

Czy umiecie się dziwić



książka
 dla
 Sympatyków
 Małej
 Delty

SPIS TREŚCI

NUMERU 9 (57)

Zegar chemiczny <i>Doc. dr Antoni Kuszell</i>	str. 1
Ponad 50 rzędów wielkości czyli przewodnictwo ciał stałych <i>Dr Andrzej Hennel</i>	str. 4
Zadania <i>Małgorzata Zalewska</i>	str. 6
Wielościanny z minimalną ilością powtórzeń (II) <i>Małgorzata Zalewska</i>	str. 7
O liczbach p -adycznych <i>Mgr Krystyna Wojtków</i>	str. 8
Mała Delta	str. 12
Mechanika, komputer, człowiek (IV) <i>Prof. dr Dominik Rogula</i>	str. 15
Drobiazgi	str. 16

W następnym numerze:

Esej o tęczy

„Delta”
 matematyczno-fizyczny miesięcznik
 popularny
 Polskiego Towarzystwa
 Matematycznego i Polskiego
 Towarzystwa Fizycznego
 wydawany przy poparciu
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny
 doc. dr J. Bartke
 doc. dr A. Bączyński
 doc. dr B. Gleichgewicht
 prof. dr K. Goebel
 doc. dr B. Iwaszkiewicz
 doc. dr T. Iwiński
 doc. dr A. Januszajtis
 prof. dr Leon Jeśmanowicz —
 wiceprzewodniczący
 mgr H. Kaczorek
 prof. dr B. Karczewski
 prof. dr M. Kuczma
 mgr A. Mąkowski
 prof. dr Z. Pawlak
 prof. dr A. Piekara
 prof. dr Z. Semadeni
 prof. dr J. Stankowski

prof. dr M. Subotowicz
 doc. dr S. Turnau
 doc. dr J. Wdowczyk
 prof. dr Janusz Zakrzewski —
 przewodniczący

Redaguje Kolegium w składzie:
 doc. dr T. Hofmokl — z-ca red. nac.
 dr T. B. Iwiński
 B. Jaworska-Kordos — ilustracje
 dr M. Kordos — red. nac.
 mgr K. Prażmowski — red. techn. graf.
 mgr K. Szypcio — sekr. red.
 doc. dr M. Święcki
 Adres Redakcji
 ul. Hoża 69 pok. 151,
 00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.
 Ossolińskich — Wydawnictwo
 Wrocław, Oddział w Warszawie
 Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.
 wyd.; 2,50 ark. druk.;
 papier offsetowy III kl. 80 g. 61 × 86
 Wydrukowano w Drukarni im.
 Rewolucji Październikowej
 Warszawa, ul. Mińska 65
 Nr zam. 824/78 S-80

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60, — cena prenumeraty półrocznej zł 30, —

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach — do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny — do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego. Jednostki gospodarki społecznej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”. Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW oraz prenumeratorki indywidualni, zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli. Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
 Sprzedż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
 Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO I O M W-wa 1531-912
 w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław
 w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa
 w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków
 Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7 00-068 Warszawa, Poland or with
 — Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68,
 Bundesrepublik Deutschland.
 — Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,
 — Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Doc. dr Antoni KUSZELL

Każdy proces zachodzący w przyrodzie ma charakterystyczne dla siebie rozmiary oraz odpowiednią dla siebie skalę czasową. Na przykład zjawiska zachodzące w mikroświecie cząstek elementarnych przebiegają w znacznie krótszych przedziałach czasu niż zjawiska w świecie atomów. Charakterystyczne skale świata makroskopowego są z kolei bardzo krótkie w porównaniu do skali astronomicznej. Skala czasu zjawiska związana jest z jego rozmiarami przestrzennymi oraz charakterystyczną prędkością związaną z tym procesem. Na przykład, skala czasowa zjawisk elektromagnetycznych jest w określonym układzie zupełnie inna niż skala zjawisk akustycznych.

W układach makroskopowych prędkość charakterystyczna dla danego zjawiska, podobnie jak jego rozmiary, zależy od warunków zewnętrznych, takich jak temperatura, ciśnienie itp. Dlatego też, by urządzenie makroskopowe pracowało stabilnie, potrzebne są urządzenia kompensujące lub zapewniające stałość czynników zewnętrznych.

Dlatego też jedną z dziwniejszych własności organizmów żywych jest istnienie bardzo stabilnego i dokładnego „zegara biologicznego”. Rytm tego zegara jest charakterystyczny dla danego gatunku, a nie osobnika, i słabo zależy od czynników zewnętrznych. Charakterystyczna skala czasu jest dla niego dużo dłuższa od naturalnej, wydawałoby się, skali atomowej i jest typowa dla zjawisk makroskopowych. Rozwiązanie problemu zegara biologicznego jest obecnie jednym z ważniejszych problemów nauki.

Zegarem nazwiemy układ makroskopowy, który zmienia swe własności periodycznie w czasie (inaczej mówiąc oscyluje) ze stałą częstością. To zachowanie oscylacyjne prowadzi do pewnych trudności związanych z prawami termodynamiki. Jak bowiem dobrze wiadomo, z drugiego prawa termodynamiki wynika, że wszystkie układy zamknięte muszą dążyć do stacjonarnego stanu równowagi, co jest sprzeczne z charakterem oscylacyjnym. Wyciągamy stąd bardzo ważny wniosek, że układ oscylujący (nie tłumiony) musi być układem termodynamicznie otwartym, to znaczy musi oddziaływać z otoczeniem, lub mówiąc bardziej obrazowo, musi coś z otoczenia pobierać oraz coś do tego otoczenia wydzielać.

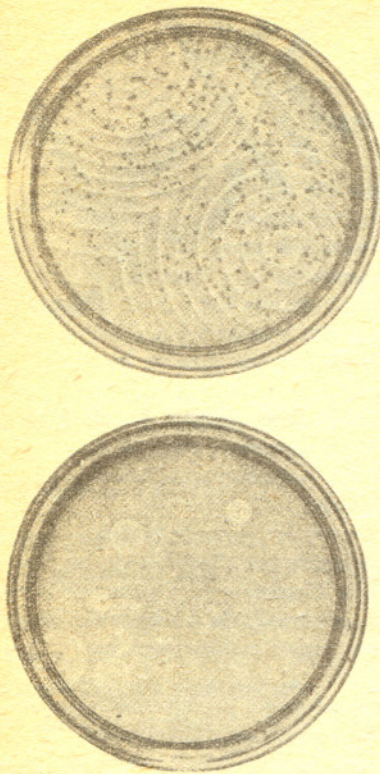
Wniosek ten dobrze pokrywa się z obserwowanymi własnościami organizmów, które są w rzeczywistości układami otwartymi.

Jak zwykle głównym bodźcem wpływającym na rozwój teorii są wyniki doświadczeń. Znanych już jest kilka typów reakcji chemicznych, prowadzących do zachowania oscylacyjnego, lub, co jest nie mniej ciekawe, do tworzenia się struktur przestrzennie niejednorodnych. Układy takie są ostatnio przedmiotem zainteresowania fizyków, chemików i biologów. Dla układów przestrzennie niejednorodnych utarła się nazwa struktur dysypatywnych. Organizmy żywe są, oczywiście, silnie niejednorodne.

Historia chemicznych układów oscylujących sięga początku XIX wieku. W roku 1826 Fechner zaobserwował pojawienie się oscylacji na elektrodach ogniwa. Drugim przykładem oscylacji chemicznych jest tak zwane serce rtęciowe. W roku 1873 G. Lipmann opisał obserwacje tego zjawiska, występującego w następujących warunkach: zalejmy na szkiełku od zegarka kropelkę rtęci roztworem mieszaniny kwasu siarkowego oraz dwuchromianu potasu. Następnie dotknijmy żelazną igłą kropelki rtęci. Wtedy rtęć zacznie drgać w sposób przypominający pracę serca. Dlatego zjawisko to nosi nazwę serca rtęciowego. W omawianych tutaj przykładach oscylacji chemicznych istotną rolę odgrywają złożone procesy zachodzące na powierzchni układu (elektrody; kropli rtęci). Dlatego zjawiska te są bardzo trudne do opisanego teoretycznego. Na przykład, do chwili obecnej nie istnieje zadowalający opis mechanizmu serca rtęciowego.

Przez długi czas oscylacje chemiczne uważane były za ciekawostkę, znajdującą się na marginesie zainteresowań badawczych. Wydaje się, że głównym powodem takiego stanu rzeczy był brak odpowiedniej teorii, jaką jest termodynamika układów otwartych. Jeśli bowiem układ pozostawimy zamkniętym, to oscylacje w omawianych przykładach będą szybko zanikały. Na to, by drgania te zachodziły w długim czasie, bez zmian amplitudy i częstości, należy sztucznie (działaniem z zewnątrz) utrzymywać na stałym poziomie stężenia odpowiednich substancji, to znaczy dostarczać produktów początkowych (paliwa lub, jeśli kto woli, pożywienia) oraz usuwać z układu produkty końcowe reakcji.

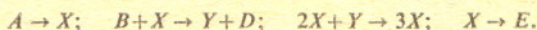
Najciekawsze są występujące w układach chemicznych (lub biologicznych) oscylacje nie związane ze zjawiskami powierzchniowymi. Najprostsze do analizy matematycznej będą oczywiście zjawiska jednorodnie przestrzennie. W Delcie 11/1975 opisane były oscylacje w układzie „ofiara — drapieżnik” (model Voltery-Lotka). Model ten opisuje w sposób prosty (z matematycznego punktu widzenia) bardzo skomplikowane procesy zachodzące w tym układzie biologicznym. Można by nawet powiedzieć, że opis zachowania się tego układu może być tak uproszczony dlatego, że elementy układu biologicznego (np. rysie oraz króliki) są tak skomplikowane. Inaczej mówiąc, nie możemy wnioskować o zachowaniu układu przez badanie



praw ruchu pojedynczego osobnika (prawa elementarne), lecz musimy wprowadzić makroskopowe prawa fenomenologiczne. Inaczej przedstawia się sytuacja przy badaniu kinetyki reakcji chemicznych. Tutaj prawa ruchu (równania kinetyki) mamy z góry zadane. W większości wypadków są to równania liniowe, które nie prowadzą do takich dziwnych zachowań. Na to, by równania kinetyki były nieliniowe, koniecznym jest, by zachodząca w układzie reakcja chemiczna była autokatalityczna. Znaczący to, że co najmniej jedna z substancji biorących udział w reakcji jest jednocześnie katalizatorem tej reakcji. Układy takie są z reguły bardzo złożone pod względem chemicznym i musi w nich występować wiele różnych substancji chemicznych. Przykładem takiej reakcji mającej charakter oscylacyjny jest reakcja Żabotyńskiego. Występuje w niej bardzo wiele substancji, z których najważniejszymi są: kwas bromomalonowy, ferroina, kwas siarkowy oraz substancja zawierająca jony żelaza (phenatrolina). Podczas oscylacji jony żelaza przechodzą z formy dwuwartościowej (kolor czerwony) w formę trójwartościową (kolor niebieski). Typowe okresy tych oscylacji są rzędu kilku sekund. Tak więc mieszanina zmienia barwę periodycznie. Jeśliby stężenia odpowiednich substancji utrzymywać na stałym poziomie, to układ będzie oscylował przez długi czas, bez zmiany okresu.

Jeśli jednak dopuścimy, by substancje swobodnie dyfundowały w układzie, to możemy zaobserwować nowe zjawisko. W pewnych punktach oscylacje wystąpią silniej niż w pozostałej części cieczy i periodyczna zmiana barwy będzie rozchodziła się w postaci kręgów koncentrycznych. Częstota drgań takich centrów może być różna, lecz centra oscylujące najszybciej wyrugują centra wolniejsze i w końcu układ będzie oscylować synchronicznie, zgodnie z drganiami najszybszego centrum. Na marginesach pokazaliśmy kilka zdjęć obrazujących taką synchronizację. Okazuje się, że czasami rozchodzące się fale mogą mieć postać spiral, a nie zamkniętych kręgów.

Proces powstawania spiral jest bardzo złożony i nie będziemy go tutaj omawiać. W opisywanej reakcji Żabotyńskiego procesy chemiczne zachodzące w układzie są bardzo skomplikowane i jeszcze nie do końca wyjaśnione. Dlatego opis kinetyki rzeczywistych procesów zachodzących w naszym układzie jest obecnie niemożliwy. Pewnym jest jednak, że jest to reakcja typu autokatalitycznego. W fizyce w takich wypadkach postępuje się następująco: jeśli opis ścisły jest niemożliwy lub zbyt skomplikowany, należy skonstruować model prostszy, lecz zawierający (choćby częściowo) istotne cechy omawianego zjawiska. Podobnie i w przypadku reakcji oscylujących zbudowano stosunkowo prostą reakcję modelową. Reakcję tę można zapisać następująco:

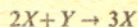


W powyższym modelu mamy do czynienia z dwiema substancjami X i Y , występującymi jedynie w pośrednich etapach naszej reakcji, oraz czterema substancjami A , B , D i E , odgrywającymi rolę produktów początkowych i końcowych reakcji. Stężenia tych ostatnich substancji będziemy musieli sztucznie utrzymywać na stałym poziomie (układ otwarty). Zmiennymi reakcji będą więc stężenia substancji pośrednich X i Y . Dodatkowo przyjmijmy, że szybkość wszystkich reakcji jest równa jedności. Zwróćmy uwagę, że reakcje w naszym modelu mogą przebiegać tylko w jedną stronę. Zmiana stężenia substancji X na jednostkę czasu będzie proporcjonalna do iloczynu stężeń substancji wyjściowych. Równania kinetyki będą miały więc postać (dla $t \geq 0$):

$$\frac{\partial X}{\partial t} = A - (B+1)X + X^2Y + D_1 \frac{\partial^2 X}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = BX - X^2Y + D_2 \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2}.$$

Przeanalizujmy po kolei czony w pierwszym równaniu. Wyraz A pochodzi z reakcji $A \rightarrow X$ i opisuje fakt, że produkcja substancji X jest proporcjonalna do ilości surowca A . Człon $-(B+1)X$ pochodzi z dwóch reakcji $B+X \rightarrow Y+D$ oraz $X \rightarrow E$ i opisuje straty substancji X proporcjonalne do iloczynu stężeń BX (pierwsza reakcja) oraz do stężenia X (druga reakcja). Człon X^2Y pochodzi z autokatalitycznej reakcji

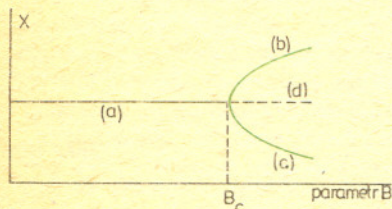


i wyraża fakt, że produkcja substancji X w tej reakcji jest katalizowana przez obecność dwóch cząsteczek tej samej substancji. Człon ten wprowadza nieliniowość do naszego równania. Podobnie powstaje drugie równanie.

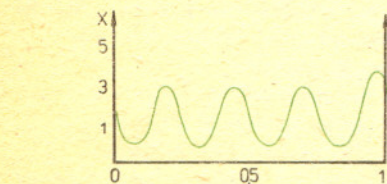
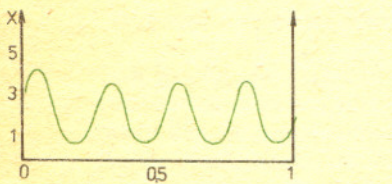
W równaniach tych uwzględniliśmy możliwość dyfuzji (człony z drugą pochodną względem zmiennej przestrzennej r) substancji X i Y odpowiednio ze stałymi dyfuzji D_1 oraz D_2 . W układzie przestrzennie jednorodnym człony te znikną. Łatwo można zauważyć, że funkcje $X^0(r, t) = A$ oraz $Y^0(r, t) = B/A$ są stacjonarnymi, jednorodnymi rozwiązaniami powyższego układu równań. Rozważmy teraz układ o skończonych rozmiarach $r \in (0, 1)$. Zadajmy warunki brzegowe równowagi

$$Y(r, t)|_{r=0} = Y(r, t)|_{r=1} = A, \quad \text{oraz}$$

$$Y(r, t)|_{r=0} = Y(r, t)|_{r=1} = B/A.$$



Rys. 1. Zależność średniego stężenia substancji X od stężenia substancji B . Dla rozwiązań stacjonarnych krzywa (a) odpowiada rozwiązaniu przestrzennie jednorodnemu stabilnemu dla $B < B_c$. Krzywe (b) i (c) odpowiadają stabilnym rozwiązaniom przestrzennie niejednorodnym (struktury dysypatywne). Linia przerywana oznacza rozwiązanie niestabilne. Krytyczna liczba falowa parzysta.



Rys. 2. Niejednorodne przestrzennie rozwiązania stacjonarne (struktury dysypatywne) w przypadku parzystej krytycznej liczby falowej. $A = 2$, $B = 4,6$, $D_1 = 0,0016$, $D_2 = 0,0080$.

Analiza takiego układu równań różniczkowych cząstkowych jest trudna i nie będziemy jej szczegółowo przeprowadzać. Jednak równania te mają własności tak interesujące, że postaramy się w miarę precyzyjnie je omówić. Własności te zostały w dużej mierze zbadane przy pomocy obliczeń numerycznych na komputerze. W szczególności rys. 2 i 4 są otrzymane w wyniku obliczeń numerycznych. Pierwszą własnością jest fakt, że zachowanie rozwiązań zależy w sposób bardzo istotny od parametru B , to znaczy od stężenia substancji B . Jeśli stężenie to jest niższe od pewnej wartości krytycznej B_c , to rozwiązanie X^0, Y^0 opisane powyżej jest rozwiązaniem stabilnym. Wielkość parametru B_c dana jest wzorem:

$$B_c = \min_{n \geq 1} \left[1 + \frac{D_1}{D_2} A^2 + \frac{A^2}{D_2 (n\pi)^2} + D_1 (n\pi)^2 \right].$$

Liczbę całkowitą n , dla której powyższe wyrażenie osiąga minimum, nazwiemy krytyczną liczbą falową.

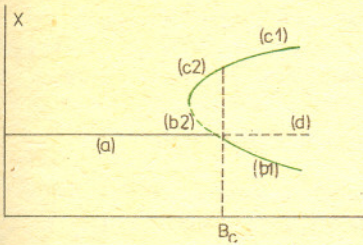
Zachowanie się rozwiązań dla wartości B należących do otoczenia punktu B_c zależy w sposób istotny od tego, czy krytyczna liczba falowa m jest parzysta, czy nie. Na początku omówimy przypadek, gdy m jest liczbą parzystą. Gdy parametr B osiąga od dołu wartość krytyczną, to jednorodne rozwiązanie staje się niestabilne. Natomiast pojawiają się dwa nowe rozwiązania stacjonarne, które jednak są przestrzennie niejednorodne. Takie rozdwojenie się rozwiązań nosi nazwę bifurkacji, zaś punkt, w którym pojawiają się nowe rozwiązania, punktem bifurkacji. Na rysunku 1 pokazaliśmy tak zwany wykres bifurkacyjny dla naszego równania opisującego model reakcji chemicznej. Rysunek ten wykonany jest dla parzystej krytycznej liczby falowej. Linia ciągłą zaznaczono stacjonarne rozwiązania stabilne, linią przerywaną — niestabilne. Na osi rzędnych odłożono stężenie substancji B , zaś na osi odciętych średnie stężenie substancji X . Na rysunku 2 podano rozwiązania stacjonarne dla pewnego $B > B_c$. Tutaj na osiach odłożono odpowiednio zmienną przestrzenną r oraz stężenie substancji X .

Niech teraz krytyczna liczba falowa m będzie nieparzysta. Wykres bifurkacyjny jest teraz zupełnie inny, bardziej złożony. Podobnie jak w przypadku poprzednim w punkcie krytycznym B_c jednorodne rozwiązanie staje się niestabilne. Natomiast w samym punkcie bifurkacji pojawia się tylko jedna nowa gałąź rozwiązań. Co jest jednak ciekawsze, istnieje druga gałąź rozwiązań, która nigdzie nie łączy się z rozwiązaniem jednorodnym. Rozwiązanie to jest stabilne dla wartości $B > B_c$. Wykres bifurkacyjny dla tego przypadku pokazaliśmy na rysunku 3. Wszystkie oznaczenia są takie same jak na rysunku 1, poza drobną różnicą w oznakowaniu gałęzi rozwiązań. Indeks 1 oznacza gałęzie powyżej punktu bifurkacji, zaś indeks 2 poniżej. Odpowiednie rozwiązania stacjonarne dla tego przypadku pokazano na rysunku 4. Rozwiązania te są teraz symetryczne. Za to układ ma własność przypominającą trochę własność histerezy. Mianowicie, jeśli będziemy zmniejszać stężenie B w układzie, to w zależności od tego, na której gałęzi rozwiązań stacjonarnych się znajdowaliśmy, osiągniemy dwa różne i rozłączne (to znaczy takie, że nie można w sposób ciągły i stacjonarny przejść z jednego na drugie) rozwiązania.

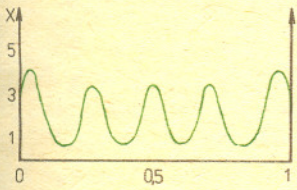
Zajmijmy się teraz przypadkiem, gdy w chwili czasu $t = 0$ stężenie substancji X (i oczywiście odpowiednio substancji Y) nie będzie równe stężeniu odpowiadającemu właściwemu dla rozwiązania stacjonarnego stężeniu substancji B (patrz rysunki 1 i 3). Przyjmijmy, że $B > B_c$ i że wartość X jest bliska wartości jednej ze stabilnych gałęzi. Stężenie substancji X nie będzie teraz stacjonarne, lecz zacznie zmieniać się w czasie. Okazuje się, że po pewnym czasie stężenie X zbliży się do drugiej gałęzi stacjonarnej, by znów po chwili powrócić w pobliże pierwszej. Będzie ono wykonywało oscylacje, z określonym okresem, stąd nazwa zegar chemiczny. Jeśli dopuścimy możliwość swobodnej dyfuzji reagentów, to wtedy oscylacje przybiorą postać przestrzennych fal podobnych do przedstawionych na zdjęciach.

Na koniec chciałbym omówić jeszcze wyniki numerycznych rachunków dla modelu trochę uogólnionego. Jeśli w naszym modelu pozwolimy substancji A dyfundować, to znaczy dopuścimy rozkład przestrzenny stężenia substancji A , to układ zawsze będzie zmieniał się periodycznie w przestrzeni i czasie. Na rysunku 5 pokazaliśmy kolejno kilka etapów takiej ewolucji aż do momentu zreprodukowania się stanu początkowego. Odpowiednio, na osiach odłożono zmienną przestrzenną r (w przedziale $(0, 1)$) oraz stężenie X .

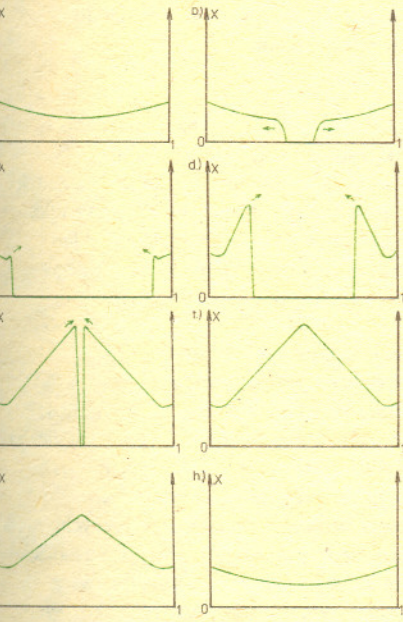
Na zakończenie chciałbym podkreślić, że na tym przykładzie widać bogactwo i piękno efektów, które z samej natury są związane z nieliniowością zjawiska (autokataliza), i które nigdy nie mogłyby wystąpić w układach opisywanych dynamiką liniową. Równania nieliniowe kryją w sobie możliwość opisu zjawisk, których dotychczas nie rozumiemy. Podstawową trudnością jest jednak fakt, że o równaniach nieliniowych, a w szczególności o ich rozwiązaniach, wiemy jeszcze bardzo mało. Na pewno w najbliższych latach stanowiąc one będą przedmiot badań wielu matematyków i fizyków.



Rys. 3. Wykres analogiczny do przedstawionego na rys. 1, lecz dla nieparzystej krytycznej liczby falowej. Oznaczenia te same co na rys. 1, z tą różnicą, że cyfry 1 i 2 odnoszą się odpowiednio do obszarów $B > B_c$ oraz $B < B_c$.



Rys. 4. Struktury dysypatywne policzone dla tych samych wartości parametrów co krzywe przedstawione na rys. 2, ale dla nieparzystej krytycznej liczby falowej.



Rys. 5. Etapy charakterystyczne ewolucji rozkładu przestrzennego w czasie okresu drgań, dla modelu dopuszczającego zmienność przestrzennego rozkładu substancji A . Stała dyfuzji substancji A :

$$D = 0,0195, D_1 = 0,00105, D_2 = 0,00066,$$

$$B = 77, \bar{X} = \bar{A} = 14, \bar{Y} = \frac{B}{A} = 5,5.$$

Kreska nad wielkością oznacza wartość średnią.

Dr Andrzej HENNEL

Jaka wielkość fizyczna zmienia się w największym zakresie wielkości?

Odpowiedź na tak postawione pytanie wydaje się być prosta. Jeżeli obliczymy bowiem stosunek przypuszczalnej masy Wszechświata (ok. 10^{50} kg) do masy elektronu (ok. 10^{-30} kg), otrzymamy 80 rzędów wielkości. Dalej stosunek promienia Wszechświata (ok. 10^{26} m) do promienia nukleonu (ok. 10^{-15} m), czy też stosunek czasu życia Wszechświata (ok. 10^{18} s) do czasu życia niektórych cząstek elementarnych (ok. 10^{-23} s) dają nam po 41 rzędów wielkości.

We wszystkich tych przypadkach porównujemy jednak własności największego znanego obiektu fizycznego (Wszechświata) z własnościami najmniejszych znanych obiektów (cząstek elementarnych).

Niewielu ludzi zdaje sobie natomiast sprawę z faktu, że istnieje makroskopowa wielkość fizyczna, którą można mierzyć w laboratorium, zmieniająca się o ponad 50 rzędów wielkości. Jest nią przewodnictwo właściwe ciał stałych.

W chwili obecnej uważamy, że zakres zmian przewodnictwa właściwego rozciąga się co najmniej od 10^{24} (Ωcm)⁻¹ do 10^{-30} (Ωcm)⁻¹, jednakże w miarę rozwoju badań granice te mogą ulec dalszemu poszerzeniu.

Definicja przewodnictwa właściwego

Przypomnijmy, co rozumiemy przez przewodnictwo właściwe. Wielkość tę wprowadziła już fizyka XIX wieku ustalając, że opór przewodnika można wyrazić wzorem

$$R = \frac{l}{\sigma S},$$

gdzie l jest długością, a S przekrojem poprzecznym przewodnika, natomiast σ — stałą materiałową nazywaną przewodnictwem właściwym i wyrażaną w (Ωcm)⁻¹ (jest to odwrotność tzw. oporu właściwego ρ).

Korzystając z mikroskopowego wzoru na natężenie prądu elektrycznego

$$I = nqvS,$$

gdzie n jest koncentracją nośników prądu, q ich ładunkiem, a v średnią prędkością ruchu wywołanego przez przyłożone pole elektryczne, możemy znaleźć

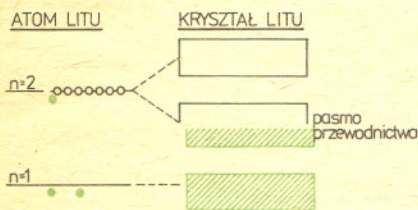
$$\sigma = nq\mu,$$

gdzie μ jest tzw. ruchliwością nośników, czyli średnią prędkością uzyskaną w jednostkowym polu elektrycznym. W wielu ciałach stałych ruchliwość μ jest wprost proporcjonalna do średniej drogi swobodnej jaką przebywają nośniki między zderzeniami.

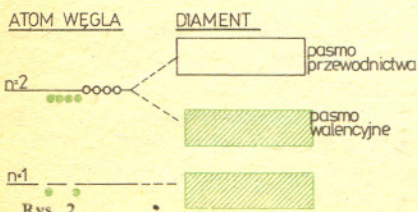
Struktura energetyczna ciał stałych

Podobnie jak w przypadku atomów, zrozumienie własności ciał stałych wymaga poznania ich struktury energetycznej. Istnieją dwa zasadniczo różne rodzaje ciał stałych. Są to substancje, które można dobrze charakteryzować tzw. modelem pasmowym, oraz substancje, które należy traktować jak zbiór izolowanych atomów, jonów czy cząsteczek. W przypadku pierwszym należy sobie wyobrazić, że elektrony walencyjne atomów wchodzących w skład kryształu należą nie tyle do pojedynczych atomów, ile raczej do wszystkich atomów całego kryształu. W przypadku drugim zewnętrzne elektrony atomu czy jonu są z nim ściśle związane.

Zajmijmy się obecnie bliżej modelem pasmowym i ciałami stałymi wykazującymi tzw. przewodnictwo pasmowe. Poziomy energetyczne atomów tworzących kryształ zostają zastąpione przez pasma energetyczne złożone z takiej samej ilości poziomów, jaka jest ilość atomów w kryształach (około 10^{23} w 1 cm^3). Przy czym obowiązuje reguła, że parzysta liczba elektronów na danej powłoce atomowej prowadzi na ogół do pasm całkowicie wypełnionych elektronami, natomiast nieparzysta liczba elektronów do pasm częściowo wypełnionych. Rozważmy dwa proste przykłady ciał stałych wykazujących istnienie pasm energetycznych. Są nimi: przedstawiciel pierwszej kolumny układu okresowego — atom litu oraz przedstawiciel czwartej kolumny tego układu — atom węgla. Obydwa te atomy mają zapełnioną pierwszą powłokę elektronową, natomiast na drugiej powłoce lit ma jeden, a węgiel cztery elektrony. Prowadzi to do struktury pasmowej przedstawionej na rysunkach 1 i 2. Elektrony z pasm całkowicie zapełnionych są to elektrony skupione wokół jąder atomowych lub tworzące wiązania w ciele stałym. Nie mogą one przewodzić prądu elektrycznego. Pasma zapełnione można więc sobie wyobrazić jak zamknięty plac zakorkowany samochodami. Samochody na placu mogą się wprawdzie poruszać, ale liczba jadących w jedną stronę musi być równa liczbie jadących w przeciwnym kierunku. Z kolei pasma częściowo zapełnione są utworzone przez elektrony, które mogą swobodnie poruszać się po kryształach, a więc mogą przewodzić prąd elektryczny. Średnia droga swobodna takich elektronów jest setki a nawet i tysiące razy



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

większa od odległości między dodatnimi jonami, wynoszącej 10^{-1} nm ($2 \div 3 \text{ \AA}$). Pasma takie nazywamy w związku z tym pasmami przewodnictwa. Na podstawie powyższego modelu spróbujemy omówić własności metali i półprzewodników.

Metale

W metalu każdy atom dostarcza do pasma przewodnictwa co najmniej jeden elektron. W związku z tym koncentracja tych elektronów jest bardzo duża (ok. 10^{23} cm^{-3}) i można mówić o gazie elektronowym wypełniającym metal (rys. 3). Ruchliwość elektronów w metalu jest mniejsza od $100 \text{ cm}^2/\text{V} \cdot \text{s}$ w temperaturze pokojowej, co w najlepszych przewodnikach takich jak Cu, Ag czy Al daje przewodnictwo rzędu $10^6 (\Omega\text{cm})^{-1}$. Jak wiadomo opór metalu rośnie z temperaturą. Ponieważ koncentracja elektronów w pasmie przewodnictwa jest stała, efekt ten tłumaczymy zmniejszeniem ruchliwości. Należy wyobrazić sobie, że drgania dodatnich jonów utrudniają ruch elektronów. Drugim czynnikiem hamującym ruch elektronów są defekty struktury krystalicznej. Eliminacja obydwóch efektów (możliwie najczystsze przewodniki i niskie temperatury) pozwala osiągnąć w przypadku miedzi rekordową wartość $\sigma = 10^{10} (\Omega\text{cm})^{-1}$, co odpowiada drodze swobodnej elektronu $l = 1 \text{ mm}$.



Rys. 4

Półprzewodniki samoistne

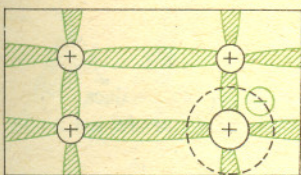
Ciała stałe, których struktura pasmowa jest analogiczna do przedstawionej na rysunku 2 struktury energetycznej diamentu, nazywamy półprzewodnikami. W materiałach tych w niskich temperaturach brak elektronów swobodnych (rys. 4). Podwyższenie temperatury umożliwia przeskok elektronów z najwyższego pasma zapełnionego (walencyjnego) do pierwszego pasma pustego (przewodnictwa). Odległość między tymi pasmami nazywamy przerwą energetyczną ΔE . Wynosi ona dla typowych półprzewodników (Ge, Si) ok. 1 eV. Niezwykle interesującą własnością półprzewodników jest fakt, że po przejściu elektronów do pasma przewodnictwa w pasmie walencyjnym pozostają wolne miejsca, które również biorą udział w przewodnictwie. Nazywamy je dziurami. Dziurze przypisuje się dodatni ładunek i można ją sobie wyobrazić jako „pęcherzyk” w „cieczy” elektronowej poruszający się pod wpływem pola elektrycznego w kierunku przeciwnym niż elektrony. W czystym półprzewodniku (tzw. samoistnym) mamy oczywiście jednakową liczbę elektronów w pasmie przewodnictwa i dziur w pasmie walencyjnym. Energia termiczna drgań atomów w ciele stałym jest w temperaturze pokojowej bardzo mała (około 0,04 eV), więc liczba swobodnych elektronów i dziur jest również niewielka (około 10^{10} cm^{-3}). Nawet stosunkowo duże wartości ruchliwości $\mu = 1000 \text{ cm}^2/\text{V} \cdot \text{s}$ prowadzą do przewodnictwa miliard razy mniejszego niż przewodnictwo metali, $\sigma = 10^{-6} (\Omega\text{cm})^{-1}$. Przewodnictwo to bardzo silnie (wykładniczo) wzrasta z temperaturą.

Należy w tym miejscu wspomnieć jeszcze o tzw. półprzewodnikach z wąską przerwą energetyczną, które czasem nazywane są półmetalami. Są to m.in. związki rtęci HgTe i HgSe. Kryształy te są w ostatnich latach bardzo intensywnie badane w Polsce. Charakteryzują się one bardzo niewielką przerwą energetyczną oraz niezwykle wysokimi ruchliwościami nośników (ponad $1\,000\,000 \text{ cm}^2/\text{V} \cdot \text{s}$). Powoduje to, że ich przewodnictwo dochodzi do $\sigma = 10^3 (\Omega\text{cm})^{-1}$.

Półprzewodniki domieszkowe

Przyczyną, dla której półprzewodniki zrobiły w ostatnim dwudziestolecu oszałamiającą karierę, jest przede wszystkim fakt, że można zmieniać w sposób istotny ich własności za pomocą domieszek. Rozważmy sytuację przedstawioną na rysunku 5. Jeżeli do kryształu czterowartościowego germanu wprowadzimy domieszkę pięciowartościowego fosforu, wówczas piąty elektron walencyjny fosforu nie wchodzi do wiązań i pozostaje „bezrobotny”. Okazuje się, że niezwykle mała energia (ok. 0,01 eV) wystarczy, aby oderwał się on od swojego atomu macierzystego i stał się elektronem przewodnictwa. Atom taki nazywamy donorem, a oderwanie elektronu — jonizacją donoru. W temperaturze pokojowej wszystkie donory są zjonizowane — oznacza to, że już wprowadzenie jednego atomu domieszki na miliard atomów kryształu macierzystego daje nam $10^{23}/10^9 = 10^{14}$ nośników w 1 cm^3 . Powoduje to wzrost przewodnictwa kryształu 10 000 razy (!) do wartości $\sigma = 10^{-2} (\Omega\text{cm})^{-1}$. Poza domieszkami donorowymi, można jeszcze wprowadzać do kryształu tzw. domieszki akceptorowe. Są to np. w przypadku krzemu atomy trójwartościowe B, Al itd. Domieszki te wychwytyują elektrony z pasma walencyjnego wywołując pojawienie się swobodnych dziur. W chwili obecnej potrafimy zmieniać koncentracje domieszek, a więc i przewodnictwo półprzewodników, w zakresie około 10 rzędów wielkości zarówno w przypadku donorów, jak i akceptorów.

Warto wiedzieć, że czystość materiałów wykorzystywanych w przemyśle elektronicznym do produkcji obwodów scalonych jest tak doskonała, że osiąga się mniej niż $N = 10^{10}$ zanieczyszczeń na 1 cm^{-3} , co odpowiada jednemu atomowi obcemu na 10^{13} atomów półprzewodnika. Są to zdecydowanie najczystsze materiały, jakimi dysponuje obecnie ludzkość.



Rys. 5



Nadprzewodnictwo

Zjawisko nadprzewodnictwa wymaga szerszego omówienia. Obecnie przytoczymy tylko najważniejsze fakty. Otóż szereg metali i związków poniżej pewnej temperatury, zwanej temperaturą krytyczną T_k , wykazuje gwałtowny spadek oporu elektrycznego. Co ciekawe, nadprzewodnictwo występuje w metalach, które są dosyć kiepskimi przewodnikami (ołów, cyna czy rtęć). Temperatura krytyczna jest na ogół rzędu kilku kelwinów, najwyższą jak dotąd $T_k = 23$ K wykazuje związek Nb_3Ge . Przez wiele lat uważano, że opór nadprzewodnika jest równy zeru. W latach sześćdziesiątych przeprowadzono eksperymenty, w których przez ponad rok obserwowano prąd płynący w nadprzewodniku z odłączonym źródłem i oszacowano jego możliwe trwanie na kilkadziesiąt tysięcy lat. Pozwoliło to na oszacowanie przewodnictwa właściwego na $\sigma \approx 10^{24} (\Omega\text{cm})^{-1}$. Przed kilku laty przyznano nagrodę Nobla z fizyki za stworzenie teorii wyjaśniającej zjawisko nadprzewodnictwa. Jednym z ciekawych wniosków wpływających z tej teorii jest fakt, że prąd nadprzewodzący wywołany jest nie przez elektrony, ale przez pary elektronowe. Energia wiązania tych par jest niezwykle mała i podwyższenie temperatury powyżej T_k powoduje ich rozerwanie. Okazuje się, że pary elektronowe mogą poruszać się w sieci krystalicznej nie napotyając praktycznie na żaden opór.

Kryształy jonowe

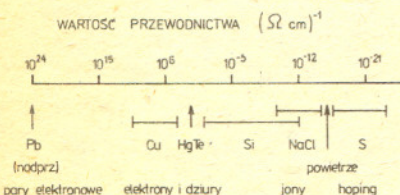
Jak już wspomniano poprzednio, istnieją ciała stałe, których własności nie mogą być scharakteryzowane modelem przewodnictwa pasmowego. Do takich kryształów zaliczamy kryształy jonowe (np. NaCl , czy KJ). Kryształy te wykazują pewne przewodnictwo $\sigma = 10^{-7} \div 10^{-12} (\Omega\text{cm})^{-1}$ związane z ruchem jonów czyli z transportem substancji w kryształach. Efekt ten jest identyczny ze zjawiskiem elektrolizy i może być opisywany ilościowo za pomocą znanych praw Faradaya. Przewodnictwo kryształów jonowych wzrasta wykładniczo z temperaturą, aż do punktu topnienia kryształu.

Przewodnictwo przeskokowe

W kryształach niejonowych (kowalencyjnych) nie wykazujących przewodnictwa pasmowego, takich jak siarka, fosfor biały, jod czy kryształy gazów szlachetnych, zaobserwowano istnienie bardzo niewielkiego przewodnictwa $\sigma = 10^{-10} \div 10^{-20} (\Omega\text{cm})^{-1}$ (dla porównania: powietrze w warunkach normalnych wykazuje przewodnictwo $\sigma \approx 10^{-15} (\Omega\text{cm})^{-1}$). Przewodnictwo w tych kryształach nazywamy przeskokowym (lub z angielskiego hoppingowym). Wyobrażamy sobie, że elektrony lub dziury znajdujące się w kryształach mogą pod wpływem dodatkowej energii (drgań termicznych, oświetlenia) przeskakiwać pomiędzy sąsiednimi atomami, domieszkami lub defektami. Przypomina to dziecięcą zabawę w komórki do wynajęcia — czas przebywania nośnika na centrum jest o wiele dłuższy niż czas przeskoku. Przewodnictwo to oczywiście silnie zależy od temperatury i koncentracji domieszek.

Zakończenie

Na koniec, warto popatrzeć na schematyczne zestawienie wartości przewodnictwa σ w niektórych substancjach oraz rodzajów nośników prądu w ciałach stałych (rys. 6). Widać, że ogromna zmienność wartości przewodnictwa ciał stałych związana jest z czterema zasadniczo różnymi mechanizmami przewodnictwa — nadprzewodnictwem, przewodnictwem pasmowym elektronowo-dziurkowym, przewodnictwem jonowym i przeskokowym.



Rys. 6



Zadania

Redaguje mgr Andrzej MAKOWSKI

M 169. Przez wierzchołek A równoległoboku $ABCD$ poprowadzono prostą przecinającą przekątną BD w punkcie E , a proste CB i CD w punktach F i G . Udowodnić, że AE jest średnią geometryczną EF i EG .

Rozwiązanie na str. 10

M 170. Udowodnić, że równanie $14^x + 19^y = 29^z$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych nieujemnych x, y, z .

Rozwiązanie na str. 9

M 171. Przez wierzchołek C kąta prostego trójkąta ABC poprowadzono prostą nie rozcinającą tego trójkąta. Rzutami prostokątnymi wierzchołków A i B na tę prostą są punkty A' i B' . Przy jakim położeniu prostej suma $AA' + BB'$ przyjmuje wartość największą?

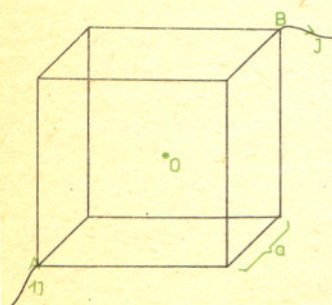
Rozwiązanie na str. 15

Redaguje dr Waldemar GORZKOWSKI

F 57. Do przeciwległych krawędzi sześcianu utworzonego z 12 jednakowych przewodników dołączono źródło prądu stałego. Wyznacz natężenie pola magnetycznego w środku sześcianu (punkt O).

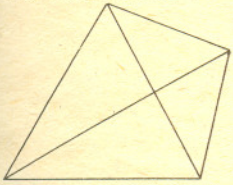
Pole magnetyczne pochodzące od przewodów doprowadzających prąd należy pominąć.

Rozwiązanie na str. 11

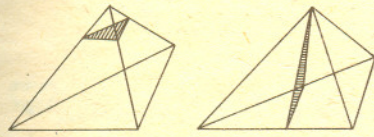


Małgorzata ZALEWSKA

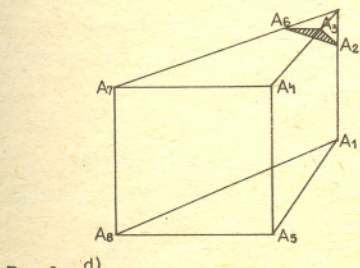
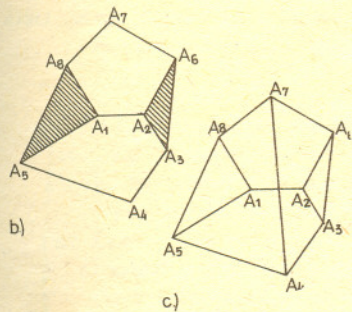
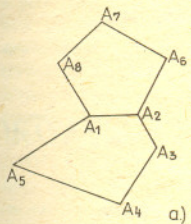
W pierwszej części artykułu Autorka wykazała, że dla każdego wypukłego wielościanu różnica między ilością ścian w ogóle, a ilością rodzajów ścian (trójkąty, czworokąty itd.) jest nie mniejsza od 3. Różnica ta została ścianą o największej liczbie boków jest k -kątem. Termin: wielościan z k -kątem oznacza wielościan z minimalną ilością powtórzeń, w którym ścianą o największej liczbie boków jest k -kątem. Autorka dowiodła szeregu własności wielościanów, z których będzie korzystała w tej części artykułu.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

W pierwszej części artykułu (Delta 7/1978) określiliśmy, dla jakich k mogą istnieć wielościany z k -kątem. Spróbujemy teraz je zbudować.

1° Dla $k = 3$ istnieje tylko jeden wielościan z trzema powtórzeniami — jest nim czworoscian.

(*) Jest to jednocześnie jedyny wielościan z czterema k -kami. Dowód:

Weźmy dwa k -kąty $A_1 A_2 \dots A_k$ i $A_1 A_2 B_3 \dots B_k$. Ściana zawierająca krawędzie $A_2 A_3$ i $A_2 B_3$ jest trójkątem, podobnie jak ściana zawierająca krawędzie $A_k A_1$ i $B_k A_1$ (por. własność 4 w cz. I). W takim razie wielościan zawiera co najmniej dwa trójkąty. Gdyby było $k > 4$, to mielibyśmy jeszcze 4 k -kąty, co dałoby liczbę powtórzeń większą niż 3.

2° Przyjmijmy $k = 4$. Wiemy, że nie istnieje wielościan z 4 czworokątami. Istnieje natomiast wielościan z trzema czworokątami — jest nim graniastosłup o podstawie trójkątnej.

(**) Jest to jedyny wielościan, zawierający dokładnie trzy k -kąty (dowód podobny jak w punkcie 1°).

Nie istnieje wielościan zawierający dokładnie dwa czworokąty (jeżeli wielościan ma dwa czworokąty, to musi mieć także trzeci). Istnieje wielościan zawierający dokładnie jeden czworokąt — jest nim ostrosłup o podstawie czworokątnej.

Oba wielościany z czworokątem — ostrosłup i graniastosłup — można otrzymać przez obcięcie czworoscianu, tak jak jest to pokazane na rys. 2.

Omówiliśmy wszystkie wielościany z czworokątem.

3° Niech $k = 5$. Z własności (*) i (**) wynika, że nie istnieje wielościan zawierający trzy lub cztery pięciokąty. Istnieje natomiast wielościan z dwoma pięciokątami. Zbudujemy go.

Weźmy dwa pięciokąty $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ i $A_1 A_2 A_6 A_7 A_8$ (rys. 3a). Aby wielościan miał własność 4, ściany zawierające krawędzie $A_1 A_5$ i $A_1 A_8$ oraz $A_2 A_3$ i $A_2 A_6$ muszą być trójkątami — „wstawiamy” trójkąty $A_1 A_5 A_8$ i $A_2 A_3 A_6$ (rys. 3b). Możemy teraz wstawić dwie ściany. Jedna z nich zawiera krawędzie $A_3 A_4$ i $A_6 A_7$, a druga $A_4 A_5$ i $A_7 A_8$ (własność 2) — ściany te muszą przecinać się wzdłuż krawędzi $A_4 A_7$ — są więc czworokątami $A_3 A_4 A_6 A_7$ i $A_4 A_5 A_7 A_8$.

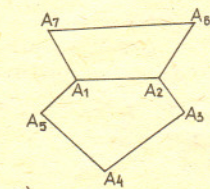
Po „wstawieniu” tych ścian otrzymujemy wielościan zbudowany z dwóch trójkątów, dwóch czworokątów i dwóch pięciokątów (rys. 3c). Wielościan taki można otrzymać przez obcięcie wielościanu z trzema czworokątami (rys. 3d).

Zbudowaliśmy wielościan z dwoma pięciokątami. Ze sposobu konstrukcji tego wielościanu wynika, że nie istnieją inne wielościany z dwoma pięciokątami. Z twierdzenia I wynika natomiast, że może istnieć wielościan zawierający dokładnie jeden pięciokąt. Pokażemy go.

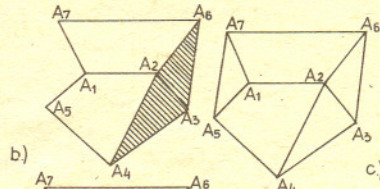
Weźmy pięciokąt $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$. Wielościan z pięciokątem musi mieć czworokąt (własność 1), więc dostawiamy czworokąt $A_1 A_2 A_6 A_7$. Wielościan ma własność 5 — ściana zawierająca krawędzie $A_1 A_5$ i $A_1 A_7$ lub $A_2 A_6$ i $A_2 A_3$ jest trójkątem. Przyjmijmy, że jest to ściana zawierająca krawędzie $A_2 A_3$ i $A_2 A_6$ (rys. 4a). (Okaże się, że założenie to nie jest istotne).

Aby wielościan miał własność 6, ściana zawierająca krawędź $A_4 A_5$ lub $A_3 A_4$ musi być trójkątem. Rozważmy najpierw przypadek, gdy ściana zawierająca krawędź $A_3 A_4$ jest trójkątem $A_3 A_4 A_6$ (rys. 4b). Pozostałe ściany mają krawędzie wspólne z pięciokątem $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ i czworokątem $A_1 A_2 A_6 A_7$ (własność 2 i 3) — otrzymujemy wielościan przedstawiony na rys. 4c, zbudowany z pięciokąta, dwóch czworokątów i trzech trójkątów.

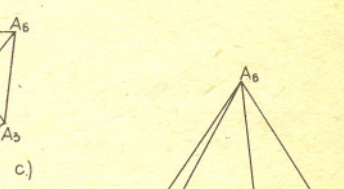
Jeżeli założymy, że ściana zawierająca krawędź $A_4 A_5$ jest trójkątem $A_4 A_5 A_7$ (rys. 4d), otrzymamy wielościan nie różniący się od poprzedniego. Wielościan taki można otrzymać przez „obcięcie” ostrosłupa o podstawie czworokątnej (rys. 4e). Z własności 10 wynika, że nie istnieje wielościan mający $2k - 2 = 8$ wierzchołków, zawierający dokładnie jeden pięciokąt. Omówiliśmy więc wszystkie wielościany z pięciokątami.



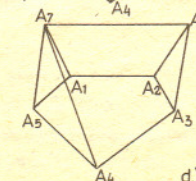
a)



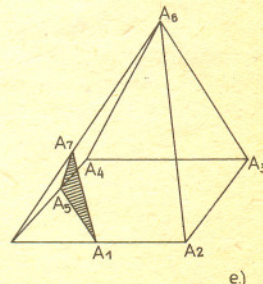
b)



c)



d)

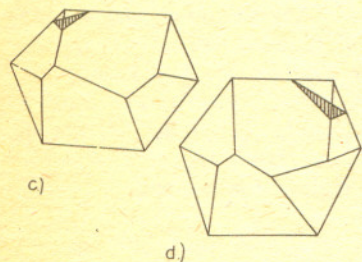
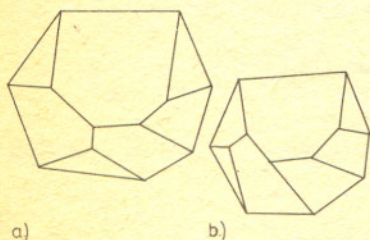
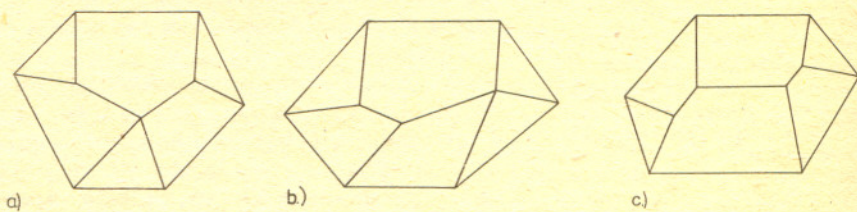


e)

Rys. 4

4° Niech $k = 6$. Z własności 10, 11, (*), (**), wynika, że wielościan z sześciokątem może zawierać tylko jeden sześciokąt, przy czym wielościan ten może mieć $2k-3 = 9$ lub $2k-2 = 10$ wierzchołków. Jeżeli założymy, że wielościan z sześciokątem ma 9 wierzchołków, to otrzymujemy wielościany przedstawione na rysunkach 5a i 5b — są one różne. Jedyny wielościan mający 10 wierzchołków przedstawiony jest na rysunku 5c. Wszystkie te wielościany można otrzymać przez „obcięcie” wielościanu z dwoma pięciokątami (rys. 5d, e, f).

Rys. 5



Rys. 6

5° Pozostał do rozpatrzenia przypadek, gdy $k = 7$. Z własności 10, 11, (*), (**), wynika, że wielościan z siedmiokątem ma $2k-2 = 12$ wierzchołków. Po przeprowadzeniu konstrukcji analogicznych jak w punkcie 3° otrzymujemy dwa różne wielościany, przedstawione na rysunkach 16a i 16b. Wielościany te także można otrzymać przez „obcięcie” wielościanów z sześciokątem (rys. 16c i 16d).

Omówiliśmy wszystkie wielościany z 3, ..., 7-kątem. Z własności 10, 11, (*), (**), wynika, że nie istnieją inne wielościany z trzema powtórzeniami. Znaleźliśmy 10 klas wielościanów. Zauważmy jeszcze, że każdy wielościan z k -kątem można otrzymać przez „obcięcie” pewnego wielościanu z $(k-1)$ -kątem, a więc każdy wielościan z trzema powtórzeniami można otrzymać przez „obcinanie” czworościanu, otrzymując po drodze wyłącznie wielościany z trzema powtórzeniami.

O liczbach p -adycznych

Mgr Krystyna WOJTKÓW

Zanim będziemy mogli powiedzieć, czym są „liczby p -adyczne”, przypomnimy pewne podstawowe wiadomości o „zwykłych” liczbach. Już w pierwszych klasach szkoły podstawowej uczą nas rachunków na liczbach naturalnych 1, 2, 3, ... (obecnie nawet 0, 1, 2, 3, ...). Po dodawaniu przychodzi kolej na odejmowanie. Dowiadujemy się, że $m-n$ to taka liczba, która dodana do n daje m . Wyrażamy to (nie w szkole podstawowej, rzecz jasna) wzorem

$$(1) \quad m-n = k \Leftrightarrow m = k+n.$$

Wzór (1) możemy traktować jako definicję symbolu „-” znaku odejmowania albo jak to woli, definicję operacji odejmowania. W pierwszych klasach szkoły podstawowej uczą nas, że wzór ten ma sens tylko gdy $m \geq n$. Nic dziwnego: w zakresie liczb naturalnych nie ma takiego k , że $m < n$ i $m = k+n$. Przychodzi jednak wreszcie dzień, w którym pani nauczycielka mówi: cieszcie się, dzieci, bo od dziś będziecie mogli odejmować większe od mniejszego. Ograniczenie $m \geq n$ we wzorze (1) przestaje obowiązywać. Nie wzbudza to żadnego protestu z naszej strony, ponieważ z liczbami ujemnymi stykamy się w życiu codziennym dość często (szczególnie w zimie!) i nawet nie przychodzi nam do głowy, że ktoś mógł kiedyś poważnie sądzić, że nie może być nic mniejszego od zera.

Bardzo podobnie jest z ułstkami. Uczymy się, że „podzielić liczbę a przez b ” znaczy „znaleźć c takie, że $a = bc$ ”. Dopóki „liczba” znaczy dla nas „liczba całkowita”, nie zawsze możemy taką liczbę c znaleźć. Gdy zaś chcemy, by wzór

$$(2) \quad a:b = c \Leftrightarrow a = bc$$

był prawdziwy zawsze (gdy $b \neq 0$), musimy wprowadzić ułaski. Mówimy po prostu, że wzór (2) obowiązuje dla wszelkich liczb (byle nie dzielić przez 0). Tu także nikt nie protestuje przeciwko takiemu rozszerzeniu zakresu stosowności wzoru definiującego iloraz, a co za tym idzie, przeciwko nieco beztróskiemu rozszerzeniu pojęcia liczby (filozof powiedziałby: dołączamy nowe desygnaty) i teraz „liczba” znaczy dla nas naprawdę „liczba wymierna”.



Niezrozumiałe opory wywołuje dopiero przedłużanie ważności wzoru

$$(3) \quad x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$$

z nieujemnych na wszystkie a . Wytaczamy tu argumenty, że „przecież nie ma takiej liczby x , że $x^2 = -1$, bo kwadrat każdej liczby rzeczywistej różnej od zera jest dodatni”, zapominając o tym, jak drwiąco potraktowaliśmy rozumowanie „nie ma takiej liczby, która dodana do 2 daje 1, jako, że dodać znaczy powiększyć”.

Nazwa „liczba rzeczywista” jest tak sugestywna, że nasz umysł wzbrania się przed uznaniem za „prawdziwe” również i innych liczb. A liczby zespolone (które powstają w wyniku stosowania wzoru (3) dla wszystkich a) są, na dobrą sprawę, punktami płaszczyzny, co do których nie mamy wątpliwości, że istnieją „naprawdę”. Dlaczegoż punkty linii prostej mamy prawo uznać za liczby, a płaszczyzny nie?

Z tej przydługiej historii wylania się taki morał: „nowe” liczby bardzo często powstają w wyniku bezceremonialnego obalania barier stosowalności pewnych reguł czy wzorów. Czytelnik zauważył zapewne, że nie opisałiśmy, jakie bariery obalamy przy przechodzeniu od liczb wymiernych do rzeczywistych (które obejmują liczby wymierne i niewymierne). Starożytni Grecy mówili: nie ma takiej liczby x , że $x^2 = 2$, bo gdyby była i wynosiła p/q , to ... (tu następuje sprytnie sprowadzenie do niedorzeczności). Umówmy się, że aż do

odwołania liczbami nazywamy ułamki $\frac{p}{q}$ (p, q — całkowite) i tylko one. Ciąg liczb

$$(4) \quad 1,4 \quad 1,41 \quad 1,414 \quad 1,4142 \quad \dots$$

nie jest zbieżny (Czytelnik domyśla się zapewne, jaki ciąg mamy na myśli), choć jego wyrazy są coraz bliższe sobie, zagęszczają się wokół czegoś, co gdyby było liczbą, dawałoby w kwadracie 2. Gdyby zbiór liczb (przypominamy o naszej umowie!) nie był „dziurawy”, nasz ciąg miałby granicę i oznaczylibyśmy ją przez $\sqrt{2}$. Ale $\sqrt{2}$ nie jest liczbą (umowa jeszcze stoi!), tylko Bliżej Nieokreślonym Tworem Naszego Umysłu. Pora zatem przeczeczyć gnuśność, wydać walkę wsteczniectwu i uznać $\sqrt{2}$ za liczbę. Zrywamy z umową. **Dekret nr 1.** Na życzenie szerokich mas matematyków ustanawia się granicę dla ciągu (4).

Dekret nr 2. W celu ułatwienia życia obywatelom oraz dla łatwiejszego wprowadzenia pojęć analizy matematycznej, tak niezbędnej w dzisiejszym świecie, ustanawia się, co następuje **a)** każdy zagęszczający się ciąg liczb wymiernych ma granicę. W rozumieniu niniejszego dekretu „zagęszczającym się” jest każdy ciąg liczb wymiernych spełniający warunek Cauchy’ego;

b) ciąg a_n ma tę samą granicę, co b_n wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, \dots$ też jest ciągiem zagęszczającym się;

c) nie zabiera się granicę ciągów, które były zbieżne przed wejściem w życie niniejszego dekretu;

d) granica ciągu (4) będzie oznaczana przez 1,41421356... i podobnie będzie się oznaczać inne granice wprowadzone przez niniejszy dekret.

Dekret nr 2 można nazwać Dekretem o Wprowadzeniu Liczb Niewymiernych. Widzimy, że liczby niewymierne powstają w wyniku uznania za zbieżne ciągów, które nie są, a „powinny być” zbieżne.

Przypatrmy się bliżej pojęciu „zagęszczającego się” ciągu liczb wymiernych — czyli ciągu spełniającego warunek Cauchy’ego. Liczby 6,74682005149 i 6,74682005973 są dość bliskie sobie, gdyż ich kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego dość długo się pokrywają, albo inaczej: ich różnica 0,00000000824 ma na początku dość dużo zer. Jeżeli dla liczb x i y przez $N(x, y)$ oznaczymy liczbę zer na początku w różnicy $x - y$ (zera przed przecinkiem nie liczymy), to widzimy natychmiast, że $N(x, y)$ ma ścisły związek z odległością $d(x, y)$ liczb x i y na osi liczbowej:

$$(5) \quad 10^{-N(x, y)-1} \leq d(x, y) \leq 10^{-N(x, y)}$$

Prawa nierówność jest prawdziwa tylko dla liczb, których różnica ma 0 przed przecinkiem tj. liczby nie różnią się więcej niż o 1. Gdybyśmy odległości między liczbami mierzyli wzorem

$$(6) \quad \bar{d}(x, y) = \begin{cases} 10^{-N(x, y)} & \text{gdy } x - y \text{ zaczyna się na } 0, \dots \\ 1 & \text{gdy różnica } x - y \text{ jest większa lub równa } 1, \end{cases}$$

to prawie wszystkie odległości zostałyby zmienione, ale zachowałyby się bardzo istotna z naszego punktu widzenia własność: blisko położone liczby nie „rozjechałyby się” w zupełnie różne strony. Ujmując to precyzyjniej: ciągi spełniające warunek Cauchy’ego względem odległości wyrażonej wzorem $d(x, y) = |x - y|$ spełniałyby warunek Cauchy’ego i względem nowej odległości:

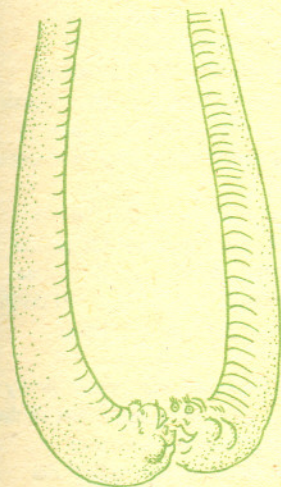
$$\bigwedge_{0 < \varepsilon} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{m > n_0} \bigwedge_{k > n_0} \bar{d}(a_m, a_k) < \varepsilon$$

Wynika z tego, że liczby niewymierne, wprowadzone przez sformułowany powyżej Dekret nr 2, pokrywają się z tymi określonymi przez Dekret nr 2', gdzie Dekret nr 2' ma to samo brzmienie, co Dekret 2, tyle że ciąg zagęszczający się jest rozumiany w sensie odległości (6).



Rozwiązanie zadania M 170

Zauważmy, że potęgi liczb 14, 19 i 29 dają przy dzieleniu przez 5 reszty 1 i 4. Gdyby więc dla pewnych liczb całkowitych nieujemnych była spełniona równość $14^x + 19^y = 29^z$, to reszty, które otrzymalibyśmy przy dzieleniu przez 5 każdej strony tej równości, byłyby równe. Jednakże liczba $14^x + 19^y$ może dać reszty 2, 0, 3, a prawa — 1 i 4. Reszty z dzielenia każdej strony równości przez 5 nie są nigdy równe, zatem nie istnieją liczby całkowite nieujemne spełniające dane równanie. Znacząc podstawowe własności kongruencji można to rozumowanie zapisać krócej: Ponieważ $14 \equiv -1 \pmod{5}$, $19 \equiv -1 \pmod{5}$ i $29 \equiv -1 \pmod{5}$, byłoby $(-1)^x + (-1)^y \equiv (-1)^z \pmod{5}$, czyli 0, 2 lub -2 przystawałoby do ± 1 modulo 5, co jest niemożliwe.



Opisana procedura da się zastosować do dowolnych przestrzeni metrycznych i nosi nazwę „uzupełniania”, ponieważ przestrzenną zupełną nazywamy taką przestrzeń metryczną, w której każdy zągęszczający się ciąg jest zbieżny.

Jesteśmy już blisko liczb 10-adycznych. W arytmetyce interesujemy się często teorią podzielności. Dwie liczby całkowite m i n nazwiemy „bliskimi z punktu widzenia podzielności przez potęgę 10” (krócej: bliskimi względem odległości 10-adycznej), jeżeli ich różnica ma na końcu dużo zer. Dokładnie: odległość 10-adyczna liczb całkowitych m i n , to liczba $d_{10}(m, n) = 10^{-N(m, n)}$, gdzie $N(m, n)$ oznacza liczbę zer na końcu różnicy $m-n$ (jeśli nie ma zer na końcu, to oczywiście $N(m, n) = 0$). Przykładowo:

$$d_{10}(956455, 1486455) = 10^{-4} = 0,0001, \quad d_{10}(25, 85640025) = 0,01,$$

$$d_{10}(2630098716543, 2630098716544) = 10^0 = 1,$$

$$d_{10}(1, 2) = d_{10}(1, 3) = \dots = d_{10}(1, 10) = 10^0 = 1, \quad d_{10}(1, 11) = 0,1.$$

Czytelnik, który zajrzy na trzecią stronę okładki Delty nr 7/77, zrozumie lepiej, dlaczego przy konstrukcji liczb niewymiernych patrzyliśmy na zera na przedzie, a teraz na zera na końcu.

Rozpatrzmy teraz ciąg liczb całkowitych

$$(7) \quad 5, 25, 625, 90625, 890625, 2890625, 12890625, \dots$$

Nie wyjaśnimy na razie, jaka reguła rządzi budową kolejnych jego wyrazów, prócz tego, że występujące w nim liczby mają coraz dłuższe wspólne końcówki. Odległości 10-adyczne są coraz mniejsze. Ciąg (7) spełnia warunki Cauchy'ego. Oczywiście żadna liczba całkowita ani rzeczywista nie może być jego granicą. Ciąg (7) nie jest zbieżny do żadnej liczby rzeczywistej. Pora na wydanie mądrych ustaw.

Dekret nr 3. Na życzenie szerokich rzesz matematyków ustanawia się granicę względem odległości d_{10} dla ciągu 7.

Dekret nr 4. W celu ułatwienia życia obywatelom zajmującym się amatorsko lub zawodowo teorią liczb, teorią podzielności i teorią form kwadratowych ustanawia się, co następuje:

a) każdy zągęszczający się ciąg (w sensie odległości d_{10}) liczb całkowitych ma granicę;
b) ciąg a_n ma tę samą granicę co b_n wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, \dots$ też jest ciągiem zągęszczającym się;

c) nie zabiera się granic ciągom, które były już zbieżne uprzednio (choć takie były tylko ciągi od pewnego miejsca stałe),

d) sposoby oznaczania nowych granic wyjaśnia przykład: granicę ciągu (7) oznaczmy $\dots\dots 12890625$.

Jest to Dekret o Wprowadzeniu Liczb 10-Adycznych. Uzupełniać go winien Dekret o Działaniach Arytmetycznych Na Liczbach 10-Adycznych, którego tu w całości przytaczac nie będziemy, a tylko pokażemy na przykładzie jak się takie liczby dodaje i mnoży.

Widzimy, że działania te odbywają się według normalnych reguł, z tym tylko, że nasze liczby mogą mieć na początku nieskończoną ilość cyfr (znane Czytelnikom liczby rzeczywiste mogą mieć na końcu nieskończoną ilość cyfr).

Znajdziemy kwadrat liczby $a = \dots 212890625$, danej jako granica ciągu (7) — precyzując jednocześnie, jak powstają jego kolejne wyrazy. Mamy (rachunek na marginesie, opuszczaliśmy miejsca nie mające wpływu na dziesięciocyfrową końcówkę) $a^2 = \dots 8212890625$. Wynik powyższego mnożenia można interpretować tak: kwadrat liczby całkowitej, kończącej się na 212890625 też kończy się na 212890625. Można wykazać, że proces poszukiwania kolejnych, coraz dłuższych, końcówek o podobnej własności da się kontynuować „do nieskończoności”. Istnieją dowolnie długie końcówki mające tę własność. Dla Czytelnika, który chciałby odnaleźć sposób ich poszukiwania, mamy wskazówkę: następną cyfrą będzie 8. Teraz możemy już dokładnie powiedzieć, jak zbudowany jest ciąg (7) — jego wyrazami są liczby całkowite, będące końcówkami, które mają własność niezmiennia się przy podnoszeniu do kwadratu.

Ciąg (7) spełnia warunek Cauchy'ego względem odległości d_{10} , jest więc zbieżny, bo tak postanowił Dekret nr 3 będący zresztą fragmentem Dekretu nr 4. Jego granicą jest pewna liczba 10-adyczna a . Z przedstawionych rachunków wynika od razu, że $a^2 = a$. Równanie $x^2 - x = 0$ ma wśród liczb 10-adycznych co najmniej trzy pierwiastki: 0, 1, i $\dots 212890625$. Startując z końcówek 6, 76, 376, ... możemy w ten sam sposób znaleźć jeszcze jeden pierwiastek (innych już nie będzie).

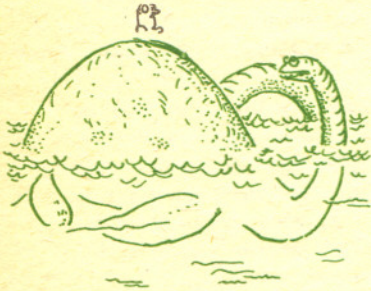
Teorię podzielności przez liczby złożone możemy „złożyć” z teorii podzielności przez liczby pierwsze i to jest główny powód tego, że najważniejsze są liczby p -adyczne, gdzie p jest liczbą pierwszą. Jak wypowiedzieć, że liczby całkowite m i n są „bliskie z punktu widzenia podzielności przez potęgę pewnej liczby pierwszej p ”, inaczej: bliskie względem odległości p -adycznej? Należy te liczby zapisać w układzie o podstawie p i spojrzeć, ile zer na końcu ma różnica $m-n$. Przykładowo, zapiszemy liczbę 2129 w układzie siódmkowym:

$$2129:7 = 304 \text{ i reszta } 1,$$

$$304:7 = 43 \text{ i reszta } 3,$$

$$43:7 = 6 \text{ i reszta } 1,$$

$$6:7 = 0 \text{ i reszta } 6.$$



$$\begin{array}{r} \dots 210832 \\ + \dots 117295 \\ \hline \dots 328127 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \dots 321321321321 \\ \times \quad \quad \quad 14 \\ \hline \dots 5285285285284 \\ \dots 1321321321321 \\ \hline \dots 98498498498494 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \dots 212890625 \\ \times \dots 212890625 \\ \hline \dots 1064453125 \\ \dots 426781250 \\ \dots 77343750 \\ \dots 015625 \\ \dots 25000 \\ \dots 1250 \\ \dots 635 \\ \dots 50 \\ \hline \dots 8212890625 \end{array}$$

Rozwiązanie zadania M 169
Z podobieństwa trójkątów BEF i DEA oraz
BEA i DEG mamy

$$\frac{FE}{AE} = \frac{BE}{ED} = \frac{AE}{EG}$$

skąd $EF \cdot EG = AE^2$, c.n.d.



Zapis liczby 2129 w układzie siódmkowym ma postać 6131; cyframi tego zapisu są otrzymane przez nas reszty. Podobnie obliczymy, że 365 ma zapis siódmkowy 1031, więc

$$d_7(2129, 1031) = 7^{-2} = \frac{1}{49}$$

liczba „dwa tysiące sto dwadzieścia dziewięć” jest odległa w 7-adycznym sensie od liczby „trzysta sześćdziesiąt pięć” o nieco więcej niż dwie setne.

Widzieliśmy już przy konstrukcji liczb niewymiernych, że mierzenie dystansu między liczbami liczbą wspólnych zer różnicy wprowadzie prawie wszystkie odległości, ale pozostaje bez wpływu na zbieżność ciągów — i to pozwalało dostrzec silne analogie między treścią Dekretu nr 2 a Dekretu nr 4. Wyrażając się nieco dokładniej: liczby p -adyczne powstają w wyniku przejścia granicznego dość podobnego charakteru jak przejście graniczne prowadzące do liczb niewymiernych.

Wprowadzenie liczb całkowitych 7-adycznych odbywa się dzięki Dekretowi nr 4 w wersji siódmkowej. Z punktu d) tego Dekretu wynika, że każda liczba 7-adyczna ma zapis postaci np. 356143206 (przypomina on, że liczba ta jest 7-adyczną granicą ciągu 6, 206, 3206, 43206, 143206, 6142306, — wyrazy ciągu są zapisane w układzie siódmkowym; w układzie dziesiętkowym mielibyśmy 6, 104, 1133, 10737, . . .). Przy zapisywaniu liczb np. 11-adycznych musielibyśmy mieć dodatkowy znak na cyfrę „10” (nie: liczbę 10). Przypomina to sytuację, z jaką zawsze mamy do czynienia w układach niedziesiątkowych.

Zbiór całkowitych liczb p -adycznych oznaczamy przez \hat{Z}_p . Są w nim określone działania dodawania, odejmowania i mnożenia. Okazuje się, że gdy p jest liczbą pierwszą, to można

określić wymierne liczby p -adyczne jako „ułamki” $\frac{m}{n}$, gdzie $m, n \in \hat{Z}_p$ i $n \neq 0$ — zupełnie

podobnie jak ze zwykłych liczb całkowitych tworzymy ułamki znane ze szkoły. Zbiór liczb wymiernych p -adycznych oznaczamy przez \hat{Q}_p . Określone w nim cztery zasadnicze działania arytmetyczne podlegają wszystkim podstawowym prawom „zwykłej” algebry. Widzieliśmy już, że w zakresie liczb z \hat{Z}_{10} wielomian mógł mieć więcej pierwiastków niż wynosi jego stopień — trudno byłoby to uznać za rzecz normalną. Podobnego charakteru anomalie sprawiają, że przy m złożonym liczby m -adyczne nie są tak miłe jak przy m będącym liczbą pierwszą. Wspominaliśmy już o tym, że ułamki liczb m -adycznych można tworzyć tylko przy pierwszych m . Gdy m jest liczbą pierwszą, możemy liczby m -adyczne dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić. Podzielimy w \hat{Q}_7 liczbę 163 przez 346. Zwracamy uwagę, że 163 oznacza tu zapis siódmkowy pewnej liczby (jakiej? Takiej: $1 \cdot 7^2 + 67^1 + 37^0$, czyli pięćdziesiąt osiem). Każda liczba całkowita x jest p -adyczna (jest p -adyczną granicą ciągu stałego: x, x, x, x, \dots). Zaczynamy od szukania ostatniej cyfry ilorazu. Metodą prób znajdujemy, że jest nią 4. Posuwamy się więc dalej w sposób podobny jak przy zwykłym dzieleniu.

$$\begin{array}{r} \dots\dots 064 \\ 163:346 \\ \dots 053 \\ \hline \dots\dots 110 \\ \dots\dots 110 \\ \hline \dots\dots \end{array}$$

Ilorazem jest liczba 7-adyczna, kończąca się na 064. Liczby wymierne p -adyczne można zapisywać w postaci dziesiętnej podobnie jak „zwykle” liczby wymierne. Przykładowo,

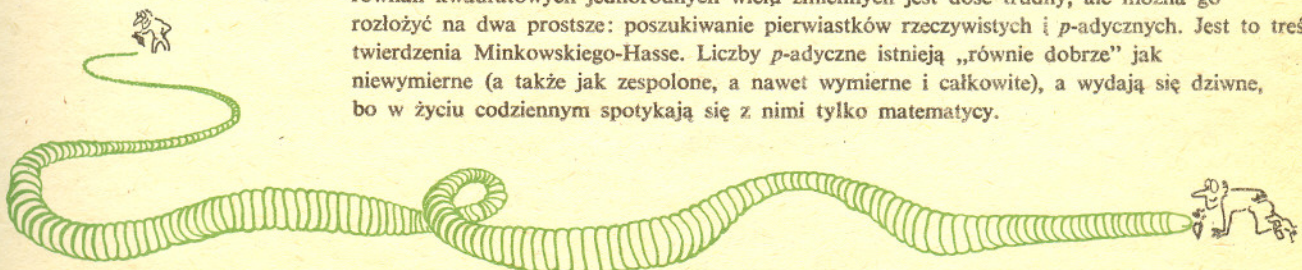
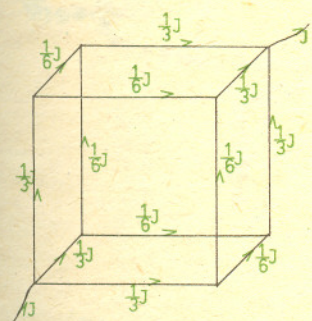
liczba 0,64, wyrażająca np. ułamek p -adyczny $\frac{64}{100}$, odpowiada zapisowi

$0p^0 + 6p^{-1} + 4p^{-2}$. Ponieważ z liczbami p -adycznymi jest zawsze na opak (znów Delta nr 7/77), więc Czytelnik nie powinien się dziwić, że w zapisie p -adycznym liczb wymiernych po przecinku może występować tylko skończona liczba cyfr, za to przed przecinkiem — nieskończona lub skończona, rzecz jasna. W zbiorze \hat{Q}_p umiemy również mierzyć odległości: jak i w \hat{Z}_p patrzmy na liczbę końcowych zer różnicy danych liczb.

Otrzymana przestrzeń metryczna ma wiele dobrych własności, choćby tę, że każdy ciąg Cauchy’ego jest zbieżny albo że z każdego ciągu ograniczonego można wybrać podciąg zbieżny. Również pod względem własności odległości \hat{Q}_p przypomina nieco R . Do ciał p -adycznych możemy w sensowny sposób przenosić prawie wszystkie pojęcia analizy matematycznej, a z algebraicznego punktu widzenia \hat{Q}_p ma bardziej uporządkowaną budowę niż trochę błądnie (podkreślamy, z algebraicznego punktu widzenia) skomponowany zbiór liczb rzeczywistych.

Na przykład taki problem matematyczny, jak poszukiwanie pierwiastków wymiernych równań kwadratowych jednorodnych wielu zmiennych jest dość trudny, ale można go rozłożyć na dwa prostsze: poszukiwanie pierwiastków rzeczywistych i p -adycznych. Jest to treść twierdzenia Minkowskiego-Hasse. Liczby p -adyczne istnieją „równie dobrze” jak niewymierne (a także jak zespolone, a nawet wymierne i całkowite), a wydają się dziwne, bo w życiu codziennym spotykają się z nimi tylko matematycy.

Rozwiązanie zadania F 57
Przekątna sześcianu przechodząca przez wierzchołki A i B jest trzykrotną osią symetrii. Innymi słowy, obrót sześcianu wokół tej przekątnej o 120° niczego nie powinien zmieniać. Biorąc pod uwagę to, że natężenia prądów płynących przez poszczególne krawędzie są wyznaczone jednoznacznie, z symetrii układu jako jedyny możliwy rozkład natężeń otrzymujemy rozkład pokazany na rysunku. Zwróćmy uwagę, że natężenia prądów płynących przez przeciwległe krawędzie są jednakowe. Wynika stąd, że w punkcie O natężenie pola magnetycznego od każdej pary przeciwległych krawędzi jest równe zeru (pole od jednej krawędzi jest przeciwnie skierowane niż od drugiej). Ponieważ krawędzie sześcianu można pogrupować w sześć takich par, więc całkowite natężenie pola również powinno być równe zeru. Oczywiście natężenia prądu oraz długość krawędzi nie mają znaczenia.



delta

Niezwykłe dzielenie i tajemnicze liczby

Opisywaliśmy kiedyś wynaleziony przez Adasia oryginalny (choć bynajmniej nie szybszy) sposób mnożenia. Również i dzielenie postanowił wykonywać Adaś własną metodą. Gdy zadanie brzmiało: podzielić 5984 przez 17, Adaś zaczynał od poszukiwania ostatniej cyfry ilorazu. „Musi być nią 2” — rozumował — „bo tylko 2 pomnożone przez 7 może dać końcowe 4 w dzielnej”. $2 \cdot 17 = 34$ i Adaś pisał 34 pod dzielną, odejmował i opuszczał końcowe zero:

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 5984 : 17 \\ \hline 34 \\ \hline 95 \end{array}$$

Szukał teraz następnej cyfry ilorazu. Tylko liczba 5 mnożona przez 17 da na końcu 5 — ostatnią cyfrę liczby 95. Pisał na górze 5, mnożył przez 17, wynik odejmował od dzielnej i tak posuwał się aż do zakończenia dzielenia:

$$\begin{array}{r} 352 \\ \hline 5984 : 17 \\ \hline 34 \\ \hline 95 \\ \hline 85 \\ \hline 51 \\ \hline 51 \\ \hline 0 \end{array}$$

Sposób ten zawodził, gdy dzielnik był liczbą parzystą — wtedy Adaś dzielił go (tradycyjnym sposobem) przez 2 tak długo, aż otrzymał liczbę nieparzystą. Niedobrze było też dla dzielników zakończonych na 5 — ale dzielenie przez 5 ma wiele wspólnego z mnożeniem przez 2, które Adaś opanował.

Kłopoty zaczęły się, gdy Adaś poznał ułamki dziesiętne. Zadanie „podzielić 217 przez 3” wszyscy poza Adasiem rozwiązywali w zwykły sposób, otrzymując $72,33333\dots$.

Ale Adaś dzielił po swojemu:

$$\begin{array}{r} 769 \\ \hline 217 : 3 \\ \hline 27 \\ \hline 19 \\ \hline 18 \\ \hline 1 \\ \hline 21 \end{array}$$

i tu musiał się zatrzymać, bo dzielenie się nie skończyło i nie wiedział, co dalej. Po chwili namysłu stwierdził: „nie zmieniaj liczby, jeżeli na początku dopiszę kilka zer”.



$$\begin{array}{r}
 \dots 66769 \\
 \dots 000217:3 \\
 \hline
 27 \\
 \dots 00019 \\
 \dots 00018 \\
 \hline
 \dots 00001 \\
 21 \\
 \dots 99998 \\
 18 \\
 \hline
 \dots 99998 \\
 \dots \\
 \dots
 \end{array}$$

„Dalej będzie się powtarzać” — zauważył i zadowolony napisał $217:3 = \dots 6666769$. Na wszelki wypadek sprawdził:

$$\begin{array}{r}
 \dots 6666769 \\
 \times \quad 3 \\
 \hline
 \dots 0000217
 \end{array}$$

„Zgadza się” — odetchnął. „A już myślałem, że coś jest źle”.

— Co to za liczba $\dots 6666769$? — zdziwiła się Agnieszka.

— Zwyczajnie, 6 w okresie a potem 769 — odparł Adaś.

— To nie ma sensu — upierała się Agnieszka — Żadna liczba nie ma nieskończonej ilości cyfr.

— Akurat! Twój iloraz $72,33333\dots$ też ma na końcu trójkę w okresie. Dzielenie dwu liczb daje zawsze w wyniku liczbę (byle nie dzielić przez 0), a nie pierogi z serem.

— Nie umiem wyobrazić sobie tej liczby — nie dawała się przekonać Agnieszka — $72,33333\dots$ widzę na osi liczbowej gdzieś między 72 a 73. A ta twoja niby-liczba?

Adaś nic nie odpowiedział, bo i on sam nie umiał sobie wyobrazić liczby $\dots 6666769$. Wobec tego wtrąciłem się do dyskusji. „Dzieliłeś tak zwane liczby 10-adyczne”

powiedziałem. „Są to właśnie liczby mające «na początku» nieskończoną ilość cyfr. Jeżeli zaś na początku występują same zera, możemy je opuszczać i dlatego niektóre liczby 10-adyczne są zwykłymi liczbami całkowitymi.

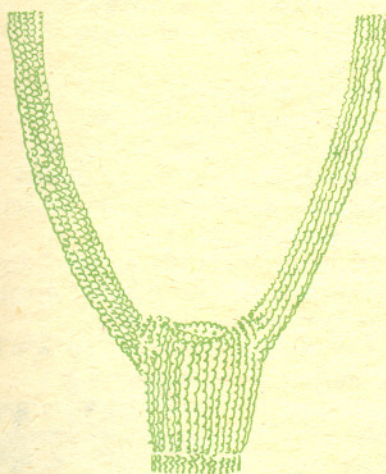
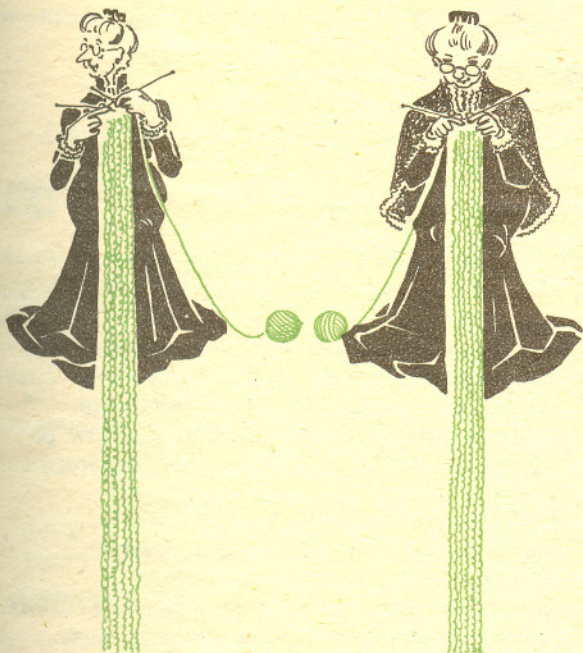
Lecz liczba 10-adyczna $\frac{217}{3}$ nie jest całkowita. Jest czymś zupełnie innym niż znane wam ze szkoły liczby”.

— Czy można ją sobie wyobrazić? — dopytywali się Adaś i Agnieszka.

— Rzeczywiście, tych liczb nie można umiejscawiać na znanej wam osi liczbowej — ale to nie znaczy, że one „nie istnieją”. Kilkaset lat temu uczeni mówili: czyż można wyobrazić sobie coś mniejszego niż zero?

Starożytni Grecy nie mogli pojąć liczb niewymiernych, które przecież są „uzupełnieniem” liczb wymiernych — czyli ułamków. Liczby „adyczne” stanowią też swoiste „uzupełnienie” znanych nam liczb i nie sposób bez nich obejść się we współczesnej teorii liczb. O ważności pojęcia matematycznego decyduje nie taki czy inny sposób jego wprowadzenia, ale wyłącznie proste kryterium: czy to pojęcie pomaga matematykowi w badaniu świata liczb, kształtu i miary.

— Interesujące — powiedzieli bez przekonania Adaś i Agnieszka.



Badamy własności promieniowania

Na pewno wiesz dobrze o tym, że energia jest przekazywana od Słońca na Ziemię przez promieniowanie. Warto zbadać pewne jego właściwości. Możesz to zrobić, budując samodzielnie odpowiedni przyrząd.

PRZYRZĄD

Do budowy potrzebne są:

1. Mała buteleczka od lekarstw z plastikowym szczelnym korkiem.
2. Wypisany wkład od długopisu.
3. Kawałek czarnego papieru.
4. Kawałek folii aluminiowej (sreberka od czekolady).
5. Klej.
6. Woda.
7. Kropla spirytusu (np. salicylowego).

URZĄDZENIE WYKONAJ NASTĘPUJĄCO:

1. Od wkładu od długopisu odetnij koniec, resztki tuszu wymyj kroplą spirytusu.
2. W korku buteleczki wykonaj otwór tak, aby wkład od długopisu ciasno przez niego przechodził.
3. Oklej jedną stronę buteleczki czarnym papierem, a drugą kawałkiem sreberka. Przy oklejaniu zostaw po bokach szczeliny, żeby było można zaglądać do środka (rys. 1a).
4. Napełnij buteleczkę wodą ok. 1/5.
5. Włóż wkład od długopisu tak, aby zanurzył się w wodzie na ok. 1/2 cm (rys. 1b).

Przyrząd nasz jest bardzo czułym termometrem. Sprawdź, jak zmienia się położenie powierzchni wody w rurce pod wpływem ogrzewania ręką.

Doświadczenie 1. Badamy promieniowanie widzialne.

1. Ustaw przyrząd w pokoju w silnym świetle słonecznym tak, aby światło padało na powierzchnię srebrną (rys. 2a). Poczekaj, aż poziom cieczy w rurce się ustali. Zapamiętaj, gdzie znajdowała się powierzchnia cieczy.
2. Odwróć teraz czarną powierzchnię do światła i powtórz pomiar.

Co obserwujesz? Jak możesz to wytłumaczyć?

Doświadczenie 2. Badamy promieniowanie podczerwone.

Do doświadczenia potrzebne są dodatkowo:

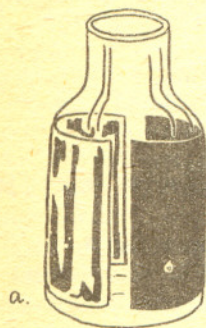
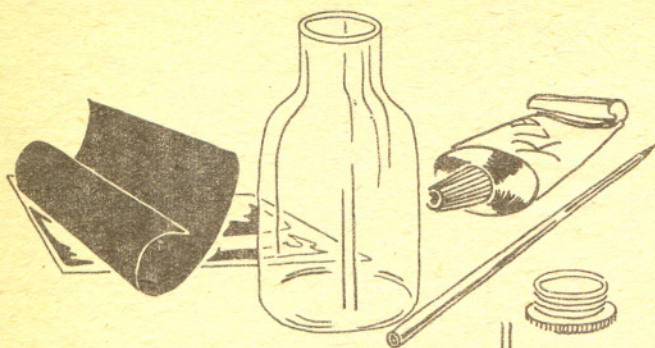
1. Żelazko elektryczne z termoregulatorem.
2. Świeca, zapalki.

Doświadczenie wykonaj następująco:

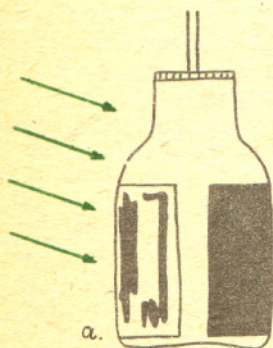
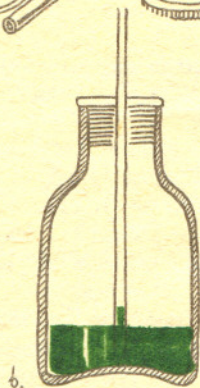
1. Okopć płomieniem świecy dno żelazka.
2. Żelazko ustaw pionowo i włącz do kontaktu.
3. Kiedy temperatura żelazka się ustali, postaw przyrząd na niewielkiej podstawce w odległości ok. 10 cm od żelazka, tak jak to wskazuje rys. 3.
4. Pierwszy pomiar przeprowadź dla przypadku, kiedy srebrna strona skierowana jest do żelazka, drugi — kiedy przyrząd odwrócony jest stroną czarną.

Co obserwujesz? Czy widzisz podobieństwo wyników obu doświadczeń? Jak możesz je wytłumaczyć?

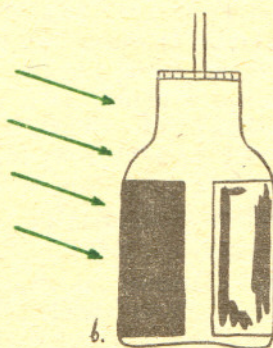
Pamiętaj starannie wyczyścić żelazko miękkim papierem po wykonaniu doświadczeń. Uważaj! Nie poparz się! Sprawdź, czy dobrze wyczyściłeś żelazko, prasując mokrą szmatkę.



rys. 1



rys. 2



rys. 3

Prof. dr Dominik ROGULA

Zadania niealgorytmizowalne

Wzmiankowany w trzecim odcinku (Delta 8/1978) pogląd, że maszyna nie może wykonywać zadań niealgorytmizowalnych, nie miałby większego znaczenia gdyby okazało się, że zadania takie w ogóle nie istnieją, bądź też, że jeśli istnieją, to są akrobatycznie wymyślne i pozbawione praktycznego znaczenia. Tak jednak nie jest.

Okazuje się przede wszystkim, że niealgorytmizowalne zadania istnieją. Aby zrozumieć jak to jest możliwe, zastanówmy się chwilę nad nie sprecyzowanym dotąd pojęciem zadania. Chodzi o to, że ogólnie pojęte zadanie to właściwie klasa alternatywnych zadań szczegółowych, przy czym klasa ta może być nieskończona.

Takim zadaniem szczegółowym może być np. rozwiązanie równania $x^2 - 2 = 0$, a zadania

— rozwiązywania dowolnego równania postaci $x^2 - a = 0$,

— rozwiązywania dowolnego równania kwadratowego,

— rozwiązywania dowolnego równania algebraicznego,

— rozwiązywania dowolnego układu równań algebraicznych

przedstawiają przykłady zadań ogólnych o wzrastającym stopniu ogólności.

Wymagane przez algorytm dane stanowią informację potrzebną do sprecyzowania konkretnego zadania szczegółowego.

Może się zdarzyć, że objęta przez pewne zadanie ogólna klasa zadań szczegółowych będzie tak obszerna, że nie istnieje jeden wspólny algorytm ich wykonywania. Mimo realizowalności każdego zadania szczegółowego, zadanie ogólne nie będzie wówczas algorytmizowalne.

Że takie zadania rzeczywiście istnieją, można udowodnić zupełnie ściśle.

W teorii algorytmów dowodzi się, że istnieją funkcje, które nie są obliczalne.

Oczywiście zadanie obliczania takiej funkcji jest niealgorytmizowalne. Podobnie, niealgorytmizowalne są zadania wymagające odpowiedzi na pytania o własności wyrażające się predykatami nierozstrzygalnymi.

Sam formalny dowód istnienia zadań niealgorytmizowalnych nie przesądza jeszcze kwestii, czy wśród nich są zadania interesujące. Okazuje się jednak, że są. Wiele dobrze postawionych zadań (np. matematycznych) o wielkiej często doniosłości to zadania niealgorytmizowalne. Niealgorytmizowalność zadań o dużym stopniu ogólności jest raczej regułą niż wyjątkiem.

Przykładem takiego zadania jest:

Znane są aksjomaty i reguły wnioskowania pewnej teorii. Dane jest zdanie T . Sprawdzić, czy T wynika z aksjomatów przez zastosowanie reguł wnioskowania.

Zagadnienie algorytmizowalności tego zadania to klasyczne zagadnienie rozstrzygalności teorii. Jego rozwiązanie, dane przez jedno ze słynnych twierzeń Gödla, jest dla teorii dostatecznie bogatych negatywne.

Znane są również przykłady bardziej elementarne, choć o podobnej budowie formalnej.

Odległość można mierzyć przebiegiem światła tylko w ośrodkach jednorodnych (za taki uważamy np. przestrzeń międzygwiazdową). W każdej innej sytuacji światło ulega najróżniczszym zmianom wskutek odbić, załamania, pochłaniania i interferencji (o której dźwięcznik nie mówi). Gdy widzimy „promień słoneczny” (czyli oświetlone pyłki unoszące się w powietrzu) dostrzegamy ten kierunek biegu światła, w którym biegnie najwięcej promieni. Wniosek stąd taki, że większość promieni udaje się uniknąć zniekształcenia. Tor „promienia słonecznego” jest prawie prosty, bo atmosfera (na małej długości) jest prawie jednorodna. Zaś w głębi morza widac światło tej barwy która jest najsłabszej pochłaniania przez wodę niezależnie od tego, czy była przedtem rozproszona w atmosferze, czy nie.



Czytelnicy proponują

J. MIELCZAREK z Bełchatowa: Jak obliczyć średnią wartość modułu wielkości zmiennej sinusoidalnie?

Wiadomo, że gdy punkt porusza się ruchem jednostajnym po obwodzie koła, to rzut tego punktu na średnicę koła porusza się ruchem harmonicznym, tzn. prędkość v rzutu zmienia się jak funkcja sinus (patrz rysunek)

$$v = v_0 |\sin \alpha|.$$

Wiemy, że prędkość średnia ruchu zmiennego równa jest prędkości takiego ruchu jednostajnego, w którym zostanie przebyta ta sama droga w tym samym czasie, co w ruchu zmiennym, a zatem:

$$v_0 t_1 = AB \cdot \pi, \quad v_{sr} t_1 = 2AB.$$

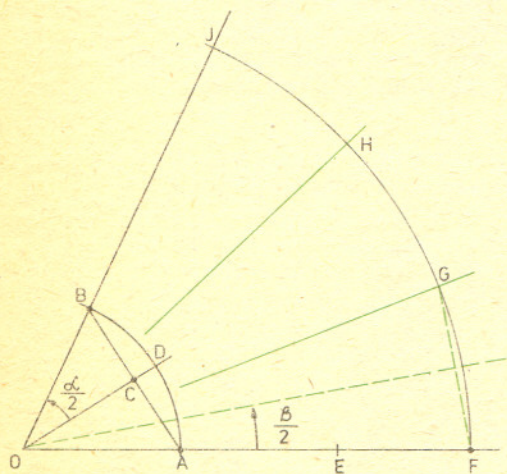
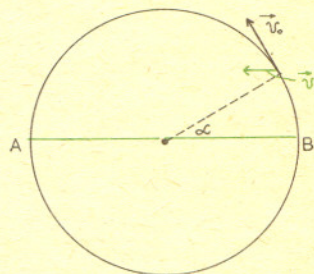
Oznacza to bowiem, że w czasie, w którym punkt przebył drogę równą obwodowi koła, czyli $AB \cdot \pi$, rzut tego punktu przebiegnie drogę równą podwójnej średnicy AB .

Ze związków tych otrzymujemy:

$$\frac{v_{sr} \cdot t_1}{v_0 \cdot t_1} = \frac{2 \cdot AB}{AB \cdot \pi},$$

skąd

$$v_{sr} = \frac{2}{\pi} \cdot v_0.$$

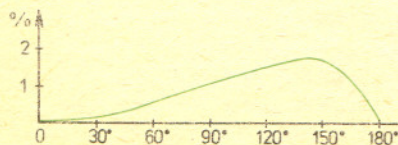


W związku z podaną przed rokiem w Małej Delcie przybliżoną konstrukcją podziału kąta na 3 równe części otrzymaliśmy dwa listy. W jednym z nich **K. KÓSKA** z Kaniowa proponuje jako przybliżoną konstrukcję podziału cięciwy danego kąta na trzy równe części (przez punkty tego podziału prowadzi półproste i one mają dzielić kąt na trzy części). Otrzymany rezultat jest dobrym przybliżeniem tylko dla małych kątów. Już dla 60° błąd przekracza 11%. Inną konstrukcję proponuje **J. GINTER** z Warszawy:

Ramiona dzielonego kąta α przecinamy dowolnym łukiem o środku w wierzchołku kąta, a następnie łączymy prostą otrzymane punkty A i B . Dzielimy teraz kąt α na połowę i uzyskujemy punkt C . Na ramieniu OA odkładamy jeszcze odcinek $AE = OA$ i odcinek $EF = OC$. Następnie zakreślamy większy łuk FJ i odkładamy na nim cyrklem punkty G i H , kreśląc łuki o promieniach równych AB . Uzyskujemy kąty $\beta \approx \frac{\alpha}{3}$.

Łatwo obliczyć, że ściśle

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{2 + \cos \frac{\alpha}{2}}$$



Błąd względny konstrukcji nie przekracza 2% dla $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, a więc jest porównywalny z dokładnością wykonywania rysunku.

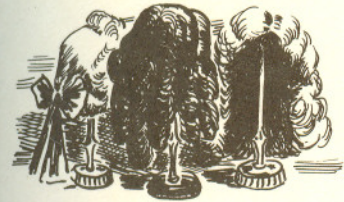


4 lipca [1662]. Wstałem o piątej, a przyprowadziwszy do porządku moje zapiski w dzienniku, do urzędu. Przyszedł pan Cooper, u którego będę się uczył matematyki, a zacznę zaraz dzisiaj. To bardzo zmyślny człowiek i tuszę, iż nie będzie mnie dużo kosztował. Miałem z nim godzinę arytmetyki, a moje pierwsze staranie to nauczyć się tabliczki mnożenia [...]
7 lipca. Lekcja matematyki z panem Cooperem.
9 lipca. Wstałem o czwartej rano i przyłożyłem się mocno do mej tabliczki mnożenia, która z całej arytmetyki najwięcej przyczynia mi trudności.

Pepys Samuel, ur. 23 II 1633, zm. 26 V 1703, pamiętnikarz ang.; syn londyńskiego krawca, dzięki koligacjom i zdolnościom organizacyjnym osiągnął wysokie stanowisko w administracji państw. (m.in. jako sekretarz Admiralicji 1672—79 i 1684—89 reorganizował flotę bryt.); prowadzony 1660—69, czyli w pierwszym dziesięcioleciu restauracji, dziennik P. (wyd. I 1825, wyd. pełne: Diary, t. 1—10 1893—99, wyd. pol. w wyborze i przekł. M. Dąbrowskiej Dziennik Samuela Pepysa 1952) stanowi ogromnej wartości dokument obyczajowo-historyczny; P. jest aktywnym uczestnikiem życia publicznego, relacjonuje i opiniuje zmiany wiążące się z powrotem Stuartów, opisuje m.in. epidemie dżumy i wielki pożar w Londynie, jest bywalcem teatrów, miłośnikiem muzyki i książek, szczerym kronikarzem swej kariery i spraw osobistych, dzięki czemu dzieło jego tworzy bogaty obraz życia i umysłowości ówczesnego mieszczaństwa angielskiego. (Wielka Encyklopedia Powszechna PWN.)

Przypis M. D.:

Czytelnikom, którzy po przeczytaniu pierwszego wydania Dziennika powątpiewali, czy Samuel Pepys rzeczywiście nie umiał tabliczki mnożenia, i zapytywali mnie, czy w danym wypadku „table of multiplication” nie znaczy czego innego, przytaczam komentarz Arthura Bryanta z jego monografii o Pepysie: „A znajdując, że wszystkie te nowe dla niego czynności wymagają przede wszystkim wiedzy matematycznej [Samuel Pepys] cofnął się aż do jej pierwszych podstaw i on, człowiek dobiegający trzydziestki, wrócił do szkolnej nauki. Bo najwzwyż niejakiego Coopera, szypa jednego z królewskich okrętów, by go naprędce wyuczył arytmetyki, zaczął od tabliczki mnożenia i wstawał co ranka przed świtem, aby powtarzać ją na pamięć, aż póki jej nie opanował”. (Arthur Bryant, *Samuel Pepys, the man in the making*, str. 175—176.)



15 lutego [1665]. Z Creedem do Gresham College, gdzie pan Povy w zeszłym tygodniu podał mnie był na członka Towarzystwa; tedy dzisiaj byłem przyjmowany i podpisałem się w księdze, a prezes Towarzystwa lord Brouncker podał mi rękę i powiedział mi parę słów stosownych do okoliczności.

Przypis M. D.:

Samuel Pepys był prezesem Królewskiego Towarzystwa Naukowego w latach: 1684—1686. W tym charakterze podpisał zezwolenie na druk epokowego dzieła Newtona, *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Na pierwszym wydaniu tego dzieła jest napis: Imprimatur S. Pepys Reg. Soc. Praeses. Juli 5, 1686.

Dziennik Samuela Pepysa. Wybór, przekład i przypisy Marii Dąbrowskiej, Tom I, PIW 1966.

(Wybrał i do Deltę podał A. M.)

Kącik filatelistyczny (6)

Otto von Guericke (1602—1686), burmistrz Magdeburga, zajmował się badaniem różnych zjawisk fizycznych, ale najbardziej wslawił się doświadczeniami dotyczącymi próżni (wynałazł zresztą pompę próżniową). W szczególności w roku 1654 przeprowadził eksperyment z dwiema półkulami metalowymi o średnicy ok. 40 cm, z których wypompował powietrze. Szesnaście koni nie mogło rozerwać półkul dociskanych do siebie przez ciśnienie atmosferyczne.

Znaczek niemiecki z roku 1936 przedstawia portret Ottona von Guericke, a znaczek NRD z roku 1969 eksperyment z „półkulami magdeburgskimi” według dawnego sztychu. Drugi znaczek z serii NRD przedstawia pomnik uczonego w Magdeburgu.



Jerzy BARTKE