delta

SPIS TREŚCI

W następnym numerze:
Błędne drogi

„Delta"
matematyczno-fizyczny miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Polskiego Towarzystwa Fizycznego
wydawany przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Adres Redakcji
ul. Hoża 69 pok. 151,
00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo
Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.; 2,50 ark. druk.;
papier offsetowy III kl. 80 g. 61 × 86
Wydrukowano w Drukarni im. Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 1689/76 F-15

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60,— cena prenumeraty półrocznej zł 30,—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch" oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:
— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.
Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch".
Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW oraz prenumeratorzy indywidualni, zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch", Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTĘ":

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona" Krakowskie Przedmieście 7 00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland.
— Earlscourt Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 5.— nr indeksu 35723/35550

Pewnik wyboru

Dr Kazimierz WIŚNIEWSKI

Dziś o zbiorach uczą się młodzi ludzie już w przedszkolach. Nie zawsze jednak tak było. Nie tak dawno elementów *teorii mnogości* (taka jest tradycyjna nazwa nauki o zbiorach) uczono dopiero na studiach i to matematycznych. A jak było jeszcze dawniej? Nie możemy cofać się zbyt daleko w przeszłość, bo teoria ta jest dość młodą dziedziną matematyki. Od ukazania się pierwszych poświęconych teorii mnogości prac jej twórcy, Georga Cantora, upłynął zaledwie wiek, a nieco więcej od ukazania się prac innych matematyków na ten temat.

Nawet przez matematyków była ona przyjmowana różnie. Oddajmy głos świadkowi pewnego zdarzenia z początków naszego stulecia (R. Courant, *Wspomnienia z Getyngi*, Wiadom. Mat. 18(1974), 145–157): „Przypominam sobie, jak pewnego razu Henri Poincaré krótko przed swą śmiercią przybył do Getyngi dla wygłoszenia kilku bardzo interesujących odczytów na różne tematy. Jednym z nich było rozchodzenie się dokoła Ziemi fal elektromagnetycznych, innym — odczyt o podstawach matematyki. Był to gwałtowny atak na cantoryzm, na pewnik wyboru itd., przeciw twierdzeniu w rodzaju dobrego uporządkowania.

Właśnie wtedy Zermelo udowodnił, że każdy zbiór może być dobrze uporządkowany. Zermelo siedział w pierwszych rzędach, a Poincaré starał się być uprzejmym (a umiał być straszliwie nieuprzejmy, gdy starał się okazać przyjazny stosunek) i przemawiał. Och! Jak on grzmiał przeciw podejściu cantorowskiemu i rozwijaniu w matematyce tego kierunku. Powiedział: «Należy ukręcić łeb nawet najbardziej pomysłowemu dowodowi pana Zermelo i wyrzucić przez okno». Zermelo, pasjonat i dziwak, był zrozpaczony i wściekły. W czasie kolacji w tym samym dniu byłby zastrzelił Poincarégo, gdyby był zręczniejszy; był jednak wielkim niezgrabą". Wypowiedź ta oddaje ducha tamtych czasów. Zdania wybitnych matematyków były podzielone. Na powszechny szacunek teoria mnogości musiała zasłużyć swą użytecznością dla innych działów matematyki; stała się nawet nieodzowną bazą dla nowych dyscyplin matematycznych.

Po tym przydługim wstępie trzeba przystąpić do tematu. W artykule tym chciałbym opowiedzieć o najbardziej chyba kontrowersyjnym aksjomacie teorii mnogości — o *pewniku wyboru* (zob. artykuł A. Mostowskiego o dobrym uporządkowaniu w zeszycie 3 «Delty» z 1974 r). Jak pisałem we wstępie, wszyscy uczą się dziś teorii mnogości, a więc mogę zakładać, że Czytelnik zna podstawowe jej pojęcia: pojęcie zbioru i pojęcie funkcji. Niech R będzie rodziną zbiorów (tj. zbiorem, którego elementami są również zbiory). *Selektorem* rodziny R nazwiemy zbiór składający się z pewnych elementów zbiorów należących do rodziny R i mający z każdym z tych zbiorów po dokładnie jednym elemencie wspólnym. Przez Sel(R) oznaczymy zbiór wszystkich selektorów rodziny R.

Zob. *Kombinatoryka i boisko*, Delta 3/1976 r.

Z aksjomatów teorii mnogości (z wyjątkiem pewnika wyboru, do którego sformułowania zmierzam) można wywnioskować, że dla każdej rodziny R istnieje (dokładnie jeden) zbiór Sel(R).

Przykłady

1. Jeżeli $R = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$, to $\mathrm{Sel}(R) = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$
2. $\mathrm{Sel}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
3. Jeżeli $\emptyset \in R$, to $\mathrm{Sel}(R) = \emptyset$.
4. Jeżeli $R = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$, to $\mathrm{Sel}(R) = \emptyset$.

Po obejrzeniu powyższych przykładów i głębszym zastanowieniu się można przez analogię dojść do wniosku, że jeżeli tylko rodzina R składa się ze zbiorów rozłącznych i niepustych, to Sel(R) jest niepusty. Właśnie ten wniosek został przyjęty przez Ernsta Zermelo w 1904 r. jako pewnik wyboru. Poglądowo można go sformułować tak: z każdego zbioru rodziny składającej się ze zbiorów niepustych i rozłącznych można wybrać po jednym elemencie i utworzyć z nich zbiór.

To ostatnie sformułowanie tłumaczy nazwę pewnika. Z pewnika tego nieświadomie korzystał Cantor i inni jeszcze przed jego sformułowaniem. Jako pierwszy zwrócił uwagę na pewnik wyboru już w 1890 r. Giuseppe Peano w pracy poświęconej dowodowi istnienia rozwiązań układu równań różniczkowych.

Obyło się jednak bez przyjęcia tego aksjomatu, bo w tej konkretnej sytuacji udało się mu udowodnić istnienie selektora, a więc nie musiał zakładać aksjomatycznie jego istnienia. Beppo Levi w 1902 r. zauważył, że w dowodzie równoliczności zbioru wartości funkcji z pewnym podzbiorem jej dziedziny (zbioru określoności) trzeba powołać się na jakiś nowy aksjomat.

Samo sformułowanie pewnika wyboru niewiele o nim mówi. Żeby pokazać, jak on funkcjonuje, rozpatrzę przykłady. Pierwszym będzie dowód twierdzenia o równoliczności zbiorów, o których wyżej pisałem. Zakładam, że f jest funkcją odwzorowującą zbiór A na zbiór B. *Warstwą* funkcji f nazwiemy zbiór wszystkich tych elementów zbioru A, dla których wartość funkcji jest taka sama.

Oczywiście, warstwy są zbiorami niepustymi, a ponadto dwie różne warstwy są rozłączne. Niech R będzie rodziną wszystkich warstw funkcji f. Pewnik wyboru stwierdza, że $\mathrm{Sel}(R) \neq \emptyset$, a więc istnieje selektor W rodziny R. Niech $g(y)$ będzie (jedynym) elementem zbioru $W \cap \{x \in A : f(x) = y\}$ dla $y \in B$. Napisałem „jedynym", bo zbiór $\{x \in A : f(x) = y\}$ jest warstwą. Funkcja g jest określona na zbiorze B, a zbiór jej wartości jest zawarty w A. Ponadto g jest różnowartościowa. W ten sposób został zakończony dowód twierdzenia.

Zbiór B jest równoliczny ze zbiorem wartości funkcji g, a ten z kolei jest zawarty w zbiorze A.

Drugie zastosowanie pewnika wyboru będzie wykraczało poza teorię mnogości. Tym razem udowodnię pewne twierdzenie z początków analizy matematycznej. Jeżeli ktoś nie zna pojęć, o których będę mówił, niech się tym nie zraża. Wszystko, co będzie niezbędne, można bez trudu odczytać z tekstu dowodu.

Będziemy interesowali się funkcjami określonymi na zbiorze liczb rzeczywistych i przyjmującymi wartości rzeczywiste. Celem jest dowód twierdzenia: *Funkcja f jest ciągła w sensie Cauchy'ego w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona ciągła w sensie Heinego w punkcie x_0*. W artykule udowodnię tylko, że ciągłość w sensie Heinego pociąga za sobą ciągłość w sensie Cauchy'ego, gdyż w tej części dowodu korzysta się z pewnika wyboru. Dowód implikacji odwrotnej nie jest trudny i nie korzysta (lepiej byłoby powiedzieć: nie musi korzystać) z pewnika wyboru. Sądzę, że Czytelnik da sobie z nim radę.

Przystąpmy do dzieła. Założę, że funkcja f jest ciągła w sensie Heinego w punkcie x_0, tzn. że dla dowolnego ciągu $\{x_n\}$ warunek $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ pociąga za sobą warunek $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$. W celu uzyskania sprzeczności założę, że funkcja f nie jest ciągła w sensie Cauchy'ego w punkcie x_0, tzn. zakładam że

$$\bigvee_{\varepsilon > 0} \bigwedge_{\delta > 0} \bigvee_{x} (|x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)|) \geqslant \varepsilon).$$

Dla każdej liczby naturalnej n tworzę zbiór

$$A_n = \{\langle n, x \rangle : |x - x_0| < 1/n \wedge |f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon\}.$$

Zbiór ten zgodnie z przyjętym założeniem (dla $\delta = 1/n$) jest niepusty. Niech R będzie rodziną złożoną ze wszystkich zbiorów A_n. Jeżeli $n \neq m$, to $A_n \cap A_m = \emptyset$, bo oba te zbiory składają się z par uporządkowanych, przy czym pary uporządkowane występujące w różnych zbiorach mają różne poprzedniki, a więc są różne. Zatem R jest rodziną zbiorów niepustych i rozłącznych. Pewnik wyboru stwierdza, że $\mathrm{Sel}(R) \neq \emptyset$. Niech W będzie selektorem rodziny R. Dla każdej liczby naturalnej n zbiór $A_n \cap W$ ma dokładnie jeden element będący parą uporządkowaną, której poprzednikiem jest liczba n, a następnikiem liczba rzeczywista, oznaczmy ją przez x_n, taka, że spełnione są warunki $|x_n - x_0| < 1/n$ oraz $|f(x_n) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$. Otrzymaliśmy zatem ciąg $\{x_n\}$ o następujących własnościach: $|x_n - x_0| < 1/n$ oraz $|f(x_n) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$ dla każdej liczby naturalnej n. Z pierwszego z tych warunków wynika, że $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, zaś z drugiego, że $f(x_0)$ nie jest granicą ciągu $\{f(x_n)\}$. Otrzymaliśmy zatem sprzeczność z przyjętym na wstępie założeniem, że funkcja f jest ciągła w sensie Heinego w punkcie x_0.

Udowodnione twierdzenie bardzo często bywa wykorzystywane przy badaniu ciągłości funkcji.

Szczegółową analizę wielu innych dowodów opartych na aksjomacie wyboru przeprowadził już w 1918 r. wielce zasłużony dla matematyki polskiej i światowej, jeden z twórców Warszawskiej Szkoły Matematycznej — Wacław Sierpiński. Był on jednym z założycieli i długoletnim redaktorem organu tej Szkoły, „*Fundamenta Mathematicae*", poświęconego teorii mnogości i jej zastosowaniom. Był on również autorem pierwszego w skali światowej podręcznika teorii mnogości wydanego w 1912 r. Pewnik wyboru był jednym z tematów, które pasjonowały Sierpińskiego niemal do końca życia. Jednym z najwybitniejszych w świecie badaczy pewnika wyboru był inny przedstawiciel tej Szkoły, zmarły niedawno prof. Andrzej Mostowski. Jest on autorem zdania: „Tylko żon nie trzeba wybierać, one są nam dane".

Do tej pory pisałem o pożytku płynącym z przyjęcia pewnika wyboru. Przysparza on również pewnych kłopotów. Otóż Stefan Banach i Alfred Tarski udowodnili, korzystając oczywiście z pewnika wyboru, że kulę można tak chytrze podzielić na skończoną liczbę części, że z nich można złożyć dwie kule identyczne z wyjściową. Taki paradoksalny wniosek (tzw. *paradoksalny rozkład kuli*) i inne skłaniały do przypuszczenia, że pewnik wyboru jest sprzeczny z pozostałymi pewnikami teorii mnogości. Przypuszczenia te zostały rozwiane w 1938 r. przez Kurta Gödla, co więcej w 1963 r. Paul J. Cohen udowodnił, że przyjęcie zaprzeczenia pewnika wyboru również nie prowadzi do sprzeczności z pozostałymi aksjomatami teorii mnogości. Okazało się zatem, że pewnik wyboru jest niezależny (od pozostałych aksjomatów). Tak więc nasze rozumowanie przez analogię, prowadzące do sformułowania pewnika wyboru, niczym nie było usprawiedliwione. Powstaje zatem pytanie: przyjąć czy odrzucić pewnik wyboru? Argumentem za przyjęciem pewnika wyboru jest fakt, że wiele ważnych odkryć matematycznych nie zostałoby dokonanych bez niego. Nie można by na przykład było udowodnić twierdzeń, których dowody tu podałem. Oczywiście, nie tylko dlatego, że w ich dowodach korzystałem z pewnika wyboru, ale przede wszystkim dlatego, że pokazano nieistnienie dowodów tych twierdzeń bez opierania się na pewniku wyboru. Badaniami, o których pisałem pod koniec artykułu, zajmuje się specjalny i bardzo zaawansowany dział matematyki zwany podstawami teorii mnogości. Z tego względu ograniczyłem się tu tylko do podania pewnych wyników tego działu.

Rozwiązanie zadania M 117. Przypuśćmy, że liczb tej postaci jest liczba skończona i że $p_1, p_2, \ldots, p_n$ to są wszystkie takie liczby. Rozpatrzmy liczbę

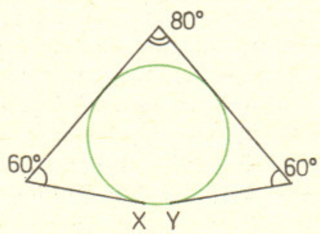
$$N = 4p_1p_2 \ldots p_n - 1.$$

Jest to liczba większa od jedności i ma wobec tego jakiś dzielnik pierwszy, oczywiście nieparzysty. Jest niemożliwe, by wszystkie takie dzielniki były postaci $4k+1$, gdyż iloczyn liczb tej postaci jest znowu liczbą tej postaci. Jeden z dzielników pierwszych liczby N jest więc postaci $4k+3$. Jest on różny od każdej z liczb $p_1, p_2, \ldots, p_n$, gdyż przez te liczby dzieli się liczba $N+1$; gdyby i N była podzielna przez któreś p_i, to liczba $N+1-N = 1$ dzieliłaby się przez p_i, co jest niemożliwe. Wskazaliśmy więc liczbę pierwszą postaci $4k+3$ różną od każdej z liczb $p_1, p_2, \ldots, p_n$, co przeczy założeniu, że były to wszystkie takie liczby.

Udowodnione twierdzenie jest szczególnym przypadkiem twierdzenia P. G. Lejeune Dirichleta (udowodnionego w roku 1837) orzekającego, że jeżeli a i b są liczbami naturalnymi względnie pierwszymi, to istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $ak+b$. Dowód tego twierdzenia jest jednak rudny.

Rozwiązanie zadania M 115. Dla $n = 3$ szukaną liczbą jest oczywiście 3. Załóżmy, że n-kąt wypukły ($n \geqslant 4$) ma x ostrych kątów wewnętrznych. Wiadomo, że suma miar wszystkich kątów wewnętrznych n-kąta wypukłego równa jest $(n-2)\pi$, a każdy taki kąt ma miarę mniejszą od π. Byłoby więc

$(n-2)\pi < x \cdot \frac{\pi}{2} + (n-x)\pi$, czyli $2n-4 < x+2n-2x$, skąd $x < 4$, czyli $x \leqslant 3$.



Rozpatrzmy teraz deltoid o kątach 60°, 80 60° i 160° (dla $n = 4$ szukana liczba jest więc też równa 3).

Można wpisać weń okrąg. Niech X i Y będą punktami styczności tego okręgu z bokami deltoidu wychodzącymi z wierzchołka kąta o mierze 160°. Obierając na krótszym z łuków XY n-5 punktów, otrzymujemy wraz z wierzchołkami przy kątach ostrych deltoidu wierzchołki n-kąta wypukłego o trzech kątach ostrych.

Rozwiązanie zadania F 39. W sytuacji statycznej warunek równości napięć liny po obu stronach bloczka jest postaci:

$$F = P + W - F,$$

gdzie F jest siłą, z jaką człowiek ciągnie linę w punkcie A.

Stąd: $$F = \frac{1}{2}(P+W).$$

Tyle wynosi napięcie liny zarówno w punkcie A jak i B. Oczywiście nacisk na oś C równa się $2F = P+W$.

Równania ruchu człowieka i mostka, gdy człowiek podciąga się ze stałym przyspieszeniem $\frac{g}{4}$ względem bloczka, są następujące:

$$F' + T = P + \frac{1}{4}P \quad \text{— człowiek,}$$

$$F' - T = W + \frac{1}{4}W \quad \text{— mostek.}$$

F' jest wartością siły z jaką człowiek oddziałuje na linę, a T wartością siły wzajemnego oddziaływania człowieka i mostka. Stąd:

$$F' = \frac{5}{8}(P+W).$$

Ponieważ lina jest nieważka, również napięcie liny w punkcie B wynosi F'. Natomiast nacisk na oś C równa się

$$2 \cdot F' = \frac{5}{4}(P+W).$$

Na koniec pytanie: czy ten sam wynik uzyskalibyśmy w przypadku podciągania mostka przez drugiego człowieka, nie stojącego na mostku?

O niektórych problemach współczesnej meteorologii

Mgr Elżbieta MOTRENKO

... dziś w Warszawie będzie zachmurzenie umiarkowane, przejściowo duże, z możliwością przelotnego opadu deszczu. Temperatura maksymalna około 8 st.

Komunikat o prognozie pogody. Jeden z wielu przygotowywanych każdego dnia w instytutach meteorologii i biurach pogody a następnie rozpowszechnianych przez różne środki informacji. Wynik żmudnej pracy meteorologów, którego wartość praktyczna bywa jednak często znikoma. Dlaczego tak się dzieje? Jakie są zasadnicze trudności, które napotyka synoptyk przy prognozie pogody? Czy pogodę w ogóle da się przewidywać dokładnie? Jak zagadnienie prognozy traktuje współczesna meteorologia? Oto problemy, którym warto poświęcić nieco uwagi.

synoptyk — z greckiego *synoptikos* — przeglądowy. W meteorologii określenie to odnosi się do pogody. Tak więc synoptyk to człowiek zajmujący się badaniem i przewidywaniem pogody.

Pogodę, jaka będzie w przyszłości, przewiduje synoptyk na podstawie wyników aktualnych obserwacji. Jakość prognozy zależy zatem w dużej mierze od jakości materiału obserwacyjnego. Pomiarów meteorologicznych dokonuje się na specjalnie w tym celu zorganizowanych stacjach meteorologicznych, które tworzą światową sieć i posiadają własny system łączności. Sieć stacji jest wciąż jeszcze nieregularna i na znacznych obszarach zbyt „rzadka" — stacje umieszczone są w zbyt dużych odległościach od siebie. Za mało pomiarów wykonywanych jest na różnych wysokościach w atmosferze. W technice pomiarowej zaznaczył się jednak znaczny postęp. Stacje meteorologiczne są coraz lepiej wyposażane; do służby meteorologicznej wykorzystuje się sztuczne satelity. Ilość informacji — tzw. danych meteorologicznych — dostarczana przez światową sieć stacji już obecnie jest ogromna. Każdorazowe ich opracowanie w celu ustalenia „aktualnego" stanu atmosfery jest trudne bez pomocy maszyn matematycznych. Przetworzenia danych należy dokonać odpowiednio szybko, by przygotowana na ich podstawie prognoza mogła mieć wartość praktyczną. Dotyczy to szczególnie prognoz krótkoterminowych. To ograniczenie czasu stanowi istotną trudność dla meteorologów.

na *stacjach meteorologicznych* wykonuje się pomiary za pomocą przyrządów umieszczonych na stałe na powierzchni Ziemi, przyrządów przymocowanych do unoszących się swobodnie specjalnych balonów oraz umieszczonych w małych, wystrzeliwanych w powietrze rakietach. Pomiary wykonuje się również na pływających i zakotwiczonych statkach oceanicznych. Najwięcej jest stacji naziemnych. Charakterystyczna dla takiej stacji jest dobrze znana tzw. klatka meteorologiczna.

Analiza danych meteorologicznych przy użyciu maszyn matematycznych nazywa się analizą obiektywną. W jej wyniku uzyskuje się wartości parametrów meteorologicznych w różnych punktach atmosfery, wykorzystując dane zmierzone na stacjach. Znalezienie właściwych metod analizy obiektywnej — odpowiednich algorytmów interpolacyjnych — to wcale niełatwy problem matematyczny związany z prognozą pogody.
Analiza obiektywna jest doskonalszą wersją tzw. analizy subiektywnej, która jest jeszcze dość powszechnie stosowana w tych biurach pogody, gdzie z różnych względów (często z braku maszyn matematycznych) nie wykonuje się analizy obiektywnej. W analizie subiektywnej brana jest pod uwagę tylko taka liczba danych meteorologicznych, jaką jest w stanie przeanalizować synoptyk. Wybór danych najważniejszych dla przeprowadzanej analizy zależy od intuicji i doświadczenia synoptyka. Stan atmosfery w określonym terminie przedstawiany jest za pomocą ustalonych symboli na kilku dwuwymiarowych wykresach, przy czym płaszczyzna wykresu odpowiada powierzchni Ziemi albo określonej powierzchni izobarycznej w atmosferze.

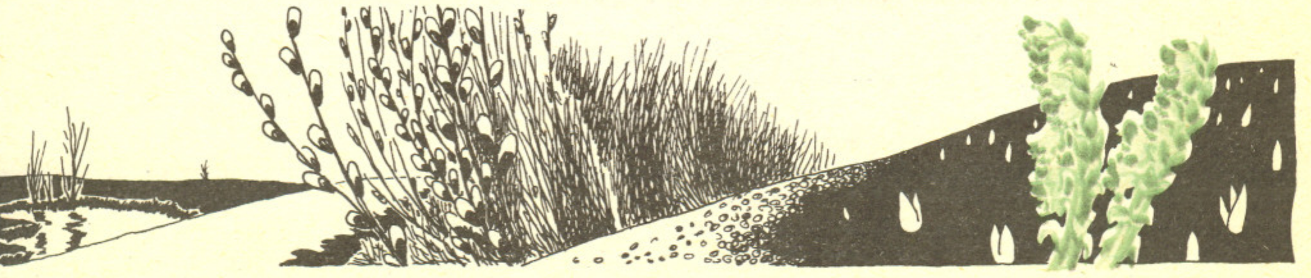
algorytm — dokładny schemat postępowania prowadzący do rozwiązania określonego zadania.

interpolacja — przybliżone znajdowanie wartości funkcji w pewnym punkcie na podstawie znanych wartości tej funkcji w punktach niezbyt odległych.

powierzchnia izobaryczna — hipotetyczna powierzchnia w atmosferze przechodząca przez punkty, w których ciśnienie atmosferyczne ma tę samą wartość.

izolinia — linia na mapie synoptycznej przechodząca przez punkty odpowiadające jednakowym wartościom parametru meteorologicznego, np. ciśnienia — izobara, temperatury — izoterma.

Taki wykres — mapa synoptyczna — analizowany jest przez synoptyka graficznie. Kreśli on izolinie parametrów meteorologicznych i stara się rozpoznać na mapie wyróżnione w praktyce synoptycznej obszary o szczególnym rozkładzie tych parametrów — np. niże lub wyże atmosferyczne — ponieważ związany jest z nimi określony typ pogody. Synoptyk wyróżnia też na mapie obszary, w których występuje wyraźna zmiana pogody, tzw. strefy frontalne (fronty atmosferyczne). Zaznacza również takie zjawiska jak burza, zamieć itp. Prognoza wykonana w oparciu o analizę subiektywną polega na przewidzeniu ewolucji wyróżnionych na mapie elementów zgodnie z regułami, jakim zwykle podlega ich rozwój. Niemałą rolę odgrywa tu zgadywanie. Prognozy takie są mało precyzyjne i często nietrafne. Zobiektywizowanie metod prognozy wydawało się panaceum na kłopoty synoptyków. Równania matematyczne, które wyrażają prawa rządzące zachowaniem ośrodka gazowego, jakim jest atmosfera ziemska — równania ruchu, energii i zachowania masy — łącznie z równaniem stanu tworzą układ równań różniczkowych hydrodynamiki. Nie ma teorii, która zapewniałaby w każdym przypadku istnienie jednoznacznych rozwiązań tego układu i podawała metody uzyskania takich rozwiązań. Możliwe jest to tylko w bardzo szczególnych przypadkach. Równania hydrodynamiki mają jednak taką formę, że tendencje zmiany stanu atmosfery w danej chwili związane są bezpośrednio z aktualnym stanem atmosfery i wpływem czynników zewnętrznych (podłoże, promieniowanie słoneczne). Nasunęło to myśl, że prognoza pogody może być uzyskana przez numeryczne rozwiązanie równań hydrodynamiki. Aktualny stan atmosfery określają zmierzone na stacjach meteorologicznych parametry, które wchodzą w równania. Wstawiając te znane wartości do równań możemy więc obliczyć tendencję zmiany stanu atmosfery. Musimy przy tym w jakiś sposób określić wpływ czynników zewnętrznych na atmosferę. Przyjmuje się zazwyczaj, że czynniki te nie mają żadnego wpływu, co dla niewielkich okresów czasu okazuje się zupełnie dobrym przybliżeniem. Wykorzystując w ten sposób układ równań hydrodynamiki praktycznie ustalamy, jak zmienią się wartości parametrów meteorologicznych w ciągu najbliższego — krótkiego — okresu czasu. Dodając obliczone wartości zmian do aktualnych wartości parametrów meteorologicznych określamy, jakie będą wartości tych parametrów po upływie czasu przyjętego za okres, w którym obliczona zmiana nastąpi. Powtarzając rachunek wielokrotnie (traktując każdy obliczony przyszły stan atmosfery jak nowy stan „aktualny") można uzyskać stan atmosfery w dowolnym czasie w przyszłości. Pierwsza próba takiej prognozy, podjęta już w 1922 roku przez Anglika L. F. Richardsona, była nieudana.
Z matematycznego punktu widzenia numeryczne rozwiązanie równań hydrodynamiki wymaga zastąpienia występujących w nich pochodnych cząstkowych różnicami skończonymi. Przy zamianie tak skomplikowanego układu równań, jakim jest układ równań hydrodynamiki, na odpowiedni układ różnicowy w celu wykorzystania go do obliczania zmian wielkości uzyskanych z obserwacji — zawsze więc zmierzonych z pewnym błędem — pojawia się wiele matematycznych problemów, które trzeba rozwiązać, żeby uzyskać poprawny wynik. Nieznajomość tych problemów była jedną z przyczyn niepowodzenia Richardsona; kłopoty z ich rozwiązaniem stanowiły również zasadniczą trudność dla meteorologów, którzy dysponowali maszynami matematycznymi i znali wiele teoretycznych ustaleń dotyczących metod numerycznych rozwiązywania równań różniczkowych.
Wiele procesów atmosferycznych opisywanych przez równania hydrodynamiki nie ma dla zjawisk pogody większego znaczenia. Do prognozy można więc w zasadzie używać równań uproszczonych, z których „odfiltrowano" takie nieistotne procesy, traktując je jako „szumy". Zagadnienie poprawnego matematycznie i fizycznie uzasadnionego upraszczania równań hydrodynamicznych dla celów prognozy, to następny trudny problem matematyczny. Znalezienie i rozwiązanie odpowiedniego układu różnicowego dla obszaru objętego prognozą — to kolejne trudne zadanie w numerycznej prognozie pogody.



Nie wszystkie trudności udało się dotychczas pokonać, choć wiele z wyżej sygnalizowanych problemów matematycznych doczekało się pomysłowych i skutecznych rozwiązań. Światowe meteorologiczne centra obliczeniowe, które dysponują maszynami matematycznymi i odpowiednią kadrą specjalistów, przygotowują prognozę podstawowych parametrów meteorologicznych dla całej półkuli północnej na okres od dwunastu godzin do kilku dni. Punkty, dla których obliczane są przyszłe wartości parametrów, dzieli odległość kilkuset kilometrów. Tego typu prognoza może więc stanowić jedynie podstawę dla prognoz bardziej szczegółowych, to jest takich, które interesują bezpośrednio użytkowników. Postęp w zakresie opracowywania takich lokalnych prognoz jest jednak raczej sprawą przyszłości. Poważnym ograniczeniem w rozwoju metod numerycznych jest istnienie tzw. limitu przewidywalności pogody w oparciu o równania hydrodynamiki. Teoretycznie, zgodnie z równaniami, jak było już wyżej powiedziane, znając dokładnie aktualny stan atmosfery i wpływ czynników zewnętrznych możemy wyznaczyć każdy inny stan atmosfery z dowolną dokładnością. Praktycznie jednak jest to niemożliwe. W atmosferze nieustannie na siebie oddziałuje wiele różnorodnych procesów i na podstawie pomiarów w poszczególnych punktach nie możemy wyznaczyć dokładnie stanu atmosfery, który by wyznaczał wszystkie następne. Nie chodzi tu tylko o błąd pomiaru, ale głównie o to, że pomiar nie uwzględnia procesów zachodzących w obszarze między punktami pomiarowymi, które mają wpływ na zmiany stanu atmosfery. Jedynie zjawiska periodyczne nie mają w zasadzie limitu przewidywalności. Dla wszystkich innych zjawisk taki limit istnieje i sprawdzenie się numerycznej prognozy pogody na okres dłuższy niż jeden tydzień jest raczej sprawą przypadku. Opracowanie skuteczniejszych metod prognozy jest zadaniem, które wciąż stoi przed meteorologią. Sukces w tej dziedzinie uwarunkowany jest jednak lepszą znajomością mechanizmów procesów atmosferycznych, o których wiemy jeszcze za mało. Nowe rozwiązania w dziedzinie prognoz numerycznych są niewątpliwym osiągnięciem meteorologii, ale nie przyczyniają się do zrozumienia podstaw dynamiki i termodynamiki atmosfery. Konieczny jest wysiłek badawczy w celu ustalenia zasadniczych dynamicznych cech takiego fizycznego układu, jakim jest atmosfera ziemska i wyjaśnienia nie znanych nam dotychczas przyczyn wielu rozpoznanych już zjawisk.

Zadania

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M 115. Jaka jest największa liczba ostrych kątów wewnętrznych, które może mieć n-kąt wypukły?

W. Mnich

Rozwiązanie na str. 3

M 116. Czy istnieje taki niepusty zbiór prostych zawartych w jednej płaszczyźnie, że każda prosta jest rozłączna z co najmniej jedną prostą tego zbioru?

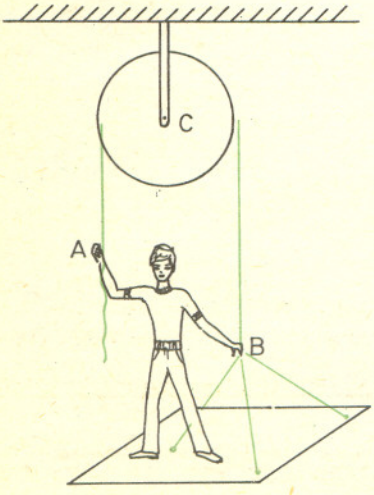
W. Mnich

Rozwiązanie na str. 10

M 117. Udowodnić, że liczb pierwszych postaci $4k+3$ jest nieskończenie wiele.

Rozwiązanie na str. 3

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI



F 39. Człowiek o ciężarze P znajduje się na mostku bosmańskim o ciężarze W (patrz rysunek obok). Mostek zawieszony jest na nieważkiej linie, przeprowadzonej przez bloczek C. Człowiek trzyma swobodny koniec liny (punkt A). Zakładając, że układ pokazany na rysunku znajduje się w równowadze, należy znaleźć:

a) siłę F, z którą człowiek działa na swobodny koniec liny w punkcie A,

b) siłę napięcia liny w punkcie B,

c) siłę działającą na oś bloczka w punkcie C.

Następnie rozważcie przypadek, kiedy człowiek stara się podciągnąć do góry z przyspieszeniem $a = g/4$, wyciągając linę w punkcie A z odpowiednią stałą szybkością.

Wyznaczcie ponownie siły wspomniane w punktach **a)** — **c)**.

Rozwiązanie na str. 3

Fizyka wspomaga geometrię

Zbigniew OGIELSKI

W momencie pisania artykułu autor był uczniem III kl. LO im. M. Konopnickiej w Inowrocławiu.

Matematyka jest nauką, która w rozwoju swoich metod z reguły nie korzysta z osiągnięć żadnych innych nauk. Niejednokrotnie jednak przy rozwiązywaniu zadań można skorzystać ze zdobyczy innych nauk, przez co rozwiązania można uprościć lub urozmaicić.

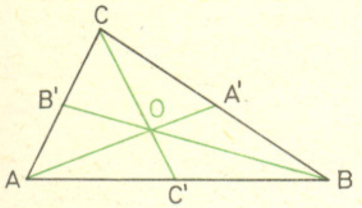
Na podstawie kilku przykładów pragnę pokazać, w jaki sposób można wykorzystać własności środka ciężkości do rozwiązywania zadań z geometrii.

W rozważaniach naszych będziemy korzystali ze znanego i łatwego do udowodnienia twierdzenia: „Jeżeli w danym układzie punktów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ o masach $m_1, m_2, \ldots, m_n$ zastąpimy punkty $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ich środkiem ciężkości T nadając mu masę $m_1+m_2+\ldots+m_k$, to układ punktów $T, A_{k+1}, \ldots, A_n$ ma ten sam środek ciężkości, co układ dany".

Będziemy też korzystać z faktu, iż środkiem ciężkości dwóch punktów A i B o masach a i b jest taki punkt S odcinka AB, że $\frac{AS}{SB} = \frac{b}{a}$.

Wykorzystując własności środka ciężkości udowodnimy teraz kilka znanych twierdzeń o trójkącie, a także wyprowadzimy pewne wzory, mogące się przydać przy rozwiązywaniu zadań.

Zadanie 1. Udowodnić, że trzy dwusieczne kątów wewnętrznych w trójkącie przecinają się w jednym punkcie.



Rozwiązanie. Niech w trójkącie ABC o bokach długości a, b, c:

dwusieczna $\sphericalangle A$ przecina bok o długości a w punkcie A',
dwusieczna $\sphericalangle B$ przecina bok o długości b w punkcie B',
dwusieczna $\sphericalangle C$ przecina bok o długości c w punkcie C'.

Umieśćmy w punktach A, B, C odpowiednio masy a, b, c. Niech środkiem ciężkości układu punktów A, B, C będzie punkt O. Ponieważ z twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie mamy $\frac{AC'}{C'B} = \frac{b}{a}$, więc punkt C' jest środkiem ciężkości mas a i b w punktach A i B.

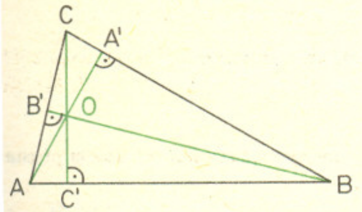
Zatem jeżeli w punkcie C' umieścimy masę $a+b$, to środek ciężkości punktów C' i C będzie się pokrywał z punktem O. Zatem punkt O należy do odcinka CC'. Analogicznie dowodzimy, że punkt O należy do odcinków AA' i BB'. Zatem odcinki AA', BB' i CC' przecinają się w punkcie O, c.n.d.

Obliczymy jeszcze w jakich stosunkach dzielą się dwusieczne kątów wewnętrznych w trójkącie. Jak udowodniliśmy wyżej, dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta ABC przecinają się w punkcie O. Mamy więc obliczyć w jakich stosunkach punkt O dzieli dwusieczne AA', BB', CC'. Ponieważ punkt O jest środkiem ciężkości mas c i $a+b$ umieszczonych w punktach C i C' zatem:

$$\frac{CO}{OC'} = \frac{a+b}{c}$$

Analogicznie znajdujemy: $\frac{AO}{OA'} = \frac{b+c}{a}$ i $\frac{BO}{OB'} = \frac{a+c}{b}$

Zadanie 2. W jakim stosunku przecinają się wysokości w trójkącie ostrokątnym?



Rozwiązanie. Niech w trójkącie ABC odcinki AA', BB' i CC' będą wysokościami tego trójkąta. Umieśćmy w punktach A, B, C odpowiednio masy $\operatorname{tg}\sphericalangle A$, $\operatorname{tg}\sphericalangle B$, $\operatorname{tg}\sphericalangle C$. Niech środkiem ciężkości układu punktów A, B, C będzie punkt O.

Ponieważ $\operatorname{tg}\sphericalangle A = \frac{CC'}{AC'}$ i $\operatorname{tg}\sphericalangle B = \frac{CC'}{C'B'}$ więc $\frac{AC'}{C'B} = \frac{\operatorname{tg}\sphericalangle B}{\operatorname{tg}\sphericalangle A}$ zatem punkt C' jest środkiem ciężkości mas $\operatorname{tg}\sphericalangle A$ i $\operatorname{tg}\sphericalangle B$ w punktach A i B.

Umieśćmy zatem w punkcie C' masę $\operatorname{tg}\sphericalangle A+\operatorname{tg}\sphericalangle B$. Wtedy środek ciężkości punktów C i C' pokrywa się z punktem O. Zatem punkt O należy do odcinka CC'. Analogicznie dowodzimy, że punkt O należy do odcinków AA' i BB'. Zatem odcinki AA', BB' i CC' przecinają się w punkcie O.

Wykazaliśmy, że punkt O jest środkiem ciężkości mas $\operatorname{tg}\sphericalangle C$ i $\operatorname{tg}\sphericalangle A+\operatorname{tg}\sphericalangle B$ w punktach C i C'. Zatem

$$\frac{CO}{OC'} = \frac{\operatorname{tg}\sphericalangle A+\operatorname{tg}\sphericalangle B}{\operatorname{tg}\sphericalangle C}$$

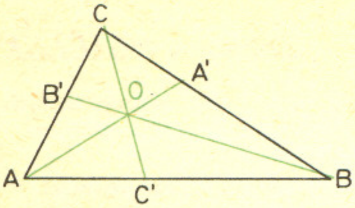
Analogicznie dowodzimy, że $\frac{AO}{OA'} = \frac{\operatorname{tg}\sphericalangle B+\operatorname{tg}\sphericalangle C}{\operatorname{tg}\sphericalangle A}$, $\frac{BO}{OB'} = \frac{\operatorname{tg}\sphericalangle A+\operatorname{tg}\sphericalangle C}{\operatorname{tg}\sphericalangle B}$

Uogólnieniem zadań 1 i 2 jest następujące zadanie:

Zadanie 3. Niech w trójkącie ABC na bokach AB, BC, CA będą dane odpowiednio punkty C', A', B' takie, że

$$\frac{AC'}{C'B} = k_1, \quad \frac{BA'}{A'C} = k_2 \quad \text{i} \quad \frac{CB}{B'A} = k_3 \quad \text{i} \quad k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = 1$$

Udowodnić, że odcinki AA', BB', CC' przecinają się w jednym punkcie. W jakich stosunkach dzielą się te odcinki?



Rozwiązanie. Umieśćmy w punktach A, B, C odpowiednio masy 1, k_1, $k_1 \cdot k_2$. Niech punkt O będzie środkiem ciężkości układu punktów A, B, C.

Ponieważ $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = 1$, więc $k_3 = \frac{1}{k_1 k_2}$ zatem $\frac{CB'}{B'A} = \frac{1}{k_1 k_2}$.

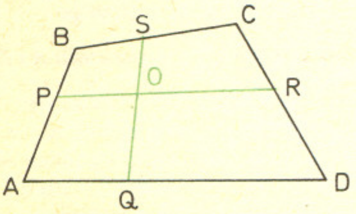
Ponieważ $\frac{AC'}{C'B} = k_1$ więc punkt C' jest środkiem ciężkości mas 1 i k_1 w punktach A i B. Zatem jeżeli w punkcie C' umieścimy masę $1+k_1$, to środek ciężkości punktów C i C' będzie się pokrywał z punktem O. Zatem punkt O należy do odcinka CC'. Analogicznie z równości $\frac{BA'}{A'C} = k_2 = \frac{k_2 k_1}{k_1}$ oraz $\frac{CB'}{B'A} = \frac{1}{k_1 k_2}$ wnioskujemy, że punkt O należy do odcinków AA' i BB'. Zatem proste AA' i BB' oraz CC' przecinają się w punkcie O, c.n.d.

Jak już udowodniliśmy, punkt O jest środkiem ciężkości mas $k_1 \cdot k_2$ i $1+k_1$ w punktach C i C', zatem $\frac{CO}{OC'} = \frac{1+k_1}{k_1 k_2}$

Podobnie obliczamy $\frac{BO}{OB'} = \frac{1+k_1 k_2}{k_1}$, $\frac{AO}{OA'} = k_1 k_2 + k_1 = k_1(k_2+1)$

Rozwiążemy teraz dwa zadania o czworokątach.

Zadanie 4 (XXVI Olimpiada matematyczna). W czworokącie płaskim wypukłym $ABCD$ wybrano na bokach przeciwległych AB i CD punkty P i R, zaś na bokach przeciwległych AD i BC punkty Q i S w ten sposób, że $\frac{AP}{PB} = \frac{DR}{RC} = a$, $\frac{AQ}{QD} = \frac{BS}{SC} = b$. Dowieść, że jeżeli O jest punktem przecięcia odcinków PR i QS, to $\frac{PO}{OR} = b$ oraz $\frac{QO}{OS} = a$.



Rozwiązanie. Umieśćmy w punktach A, B, C, D odpowiednio masy 1, a, ab, b. Ponieważ $\frac{BS}{SC} = b$ i $\frac{AQ}{QD} = b$ więc punkt S jest środkiem ciężkości mas a i ab w punktach B i C, a punkt Q jest środkiem mas 1 i b w punktach A i D.

Umieśćmy zatem w punktach S i Q odpowiednio masy $a+ab$ i $1+b$. Wtedy środek ciężkości punktów S i Q pokrywa się ze środkiem ciężkości układu punktów A, B, C, D. Zatem środek ciężkości układu punktów A, B, C, D leży na odcinku SQ.

Analogicznie, umieszczając w punktach P i R odpowiednio masy $1+a$ i $b+ab$ wnioskujemy, że środek ciężkości układu punktów A, B, C, D leży na odcinku PR. Ponieważ należy on jednocześnie do odcinka QS i do odcinka PR, więc jest nim punkt O. Punkt O jest zatem także środkiem ciężkości układu punktów P, R oraz układu punktów S, Q więc

$$\frac{PO}{OR} = \frac{b+ab}{1+a} = b \quad \text{i} \quad \frac{QO}{OS} = \frac{a+ab}{1+b} = a,$$

c.n.d.

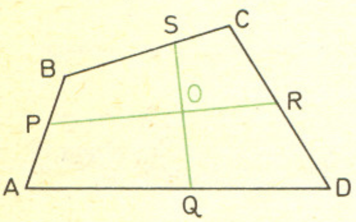
Rozwiążemy teraz zadanie ogólniejsze od zadania 4.

Zadanie 5. W czworokącie płaskim wypukłym $ABCD$ wybrano na bokach AB, BC, CD i DA odpowiednio punkty P, S, R, Q w ten sposób, że

$$\frac{AP}{PB} = a_1, \quad \frac{BS}{SC} = a_2, \quad \frac{CR}{RD} = a_3, \quad \frac{DQ}{QA} = \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}$$

Niech punkt O będzie punktem przecięcia odcinków PR i SQ.

W jakich stosunkach punkt O dzieli te odcinki?



Rozwiązanie. Umieśćmy w punktach A, B, C, D odpowiednio masy 1, a_1, $a_1 \cdot a_2$, $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$.

Ponieważ $\frac{AP}{PB} = a_1$ i $\frac{CR}{RD} = a_3 = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}{a_1 a_2}$ więc punkt P jest środkiem ciężkości mas 1 i a_1 w punktach A i B, a punkt R jest środkiem mas $a_1 a_2$ i $a_1 a_2 a_3$ w punktach C i D. Umieśćmy zatem w punktach P i R odpowiednio masy $1+a_1$ i $a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3$.

Wtedy środek ciężkości punktów P i R pokrywa się ze środkiem ciężkości całego układu punktów A, B, C, D. Zatem środek ciężkości całego układu punktów A, B, C, D leży na odcinku PR.

Analogicznie umieszczając w punktach S i Q odpowiednio masy $a_1 + a_1 a_2$ i $1 + a_1 a_2 a_3$ dowodzimy, że środek ciężkości całego układu punktów A, B, C, D leży na odcinku SQ. Ponieważ leży on też na odcinku PR, więc środkiem ciężkości układu punktów A, B, C, D jest punkt O. Punkt O jest jednocześnie środkiem ciężkości mas $1+a_1$ i $a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3$ w punktach P i R oraz środkiem ciężkości mas $a_1 + a_1 a_2$ i $1 + a_1 a_2 a_3$ w punktach S i Q. Zatem

$$\frac{PO}{OR} = a_1 a_2 \cdot \frac{1+a_3}{1+a_1} \quad \text{oraz} \quad \frac{SO}{OQ} = \frac{1+a_1 a_2 a_3}{a_1 + a_1 a_2}$$

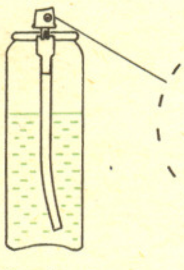
Pokazaliśmy na przykładach, jak można stosować zasady fizyki do rozwiązywania zadań z geometrii. Zadania te można by oczywiście rozwiązać metodą „czysto matematyczną", która jednak mogłaby być bardziej skomplikowana (np. zadanie 4 rozwiązałem korzystając z twierdzenia Menelausa, co było bardzo pracochłonne i wymagało wielu wyliczeń).

Laboratorium w domu

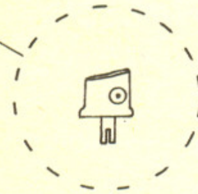
Dr Jan A. GAJ

TERMODYNAMIKA W AEROZOLU

Zawrotna kariera, jaką zrobiły w życiu codziennym opakowania aerozolowe, nie ogranicza się do farb, kosmetyków czy lekarstw, ale rozciąga się nawet na język. Aerozol bywa symbolem kto wie czy nie demoralizujących ułatwień, jakie niesie z sobą cywilizacja. Możemy także mówić o czymś w aerozolu mając na myśli znikomą, symboliczną ilość tej rzeczy — na przykład tytułem „Usługi w aerozolu" mógłby dziennikarz opatrzyć artykuł opisujący sytuację w niektórych nowo wybudowanych osiedlach mieszkaniowych. Jak się z pewnością Czytelniku domyślasz, my spróbujemy zastosować aerozol w fizyce, a konkretnie — do kilku prostych doświadczeń z dziedziny nauki o cieple.



Rys. 1



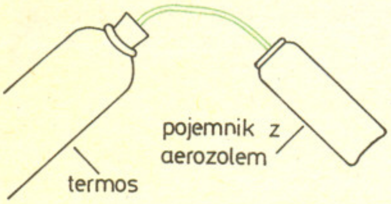
Rys. 2

WIADOMOŚCI WSTĘPNE: CO SIEDZI W ŚRODKU?

Przekrój opakowania aerozolowego przedstawia rysunek. Wewnątrz hermetycznego pojemnika metalowego znajduje się ciecz zawierająca składnik użytkowy (np. farbę) zmieszany z cieczą o dużym ciśnieniu par nasyconych (kilka atmosfer). Naciśnięcie przycisku powoduje otwarcie zaworka i wypłynięcie cieczy przez rurkę. Rozpylanie ułatwia natychmiastowe wrzenie cieczy po wydostaniu się jej do obszaru ciśnienia atmosferycznego. Poznanie konstrukcji zaworka ułatwi Ci wyjęcie przycisku. Zakończony jest on rozciętą rurką (rys. 2). Jeśli ciekawość każe Ci zajrzeć do środka pojemnika, pamiętaj aby rozcinać go tylko wtedy, kiedy jest całkowicie pusty — w przeciwnym razie *może to być niebezpieczne.*

DOŚWIADCZENIE I: LODÓWKA W AEROZOLU

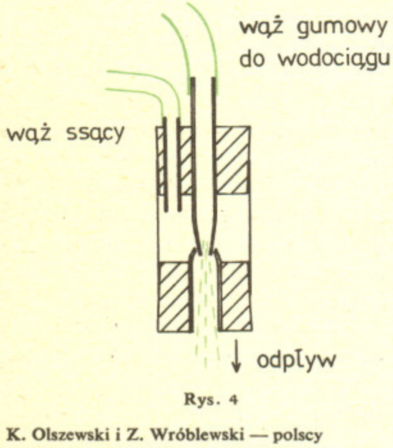
Tak, nie mylisz się. Ciecz szybko parująca obniża znacznie swoją temperaturę. Możesz to sprawdzić w bardzo prostym doświadczeniu, kierując strumień aerozolu na zbiorniczek termometru — słupek rtęci spadnie znacznie poniżej zera. Uwaga: nie chcąc narażać się domownikom wytworzeniem w mieszkaniu zapachu na przykład dezodorantu w stężeniu przekraczającym granice ludzkiej wytrzymałości, najlepiej wykonywać nasze doświadczenia na dworze lub ostatecznie na parapecie szeroko otwartego okna.



Rys. 3

DOŚWIADCZENIE II: AEROZOL W LODÓWCE

Spróbujmy teraz otrzymać makroskopową ilość cieczy „aerozolowej" pod ciśnieniem atmosferycznym. Ponieważ będzie ona bardzo zimna, umieścimy ją w termosie. Dla osiągnięcia maksimum wydajności (nie jest to jednak niezbędnie konieczne) warto przedtem ochłodzić nasz aerozol a także termos (otwarty) w zamrażalniku lodówki domowej przez parę godzin (najlepiej z dnia na dzień). Dla przelania cieczy z pojemnika do termosu musimy zaopatrzyć się w rurkę, która pasuje do zaworka pojemnika. Dobre są czasem rurki wkładów do długopisów, a na ogół plastikowe „słomki" do picia zimnych napojów. Oczywiście rurkę należy na końcu lekko naciąć na przykład nożem do pomidorów. Rurkę wyginamy, jeden koniec wprowadzamy do termosu, a drugi (ten rozcięty) wciskamy do zaworka ręką w rękawiczce (zimne!) — rys. 3. Przy odpowiedniej sile nacisku ciecz zacznie wypływać do termosu. Kiedy zbierze się jej dostatecznie dużo, możemy zmierzyć temperaturę termometrem — powinno być około $-30°C$! Idziemy w tym momencie śladem znakomitych poprzedników — Olszewskiego i Wróblewskiego — przez gwałtowne parowanie obniżamy temperaturę. Z pewnością zapytasz, Czytelniku, zachęcony powodzeniem:

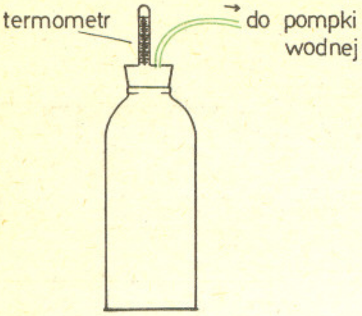


Rys. 4

K. Olszewski i Z. Wróblewski — polscy fizycy, którzy w 1883 r. otrzymali po raz pierwszy ciekłe powietrze w makroskopowych ilościach.
Niską temperaturę można też uzyskać przy pomocy pełnego naboju do syfonu. Zróbcie w nim otwór i zobaczcie, co się stanie.

A NIE MOŻNA ZEJŚĆ JESZCZE NIŻEJ?

Można. Dla zachęcenia cieczy do dalszego intensywnego parowania należy jeszcze bardziej obniżyć jej ciśnienie. Do tego celu posłuży nam pompka wodna, którą nietrudno zrobić samemu. Przekrój pompki wodnej widać na rysunku 4. Widać, że do jej wykonania potrzebne są następujące materiały: mocna rurka metalowa lub z tworzywa sztucznego o średnicy paru cm, dwa korki gumowe, parę cieńszych rurek (z zużytego flamastra) oraz kawałki węża gumowego. Decydujące o działaniu pompki będzie współdziałanie dyszy, z której wypływa woda, z rurką, do której woda trafia.

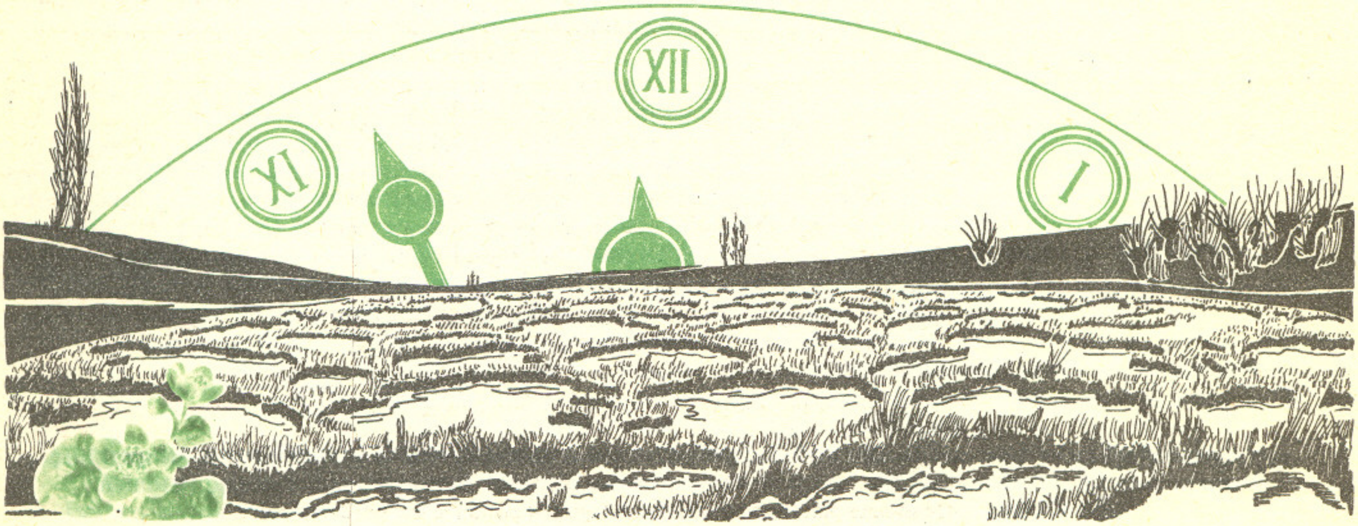


Rys. 5

Jeśli strumień wody będzie za cienki w stosunku do tej rurki — nie będzie zasysał powietrza; jeśli rurka będzie zbyt wąska — może hamować przepływ wody i też uniemożliwić działanie pompki. Przy prawidłowym działaniu pompki można rozrzedzać nią powietrze do ciśnień rzędu kilku centymetrów słupa rtęci! Jeżeli teraz zamkniemy naszą zimną ciecz szczelnie w termosie i przez rurkę w korku odpompujemy powietrze (rys. 5) — obniżymy temperaturę jeszcze bardziej. Chcesz sprawdzić swoje kwalifikacje eksperymentatora? Oto szansa, czyli — podobnie jak w poprzednim numerze —

KONKURS SAMYCH ZWYCIĘZCÓW

Każdy, kto do 15 kwietnia br. nadeśle do redakcji działającą pompkę wodną zbudowaną samodzielnie w warunkach i z materiałów ogólnie dostępnych, otrzyma nagrodę książkową. Wszystkie pompki zostaną sprawdzone przy jednakowym ciśnieniu wody i konstruktor najlepszej z nich (to znaczy tej, która wytworzy najniższe ciśnienie) otrzyma nagrodę główną — zestaw do eksperymentów elektrycznych. Powodzenia!



O zasadach w kosmologii

Dr Bronisław KUCHOWICZ

W poprzednich artykułach podaliśmy w zarysie najważniejsze fakty, odnoszące się do Wszechświata jako całości, nie wymieniając faktu naszego istnienia (choć gdyby nie ten fakt, nie powstałby i mój artykuł). Cóż, rację miał chyba Thornton Wilder, wkładając w „Idach marcowych" w usta Cezara stwierdzenie, że „Wszechświat nie wie nawet, że żyją w nim ludzie" (Księga I, List X).

Zdanie powyższe nie uwłacza godności człowieka, choć w sposób może dla niejednego aż zbyt jaskrawy występuje przeciwko antropocentryzmowi. Pierwsze naiwne wyobrażenia o budowie Wszechświata, modele geocentryczne, dawały wyraz przekonaniu o centralnej roli człowieka we Wszechświecie. Zasadnicze zerwanie z tą koncepcją stanowiło usunięcie przez Kopernika Ziemi z jej centralnej, specjalnie wyróżnionej pozycji. Uznanie, że Ziemia jest jedną z planet nie różniącą się w zasadzie od pozostałych, stanowiło pierwszy krok do uznania, że nasze Słońce jest jednym z wielu słońc w Galaktyce, nasza Galaktyka — jedną z wielu we Wszechświecie. Istotnym w koncepcji naszego wielkiego rodaka było nie to, że „wstrzymał Słońce", a to że „ruszył Ziemię", spychając ją z pozycji wyróżnionej na niemal typową. Nic więc dziwnego, że we współczesnej kosmologii *zasadą Kopernika* nazwano stwierdzenie, iż Ziemia nie zajmuje wyróżnionego położenia nie tylko w Układzie Słonecznym, ale i we Wszechświecie. Stwierdzenie to daje się uogólnić na coraz to większą skalę. Można więc mówić, że ani Układ Słoneczny, ani Galaktyka, ani Lokalna Grupa Galaktyk (w skład której nasza Galaktyka wchodzi) nie znajdują się w wyróżnionej pozycji. Stąd jeszcze dalsza ekstrapolacja prowadzi do uznania, iż we Wszechświecie nie ma żadnych miejsc zasługujących na wyróżnienie pod jakimkolwiek względem. Wszechświat ma być taki sam w każdym punkcie, jeśli tylko nie bierzemy pod uwagę lokalnych nieregularności. Gwiazdy, galaktyki i ich gromady stanowić mają tylko lokalne fluktuacje, odgrywające w skali Wszechświata rolę nie większą niż góry i doliny na powierzchni Ziemi dla obserwującego ją z oddali kosmonauty. Tak uogólnioną zasadę Kopernika zwykło się nazywać *zasadą kosmologiczną*.

Rozwiązanie zadania M 116. Zbiorem takim jest $(A) \cup (B) \cup (C)$, gdzie A, B, C są trzema niewspółliniowymi punktami płaszczyzny, (X) zaś oznacza zbiór wszystkich prostych przechodzących przez X. Jeżeli bowiem pewna prosta ma punkt wspólny z każdą prostą pęku (X), to jest prostą tego pęku. Prosta mająca punkt wspólny z każdą prostą zbioru $(A) \cup (B)$, to wobec tego prosta AB. Jest ona jednak rozłączna z prostą przechodzącą przez C i równoległą do AB.

Jeśli przyjąć, że obserwowana przez nas prędkość ucieczki ma tylko składową radialną, to łatwo się przekonać (np. przez transformację Galileusza), że obraz ucieczki widziany z każdej innej gwiazdy będzie taki sam.

Zgodnie z powyższą zasadą tak wyniki obserwacji Wszechświata, jak i wyciągane z nich wnioski nie mogą zależeć od miejsca obserwacji. Wspominaliśmy już o odkryciu zjawiska „ucieczki galaktyk" przez Hubble'a. Naiwne tłumaczenie tego zjawiska mogłoby wskazać na to, że my właśnie znajdujemy się w „środku Wszechświata", a wszystko się od nas oddala, ucieka. Wystarczy jednak odwołać się od zasady Kopernika; zgodnie z nią to samo co o naszym położeniu można powiedzieć o każdym innym obserwatorze we Wszechświecie. Cóż więc stąd wynika?

Wszechświat wykazuje symetrię sferyczną wokół dowolnego punktu, a jednocześnie żaden z punktów w nim nie jest wyróżniony. Wszechświat jest więc przestrzennie jednorodny i izotropowy, a jednocześnie odległości między dowolnymi dwoma jego punktami rosną z upływem czasu.

Pamiętajmy, że jednorodność rozkładu materii Wszechświata rozumieć należy jako jednorodność w dużej skali. Jest to podejście analogiczne do wprowadzania gęstości gazu rozrzedzonego, wypełniającego naczynie. Jeśli w naczyniu o pojemności 1 m^3 mamy zaledwie milion cząsteczek gazu, wtedy nie ma sensu mówić o gęstości jednorodnej w skali niewielkich obszarów o objętości rzędu 1 mm^3. W obszarach takich wystąpią niewątpliwie fluktuacje gęstości, i to znaczne. Natomiast w skali objętości rzędu 10^3 cm^3 można już mówić w dobrym przybliżeniu o jednorodności.

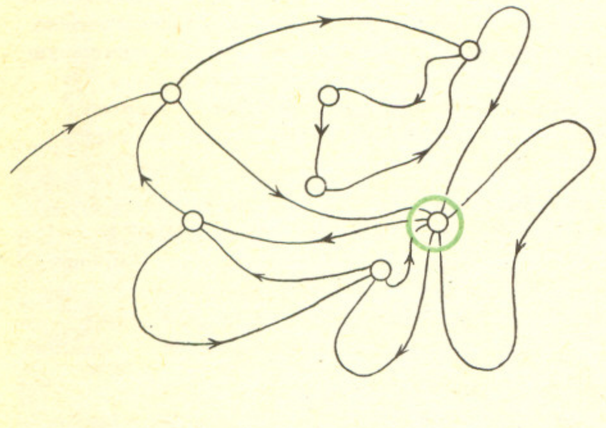
Wspomnijmy o prostocie podejścia. Do opisu miliona cząsteczek w naczyniu wygodniej jest stosować kilka parametrów makroskopowych w rodzaju średniej gęstości, temperatury czy ciśnienia (które tracą sens w odniesieniu do pojedynczej cząsteczki), niż parametry mikroskopowe wszystkich cząsteczek. Analogicznie jest i w kosmologii. Gdy jeszcze stosunkowo niewiele wiemy o Wszechświecie, można się spodziewać, że najłatwiej będzie dokonać postępu przy najprostszym założeniu roboczym, tzn. przyjmując najprostszą, a więc po prostu jednorodną strukturę Wszechświata w dużej skali. Być może, jest to tylko przybliżenie, ale przybliżenie to pozwala nam w najprostszy sposób uzyskać pewne wyniki teoretyczne, które znów można sprawdzać obserwacyjnie.

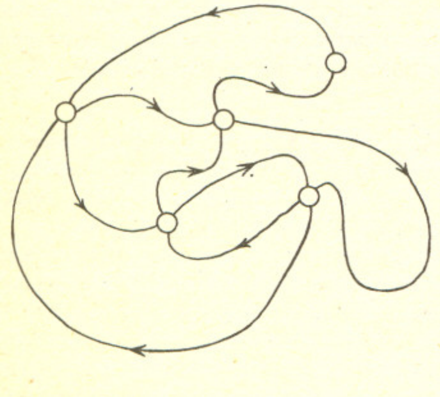
Nie umiemy zbudować takich modeli, które byłyby sensowne, zgodne z obserwacjami natury kosmologicznej, a ponadto zawierałyby informacje odnoszące się do takich szczebli struktury Wszechświata, jak galaktyki i gwiazdy. Praktycznie wszystkie modele Wszechświata abstrahują od tej jego „drobnoziarnistej" struktury, a i bez tego dość jest trudności natury matematycznej. Podkreślmy w tym miejscu różnicę między kosmologią a astrofizyką: kosmologia zajmuje się Wszechświatem jako całością, astrofizyka natomiast — właściwościami poszczególnych obiektów w Kosmosie.

Omawiana przez nas zasada kosmologiczna postuluje jednorodność przestrzenną Wszechświata. Usiłowano dodatkowo postulować jednorodność Wszechświata w czasie, tzn. jego niezmienność. Uogólnienie to nazwano nawet doskonałą (albo drugą) zasadą kosmologiczną. Teraz, po odkryciu promieniowania szczątkowego, wiemy już, że uogólnienia tego utrzymać się nie da, że Wszechświat zmienia się w czasie — starzeje.

Zapytajmy się na koniec, czy zasady są w ogóle potrzebne w kosmologii? W odróżnieniu od fizyki, nie mamy w kosmologii możności kontrolowania warunków, w których odbywają się zjawiska fizyczne. Jeśli przeprowadzamy doświadczenie w laboratorium ziemskim i wynik jego nie zgadza się z wynikiem otrzymanym w innym laboratorium w rzekomo tych samych warunkach, staramy się odnaleźć tkwiący u podstaw tego czynnik fizyczny (zmiana pewnych warunków, które uważaliśmy za nieistotne dla doświadczenia). Na ogół postuluje się przy tym, że położenie laboratorium i czas (chwila) przeprowadzenia doświadczenia nie są istotne. Podobne postępowanie niemożliwe jest w kosmologii, nie możemy warunków sprawdzić na miejscu, bo miejsce to nie tylko jest odległe w sensie przestrzennym, ale i w czasie (wszak obserwujemy wszystko za pomocą światła, którego prędkość rozchodzenia się jest skończona). Stąd też, chcąc otrzymać wyniki teoretyczne w kosmologii, nadające się do porównania z obserwacjami, trzeba w pewien sposób ekstrapolować fizykę ziemską. Można tego dokonać przy użyciu zasady kosmologicznej, która zaprzecza wyjątkowemu położeniu Ziemi czy naszej Galaktyki, ale — właśnie dzięki temu pozwala rozciągnąć na cały Wszechświat prawa fizyki poznane na Ziemi. W zasadzie kosmologicznej wyróżnić można umownie część geometryczną: jednorodność przestrzeni, oraz część fizyczną: jednorodność rozkładu materii we Wszechświecie. Z części geometrycznej wynika możność przeniesienia na Wszechświat praw poznanych w laboratoriach ziemskich, z części fizycznej — możność zbudowania prostych rachunkowo modeli Wszechświata.

mała delta





O FIGURACH JEDNOBIEŻNYCH I LEKSYKOGRAFICZNYM UPORZĄDKOWANIU

Tropimy rysia

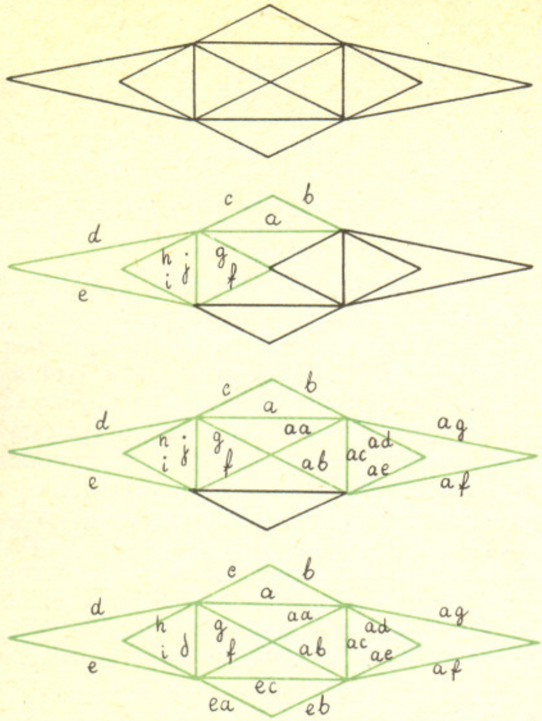
W lesie, na świeżo spadłym śniegu odcisnął swoje tropy ryś, który chodził nocą od drzewa do drzewa. Na rysunku zamiast tropów mamy strzałki. Grube kropki to drzewa. Czy można ustalić, na którym drzewie schował się ryś? Zwróćmy uwagę na drzewo otoczone zieloną obwódką. Prowadzą do niego 4 strzałki, a odchodzą tylko 3. Ryś przyszedł tu czterokrotnie, natomiast tylko 3 razy odszedł. Jasne więc, że siedzi on na tym właśnie drzewie. Łatwo sprawdzić, że do pozostałych drzew przyszedł tyle samo razy, ile razy od nich odszedł.

A oto inna sytuacja. Tym razem, jak łatwo sprawdzić, ryś rozpoczął spacer schodząc z tego drzewa, do którego po długiej wędrówce wrócił z powrotem. Nie ma sposobu, żeby ustalić, na którym drzewie teraz siedzi. Można zacząć od dowolnego drzewa i wykreślić jeden z możliwych wariantów takiej wędrówki. Jedno jest pewne. Skończymy spacer tam, skąd rozpoczęliśmy.

Tropienie rysia to dobry wstęp do popularnych zadań o jednokrotnym obieganiu wszystkich krawędzi danej figury, bez odrywania ołówka od papieru. Pokażemy, jak rozwiązywać takie zadania w sytuacjach, kiedy rozwiązanie istnieje. Metoda, którą opiszemy, pochodzi od szwajcarskiego matematyka Eulera (czyt. *Ojlera*).

Porządek leksykograficzny

Porządek leksykograficzny to sposób porządkowania stosowany w leksykonach, słownikach i encyklopediach. Gdy porządkujemy wyrazy mówimy po prostu o porządku alfabetycznym. Porządek taki ma ciekawą własność. Między dowolne dwa słowa wstawić możemy trzecie (nie przejmując się, czy napisane przez nas słowo ma jakiś sens, czy nie). Przykładowo: między słowa *kram* i *kran* wstawiamy *kramarza*, między *sport* i *sportowca* wstawiamy na przykład *sportoabłęx* (nic nie szkodzi, że nie ma to sensu, chodzi o zasadę).

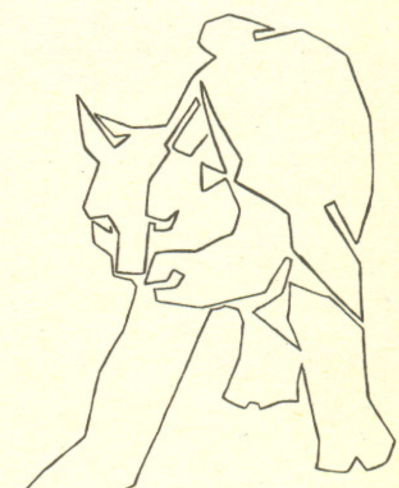


Uporządkujemy teraz krawędzie figury przedstawionej na rysunku. Zaczynamy spacer od dowolnego wierzchołka i każdą kolejną krawędź oznaczamy kolejną literą alfabetu. Po krawędziach już oznaczonych drugi raz spacerować nie wolno. Spacerujemy tak długo, dopóki jest to możliwe. Nie obeszliśmy wszystkich krawędzi? Nic nie szkodzi. Zaraz się poprawimy. Oto wolna krawędź jest przy wierzchołku, do którego prowadzi krawędź *a*. Z tego wierzchołka rozpoczynamy inny spacer, oznaczając kolejno przebyte krawędzie słowami: *aa*, *ab*, *ac* itd. Jeszcze nie obeszliśmy wszystkich krawędzi? Też nie szkodzi, będziemy rozpoczynać dalsze spacery aż do skutku.

No nareszcie. Wyczerpaliśmy wszystkie krawędzie oznaczając je odpowiednimi słowami. Uporządkujmy te słowa alfabetycznie — i mamy jednokrotny obieg naszej figury.

Zanalizujmy całą rzecz teoretycznie. Wierzchołek figury nazwiemy parzystym, gdy przylega do tego wierzchołka parzysta ilość krawędzi. W przeciwnym razie nazwiemy wierzchołek wierzchołkiem nieparzystym. Jeśli obieg figury jest możliwy, to tylko dwa wierzchołki mogą być nieparzyste: ten, w którym zaczęliśmy spacer i ten, w którym spacer skończyliśmy (dlaczego? Przypomnijcie sobie tropienie rysia).

Możliwa jest także sytuacja, gdy wszystkie wierzchołki są parzyste. Można wtedy rozpoczynać spacer w którymkolwiek wierzchołku. Kiedy są dwa wierzchołki nieparzyste, rozpoczynać należy w jednym z nich. Nie ma figury z jednym tylko wierzchołkiem nieparzystym (dlaczego? Zajrzyjcie do poprzedniego numeru małej Delty). Jeśli figura ma więcej niż dwa wierzchołki nieparzyste, jednokrotny obieg wszystkich jej krawędzi jest niemożliwy.



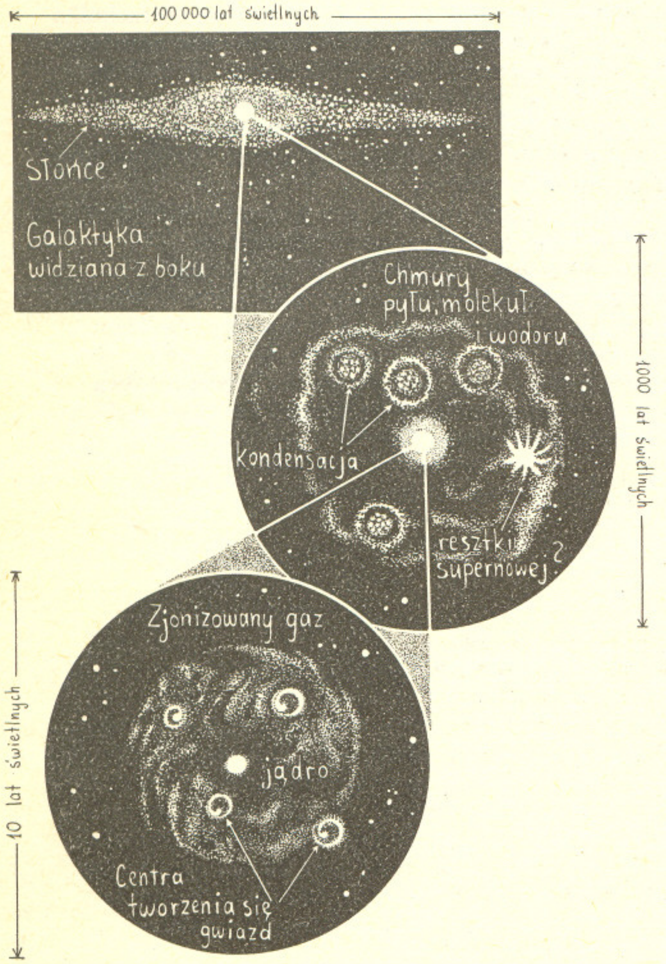
Zadanie 1. Które z narysowanych figur są jednobieżne, a które nie? Narysujcie te, które są jednobieżne, jednym pociągnięciem ołówka.

Zadanie 2. Przeczytajcie jeszcze raz cały artykuł i spróbujcie udowodnić, że figura, która ma co najwyżej dwa wierzchołki nieparzyste, jest jednobieżna.

Tajemnicze centrum Galaktyki

Jesteśmy upośledzeni! Wzrok nasz czuły jest tylko na fale elektromagnetyczne o długościach w zakresie kilku dziesięciomilionowych części metra — nazywamy te fale światłem widzialnym. A co z resztą, ze światłem niewidzialnym? Patrząc przez kolorową szybkę powiemy, że obraz świata jest zafałszowany, naprawdę tak nie wygląda. A przecież bez szybki też widzimy tylko niektóre kolory — te widzialne. Czy mamy prawo powiedzieć, że obraz jest fałszywy? Pomyślcie! Możemy pomóc sobie i korzystać z przyrządów czułych na fale w różnym zakresie długości. Okazało się, że ze świata płyną do nas obrazy, których bez urządzeń specjalnych nie widzimy. Urządzenia te to wielkie radioteleskopy, patrzące na niebo całymi zespołami anten. Opowiem Wam, co astronomowie zobaczyli przy ich pomocy.

Układ gwiazd, do którego należy nasze Słońce, nazywamy Galaktyką. Nasza Galaktyka (jest bardzo wiele innych galaktyk) jest spłaszczona z wybrzuszeniem w środku. Słońce jest odległe od centrum Galaktyki o 30 tys. lat świetlnych. Oznacza to, że światło przebiega tę odległość w 30 tys. lat, poruszając się stale z zawrotną prędkością około 300 tys. km/s. Kto lubi liczyć, niech sprawdzi, ile to jest w kilometrach. Okazało się, że gęstość gwiazd czyli ilość gwiazd w jednostce objętości przestrzeni wzrasta w miarę zbliżania się do centrum Galaktyki. W pobliżu centrum gęstość gwiazd jest około sześciu milionów razy większa niż w otoczeniu Słońca. Co dzieje się w samym centrum? Nie można sprawdzić tego w świetle widzialnym, bo zalega tam pył rozpraszający światło. Przez obszar ten przenikają bez trudu długie fale: od takich, jakie odczuwamy jako promieniowanie cieplne, do fal radiowych.



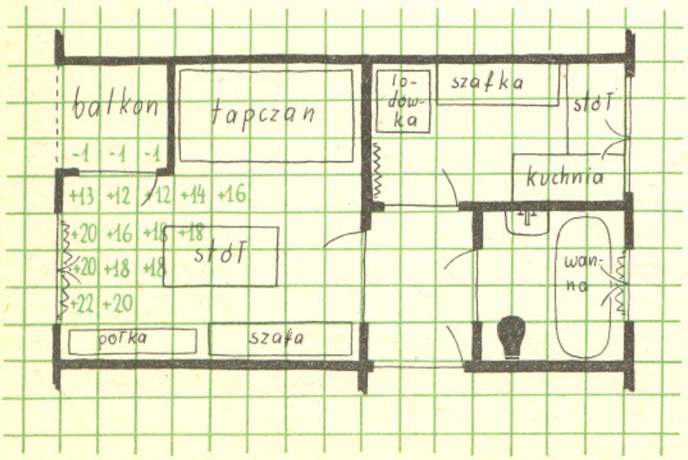
Przeprowadzono badania w takim niewidzialnym świetle i zauważono ciekawą budowę obszaru w pobliżu centrum Galaktyki. Wyniki obserwacji pokazuje schematyczny rysunek. Najsilniejsze promieniowanie dobiega jednak z obszaru oznaczonego jako jądro. Jest to niezwykle, jak na skalę Galaktyki, mały obszar 1 dnia świetlnego, czyli tylko około 100 razy większy niż średnica orbity ziemskiej wokół Słońca. Ilość wypromieniowanej energii i małe rozmiary źródła wskazują, że promieniuje nie zwykła gwiazda, ale obiekt o niezwykłych właściwościach. Nie wiadomo jeszcze co to za obiekt, chociaż wysunięto szereg pomysłów. Światło niewidzialne pozwala ogromnie posunąć naprzód naszą wiedzę o świecie.

Jak jednak się patrzy w świetle niewidzialnym? Spróbuj dla zabawy wykorzystać tę metodę do zbadania na przykład swojego pokoju. Oto pytanie. Jak wygląda Twój pokój (mieszkanie) w świetle o takiej długości, które odczuwamy jako promieniowanie cieplne? A więc

Bawimy się w badania

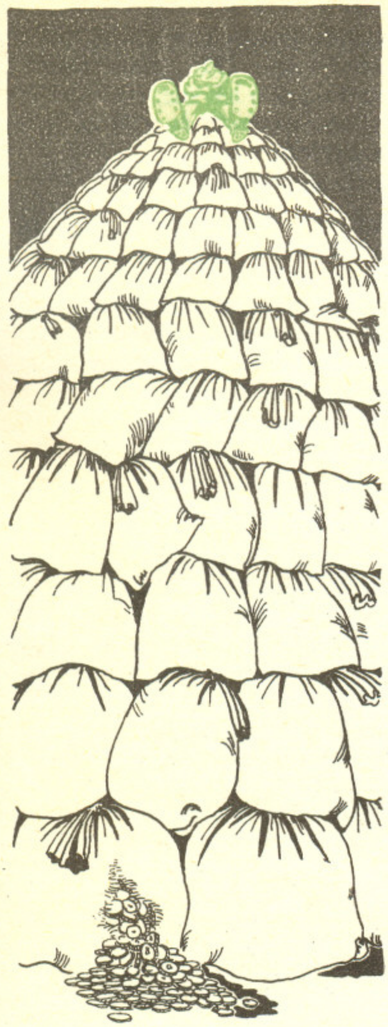
Zaczynamy od zgromadzenia aparatury. Potrzebny jest termometr pokojowy, papier, ołówek, centymetr krawiecki (lub metrowy sznurek) i trochę cierpliwości. Zbadamy rozkład temperatury w pokoju na dwóch poziomach: na poziomie podłogi i metr nad nią. Narysujmy zatem dwa plany badanego pomieszczenia. Wybieramy w pokoju punkty, w których przeprowadzimy pomiary temperatur i zaznaczamy je na planie. Punktów powinno być możliwie dużo i powinny być równomiernie rozmieszczone, tak aby można było podzielić cały obszar na kwadraty z punktem pomiarowym w środku. Wyniki pomiarów zapisujemy na planie. Każdy kwadrat kolorujemy inaczej zależnie od wyznaczonej temperatury. Dobór kolorów jest oczywiście umowny. Na przykład od temperatur ujemnych do zera (to dla obszaru za oknem) malujemy na granatowo. Od temperatury 30° wzwyż (to przy źródle ciepła) malujemy na ciemny kolor czerwony — wiśniowy. Pośrednie temperatury oznaczamy innymi kolorami. Wykonanie takiego planu to nie tylko zabawa — możemy zobaczyć, gdzie jest najchłodniej, gdzie nie powinno się bawić na ziemi młodsze rodzeństwo. Pomiary na poziomie 1 m pokażą nam, jak bardzo ciągnie od podłogi.

Przyślijcie wykonane plany. Najciekawszy nagrodzimy.



Małą Deltę opracowali: Tomasz Hofmokl i Przemysław Nowicki.

CYROGRAF



Jest to tzw. *paradoks petersburski*, sformułowany przez M. Bernoulliego w okresie, gdy mieszkał i pracował w Petersburgu.

Gra sprawiedliwa — to taka, której warunki nie faworyzują żadnego z graczy, a ewentualna wygrana jest skutkiem — w zależności od typu gry — bądź wyższych umiejętności (w grach strategicznych), bądź tzw. „szczęścia", czyli przypadku (w grach czysto losowych).
Jeśli gra losowa jest korzystna dla któregoś z graczy, to można uczynić ją sprawiedliwą żądając, by gracz faworyzowany płacił każdorazowo za prawo jej rozegrania tyle, ile wynosi przeciętna jego wygrana (czyli tzw. wartość gry).
Wyobraź sobie, że zaproponowaliśmy Ci grę następującą: rzucasz rzetelną monetę do momentu, w którym po raz pierwszy wypadnie reszka. Za wynik „seria n orłów zakończona reszką" otrzymujesz wygraną 2^n zł (a więc za R—$2^0 = 1$ zł, za OR — 2 zł, za OOR — 4 zł itd.). Warunki gry faworyzują Ciebie wyraźnie, są więc podstawy do zażądania, byś każdorazowo za prawo rozegrania tej gry coś nam zapłacił: tyle ile wynosi oczekiwana (przeciętna) Twoja wygrana. Wtedy to, czy wygrasz, czy przegrasz, zależałoby jedynie od losu.
Jesteśmy jednak altruistami: żądamy jedynie, byś płacił każdorazowo tylko połowę wartości gry. Na takich warunkach na pewno zechcesz z nami zagrać, prawda?
Pozostaje obliczyć wartość v gry. Przeciętnie raz na dwie rozgrywki możesz oczekiwać tego, że wypadnie reszka i otrzymasz 1 zł, a więc ten wynik da Ci przeciętnie $\frac{1}{2} \cdot 1$ zł:

$$v = \frac{1}{2} \cdot 1 + \ldots$$

Ponadto przeciętnie raz na cztery gry wynik rzutów będzie następujący: OR, co da Ci każdorazowo 2 zł, a więc przeciętnie $\frac{1}{4} \cdot 2$ zł:

$$v = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \ldots$$

Ogólnie — przeciętnie raz na 2^{n+1} razy otrzymasz wygraną 2^n zł (za serię n orłów zakończoną reszką). Zatem

$$v = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 2^n + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} + \ldots = +\infty.$$

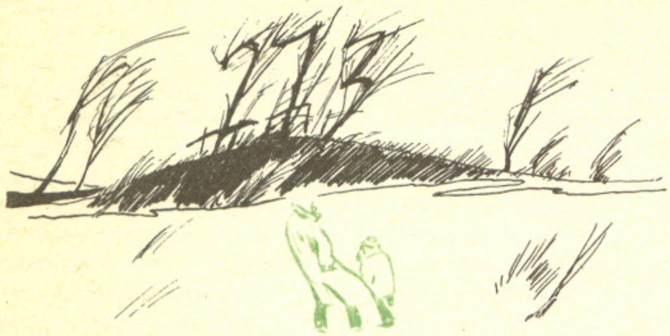
Ostatecznie również $\frac{1}{2} v = +\infty.$

A więc żądanie, abyś za prawo rozgrywania tej gry zapłacił nam wszystko, co posiadasz i zobowiązał się do przekazywania nam wszystkiego, co kiedykolwiek zarobisz w ciągu całego życia nie jest wygórowane: warunki gry i tak Ciebie faworyzują. Spisuj cyrograf!

BOCIANY

Korelacją (dokładniej: współczynnikiem korelacji) nazywa się liczbę, która jest pewnego rodzaju miarą zależności między dwiema zmiennymi losowymi.
Współczynnik ten przyjmuje wartości z przedziału $\langle -1, 1\rangle$. Jeśli X, Y są dwiema niezależnymi zmiennymi losowymi, to ich współczynnik korelacji $\varrho_{X;Y}$ jest równy zeru. Jeśli natomiast $|\varrho_{X;Y}| = 1$, to istnieją takie liczby a, b i c, że $aX+bY+c \equiv 0$: zmienne X i Y są liniowo zależne.
W naukach empirycznych wyniki pomiaru traktuje się często jako wartości zmiennych losowych. Jeśli dokona się wielu jednoczesnych pomiarów dwu różnych właściwości (np. wzrostu i wagi ciała czy dochodów i kosztów utrzymania wielu osób), to na podstawie otrzymanych wyników można określić przybliżoną wartość współczynnika korelacji między odpowiednimi zmiennymi losowymi. Jeśli pomiarów jest wiele, a otrzymana wielkość współczynnika korelacji duża (np. większa co do wartości bezwzględnej od 1/2), to mówi się, że korelacja jest istotna. Jeśli mierzone zmienne są niezależne, to otrzymanie istotnej korelacji jest bardzo mało prawdopodobne.
Fakt otrzymania istotnej korelacji interpretuje się często w związku z tym jako empiryczne potwierdzenie przypuszczenia, że pomiędzy mierzonymi zjawiskami zachodzi związek przyczynowo-skutkowy. Zbadano kiedyś korelację pomiędzy ilością zajętych gniazd bocianich a ilością urodzeń w Bremie w latach 1919–1935. Okazała się istotna.

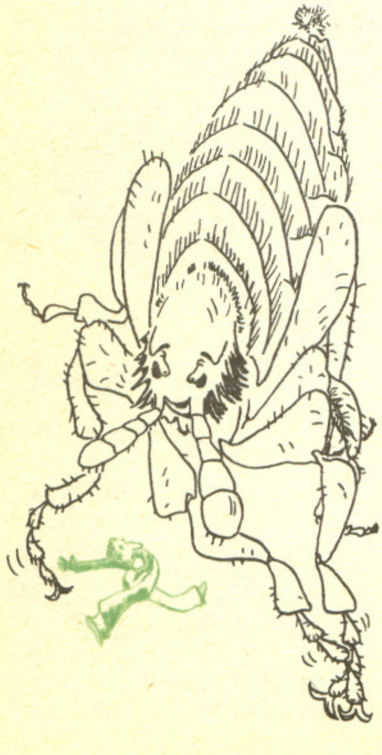
CZEMU RÓWNA SIĘ ZERO BEZWZGLĘDNE?



Hans Albrecht Bethe, laureat nagrody Nobla z fizyki, opublikował w latach trzydziestych następujący dowód na to, że temperatura zera bezwzględnego wynosi -273 stopnie Celsjusza:
Jak wiadomo odstęp między poziomami energetycznymi rośnie ze wzrostem siły oddziaływania. Odwrotność stałej sprzężenia oddziaływań, decydującej o ich sile, jest więc miarą liczby poziomów, czyli stopni swobody układu. Dla oddziaływań elektromagnetycznych, odpowiedzialnych za własności atomów i cząsteczek, stała ta równa się $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$. Liczba stopni swobody wynosi więc 137 dla elektronów i 137 dla protonów (innych cząstek naładowanych w atomach nie ma) — razem 274 stopnie. Ponieważ w temperaturze zera bezwzględnego wszystko jest zamrożone, więc mamy o jeden stopień swobody mniej. Ostatecznie otrzymujemy 273 stopnie.

Monika M. z Warszawy: „Nie jest dla mnie jasna definicja prawdopodobieństwa. Mówi się w niej, że «jest to funkcja, która przekształca zbiór zdarzeń losowych Z w zbiór $\langle 0, 1\rangle$, tzn. $P: Z \to \langle 0, 1\rangle$». A mnie się wciąż wydaje, że prawdopodobieństwo to wartość wspomnianej funkcji. To przecież konkretna liczba.
Red.: Wartość *funkcji „prawdopodobieństwo"* na konkretnym zdarzeniu nazywa się *prawdopodobieństwem tego zdarzenia* i jest dla konkretnego zdarzenia konkretną liczbą. Nie ma więc sprzeczności między cytowaną definicją, a poglądem Czytelniczki. Podobna sytuacja terminologiczna zdarza się często: *sinus* — to nazwa funkcji, ale *sinus* konkretnego *kąta* jest konkretną liczbą. Bywa też inaczej: *metryka* — to nazwa funkcji określonej na parach punktów; wartość tej funkcji na konkretnej parze nazywa się *odległością* punktów tej pary.

JAK SILNE JEST POLE WEWNĄTRZ ATOMU?



Z czym je porównamy? Oczywiście z polami elektrostatycznymi, jakie wytwarzamy w laboratoriach. Nasuwa się od razu odpowiedź — słabiutkie. Przecież w takim pojedynczym atomie wszystko jest małe i słabe. Aby zjonizować np. atom wodoru (czyli rozerwać go na jądro i elektron) potrzebna jest energia około 10 eV = $1{,}6 \cdot 10^{-11}$ erga, a więc około 100 miliardów razy mniejsza od energii skaczącej pchły. A tymczasem zabicie słonia byłoby w naszych laboratoriach drobnostką.
Mimo pozornej oczywistości wniosek powyższy jest błędny — pola atomowe są znacznie silniejsze od makroskopowych. Można bowiem w laboratorium uzyskać naprawdę wielkie *napięcia* — napięcia, czyli energię, jaką zyskują ładunki jednostkowe po przejściu między elektrodami. Ale spadek napięcia przypadający na jednostkę odległości nie będzie wcale taki duży. A właśnie ów spadek — czyli *natężenie* pola elektrostatycznego — mówi nam jak silne jest pole.
Dla atomu wodoru natężenie w odległości od jądra (protonu) zwanej promieniem Bohra ($a_0 \simeq 10^{-10}$ m) wynosi

$$E = \big((\text{energia jonizacji}):(\text{ładunek elementarny})\big):a_0 \simeq$$
$$\simeq \big((10\text{ eV}):(1\text{ e})\big):(10^{-10}\text{ m}) = 10^{11}\text{ V/m},$$

podczas gdy w laboratoriach nie umiemy uzyskać natężenia większego od 10^7 V/m. Pole atomowe jest więc bardzo silne. Tyle, że działa ono na niewielkich odległościach (maleje bowiem bardzo szybko — proporcjonalnie do $\frac{1}{r^2}$, gdzie r jest odległością od jądra) i dlatego daje znikomą energię jonizacji.
Można by dojść do prawidłowej odpowiedzi na tytułowe pytanie również bez posługiwania się obliczeniami. Gdybyśmy bowiem umieli uzyskać w laboratorium natężenia równe, bądź większe od natężeń pól atomowych, nasze urządzenia rozsypałyby się na jądra i elektrony.
Na końcu zwróćmy uwagę na jednostki. Zwykle jednostki atomowe są bardzo małe w porównaniu z makroskopowymi (odległość 10^{-10} m, energia 10^{-11} erga, ładunek $4{,}8 \cdot 10^{-19}$ kulomba). Ale jednostka napięcia, wolt, obsługuje z równym powodzeniem mikro- i makroświat.

10 wzorów, które zmieniły oblicze Ziemi (tłumaczenie nadruków na rewersach znaczków przedstawionych na okładce — za ich treść nie bierzemy odpowiedzialności)

1. Człowiek pierwotny

Ta elementarna równość miała fundamentalne znaczenie dla człowieka pierwotnego, ponieważ nauczyła go liczenia. Bez zrozumienia pojęcia liczby ludzie mogli operować w handlu jedynie nazwami przedmiotów; nie znali ilości owiec i krów, które posiadali, ani liczby członków plemienia. Umiejętność liczenia doprowadziła bezpośrednio do szybkiego rozwoju handlu, a w dalszej perspektywie do rozkwitu nauk mierniczych.

2. Pitagoras (570–497/6 p.n.e.)

Najbardziej znanym twierdzeniem geometrii jest niewątpliwie twierdzenie Pitagorasa, które dotyczy długości trzech boków trójkąta prostokątnego. Po raz pierwszy zostało sformułowane przy obliczaniu długości jako sposób pośredni, pozwalający człowiekowi robić różne obliczenia geometryczne, a także mapy. Starożytni Grecy używali wzoru Pitagorasa do mierzenia odległości statków na morzu, obliczania wysokości budynków itp. Wzór ten jest podstawą formułowania wielu pojęć matematyki.

3. Archimedes (287–212 p.n.e.)

Archimedes powiedział: „Dajcie mi punkt oparcia, a poruszę Ziemię".
Proste równanie dźwigni jest podstawą całej inżynierii, np. konstrukcji koła zębatego, dźwigu itp. Znajomość tego równania umożliwia sporządzanie dokumentacji technicznej (rysunki, szkice) od mostu do budynku. Większość narzędzi działa na zasadzie dźwigni (każda nakrętka, sworzeń itp.).

4. John Napier (1550–1617)

Napier porównywał znaczenie logarytmów w matematyce do roli stenografii. Pozwoliły one dokonywać szybko i w sposób nieskomplikowany mnożenia i dzielenia liczb wielocyfrowych (dodając lub odejmując ich logarytmy). Logarytmy znalazły zastosowanie w astronomii i nawigacji; ich znaczenie na polu tych nauk jest porównywalne z dzisiejszą rewolucją komputerową.

5. Izaak Newton (1642–1727)

W czasach Newtona ludzie wiedzieli już, że planety krążą dookoła Słońca a Księżyc wokół Ziemi, jednakże ówczesny poziom nauki i techniki nie pozwalał na loty w kosmos. Newton wykazał, iż wszystkie ciała fizyczne przyciągają się wzajemnie siłą grawitacji. Równanie jego uwidoczniło, że siła ta zależy od mas ciał fizycznych. Nie zauważa się jej działania w przypadku przedmiotów nas otaczających, gdyż ich masa jest znikoma.

6. James Clerk Maxwell (1831–1879)

Wiek XIX jest epoką dokonań fizyka szkockiego. Sformułował on 4 słynne równania podsumowujące wiedzę człowieka w dziedzinie elektryczności i magnetyzmu. Umożliwił tym samym rozwój radiofonii, komunikowania się na odległość, skonstruowanie radaru, który znalazł zastosowanie na ziemi, morzu i w przestrzeni.
Światło, promienie X i inne rodzaje promieniowania elektromagnetycznego spełniają związki wynikające z podanego wzoru.

7. Ludwik Boltzmann (1844–1906)

Równania Boltzmanna ujawniły zależność między zachowaniem się gazów, a ruchem atomów i molekuł. Ich znaczenie uwydatnia się wszędzie, gdzie znalazły zastosowanie gazy: w maszynach parowych, w urządzeniach, które wykorzystują spalanie wewnętrzne, w przemyśle farmaceutycznym, w produkcji mas plastycznych itp. Oprócz tego nadal stanowią one podstawę do wyjaśniania procesów zachodzących na Słońcu, gwiazdach i odległych galaktykach.

8. Louis de Broglie (ur. 1892)

Światło — forma energii — posiada własności cząstek i fal. De Broglie odkrył, że cząstki elementarne, z których zbudowana jest materia, mają także właściwości podobne do fali.
Równanie de Broglie'a miało ogromne znaczenie dla rozwoju nowoczesnej optyki i urządzeń elektronicznych, np. tranzystorów — znajdujących zastosowanie w radiu, telewizji, komputerach, statkach kosmicznych, wojskowości itp.
Przyczyniło się także do skonstruowania mikroskopu elektronowego, wzbogacając w ten sposób zasób przyrządów badawczych w wielu gałęziach nauki.

9. Konstanty Ciołkowski (1857–1935)

Równanie to stanowi ważną część techniki kosmicznej. Opisuje ono zmianę prędkości statków odrzutowych. Wynika bezpośrednio z jednej z trzech zasad dynamiki Newtona. Bez niego niemożliwe byłyby loty na Księżyc i na inne planety — a nawet loty orbitalne dookoła Ziemi. Wykorzystano je także w czasie II Wojny Światowej do konstrukcji pocisków sterowanych.

10. Albert Einstein (1879–1955)

Równanie to zapoczątkowało wiek atomowy. Uwidacznia ono, że znikoma masa materii może być źródłem ogromnej energii, która może się objawiać w formie reakcji kontrolowanej lub w postaci gwałtownych wybuchów bomb atomowych i wodorowych. Człowiek jednakże potrafił wykorzystać reakcję atomową (reaktory) dla uzupełnienia lub zastąpienia ciepła i elektryczności, tak potrzebnych w domach i fabrykach.