałoby więc skonstruować punkt  $(\pi, 0)$ . Okazuje się jednak, że liczba  $\sqrt{\pi}$  jest przestępna nad ciałem liczb wymiernych, które w tym przypadku jest najmniejszym ciałem liczbowym zawierającym dane. Oznacza to, że nie można metodami konstrukcyjnymi zbudować kwadratu, którego pole równa się polu koła o promieniu 1.

2. **Podwojenie sześcianu.** Zadanie to polega na zbudowaniu sześcianu o objętości dwukrotnie większej od objętości danego sześcianu. Ewentualne wykonanie tego zadania polegałoby na zbudowaniu krawędzi takiego sześcianu. Jeśli dany sześcian ma krawędź długości 1, to długość poszukiwanej krawędzi nowego sześcianu wynosi  $\sqrt[3]{2}$ . Musielibyśmy więc zbudować punkt  $(\sqrt[3]{2}, 0)$ . Konstrukcji tej wykonać nie można, bo liczba  $\sqrt[3]{2}$  jest pierwiastkiem wielomianu  $x^3 - 2$  i nie można jej otrzymać przez rozwiązywanie równań kwadratowych.

3. **Trysekcja kąta.** To zadanie polega na konstrukcyjnym podziale danego kąta na trzy równe części. Zauważmy najpierw, że dla pewnych kątów konstrukcję tę można wykonać bardzo łatwo; Czytelnik z pewnością potrafi zbudować trzecią część kąta prostego (proszę dokładnie opisać konstrukcję!). Pokażemy, że na przykład kąta  $60^\circ$  nie można konstrukcyjnie podzielić na 3 równe części. W tym celu zauważmy, że można skonstruować kąt  $\varphi$  wtedy i tylko wtedy, gdy można skonstruować punkt  $(\cos \varphi, 0)$ . Ze wzoru

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3 \varphi - 3\cos \varphi$$

zastosowanego do  $\varphi = 20^\circ$  otrzymamy:

$$\cos 60^\circ = 4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ,$$

więc

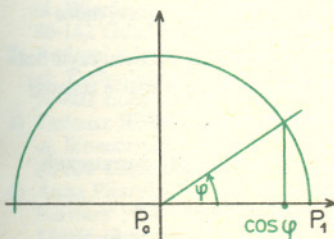
$$4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ = \frac{1}{2},$$

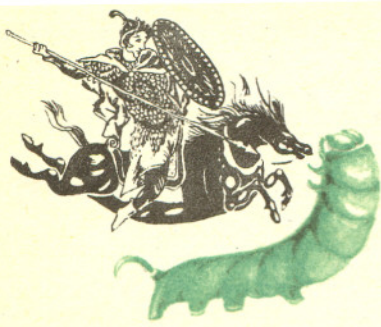
co oznacza, że  $\cos 20^\circ$  jest pierwiastkiem wielomianu

$$4x^3 - 3x - \frac{1}{2}.$$

Wielomian ten, jak nietrudno się przekonać, nie ma pierwiastka wymiernego, skąd wynika, że żaden jego pierwiastek nie może być otrzymany przez rozwiązywanie tylko równań kwadratowych. Oznacza to, że kąta  $20^\circ$  nie można skonstruować za pomocą cyrkla i linijki.

(Proponujemy Czytelnikom porównanie powyższych rezultatów z zadaniem M22, Delta 8, 1974)





# Czy oddziaływania słabe są słabsze od elektromagnetycznych?

Doc. dr Michał ŚWIĘCKI

Patrz także «Delta» 6/1975.

Będziemy dzisiaj mówić o pewnej pięknej teorii cząstek elementarnych, która została stworzona w ostatnich latach. Ponieważ teoria ta prawdopodobnie stanowi syntezę na miarę dokonanej w XIX wieku przez J. C. Maxwella, więc zaczniemy od zamierzchłej przeszłości. A przy okazji nauczymy się kilku ciekawych i przydatnych dalej rzeczy.

Do końca XVIII w. nauki o magnetyzmie i elektryczności istniały zupełnie niezależnie od siebie i nikt nie podejrzewał, że może być między nimi jakikolwiek związek. Dopiero na początku XIX w. zauważono, że przewodnik z prądem wytwarza pole magnetyczne, a następnie M. Faraday odkrył zjawisko indukcji elektromagnetycznej. Maxwell zebrał wszystkie znane prawa elektromagnetyzmu i sformułował swoje słynne równania pola elektromagnetycznego, do dziś stanowiące jedno z najpiękniejszych osiągnięć fizyki teoretycznej. Równania Maxwella bezbłędnie opisują wszelkie makroskopowe oddziaływania między ładunkami, magnesami, obwodami z prądem, a także rozchodzenie się fal elektromagnetycznych. Po raz pierwszy zostało wprowadzone do fizyki pojęcie rozchodzącego się ze skończoną prędkością pola, jako źródła oddziaływań. Do tego prędkość rozchodzenia się fal elektromagnetycznych musi być stała, niezależna od układu odniesienia i równa prędkości światła, co jest niezbędne na to, żeby równania Maxwella liczbowo zgadzały się ze znanymi dawno prawami magnetyzmu i elektryczności. Stałość prędkości światła, a było już przecież jasne, że światło musi stanowić rodzaj fali elektromagnetycznej, była, jak wiemy, podstawą teorii względności stworzonej przez A. Einsteina. Następnie przyszła teoria kwantów i światło okazało się złożone z cząstek — fotonów o energii  $E = h\nu$ . Masa fotonu zmierzona z fenomenalną dokładnością jest równa zero.

Przechodząc od historii do czasów współczesnych spróbujmy w sposób przybliżony przedstawić, jak wygląda kwantowa teoria oddziaływań elektromagnetycznych, teoria, która uwzględniła kwantową naturę światła, tak ważną przy opisie zjawisk zachodzących w mikroświecie. A właśnie mikroświatem, światem cząstek elementarnych będziemy się dalej zajmować. W teorii kwantowej oddziaływanie między ładunkami (np. elektronami) lub magnesami opisywane jest przez wymianę fotonów. Na rysunku obok narysowany jest tzw. diagram Feynmana, będący graficznym przedstawieniem wszystkich innych praw elektromagnetyzmu. Wymieniany między elektronami foton nie jest jednak taki sam jak zwykły foton wysyłany przez żarówkę w pokoju. Po prostu reakcja elektron  $\rightarrow$  elektron + foton nie może zajść w rzeczywistości, gdyż zabraniają tego zasady zachowania energii i pędu. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy fotonowi przypiszemy masę nie równą zero, taką jaką obserwujemy w doświadczeniach, ale masę urojoną, której kwadrat jest ujemny. Coż to za foton, którego masa nie jest masą fotonu, zapytacie? I do tego urojona. Otóż w tej relatywistycznej teorii cząstek elementarnych takie dziwne cząstki mogą się pojawić. I nie są wcale takie dziwne. Wyobraźmy sobie atom wodoru. Elektron i proton są w stanie związanym, który możemy rozbić dostarczając im energii jonizacji  $E_{\text{jon}} = 13,6 \text{ eV}$ . To znaczy, że energia swobodnych, nie związanych cząstek: elektronu i protonu jest o 13,6 eV większa od energii atomu wodoru. Ale energia jest równoważna masie ( $E = mc^2$ ). Tak więc masa atomu wodoru

jest mniejsza (o  $13,6 \frac{\text{eV}}{c^2}$ ) od sumy mas elektronu i protonu. Masy elektronu i protonu

wewnątrz atomu są więc mniejsze niż masy cząstek swobodnych. Ogólnie mamy zasadę, że w teorii fizycznej mogą występować cząstki o dowolnych (nawet urojonych) masach, ale tylko w obszarach, gdzie nie znika oddziaływanie. W doświadczeniach obserwujemy natomiast cząstki praktycznie swobodne o ściśle określonych masach. Cząstki o masach nie równych masom zmierzonym w laboratorium nazywamy cząstkami wirtualnymi (możliwymi) albo poza powłoką masy. Narysowany wyżej diagram Feynmana przedstawia więc wymianę wirtualnego fotonu między elektronami. Same elektrony są, poza chwilą wysyłania i pochłaniania fotonu, zupełnie swobodne i mają „normalne” masy ( $0,51 \frac{\text{MeV}}{c^2}$ ). Jest jednak pewna szczególna sytuacja, w której może

być wymieniany foton realny. Odpowiada ona tzw. rozpraszaniu elektronów do przodu, czyli bez zmiany pędu. Może być wtedy w zgodzie z zasadami zachowania wysłany foton o masie zerowej i pędzie zero (choć stale poruszający się z prędkością światła), a więc o nieskończonej

długości fali ( $p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$ ). A jeżeli może być wysłany, to na pewno będzie, gdy dostatecznie

długo poczekamy. Wyciągamy stąd wniosek, że np. nieruchome ładunki będą ze sobą oddziaływać na dowolnie dużych odległościach. Umożliwia to zerowa masa fotonu realnego.

Mówiąc o masie cząstki zawsze będziemy mieć na myśli tę masę, którą miałaby cząstka o pędzie równym zero. Dla wszystkich cząstek z wyjątkiem fotonu i neutrina jest to, masa cząstki spoczywającej.

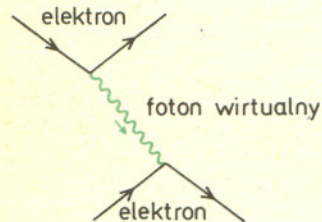


Diagram Feynmana — prawo Coulomba w kwantowej teorii elektromagnetyzmu.

Różnica między sumą mas elektronu i protonu swobodnych, a sumą mas, jakie mają te cząstki wewnątrz atomu wodoru, jest większa niż

$13,6 \frac{\text{eV}}{c^2}$ , gdyż składniki atomu poruszają się.

Z tego to właśnie powodu potencjał pola elektrostatycznego tak wolno maleje z odległością od ładunku  $e \left( V(r) = \frac{e}{r} \right)$ . Mówimy, że oddziaływania elektromagnetyczne mają zasięg nieskończony. Z tego powodu oddziaływania te są obserwowane w makroświecie i jako pierwsze zostały zastosowane w technice. Wszystkie inne rodzaje oddziaływań (z wyjątkiem grawitacyjnych) mają bardzo krótki zasięg. Jest to związane z tym, że odpowiednie cząstki mają niezerowe masy i mogą być wymieniane tylko jako cząstki wirtualne. Obowiązuje tu przybliżona zasada, że wymiana cząstki wirtualnej, której masa w stanie swobodnym wynosi  $m$  prowadzi do potencjału  $V(r) \sim \frac{e^{-mr}}{r}$ . Zasięg oddziaływania jest odwrotnie proporcjonalny do masy  $m$

i np. wymiana mezonu  $\pi$  o masie  $140 \frac{\text{MeV}}{c^2}$  daje zasięg sił jądrowych ok.  $10^{-13}$  cm, równy zmierzonemu w doświadczeniach promieniowi jądra wodoru (protonu).

Możemy wreszcie przejść do rzeczy. Teoria cząstek elementarnych, o której chcemy opowiedzieć, to jednolita teoria oddziaływań elektromagnetycznych i słabych, wymyślona ostatnio jako rezultat prac wielu fizyków z całego świata, a szczególnie S. Weinberga i A. Salama. Oddziaływania słabe są odpowiedzialne za różne rozpady cząstek, a przede wszystkim za rozpady  $\beta$  pierwiastków promieniotwórczych (np. neutron rozpada się na proton, elektron i antyneutrino). Z odpowiednich czasów życia wnioskujemy że oddziaływania te są o kilka rzędów wielkości słabsze niż oddziaływania elektromagnetyczne. Poza tym mają wyjątkowo krótki zasięg (doświadczalnie  $< 10^{-15}$  cm). Przez długi czas uważano nawet, że zasięg słabych sił jest równy zero, co przy obecnie dostępnych energiach nie może być wykluczone doświadczalnie. Jak tu unifikować oddziaływania elektromagnetyczne o nieskończonym zasięgu ze znacznie słabszymi oddziaływaniami o zasięgu wyjątkowo krótkim? Właśnie te jakościowe różnice były powodem, że do ostatnich lat dwie teorie fizyczne żyły sobie zupełnie niezależnym życiem. Jak teorie elektryczności i magnetyzmu w XVIII w.

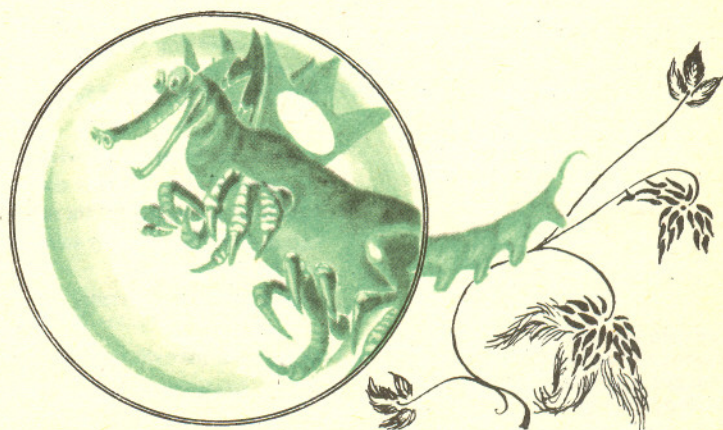
Zastanówmy się dokładniej, co to znaczy krótki zasięg oddziaływań. Oddziaływania takie na odpowiednio dużych odległościach są bardzo słabe. I tak na przykład oddziaływania silne są na odległościach większych niż  $10^{-13}$  cm słabsze od elektromagnetycznych. Dlatego właśnie istnienie jądra atomowego (a stąd i sił jądrowych) zostało stwierdzone dopiero w 1911 roku. Jeżeli więc przy dostępnych energiach nie jesteśmy w stanie obejrzeć cząstki z odległości mniejszej niż  $10^{-15}$  cm, to może oddziaływania słabe wcale nie są takie słabe, tylko patrzymy na nie ze zbyt dużej odległości. Ta obserwacja leżała u podstaw nowej teorii.

W teorii tej foton jest jednym z członków rodziny (prawdopodobnie czteroosobowej) cząstek elementarnych zwanych bozonami pośrednimi. Wszystkie one oddziałują z innymi cząstkami siłami proporcjonalnymi do ładunku elektrycznego elektronu (nawet gdy bozony pośrednie oddziałują z cząstkami neutralnymi). Natomiast masy bozonów pośrednich są różne: foton ma masę zero, a pozostałe bozony są kilkadziesiąt razy cięższe od protonu. Długozasięgową wymianę fotonów nazywamy oddziaływaniami elektromagnetycznymi, a wymiana ciężkich bozonów daje krótkozasięgową oddziaływania słabe. Przy bardzo dużych energiach oba rodzaje oddziaływań nie będą się więc różniły tak drastycznie jak obecnie. Ich siła będzie taka sama. W ten sposób powstała nowa teoria. Ma ona wyjątkowo piękną i prostą postać matematyczną. Równocześnie teoria ta usuwa pewne sprzeczności, które istniały w starej teorii oddziaływań słabych, przyjmującej zerowy ich zasięg. Wreszcie, jak przy każdej syntezie, pojawiły się nowe przewidywania. Niektóre z nich zostały już potwierdzone doświadczalnie. Elegancka teoria zawsze zgadza się z doświadczeniem.

Narzuca się pytanie: czy nowa synteza w fizyce będzie miała podobne implikacje techniczne, jak synteza dokonana przeszło 100 lat temu przez Maxwella? Trudno o tym sądzić. W każdym razie nie jest to kwestia najbliższej przyszłości. Na razie piękno nowej teorii musi nam wystarczyć.



Pewne różnice prawdopodobnie pozostaną. Nawet w najwyższych energiach wymiana ciężkich bozonów pośrednich może prowadzić do niezachowania parzystości obserwowanej np. w rozpadach jąder atomowych, podczas gdy oddziaływania elektromagnetyczne zachowują parzystość, co możemy stwierdzić oglądając się w lustrze.



„Korespondencyjne Koło Naukowe”  
Drukujemy adresy nowych członków

- 1) Marek Wasik  
ul. Wieniawskiego 15/6  
80-142 Gdańsk 18
- 2) Andrzej Jakubowski  
ul. Zachodnia 89/9  
90-402 Łódź
- 3) Tadeusz Koćwin  
ul. Słoneczna 23  
42-200 Częstochowa
- 4) Anna Pietryka  
Bulwary 10/3  
85-056 Bydgoszcz

Piotr WOJCIECHOWSKI

W chwili pisania artykułu Autor był uczniem II klasy XIV LO w Warszawie

Relacja  $R$  jest relacją równoważności, jeśli jest *zwrotna* (każdy element jest w tej relacji z samym sobą), *symetryczna* (jeśli  $xRy$ , to również  $yRx$ ) oraz *przechodnia* (jeśli  $xRy$  i  $yRz$ , to  $xRz$ ). Równość, dawanie tej samej reszty przy dzieleniu przez  $m$  — są przykładami relacji równoważności.

Pierścieniem przemiennym z jednością nazywa się trójka  $\langle A, \oplus, \circ \rangle$ , gdzie  $A$  — zbiór,  $\oplus$  i  $\circ$  — dwa działania w tym zbiorze, i przy tym spełnione są następujące warunki:  
 —  $\oplus$  jest działaniem łącznym i przemiennym;  
 — istnieje taki element  $0 \in A$ , że dla każdego  $x \in A: x \oplus 0 = x$ ,  
 — każdy element  $x \in A$  ma element przeciwny  $-x$  tzn. taki, że  $x \oplus (-x) = 0$ ; oraz  
 —  $\circ$  jest łączne i przemiennie;  
 — istnieje element  $1 \in A$  taki, że dla każdego  $x \in A: x \circ 1 = x$ ; i ponadto  
 — Działanie  $\circ$  jest rozdzielne względem działania  $\oplus$ .  
 Przykładami pierścieni przemiennych z jednością są liczby rzeczywiste, liczby zespolone ze zwykłymi działaniami i przykład podany przez Autora.  
 Przy oznaczeniach klas abstrakcji opuściliśmy symbole relacji. Nie powinno to prowadzić do nieporozumień.

Niezmierzone otchłanie teorii liczb wciąż przyciągają setki badaczy, chcących zaznać przyjemności poruszania się po gruncie dziedziny, którą Gauss nazwał Królową Matematyki. Spoglądając na jedno pojęcie teorii liczb, widzimy jednocześnie cały ogrom naszych możliwości budowania nowych problemów, czy nawet teorii. Może uda nam się pokazać fragmenty niekłamanej piękna tej dziedziny, tkwiący w jednym skromniutkim problemie, nad którym chcielibyśmy się tu zastanowić.

Spróbujemy udowodnić twierdzenie, które intuicyjnie nie jest zupełnie oczywiste, ale jego prawdziwość można pokazać, sięgając do zagadnień pozornie z nim nie związanych. Przed podaniem owego twierdzenia ustalimy oznaczenia oraz wspomnimy o klasach abstrakcji, za pomocą których dokonamy dowodu. Jeżeli dane są dwie liczby całkowite  $a$  i  $b$ , to ich największy wspólny dzielnik oznaczamy symbolem

$$(a, b).$$

Symbol ten ma sens tylko wtedy, gdy  $a^2 + b^2 > 0$ .

Jeżeli dana jest relacja równoważności „ $\sim$ ” określona w zbiorze  $X$ , to klasą abstrakcji tej relacji wyznaczoną przez  $x \in X$  nazywamy zbiór  $[x]$  zdefiniowany następująco:

$$[x] = \{y \in X: y \sim x\}.$$

Zbiór wszystkich klas abstrakcji danej relacji równoważności określonej w zbiorze  $X$  oznaczamy  $X/\sim$  (zbiór ten nazywamy przestrzenią ilorazową).

W zbiorze  $Z$  wszystkich liczb całkowitych możemy (przy założeniu, że  $m \neq 0$ ) wprowadzić relację  $\sim_m$  w następujący sposób:

$$\sim_m = \{\langle x, y \rangle: m | (x - y)\}.$$

Jest to relacja równoważności (dlaczego?), więc dzieli zbiór  $Z$  na klasy. Są to tzw. klasy modulo  $m$ . Łatwo zauważyć, że jeżeli wprowadzimy działania na klasach:

$$[x] \oplus [y] = [y + x], \quad [x] \circ [y] = [y \cdot x],$$

wówczas system  $\langle Z/\sim_m, \oplus, \circ \rangle$  jest pierścieniem przemiennym z jednością. Podkreślamy dodatkowo, że zerem naszego pierścienia jest  $[0]$ , a jednością  $[1]$ .

Możemy teraz przystąpić do omówienia zapowiedzianego twierdzenia.

Oto jego treść:

$$[(a, b) = n] \Leftrightarrow [n | a \wedge n | b \wedge \bigvee_{k, l \in Z} (ka + lb = n)].$$

Dowód: Dla przejrzystości prowadzonych rozumowań część „w prawo” ( $\Rightarrow$ ) naszego twierdzenia rozważymy kolejno dla  $n = 1$  i  $n \neq 1$ .

$1^n = 1$ . Zajmiemy się najpierw przypadkiem, gdy jedna z liczb  $a, b$  jest zerem. Wówczas automatycznie druga jest jednością i wystarczy przyjąć  $k = l = 1$ .

Obecnie założymy, że  $a \neq 0$  i  $b \neq 0$ . Wprowadźmy relację  $\sim_b$  i weźmy pod uwagę zbiór:

$$(*) \quad U = \{[ta], t = 1, 2, \dots, b\}.$$

Pokażemy, że

$$(**) \quad U = Z/\sim_b.$$

Przed wszystkim zauważmy, że zbiór  $U$  jest  $b$  — elementowy — tak jak zbiór  $Z/\sim_b$ . Wystarczy teraz pokazać, że każde dwie klasy ze zbioru  $U$  są różne. Załóżmy przeciwnie, że dla pewnych  $i$  oraz  $j, i \neq j$ , zachodzi

$$[ia] = [ja].$$

Otrzymujemy:

$$[ia] \ominus [ja] = [0],$$

zatem

$$[a] \circ ([i] \ominus [j]) = [0].$$

A więc  $b | a \cdot (i - j)$ .

Z założenia  $(a, b) = 1$  wynika, że

$$b | (i - j).$$

Zatem  $i$  różni się od  $j$  o wielokrotność  $b$ , co przeczy definicji (\*) zbioru  $U$ . Sprzeczność ta przekonuje nas, że każde dwa elementy zbioru  $U$  są różne, czyli że  $U$  jest zbiorem wszystkich klas modulo  $b$ . Jest to dla nas niesłychanie ważne, bo jeśli zachodzi (\*\*), to dla każdej liczby całkowitej  $z$  znajdziemy taką klasę  $[ak]$ , by

$$[ak] = [z].$$

Położmy  $z = 1$ . Możemy tak dobrać liczbę  $k$ , by

$$[ak] = [1],$$

czyli, by  $b | (ak - 1)$ .

Zatem istnieje taka liczba  $-l$ , że  $ak - 1 = -lb$ ,  
 stąd  $ak + bl = 1$ .

Czy cię jest ciekawy?  
 Nagrody w konkursie otrzymują:  
 Leonard Kasprzak z Ostrowa  
 Wielkopolskiego  
 Bogusław Wasilewski z Suwałk.



Rozwiązanie zadania M89.

Rozróżniamy dwa przypadki: a)  $n$  jest liczbą nieparzystą, b)  $n$  jest liczbą parzystą.

a) Niech  $n = 2k + 1$ . Wówczas przy pierwszej komendzie uczeń z numerem  $k + 1$  pozostaje na miejscu, a uczeń z numerem  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) zamienia się miejscem z uczniem o numerze  $2k + 2 - j$ . Otrzymujemy wtedy szereg, w którym uczniowie stoją według malejących numerów.

Na drugą komendę uczeń o numerze  $2k + 1$  pozostaje na miejscu, uczeń zaś o numerze  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) zamienia się miejscem z uczniem o numerze  $2k + 1 - i$ .

Uczniowie są teraz ustawieni zgodnie z treścią zadania.

b) Niech  $n = 2k$ . Przy pierwszej komendzie uczniowie z numerami  $1$  i  $k + 1$  pozostają na miejscu, a uczeń z numerem  $j$  ( $j = 2, 3, \dots, k$ ) zamienia się z uczniem o numerze  $2k + 2 - j$ . Na drugą komendę uczeń o numerze  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) zamienia się miejscem z uczniem o numerze  $2k + 1 - i$ .

Teraz uczniowie są też ustawieni zgodnie z treścią zadania.

$2^\circ$  Załóżmy teraz, że  $(a, b) = n$ , gdzie  $n$  jest dowolną liczbą naturalną. Jasne jest, że istnieją takie liczby  $\alpha$  i  $\beta$ , że

$$a = \alpha n \wedge b = \beta n \wedge (\alpha, \beta) = 1.$$

Na mocy poprzednio udowodnionego faktu mamy dla pewnych  $k$  i  $l$ :

$$k\alpha + l\beta = 1.$$

Mnożąc tę równość stronami przez  $n$  otrzymujemy

$$ka + lb = n.$$

Przystąpimy teraz do drugiej części naszego dowodu.

$\Leftarrow$ . Załóżmy, że  $n$  nie jest największym wspólnym dzielnikiem liczb  $a$  i  $b$ . tzn. że jest mniejsze od  $(a, b)$  (większe być nie może, ponieważ wtedy nie byłby spełniony warunek  $n|a$  i  $n|b$ ). Mamy więc:

$$(a, b) = n + p, \quad p > 0.$$

Niech dla pewnych  $k$  i  $l$  zachodzi:

$$ka + lb = n.$$

Podzielmy tę równość stronami przez  $n + p$ :

$$k\alpha + l\beta = \frac{n}{n+p},$$

gdzie  $\alpha$  i  $\beta$  oznaczają ilorazy liczb  $a$  i  $b$  przez ich największy wspólny dzielnik.

Lewa strona otrzymanej równości jest całkowita, natomiast prawa nigdy nie jest całkowita, ponieważ  $n > 0$ .

Otrzymana sprzeczność kończy dowód naszego twierdzenia. Wiadomo, że warunek  $\bigvee_{k,l} (ka + lb =$

$= n)$  można wypowiedzieć inaczej: „ $n$  jest kombinacją liniową liczb  $a$  i  $b$ ”. Zatem naszemu twierdzeniu nadamy taką „poważniejszą” postać:

$$[(a+b) = n] \Leftrightarrow [n|a \wedge n|b \wedge n \text{ jest kombinacją liniową liczb } a \text{ i } b].$$

Liczymy, że w wielu problemach, gdzie występować będzie największy wspólny dzielnik liczb całkowitych, przytoczone tu twierdzenie niejednokrotnie będzie pomocne.



Rozwiązanie zadania F30.

Wprowadzamy prostokątny układ współrzędnych, jak pokazano na rysunku obok. Na pręt, w danej chwili czasu, działają następujące siły (patrz rysunek):

- siła ciężkości,  $M \cdot g$ , przyłożona w środku masy pręta,
- siła reakcji podłogi,  $N$ , skierowana wzdłuż osi  $y$ , przyłożona do dolnego końca pręta,
- siła reakcji ściany,  $T$ , skierowana wzdłuż osi  $x$ , przyłożona do górnego końca pręta.

Wartości  $N$  i  $T$  zmieniają się w czasie.

Ruch pręta, jako ciała sztywnego, możemy rozpatrywać jako ruch złożony z ruchu obrotowego wokół osi prostopadłej do płaszczyzny  $xy$  i przechodzącej przez środek masy pręta oraz ruchu postępowego środka masy pręta. Równania ruchu do momentu oderwania się pręta od ściany są postaci:

ruch obrotowy: 
$$\frac{N \cdot L}{2} \cos \alpha - \frac{T \cdot L}{2} \sin \alpha = I \frac{d\omega}{dt},$$

(1)

ruch postępowy: 
$$T = M \cdot a_x$$
  

$$M \cdot g - N = M \cdot a_y,$$

gdzie:

$I$  — jest momentem bezwładności pręta liczącym względem osi przechodzącej przez środek masy,  $I = \frac{1}{12} M \cdot L^2$ ,  
 $\omega$  — prędkością kątową w ruchu obrotowym względem tej osi,  
 $a_x, a_y$  — składowymi wektora przyspieszenia w ruchu postępowym.

Warunkiem przylegania górnego końca pręta do ściany jest występowanie siły reakcji  $T$ , czyli przyspieszenie  $a_x$  powinno być dodatnie. W momencie oderwania się końca pręta wartość  $a_x$  równa się 0. Natomiast składowa przyspieszenia  $a_y$ , zgodnie z warunkami zadania i z przyjętą konwencją współrzędnych, powinna zawsze mieć wartość ujemną. Ponieważ siły  $T$  i  $N$  nie wykonują pracy, z zasady zachowania energii otrzymujemy następujący związek:

(2) 
$$\frac{M \cdot V^2}{2} + \frac{I \cdot \omega^2}{2} = M \cdot g \left( \frac{L}{2} - y \right) = M \cdot g \cdot \frac{L}{2} (1 - \sin \alpha).$$

Z faktu ślizgania się końców pręta po podłodze i po ścianie wynikają związki między składowymi prędkości pręta w ruchu postępowym, a prędkością kątową  $\omega$ . Ruch danego końca pręta rozpatrujemy jako wynik nałożenia się ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego. Ponieważ dolny koniec porusza się tylko wzdłuż osi  $x$ , a górny koniec tylko wzdłuż osi  $y$  otrzymujemy:

(3) 
$$-V_y = \frac{\omega \cdot L}{2} \cos \alpha, \quad V_x = \frac{\omega \cdot L}{2} \sin \alpha.$$

Stąd wynika zależność:  $V^2 = \frac{\omega^2 L^2}{4}$ . Wykorzystując zasadę zachowania energii (2) otrzymujemy związek:

$$\frac{\omega^2 \cdot L}{3g} = 1 - \sin \alpha,$$

a następnie zależność:

$$V_x = \frac{\omega \cdot L}{2} \left( 1 - \frac{\omega^2 L}{3 \cdot g} \right).$$

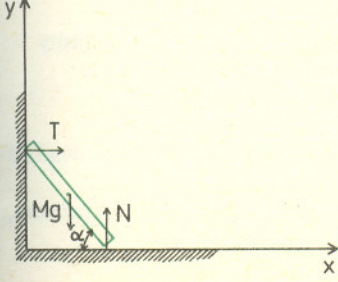
Stąd:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt_x} = -\frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{L}{2} (3 \sin \alpha - 2).$$

Widać, że górny koniec pręta oderwie się od ściany, gdy  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ .

Po oderwaniu się od ściany ruch pręta w kierunku poziomym będzie ruchem jednostajnym z prędkością

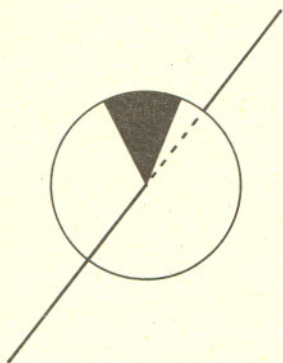
$V_{x0} = \frac{\omega_0 L}{3} = \frac{1}{3} \sqrt{g \cdot L}$ . Natomiast równanie opisujące ruch środka masy w kierunku pionowym ma skomplikowaną postać matematyczną.



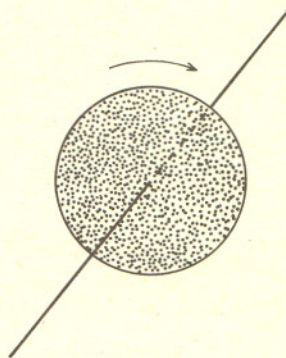
# Efekt stroboskopowy

W poprzednim numerze mówiliśmy o jednym tylko aspekcie efektu stroboskopowego — wywołaniu wzrokowego wrażenia ruchu obrazu przez pokazywanie szybko po sobie następujących obrazów, przedstawiających kolejne fazy tego ruchu (Laboratorium w domu, »Delta« 5/1976).

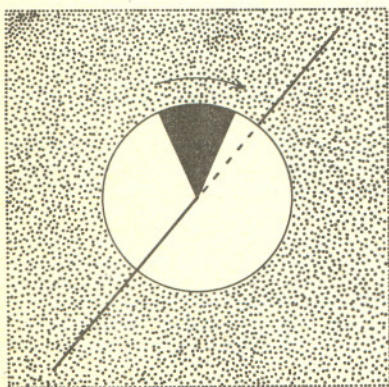
Efekt stroboskopowy to także zjawisko odwrotne — możliwość obserwacji ciał poruszających się szybkimi ruchami periodycznymi (np. obrót), albo jako nieruchomych, albo wykonujących te ruchy w zwolnionym tempie. Efekt można uzyskać oświetlając badane ciało błyskami o odpowiednio dobranej częstotliwości powtarzania i czasie trwania błysku.



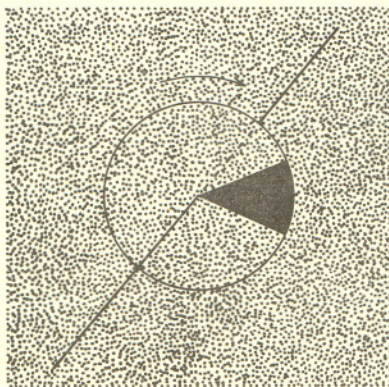
Na osi osadzona jest tarcza z narysowanym czarnym sektorem. Tarcza wiruje dokonując 100 obrotów na sekundę.



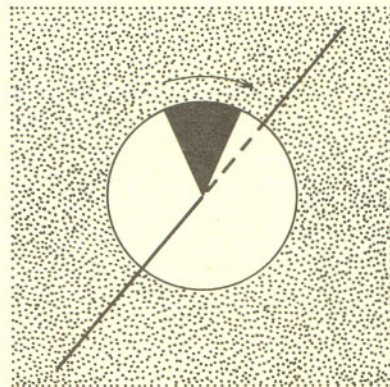
Obserwując w świetle ciągłym widzimy jednostajną, zamazaną powierzchnię.



Oświetlamy tarczę krótkotrwałym błyskiem, gdy czarny sektor jest u góry.



Gdy sektor czarny znajduje się w innym położeniu, źródło światła jest wyłączone. Tarcze nie widać.



Następny błysk oświetla tarczę, gdy czarny sektor znowu znajdzie się u góry.

Tarczę widzimy 100 razy na sekundę ale zawsze z sektorem ku górze. Odbieramy wrażenie ciągłego obrazu i nieruchomej tarcze. Zjawisko to znajduje szerokie zastosowanie w technice, może jednak być przyczyną zagrożenia przy pracy, jeżeli źródło światła pulsuje z dużą częstotliwością, jak na przykład świetlówka. Niektóre wirujące elementy maszyn zdają się być nieruchome co może doprowadzić do wypadku. Dlatego instalacja oświetleniowa pomieszczeń warsztatowych jest tak projektowana, aby oświetlenie było ciągłe.

# Skąd się wzięła stodoła?

Oto przykład zadania nierozwiązalnego: Proton o znanej energii zderza się z innym nieruchomym protonem. Co się w tym konkretnym zderzeniu stanie? Czy protony rozlecą się po zderzeniu jak kule bilardowe, czy może zostaną oprócz tego wyprodukowane dodatkowe cząstki, na przykład mezony  $\pi$ . Nie umiemy przewidzieć wyniku zderzenia w każdym pojedynczym akcie — potrafimy jednak określić prawdopodobieństwo nastąpienia konkretnego procesu. Fizyka mikroświata ma charakter statystyczny. Miarą prawdopodobieństwa określonego procesu jest wielkość o wymiarze powierzchni nazywana przekrojem czynnym. Niech tarcza zawiera  $k$  cząstek i niech na jednostkę jej powierzchni pada w jednostce czasu  $F$  cząstek. W wyniku zderzeń zaobserwowano w jednostce czasu  $N$  procesów określonego typu. Definiujemy

przekrój czynny  $\sigma$  na proces określonego typu jako równy  $\sigma = \frac{N}{k \cdot F}$ . Stąd wymiar

$[\sigma] = [N]/([k] \cdot [F]) = \text{m}^2$  jest wymiarem powierzchni.

Zilustrujemy nowe pojęcie na przykładzie. Niech tarcza zawiera  $k = 5$  kulek metalowych i niech na tarczę pada 20 kulek szklanych na  $1 \text{ cm}^2$  na minutę. W wyniku zderzeń obserwujemy średnio jedno pęknięcie padającej kulki szklanej na sekundę. Przekrój czynny na zderzenie z pęknięciem kulki padającej wynosi

$$\sigma = \frac{1 \text{ s}^{-1}}{5 \cdot \frac{20}{60 \text{ s}} \cdot 1 \text{ cm}^2} = 0,6 \text{ cm}^2,$$

Dla omawianego procesu kulki stanowią efektywne tarczę o promieniu około  $0,44 \text{ cm}$ . Ten efektywny przekrój czynny może być mniejszy niż powierzchnia zasłaniana przez kulkę. Łatwo to zrozumieć. W naszym przypadku tylko zderzenia czołowe prowadzą do rozbicia padających paciorków. Zderzenia brzegami nie są tak groźne. (Rozważania nasze są dopóty słuszne, dopóki liczba kulek w tarczy jest stała. Dlatego dobraliśmy w tarczy kulki metalowe, aby nie pękały). Przekrój czynny charakteryzuje zatem łatwość z jaką proces może nastąpić, a więc jest miarą prawdopodobieństwa zaobserwowania tego procesu. Wiedząc, że w innej tarczy jest  $k = 20$  identycznych jak poprzednio kulek i że pada 50 szklanych kulek na  $1 \text{ cm}^2$  na sekundę przy niezmiennych pozostałych warunkach, możemy obliczyć, ile zaobserwujemy pęknięć szklanych kulek w sekundzie:

$$N = \sigma \cdot k \cdot F = 0,6 \text{ cm}^2 \cdot 20 \cdot 50 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} = 600 \text{ s}^{-1}.$$

Dla zderzeń kul pojęcie przekroju czynnego nie jest bardzo potrzebne, moglibyśmy obejść się bez niego. Dla reakcji jądrowych sprawa wygląda inaczej. Zderzenie polega na oddziaływaniu. Między kulkami makroskopowymi działają głównie siły sprężystości (grawitację zaniedbujemy). Między dwoma protonami działają siły elektrostatyczne i siły jądrowe.

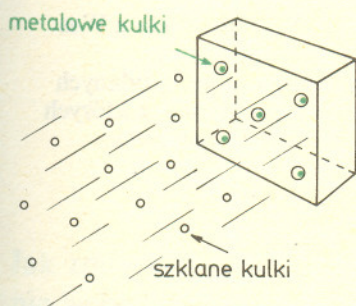
Rozmiary geometryczne cząstki zarówno padającej jak i cząstki tarczy są trudne do ustalenia. Dlatego mówimy o przekroju czynnym na określony proces jądrowy. Na przykład  $\sigma(\text{pp} \rightarrow \text{pp} \pi^0) = 1,4 \text{ mb}$  (przekrój czynny na wyprodukowanie mezonu  $\pi^0$ ) przy energii kinetycznej padającego protonu  $9,1 \text{ GeV}$ , a przekrój czynny na wyprodukowanie dodatkowo pary pionów,  $\sigma(\text{pp} \rightarrow \text{pp} \pi^+ \pi^-) = 2,4 \text{ mb}$  przy tej samej energii.

Przekrój czynny wyrażamy w tajemniczych jednostkach barnach, milibarnach. A barn oznacza po angielsku stodołę — skąd więc takie skojarzenie. Skąd się wzięła ta stodoła. Odpowiedź znajdziemy w raporcie M. G. Holloway'a i C. P. Daker'a LAMS-523 z 13 września 1944 r., odtajnionym 4 sierpnia 1948 r., którego wolne tłumaczenie poniżej zamieszczamy.

„Pewnego grudniowego dnia 1942 r. autorzy głodni i czasowo pozbawieni domowego pożywienia siedzieli przy obiedzie w kawiarni uniwersytetu w Pardue. Przy kawie i papierosach rozmowa zeszła na temat nurtujący wszystkich w owym okresie, mianowicie na przekrój czynny.

W wypowiedziach przewijało się narzekanie na brak nazwy dla jednostki przekroju czynnego, którą przyjęto jako równą  $10^{-24} \text{ cm}^2$ . Oczywiście poszukiwano jakiegoś rozwiązania. Istnieje tradycja, aby nazywać nową jednostkę nazwiskiem wybitnego człowieka związanego bezpośrednio z pracami w danej dziedzinie fizyki. W tym przypadku żadne nazwisko nie przychodziło na myśl. Spróbowano zatem nazwisk Oppenheimer i Bethe, którzy dali podstawy teoretyczne prowadzonych w Pardue prac. Nazwę „Oppenheimer” odrzucono jako za długą, chociaż wydaje się teraz, że „Oppy” lub „Oppie” byłaby dostatecznie zwięzła. Nazwa „Bethe” była myląca z powodu podobnego brzmienia do nazwy greckiej litery  $\beta$  często w fizyce używanej.

Ponieważ John Manley kierował pracami w Pardue próbowano jego nazwisko. „Manley” wydawało się za długie — rozważano więc również nazwę „John”, ale i tę odrzucono, ponieważ termin ten poza imieniem ma jeszcze inne znaczenie (wychodek — przyp. redakcji). Wiejskie pochodzenie jednego z autorów pozwoliło na skojarzenie pomiędzy „john” (wychodek) a „barn” (stodoła). To ostatnie wydało się od razu dobrą nazwą, a później dodatkowo zwrócono uwagę, że przekrój czynny 1 barna =  $10^{-24} \text{ cm}^2$  dla procesu jądrowego jest rzeczywiście ogromny „jak stodoła”. Takie były narodziny „barna”. Wedle najlepszej wiedzy autorów po raz pierwszy publicznie użyto jednostki barn w raporcie LAMS-2 z 28 czerwca 1943 r., w którym zdefiniowano barn jako przekrój czynny  $1 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ . Autorzy uważają, że barn należy pisać właśnie w ten sposób bez dużej litery na początku i że symbolem będzie małe b. Znaczenia milibarna i kilobarna są oczywiste”.



# Mała delta



Nareszcie koniec roku szkolnego! Wkrótce wielu z Was wyjedzie na obozy, kolonie lub na wypoczynek z rodzicami. Mała Delta życzy Wam wesołych, udanych wakacji. Podamy Wam dzisiaj parę propozycji, z których może skorzystacie w czasie wakacyjnych wędrówek.

## Zróbmy zegar słoneczny

Na placu apelowym na obozie lub na podwórku przed domem, gdzie spędzacie wakacje, przydałby się zegar słoneczny, który pokazywałby wszystkim czas od wschodu do zachodu słońca. Jak go zrobić? — Bardzo prosto! Trzeba wybrać miejsce, oczywiście takie, gdzie przez cały dzień dociera słońce. Wbijamy w ziemię kij, którego cień będzie wskazówką naszego zegara. Tarczą będzie ziemia wokół kija. Do zaznaczenia godzin na tarczy musimy posłużyć się prawdziwym zegarkiem. O każdej równej godzinie zaznaczamy kreską na ziemi kierunek, wzdłuż którego leży cień kija i zapisujemy na końcu kreski odpowiednią liczbę. Żeby zegar był trwalszy i godziny bardziej widoczne, można je ułożyć z kamyczków lub muszelek. Nasz zegar ma tę zaletę, że nigdy nie staje i jest niezawodny, oczywiście jeśli tylko świeci słońce. Jeśli interesują Was bardziej wyszukane metody konstrukcji zegarów słonecznych, zajrzyjcie do działu „Laboratorium w domu” w trzecim numerze »Dety«

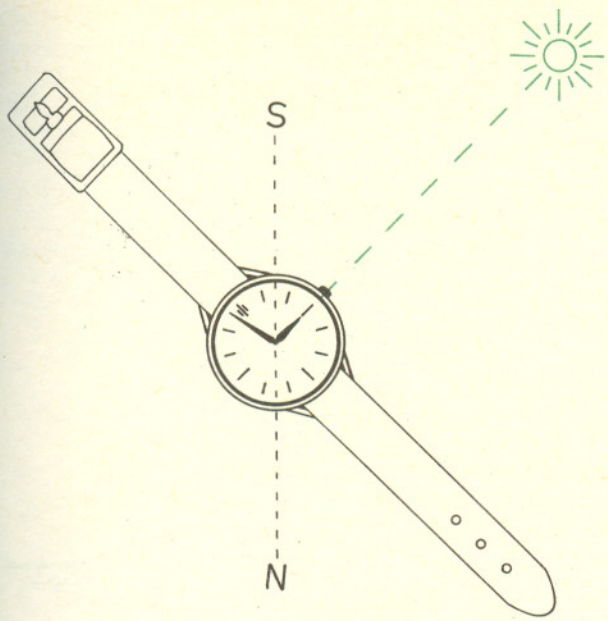


## Idziemy na wycieczkę

Wybierając się na daleką wycieczkę trzeba mieć ze sobą mapę okolicy. Mapa pokaże nam, w którym kierunku mamy wędrować, żeby dotrzeć do wyznaczonego celu. Oczywiście sama mapa nie wystarczy, jeśli nie umiemy oznaczać stron świata. Najłatwiej jest oczywiście posłużyć się kompasem, ale jeśli nie mamy kompasu? W nocy kierunek północny wskazuje nam Gwiazda Polarna. W ciągu dnia? Słońce przesuwa się po niebie, więc określenie stron świata na podstawie jego położenia jest trudniejsze. Najprościej jest o 12-tej w południe. Należy zauważyć, że jest to słuszne tylko dla miejscowości położonych na długości geograficznej  $15^\circ$ , jak na przykład Zgorzelec. Na terenie prawie całej Polski południe astronomiczne jest nieco później, na przykład dla Warszawy Słońce jest na południu około godziny 12<sup>26</sup>. Wiadomo, że Słońce wtedy wskazuje kierunek południowy. O godzinie 6-tej rano Słońce jest na wschodzie, o 6-tej wieczorem — na zachodzie.







A co zrobić, jeśli chcemy wyznaczyć kierunek południowy o dowolnej godzinie w ciągu dnia? Możemy sobie z tym poradzić, jeśli mamy zegarek. Kładziemy zegarek płasko na ziemi i obracamy go tak, by mała wskazówka była skierowana dokładnie w stronę Słońca. Dwusieczna kąta utworzonego pomiędzy małą wskazówką a liczbą „12” wskazuje wtedy kierunek południowy.



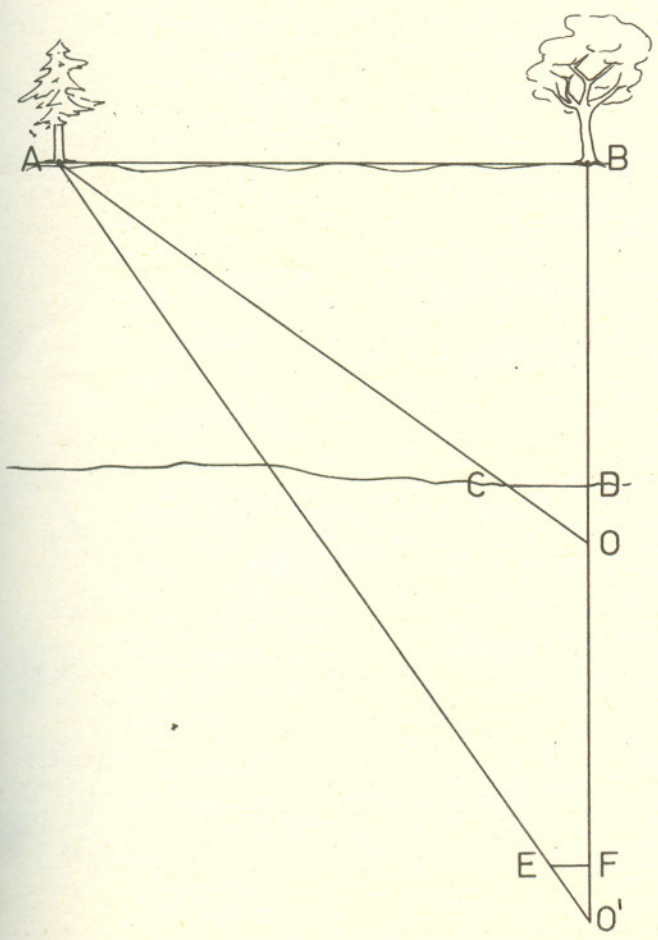
### Jak zmierzyć wysokość drzew nie wchodząc na nie?

Jeśli chcesz wiedzieć, jaką wysokość ma drzewo, pod którym stoisz, nie musisz koniecznie wdrapywać się na nie z miarką. Poproś kolegę, żeby zmierzył długość Twojego cienia, a następnie zmierz długość cienia drzewa. Jak widać na rysunku, cień drzewa jest tyle razy dłuższy od Twojego cienia, ile razy samo drzewo jest wyższe od Ciebie.



### Jak zmierzyć szerokość rzeki, bez przechodzenia na drugi brzeg?

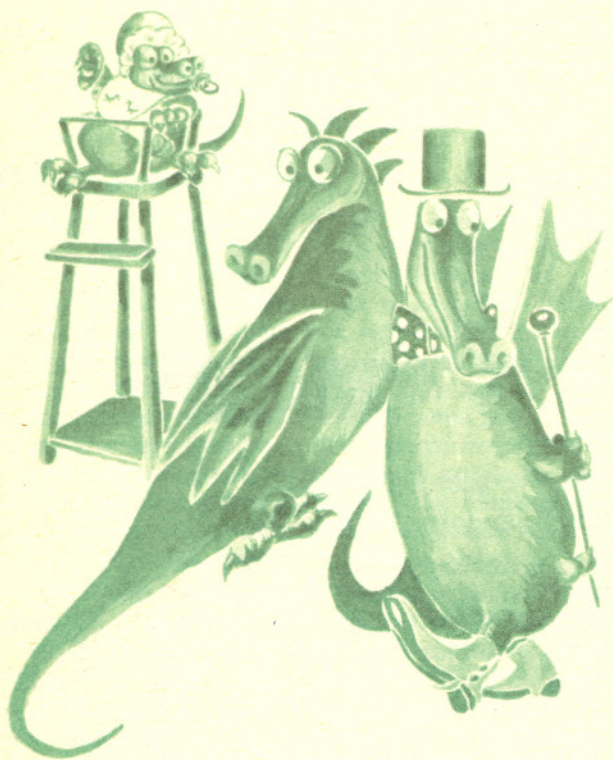
Wybierz na przeciwnym brzegu rzeki dwa charakterystyczne przedmioty. Weź mały patyczek, trzymaj go poziomo w wyciągniętej ręce tak, żeby patyczek zasłonił ci cały odcinek między tymi przedmiotami. Jeśli patyczek jest za długi, ułam go. Następnie złam patyczek w połowie i oddalając się od rzeki znajdź miejsce, gdzie pozostała połowa patyczka zasłoni ci ten sam odcinek. Zmierz odległość, na jaką musiałeś się oddalić. Jest ona równa w przybliżeniu szerokości rzeki. Może spróbujesz sobie udowodnić, że tak jest? Pomoże ci w tym rysunek.



## O dziesiątkowym smoku i podzielności przez 9

Oto smok dziewiątkowy:

Żarłoczny ten stwór uwielbia cukier w kostkach, ale, że jest dziewiątkowy, to pożera go nie byle jak — tylko pełnymi dziewiątkami. Jeśli więc dać mu 31 kostek cukru, to trzy razy paszczą kłapnie i  $3 \cdot 9 = 27$  kostek cukru pożre, 4 zaś pozostawić musi. (Czy wiecie jak najłatwiej go rozzłościć? — Należy mu podsunąć 8 kostek cukru.)



A teraz zadanie o smokach:

Są trzy smoki: siódemkowy, dziewiątkowy i jedenastkowy.

Który z nich potrafi zjeść 693 kostki cukru?

Smok dziewiątkowy poradzi sobie z cukrem z pewnością, liczba 693 dzieli się bez reszty przez 9 (wystarczy sprawdzić, że suma cyfr tej liczby dzieli się przez 9:  $6+9+3 = 18$ ).

Co jednak zrobić dalej — przecież nie znamy cech podzielności przez 7, ani przez 11. Ha, trudno, trzeba będzie poświęcić trochę cukru i pożywić któregoś smoka np. siódemkowego. Nie damy mu jednak całego cukru od razu, będziemy mu wydzielać porcje, a zrobimy to tak:

$$693 = 6 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 3$$

6 porcji	9 porcji	porcyjka
po 100	po 10	z 3 kostek
kostek	kostek	

Najpierw podrażnimy go nieco, dając mu porcyjkę z trzech kostek. Smok jej oczywiście nie ruszy, zaś apetytu na cukier nabierze. Teraz karmimy smoka porcjami po 10 kostek (jest 9 takich porcji). Smok, chociaż żarłoczny, pozostawia 9 porcyjek po 3 kostki. Ulitujmy się nad nim i pozwólmy mu zjeść choćby część tego cukru; ułóżmy inne porcje: 3 porcje po 9 kostek. Czy smok zeżre wszystko? Ano nie, pozostanie  $3 \cdot 2 = 6$  kostek cukru.



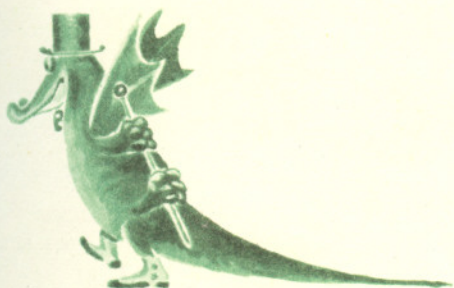
Mamy jeszcze porcje po 100. Z każdej takiej porcji smok pozostawić musi 2 kostki (reszta z dzielenia 100 przez 7 wynosi 2). Zostaje więc  $6 \cdot 2 = 12$  kostek, tworzymy z nich jedną porcję i chwilę potem jest już tylko 5 kostek.

Policzmy, ile cukru jeszcze nam zostało:

- 3 (to porcja, której smok nawet nie tknął),
- 6 (z porcji po dziesięć),
- 5 (z porcji po 100).

Niestety, kostek cukru jest dokładnie 14 — to prawie tak, jak gdyby nic nie było.

$$\begin{array}{r}
 693 = 6 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 3 \\
 6 \cdot 2 \quad + 9 \cdot 3 + 3 \\
 5 \quad \quad + 2 \cdot 3 + 3 \\
 14 \\
 0
 \end{array}$$



Myślę, że potraficie sami przeprowadzić obliczenia dotyczące smoka jedenastkowego.



Nie mamy już cukru, ale nauczyliśmy się sprawdzać, czy liczba dzieli się przez 7 lub przez 11 (albo jaka jest reszta z tego dzielenia).

Czy 18447 dzieli się przez 7?

$$18447 = 1 \cdot 10000 + 8 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 7$$

Do dalszych obliczeń są nam potrzebne „nowe” reszty — z dzielenia przez 7 liczb 10000 oraz 1000. Wyliczenie tych reszt jest bardzo proste, np. dla 1000:

$$\begin{array}{r}
 1000 = 10 \cdot 100 \\
 3 \cdot 2 \\
 6
 \end{array}$$

Napiszmy „tabelę reszt” z dzielenia przez 7.

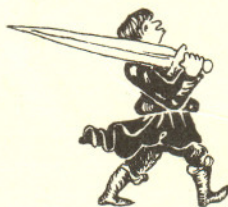
Korzystając z tej tabeli obliczymy resztę z dzielenia 18447 przez 7.

$$\begin{array}{r}
 18447 = 1 \cdot 10000 + 8 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 7 \\
 1 \cdot 4 \quad + 8 \cdot 6 \quad + 4 \cdot 2 \quad + 4 \cdot 3 \quad + 7 \\
 4 \quad \quad + 1 \cdot 6 \quad + 1 \quad \quad + 5 \quad + 0 \\
 16 \\
 2
 \end{array}$$

18447 nie jest podzielne przez 7.

*dzielenie przez 7*

liczba	1	10	100	1000	10000	...
reszta	1	3	2	6	4	...



Na pewno potraficie sami sprawdzić, że 18447 dzieli się przez 11. Napiszcie także „tabelę reszt” z dzielenia przez 9 i obliczcie przy jej pomocy resztę z dzielenia 18447 przez 9.

