



SPIS TREŚCI

NUMERU 12(60)

Znów papierowa inżynieria	str. 1
Rozkłady prawdopodobieństwa	str. 2
Trzy modele fizyki statystycznej	
<i>Doc. dr Lech T. Kubik</i>	str. 10
Mała Delta	str. 12
Zadania	str. 13
Co to są przedziały ufności	
<i>Doc. dr Ryszard Zieliński</i>	str. 14
Drobiazgi	str. 17

W następnym numerze: Spójność

Reprodukowany w Małej Delcie na str. 17 w poprzednim numerze tekst pochodzi z podręcznika M. Heilperna „Pogadanki o Tajemnicach Przyrody” wydanego w roku 1900 w Warszawie nakładem Michała Arcta

Na okres jesienno-zimowy Centrum Astrofizyczne im. M. Kopernika oraz Polskie Towarzystwo Miłośników Astronomii przygotowały cykl odczytów popularno-naukowych. A oto odczyty przewidziane na grudzień i styczeń:

- 04.12.78 Astronomia Gamma dr J.P.Lasota,
11.12.78 Materia w gromadach kulistych
mgr M. Czerny,
18.12.78 Co widzi obserwator wpadający do
czarnej dziury? mgr M. Sikora,
08.01.79 Wybuchające czarne dziury dr M.
Abramowicz,
15.01.79 Neutrino słoneczne doc. dr M.
Święcki,
22.01.79 Co siedzi w centrum galaktyki?
mgr A. Schwarzenberg-Czerny
- Odczyty odbywać się będą w Centrum Astrofizycznym im. Kopernika, Warszawa, ul. Bartycka 18 o godz. 17. Wstęp wolny.

„Delta”
matematyczno-fizyczny miesięcznik
popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego i Polskiego
Towarzystwa Fizycznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:
doc. dr J. Bartke
doc. dr A. Bączyński
doc. dr B. Gleichgewicht
prof. dr K. Goebel
doc. dr B. Iwaszkiewicz
doc. dr T. Iwiński
doc. dr A. Januszajtis
prof. dr Leon Jeśmanowicz —
wiceprzewodniczący
mgr H. Kaczorek
prof. dr B. Karczewski
prof. dr M. Kuczma
mgr A. Mąkowski
prof. dr Z. Pawlak
prof. dr A. Piekara
prof. dr Z. Semadeni
prof. dr J. Stankowski

prof. dr M. Subotowicz
doc. dr S. Turnau
prof. dr J. Wdowczyk
prof. dr Janusz Zakrzewski —
przewodniczący

Redaguje Kolegium w składzie:
doc. dr T. Hofmokr — z-ca red. nac.
dr T. B. Iwiński
B. Jaworska-Kordos — ilustracje
dr M. Kordos — red. nac.
dr K. Prażmowski — red. techn. graf.
mgr K. Szypcio — sekr. red.
doc. dr M. Święcki
Adres Redakcji
ul. Hoża 69 pok. 151,
00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.
Ossolińskich — Wydawnictwo
Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.
wyd.; 2,50 ark. druk.;
papier offsetowy III kl. 80 g. 61 × 86
Wydrukowano w Drukarni im.
Rewolucji Październikowej
Warszawa ul. Mińska 65.
Nr zam. 1206/78 S-86

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60, — cena prenumeraty półrocznej zł 30, —

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:
— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.
Jednostki gospodarki uspołecznionej instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienia w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.
Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorki indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście

00-068 Warszawa, Poland or with

— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68,

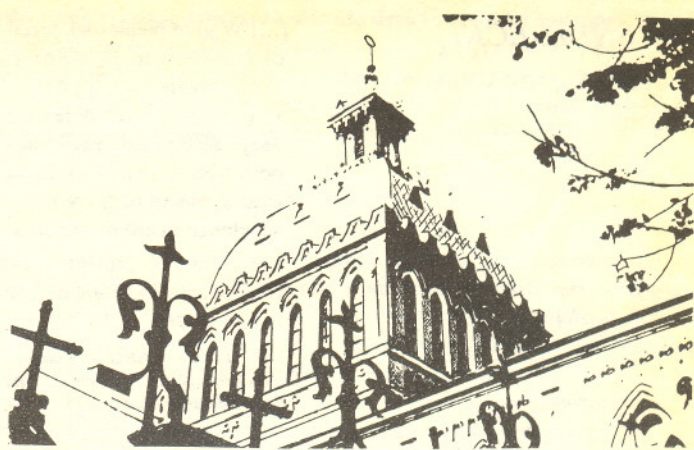
Bundesrepublik Deutschland.

— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,

— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 5, — nr indeksu 35723/35550

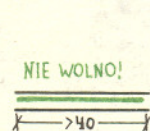
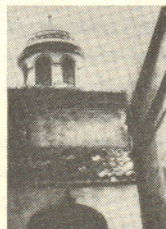
Na Gwiazdkę w roku 1975 ogłosiliśmy konkurs budowy mostów z papieru. Mimo poważnych ograniczeń co do klejenia nadesłane niewielkie mosty (600 mm × 400 mm) okazały się zdumiewająco wytrzymałe — jeden z nich bez uszkodzenia można było obciążać aż do 56 kg. Tak, że właściwie trudno zrozumieć, czemu współpracujący z nami przy konkursie Instytut Badawczy Dróg i Mostów nie wprowadził do powszechnego użytku mostów papierowych (być może mamy więcej stali niż papieru?). Obecnie postanowiliśmy zaproponować Czytelnikom zrewolucjonizowanie kolejnej dyscypliny techniki budowlanej. Ogłaszamy konkurs pt.



BUDUJEMY KOPUŁĘ

A oto warunki konkursu.

1. Materiał: wyłącznie arkusze z bloku technicznego (BN-71 7383-06) i klej (dowolny, my polecamy Hermol).
2. Założenia projektowe: kopuła musi być otwarta od dołu i wewnątrz niej musi zmieścić się sześcianna o boku 250 mm; cała kopuła musi mieścić się w sześciannie o boku 400 mm.
3. Ograniczenia technologiczne: są dwa,
I — nie wolno sklejać żadnego kawałka papieru ze sobą,
II — wszystkie sklejenia dwóch kawałków papieru muszą się mieścić w kuli o średnicy 40 mm.



4. Podpory: kopuła ma spoczywać swobodnie na płaszczyźnie (przy próbach będzie to duży arkusz papieru).
5. Obciążanie: na kopule spoczywać będzie elastyczny worek o obwodzie przekroju poprzecznego 350 mm napełniany cieczą aż do załamania kopuły.
6. Ocena: prace będą uszeregowane według malejącej wartości współczynnika

$$k = \frac{m_c}{m_k},$$

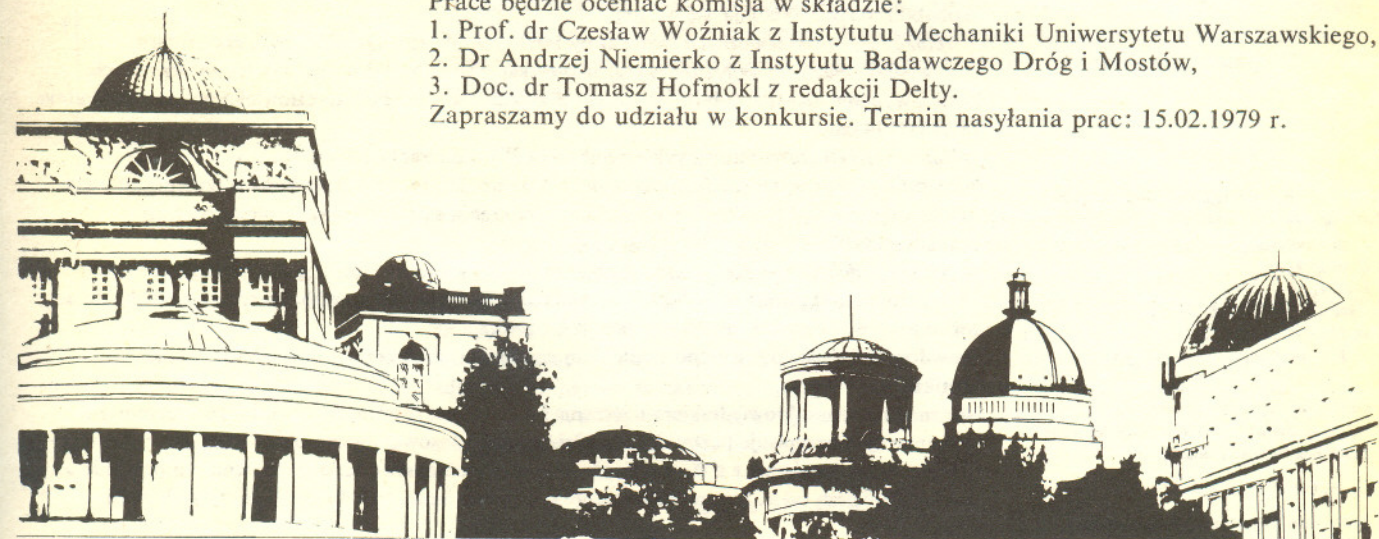
gdzie m_c oznacza masę cieczy załamującą kopułę, a m_k masę kopuły.

Ponadto przyznana będzie specjalna nagroda za najestetyczniejszą konstrukcję. Wszystkie nadesłane prace będą sfotografowane przed zniszczeniem i zaprezentowane w Delcie.

Prace będzie oceniać komisja w składzie:

1. Prof. dr Czesław Woźniak z Instytutu Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego,
2. Dr Andrzej Niemierko z Instytutu Badawczego Dróg i Mostów,
3. Doc. dr Tomasz Hofmokl z redakcji Delt.

Zapraszamy do udziału w konkursie. Termin nasyłania prac: 15.02.1979 r.



[...] W grze pieniężnej, jeżeli summe, o którą się gra, rozmnożymy przez podobieństwo trafu, otrzymujemy to, co się nazywa nadzieja, czyli oczekiwanie; jeśli zaś tę summe pieniężną rozmnożymy przez podobieństwo chybienia, mamy to, co się nazywa obawa. Więc rachunek ten daje nam wartość i cenę naszej nadziei i obawy nie tylko w grze, ale we wszystkich przedsięwzięciach losowych. Stosując podobieństwo trafu do summy w grze postawionej, mamy to, co się nazywa nadzieją matematyczną; stosując je zaś do całego majątku gracza, mamy nadzieję moralną, bo wtenczas dochodzić można niebezpieczeństw straty i zupełnego upadku gracza, a stąd wypadającej demoralizacji ludzi źle się rządzących.

Fragment z rozprawy: *O rachunku losów. Rzecz czytana na sessji literackiej Uniwersytetu Wileńskiego 15 listopada 1817 roku v.s.* Cytowane wg: Jan Śniadecki, *Wybór Pism Naukowych*, PWN, Warszawa 1954.

Red.: Termin *nadzieja matematyczna* stosunkowo niedawno dopiero wyparty został przez *wartość oczekiwaną*; *obawa matematyczna* nigdy się nie przyjęła. *Podobieństwo* to oczywiście prawdopodobieństwo, a *rachunek losów* — rachunek prawdopodobieństwa.

Rozkłady prawdopodobieństwa

Pragniemy — jak co roku — ofiarować Czytelnikom prezent gwiazdkowy. Tym razem jest to przegląd ważniejszych rozkładów zmiennych losowych rozważanych w teorii prawdopodobieństwa i jej zastosowaniach.

Omówienie to dalekie jest od rygorystycznej poprawności formalnej. Odwołujemy się w nim przede wszystkim do intuicji i wyobraźni, bowiem zależy nam tu głównie na uwypukleniu związków teorii prawdopodobieństwa ze zjawiskami otaczającej nas rzeczywistości.

Zmienna losowa i jej dystrybuanta

W badaniach przyrodniczych podstawą wszelkiego wnioskowania są na ogół *eksperyment* i *mierzenie*: w celu zdobycia informacji o jakimś zjawisku przeprowadza się badanie eksperymentalne, a wynikiem tego badania przyporządkowuje się liczby, które stają się podstawą do dalszych wnioskowań i uogólnień.

Eksperyment badawczy na ogół ma charakter *losowy*. Sens bowiem prowadzenia badania eksperymentalnego kryje się w tym, że nie potrafimy przewidzieć, co się w nim wydarzy na pewno, potrafimy natomiast powiedzieć, jakie są możliwe wyniki. To, który z tych możliwych wyników w rzeczywistości się wydarzy, zależy często od czynników niemożliwych do uchwycenia, zwanych *losem* lub *przypadkiem* (tak jest zarówno przy rzucie monetą, jak i rejestrowaniu rozpadów cząstek elementarnych). Czasem zresztą badaniom eksperymentalnym świadomie nadaje się charakter losowy: przy statystycznej kontroli jakości dużej partii towaru bada się jakość przypadkowo wybranych egzemplarzy, na podstawie opinii wylosowanych rozmówców wnioskuje się o nastrojach społeczeństwa itd.

Eksperyment losowy (który może składać się z wielu drobniejszych doświadczeń) prowadzi się zawsze przy założeniu, że istnieją (lub będą istniały) podstawy do przyporządkowywania prawdopodobieństw niektórym przynajmniej jego wynikom. A ponieważ wyniki te na ogół jakoś się mierzy, to w efekcie wynikiem mierzenia (liczbom lub zbiorom liczb) zostają przypisane pewne prawdopodobieństwa: prawdopodobieństwa zdarzeń, którym odpowiadają te liczby (lub zbiory liczb).

Abstrakcyjnym, matematycznym modelem tak rozumianego eksperymentu jest przestrzeń probabilistyczna. Składają się na nią:

— *zbiór zdarzeń elementarnych* (oznaczany zwykle symbolem Ω). Zdarzenia elementarne odpowiadają *możliwie najprostszemu* wynikom eksperymentu, takim np. jak to, że przy rzucie kostką wypadła szóstka, lub to, że wzrost przypadkowo wybranego człowieka wyniósł dokładnie 187,9237134 cm.

— *zbiór zdarzeń* (oznaczany zwykle symbolem \mathfrak{M}). Zdarzenia odpowiadają *rzeczywiście interesującym nas* wynikom doświadczenia, takim np. jak to, że wzrost losowo wybranego pana zawarty był pomiędzy 187,5 cm a 188,5 cm. Zdarzenia są podzbiorem zbioru zdarzeń elementarnych.

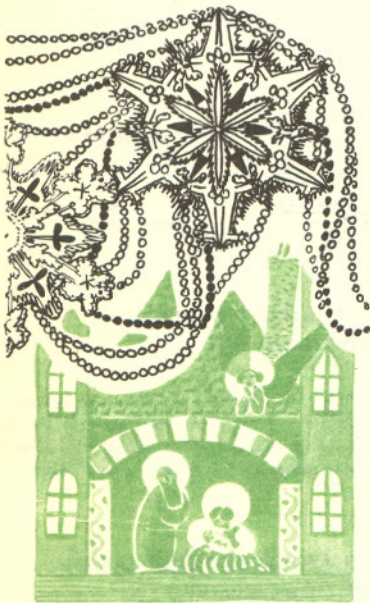
— *prawdopodobieństwo* (oznaczane zwykle przez P), które jest funkcją przyporządkowującą zdarzeniom należącym do \mathfrak{M} liczby z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$ w taki sposób, by spełnione były znane warunki (tzw. *aksjomaty Kołmogorowa*, zob. obok).

Prawdopodobieństwo jest odpowiednikiem *częstości* (lub *szansy*) występowania określonego wyniku.

Matematycznym odpowiednikiem mierzenia jest *zmienna losowa*, funkcja, która zdarzeniom elementarnym przypisuje liczby. Dla każdej zmiennej losowej można określić jej *dystrybuantę* — funkcję, która każdemu $x \in \mathbb{R}$ przypisuje prawdopodobieństwo tego, że zmienna ta przyjmie wartość mniejszą od x . Inaczej mówiąc, jeśli X jest zmienną losową, a F_X jej dystrybuantą, to

$$F_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}).$$

Zob. też artykuły R. Zielińskiego i L.I. Kubika.



Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa (Kołmogorowa):

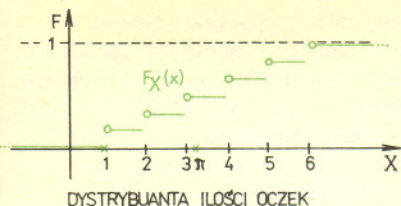
- 1) $P: \mathfrak{M} \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$,
- 2) $P(\Omega) = 1$,
- 3) Jeśli $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathfrak{M}$ oraz dla każdego i, j ($i \neq j$) jest $A_i \cap A_j = \emptyset$, to

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots$$

W niektórych wykładach rachunku prawdopodobieństwa dystrybuantę definiuje się przez nierówność nieostrą:

$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}),$$

co zmienia trochę własności dystrybuanty, ale w niczym nie zmienia ogólnej teorii.



Dla przykładu, jeśli X — ilość oczek w rzucie kostką, to wartość dystrybuanty tej zmiennej w punkcie 1 wynosi 0 (jest niemożliwe, by wypadło mniej niż 1 oczko), a $F_X(\pi) = 1/2$, bo zdarzenie „wypadło mniej niż π oczek” jest po prostu zdarzeniem „wypadło 1 oczko, 2 oczka lub 3 oczka”. Trudniej zgadnąć, jaka byłaby dystrybuanta zmiennej Y : „wzrost losowo wybranego człowieka wyrażony w centymetrach”, ale można na pewno twierdzić, że $F_Y(10) = 0$ i $F_Y(400) = 1$.

Niezależność zmiennych losowych

Często zdarza się, że w jednym eksperymencie losowym wykonuje się szereg *doświadczeń niezależnych*: niezależnych w tym sensie, że wynik jednego doświadczenia nie może mieć wpływu na to, co wydarzy się w innych doświadczeniach. Formalnym odpowiednikiem wyników dwu niezależnych doświadczeń są *zdarzenia niezależne*, tzn. takie, że prawdopodobieństwo ich łącznego wystąpienia równe jest iloczynowi prawdopodobieństw każdego z nich z osobna (np. prawdopodobieństwo orła w każdym rzucie monety z osobna wynosi $1/2$, a prawdopodobieństwo dwu orłów w dwu rzutach wynosi, wobec oczywistej niezależności wyników, $1/4$). Zmienne losowe, odpowiadające pomiarom wyników niezależnych doświadczeń, nazywa się *zmiennymi niezależnymi*. Dla dwu zmiennych warunek niezależności formuluje się bardzo prosto: X i Y są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych x i y ich dystrybuanty spełniają równość

$$F_X(x) \cdot F_Y(y) = P(X < x \text{ i } Y < y).$$

Możliwe jest też uogólnienie pojęcia niezależności na układy więcej niż dwu zmiennych losowych, tu poprzestaniemy na intuicyjnym rozumieniu niezależności zmiennych jako niezależności doświadczeń, w których dokonujemy odpowiednich pomiarów.

Typy zmiennych losowych

Znajomość dystrybuanty zmiennej losowej wystarcza do określania prawdopodobieństw wszystkich praktycznie interesujących zbiorów liczb, w jakich może znaleźć się jej wartość. Mówi się, że dystrybuanta *wyznacza rozkład prawdopodobieństwa* zmiennej losowej. W praktyce jednak posługiwanie się dystrybuantą nie zawsze jest wygodne i w związku z tym wprowadza się inne jeszcze sposoby charakteryzowania rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej. Stosowane tu sposoby zależą jednak od własności dystrybuanty, czyli od *typu* zmiennej losowej. Mówi się, że zmienna losowa X jest typu skokowego (czasem, mniej poprawnie, typu dyskretnego), jeśli istnieje skończony lub przeliczalny ciąg liczb rzeczywistych x_1, x_2, \dots o tej własności, że dystrybuanta ma „skoki” w tych punktach i suma wszystkich tych skoków wynosi 1 (zob. rysunek). Wielkość „skoku” w punkcie x_i jest, jak łatwo stwierdzić, prawdopodobieństwem zbioru tych zdarzeń elementarnych, dla których zmienna X przyjmuje wartość x_i . W związku z tym wielkość tę oznacza się symbolem

$$P(X = x_i)$$

(„prawdopodobieństwo tego, że X przyjmie wartość x_i ”).

Ponieważ przy tym dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$F_X(x) = \sum_{X < x_i} P(X = x_i)$$

(dlaczego?), to znajomość liczb $P(X = x_i)$ wyznacza rozkład prawdopodobieństwa. Przy tym empirycznym odpowiednikiem „skoku” w punkcie x_i jest częstość pojawiania się wyniku, któremu odpowiada miara x_i , i posługiwanie się wielkościami $P(X = x_i)$ dobrze przemawia do intuicji. Dlatego też rozkłady zmiennych skokowych charakteryzuje się w ten właśnie sposób. Mówi się, że zmienna losowa X jest *typu ciągłego*, jeśli istnieje taka nieujemna funkcja rzeczywista φ , że dla każdego $x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt.$$

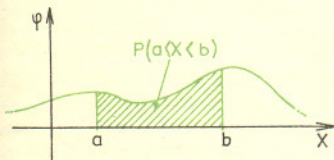
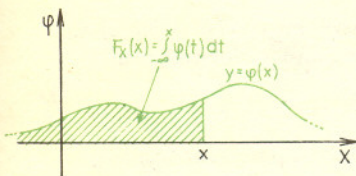
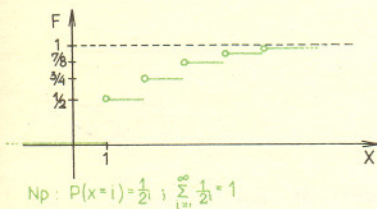
Funkcja φ nazywa się *gęstością rozkładu* zmiennej X i oczywiście wyznacza rozkład zmiennej X (bo wyznacza jednoznacznie dystrybuantę). Jakie intuicje kryją się pod takim sposobem opisywania rozkładów? Wyobraźmy sobie pomiar masy losowo wybranego kamienia z Dunajca. Trudno tu z góry wyznaczyć wartości, jakie ta masa może przyjmować. Znacznie łatwiej pomyśleć, że masa może być dowolną liczbą rzeczywistą, czyli że nasza zmienna losowa może przyjmować każdą wartość. Ponieważ zaś czułość przyrządów pomiarowych jest i tak ograniczona, to zdarzeniami naprawdę nas interesującymi będą zdarzenia postaci „masa kamienia zawarta jest między a i b ”, a więc zdarzenia, których prawdopodobieństwo jest łatwe do obliczenia przy znajomości gęstości φ :

$$P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Układ zdarzeń $\{A_1, \dots, A_n\}$ nazywamy niezależnym, jeśli zarówno dla tego układu, jak i dowolnego jego podukładu spełniony jest warunek: prawdopodobieństwo łącznego wystąpienia odpowiednich zdarzeń równe jest iloczynowi prawdopodobieństw tych zdarzeń.



W praktyce są to przedziały oraz wszystkie takie zbiory, które można otrzymać z przedziałów przez tworzenie sum przeliczalnych i przeliczalnych iloczynów. Zbiory te nazywane są *zbiorami borelowskimi*.



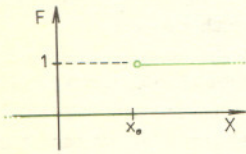
Tak więc w przypadku zmiennej typu ciągłego też uzyskujemy interpretację „częstościową”: występująca po prawej stronie całka jest teoretycznym odpowiednikiem częstości występowania takich wyników doświadczenia, których miara leży w przedziale (a, b) . (Warto zauważyć, że jeśli różnica $b - a$ jest bardzo mała, a funkcja φ — ciągła, to częstość ta będzie w środku x przedziału (a, b) w przybliżeniu równa $\varphi(x) \cdot (b - a)$. Wynika stąd m.in., że istnieje możliwość przybliżenia rozkładów ciągłych rozkładami skokowymi.)

W dalszym ciągu będziemy zajmować się tylko rozkładami typu skokowego i typu ciągłego. Należy jednak pamiętać, że istnieją zmienne, które nie należą do żadnej z tych kategorii (tzw. *zmiennie osobliwe* i zmienne, które dają się przedstawić jako sumy zmiennych różnych typów).

Zmienne o rozkładach dyskretnych

Rozkład jednopunktowy

Jest to rozkład takiej zmiennej, która na pewno, tj. z prawdopodobieństwem 1 przyjmuje pewną wartość x_0 . Empiryczna interpretacja: mierzenie wyniku doświadczenia, w którym wszystko było z góry wiadome. („Eksperymenty” tego rodzaju bywają jednak urządzone i mogą mieć pewne walory pozanaukowe, np. szkoleniowe lub propagandowe.) Rozkład ten bywa użyteczny w rozważaniach teoretycznych.

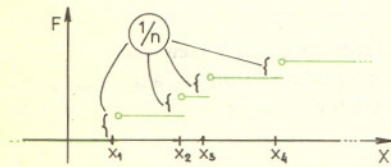


Rozkład jednostajny (równomierny) dyskretny

Jest to rozkład takiej zmiennej X , która przyjmuje n różnych wartości x_1, \dots, x_n — każdą z tym samym prawdopodobieństwem:

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Wprowadza się ją często przy opisie eksperymentu losowego, o którym wiadomo tyle tylko, że może się w nim wydarzyć każdy z n możliwych wyników, i nie ma jednocześnie podstaw do przypuszczenia, że któryś z wyników jest bardziej prawdopodobny, niż jakikolwiek inny (rzut kostką, monetą, wszelkie losowania ze zwracaniem, jak na przykład losowanie respondentów do badania ankietą socjologiczną itp.). W typowych zadaniach z rachunku prawdopodobieństwa sformułowania „wybór losowy”, „na chybił-trafił”, „przypadkowy” sugerują, iż w rozwiązaniu należy posłużyć się właśnie rozkładem tego typu. (Zob. też: *rozkład jednostajny ciągły*.)



Praktyka ta nazywana bywa „stosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa”.

Rzucamy dwukrotnie kostką. Jaki jest rozkład zmiennej „suma oczek”?

(Wsk.: Ponieważ nie ma podstaw do uznania, że któraś ze ścian kostki jest bardziej prawdopodobna niż inne, to przyjmujemy, że rozkład zmiennej „ilość oczek na kostce” jest jednostajny.)

Rozkład dwupunktowy

Jest to rozkład zmiennej X , która z dodatnimi prawdopodobieństwami może przyjmować dwie wartości; najczęściej przyjmuje się, że są to 1 i 0. Skoki dystrybucyjny w tych punktach oznacza się zazwyczaj odpowiednio przez p i q

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = q, \quad p + q = 1.$$

Opisuje każdy taki eksperyment, w którym interesują nas tylko dwa wyniki, zwane umownie sukcesem lub porażką (wypadnięcie orła lub reszki, urodzenie chłopca lub dziewczynki itp.). Przyjęto „sukcesem” nazywać to zdarzenie, na którym zmienna X przyjmuje wartość 1.

Rozkład dwumianowy

Niech n będzie liczbą naturalną. Rozkładem dwumianowym nazywamy rozkład zmiennej S_n , która może przyjmować wartości $k = 0, 1, \dots, n$ odpowiednio z prawdopodobieństwami

$$p_k = P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Powstaje przy opisywaniu tzw. *schematu Bernoulliego*, to jest ciągu niezależnych powtórzeń eksperymentu o rozkładzie dwupunktowym: S_n jest wtedy zmienną losową dającą się opisać jako „liczba sukcesów w n próbach”. Przykłady doświadczeń i zjawisk, do opisu których wykorzystuje się rozkład dwumianowy:

- wielokrotny rzut monetą,
- wielokrotne losowanie (ze zwracaniem) z populacji, w której rozróżniamy tylko dwa rodzaje elementów,
- statystyczna kontrola jakości (np. żarówek: dobra — zła),
- testowanie wartości szczepionek i leków.

Omawiany w każdym podręczniku rachunku prawdopodobieństwa.

Wśród 20 żarówek losowo wybranych z dużej partii 10 przepaliło się w momencie pierwszego podłączenia do sieci. Producent twierdzi, że wypuszcza co najwyżej 5% braków. Jak wiarygodna jest wypowiedź producenta? (Wiarygodnością nazwiemy — na użytek tego zadania — prawdopodobieństwo tego, co się nam przydarzyło, przy założeniu, że producent trafnie ocenia jakość swych wyrobów.)



Rozkład dwumianowy ważony

Powstaje przy opisywaniu ciągu n niezależnych prób typu sukces — porażka, jeśli prawdopodobieństwo sukcesu zależy od warunków, w jakich próby te były prowadzone, ale w ustalonych warunkach jest stałe. Założmy, że jest s możliwych warunków, przy czym i -te warunki występują z prawdopodobieństwem α_i ($i = 1, 2, \dots, s$), a prawdopodobieństwo sukcesu w i -tych warunkach wynosi p_i . Jeśli S_n jest liczbą sukcesów, to

$$P(S_n = k) = \sum_{i=1}^s \alpha_i \binom{n}{k} p_i^k (1-p_i)^{n-k}$$

(jeśli wszystkie p_i są równe, to dostajemy rozkład dwumianowy). Rozkład ten bywa wykorzystywany przy analizie wyników diagnozy, o której wiadomo, że nie jest bezbłędna.

J. Neyman, *Zasady rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1969.



Gwiazdy klasyfikuje się ze względu na jasność jako karły (K), olbrzymy (O) lub superolbrzymy (S). Oznaczmy przez β prawdopodobieństwo wystąpienia karła w danej rodzinie gwiazd, przez β — prawdopodobieństwo wystąpienia olbrzyma. Metoda klasyfikacji polega na badaniu widma gwiazd i nie jest bezbłędna. Prawdopodobieństwa błędnej klasyfikacji są następujące (dane fikcyjne):

Zakwalifikowany jako

	K	O	S
K	\times	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
O	$\frac{1}{4}$	\times	$\frac{1}{5}$
S	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	\times



Gwiazdę wybiera się losowo i przeprowadza trzy niezależne badania jej widma. Niech X będzie liczbą tych badań, w wyniku których gwiazdę zakwalifikowano jako olbrzyma. Jaki jest rozkład zmiennej X ? (Wg J. Sławy-Neymana.)

Rozkład dwumianowy ujemny (rozkład Pascala)

Powstaje, podobnie jak dwumianowy, przy opisywaniu ciągu niezależnych powtórzeń doświadczenia o rozkładzie dwupunktowym, jeśli interesuje nas, ilu trzeba doświadczeń na to, aby pojawił się r -ty z kolei sukces. Oznaczmy przez X_r zmienną losową „łączna liczba porażek poprzedzających r -ty sukces”. Zmienna ta może przyjmować każdą wartość $k = 0, 1, 2, \dots$ i ma rozkład określony następująco:

$$P(X_r = k) = \binom{r+k-1}{k} p^r q^k.$$

Przykłady występowania:

- zadanie Banacha o matematyku, który nosił dwa pudełka zapalek,
- problemy czasu czekania, kolekcjonerstwa (zob. także: rozkład geometryczny).

W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, t. I, PWN, Warszawa 1971, oraz M. Fisz, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa 1958.



(Zadanie Banacha o matematyku i zapalkach). Pewien matematyk nosi przy sobie dwa pudełka zapalek, jedno w prawej, drugie w lewej kieszeni. Kiedy potrzebuje zapalek, wybiera losowo z prawdopodobieństwem $1/2$ zapalę z jednej z kieszeni. Pudełka zawierają po N zapalek. Znaleźć prawdopodobieństwa:

- że w chwili, w której z jednej kieszeni wyciągnięte zostanie puste pudełko, w drugiej będzie jeszcze r zapalek,
- w chwili, w której jedno pudełko opróżni się (a nie, kiedy zostanie odkryte jako puste), w drugim będzie jeszcze r zapalek. Wykazać, że prawdopodobieństwo tego, iż pudełko, które opróżni się pierwsze, nie zostanie odkryte jako puste wynosi $\binom{2N}{N} 2^{-2N-1}$. (Wg W. Fellera.)



Rozkład geometryczny

Powstaje w sytuacji opisywanej powyżej dla $r = 1$. Wartość zmiennej losowej X_1 interpretuje się często jako „czas czekania na pojawienie się pierwszego sukcesu” w schemacie Bernoulliego. Jest oczywiście

$$P(X_1 = k) = q^k p.$$

Pojawia się w opisach bardzo wielu sytuacji empirycznych, w których interesującym wynikiem jest rzeczywisty czas czekania. Jest również rozkładem granicznym dla statystyki Bosego-Einsteina (por. artykuł L.T. Kubika).

Omawiany jest w większości podręczników rachunku prawdopodobieństwa. W szczególności zob. W. Feller, *Wstęp...*



Ktoś ma w kieszeni 5 kluczy, z których tylko 1 pasuje do zamka. Po stwierdzeniu, że losowo z kieszeni wybrany klucz nie pasuje, odkłada go — z nie znanych nam bliżej powodów — z powrotem do tej samej kieszeni. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że otworzenie zamka będzie wymagało co najmniej 10 prób?

Dysponujemy 10 kluczami, z których 2 pasują do zamka. Po stwierdzeniu, że losowo z kieszeni wybrany klucz nie pasuje, odkładamy go na bok. Pokazać, że najbardziej prawdopodobna liczba prób wynosi 1 (tzn. że już w pierwszej próbie trafimy na dobry klucz!). (Wg L. T. Kubika; zadanie to nie ma żadnego związku z rozkładem geometrycznym, ale zamieszczamy je tu ze względu na pokrewieństwo tematyczne z poprzednim zadaniem.)



Rozkład hipergeometryczny

Rozkład ten powstaje przy opisywaniu następującego abstrakcyjnego eksperymentu: W urnie jest n_1 kul czarnych i $n_2 = n - n_1$ kul czerwonych. Losujemy bez zwracania r kul. Poszukujemy prawdopodobieństwa tego, że wśród wylosowanych będzie dokładnie k czarnych. Jeśli X oznacza zmienną „liczba wylosowanych kul czarnych”, to

$$P(X = k) = \frac{\binom{n_1}{k} \binom{n-n_1}{r-k}}{\binom{n}{r}} \quad k = 0, 1, \dots, \min(n_1, r)$$

Schemat ten odpowiada wielu sytuacjom praktycznym, w których nie jest znane n lub n_1 . W szczególności był on wykorzystywany do statystycznej kontroli jakości (nieznane n_1) i szacowania populacji zwierząt na podstawie liczby powtórnych złapań zwierząt oznaczonych przy pierwszym złapaniu (znane n_1 , nieznane n).

W. Feller, *Wstęp...*, t. I; M. Fisz, *Rachunek...*

W zamkniętym stawie odłowiono 1000 ryb, które oznaczono czerwonymi plamami i wypuszczono. Po pewnym czasie dokonano nowego połowu 1000 ryb i znaleziono wśród nich 100 ryb oznaczonych. Oszacować prawdopodobieństwo tego zdarzenia przy założeniu, że w jeziorze jest a) 1900, b) 10^6 ryb. (Wsk. $n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$ — wzór Stirlinga.)

Oznaczmy przez $q(n)$ prawdopodobieństwo tego wydarzenia przy założeniu, że w jeziorze jest n ryb. Udowodnić, że $q(n)$ jest największe przy $n = 10\,000$. Wsk. obliczyć iloraz $q(n)/q(n-1)$. (Wg W. Fellera.)



Rozkład Pólyi

Rozważmy urnę napełnioną tak jak poprzednio, z tym, że po wyciągnięciu każdej kuli wrzucamy ją z powrotem, dodając jeszcze s kul tego samego koloru (s może być ujemne). Niech X będzie określona tak jak poprzednio: X przyjmuje wartość k , jeśli wśród wylosowanych r kul było k czarnych. Rozkład tej zmiennej nazywa się rozkładem Pólyi:

$$P(X = k) = \binom{r}{k} \frac{[n_1(n_1+s) \dots (n_1+(k-1)s)] \cdot [n_2(n_2+s) \dots (n_2+(r-k-1)s)]}{n(n+s) \cdot \dots \cdot (n+(r-1)s)}$$

(dla $s = -1$ otrzymujemy rozkład hipergeometryczny, a dla $s = 0$ — jaki?).

Schemat ten odpowiada przy $s > 0$ przybliżonemu opisowi rozprzestrzeniania się chorób zakaźnych, przy $s < 0$ — opisowi efektywności stosowania zasad BHP (wypadek zwiększa czujność i zmniejsza szansę powstania następnego, brak wypadku — na odwrót).

W. Feller, *Wstęp...*, t. I.

Rozkład Poissona

Jest to rozkład zmiennej X przyjmującej wartości naturalne $k = 0, 1, 2, \dots$ odpowiednio z prawdopodobieństwami

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},$$

gdzie λ jest pewną ustaloną liczbą dodatnią.

Jedną z możliwych do wyobrażenia realizacji tej zmiennej jest sytuacja następująca. Mamy nieskończoną objętość ciasta z rodzynkami w takiej ilości, że na ustaloną objętość V ciasta przypada średnio λ rodzynek, przy czym rodzyнки nie oddziałują na siebie wzajemnie (nie odpychają ani przyciągają). Wycinamy z ciasta losowo porcję o objętości V i pieczemy z niej placek: prawdopodobieństwo, że w placku znajdzie się k rodzynek wynosi właśnie $e^{-\lambda} \lambda^k / k!$. Inaczej mówiąc — zmienna losowa „liczba rodzynek w placku” ma rozkład Poissona. Zmienne o rozkładzie Poissona odgrywają dużą rolę zarówno w rozważaniach teoretycznych jak i zastosowaniach praktycznych teorii prawdopodobieństwa. Wynika to między innymi z faktu, że rozkład Poissona bywa dobrym przybliżeniem rozkładu dwumianowego: jeśli w schemacie Bernoulliego prawdopodobieństwo sukcesu jest tak małe, że liczba $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} np$ jest też mała, to

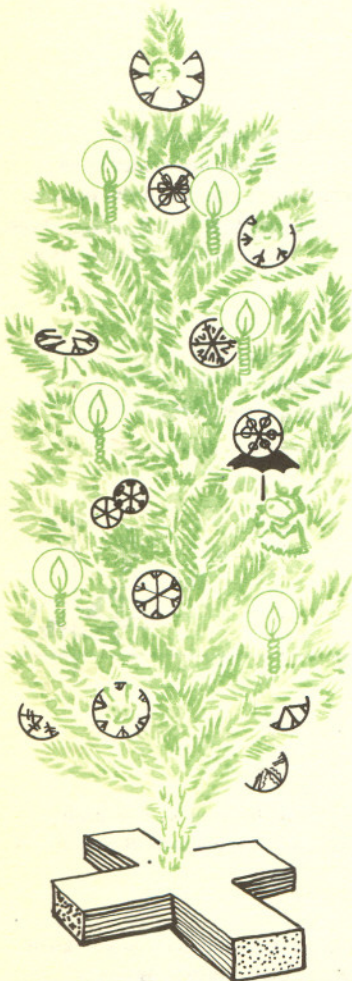
$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},$$

przy czym przybliżenie jest tym lepsze, im większe n i im mniejsze λ . (Rozkład zmiennej „liczba rodzynek w placku” jest przy skończonej objętości ciasta dwumianowy, ale przy dużej objętości ciasta i małej domieszce rodzynek — w przybliżeniu poissonowski). Rozkład Poissona jest też rozkładem granicznym dla tzw. statystyk Maxwella-Boltzmann (zob. artykuł L.T. Kubika).

Inne przykłady sytuacji, w opisie których wykorzystuje się zmienne o tym rozkładzie:

— rozpad radioaktywny (doświadczenia Rutherforda i Geigera: liczba rozpadów na jednostkę czasu ma rozkład Poissona),

— w telekomunikacji przewodowej (liczba zgłoszeń do centrali na jednostkę czasu, liczba błędnych połączeń, liczba prób potrzebnych do uzyskania połączenia — można opisywać jako zmienne o tym rozkładzie, zob. też *rozkład wykładniczy*),





— analiza przestrzennego rozmieszczenia wybuchów bomb latających w Londynie w czasie II wojny światowej pozwoliła ustalić, że rozkład zmiennej „liczba wybuchów na jednostkę powierzchni” jest w przybliżeniu poissonowski, co z kolei pozwoliło odrzucić przypuszczenie, że pewne rejony miasta są celowo atakowane przez nieprzyjaciela intensywniej, niż inne,
 — M. Fisz podaje też, że zmienna losowa „liczba zejść śmiertelnych spowodowanych kopnięciem przez konia w okresie 1 roku w 1 korpusie armii pruskiej” (dane z 10 korpusów kawalerii za okres 20 lat) ma rozkład dający się dobrze przybliżyć rozkładem Poissona. (Interpretację pozostawiamy Czytelnikowi.)

M. Fisz, *Rachunek...*, W. Feller, *Wstęp...*, t. I, R. Zieliński, *Rachunek prawdopodobieństwa z elementami statystyki matematycznej* PZWS, Warszawa 1973.

Do ciasta wrzucono 900 rodzynek i usmażono 1000 jednakowych pączków. Co jest prawdopodobniejsze — czy to, że w zakupionym przez nas pączku będzie 1 rodzynek, czy że nie będzie żadnego? Obliczyć, ile co najmniej trzeba wrzucić rodzyneków, by prawdopodobieństwo tego, że zakupiony pączek będzie miał co najmniej 1 rodzynek, było większe od 0,99.



Rozkłady ciągłe

Rozkład jednostajny (równomierny)

Najprostszy z rozkładów ciągłych. Mówi się, że zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale (a, b) , jeśli jej gęstość φ wyraża się wzorem

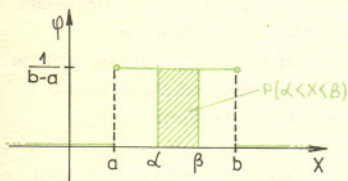
$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{dla } x \in (a, b), \\ 0 & \text{dla } x \notin (a, b), \end{cases}$$

Jak łatwo zauważyć, dla dowolnego $I = (\alpha, \beta) \subset (a, b)$ jest

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{b-a} \int_{\alpha}^{\beta} 1 \, dx = \frac{\beta - \alpha}{b-a},$$

skąd wynika, że prawdopodobieństwo iż zmienna X przyjmie wartość z pewnego przedziału I zawartego w (a, b) zależy tylko od długości tego przedziału (ale nie od położenia tego przedziału w (a, b)). (Tę samą własność mają przedziały domknięte i jednostronnie domknięte.) Rozkład ten bywa wykorzystywany w opisie takich eksperymentów, o których wiemy tyle tylko, że miary możliwych wyników zawarte są w pewnym przedziale skończonym i nie mamy powodu do przypuszczenia, że pewne rejony tego przedziału są bardziej uprzywilejowane niż inne. „Losowo wybrany punkt z przedziału $(0, 1)$ ”, „przypadkowy kierunek na płaszczyźnie” (mierzony kątem, jaki tworzy z ustalonym kierunkiem) — to przykłady sformułowań sugerujących przyjęcie rozkładu jednostajnego odpowiednio na przedziałach $(0, 1)$, $[0, 2\pi)$.

Omawiany w każdym podr. rachunku prawdopodobieństwa, zob. np.: R. Zieliński, *Rachunek...*



Praktyka ta nazywana bywa „stosowaniem geometrycznej definicji prawdopodobieństwa”



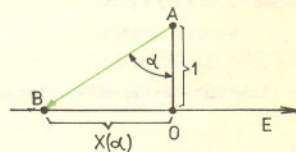
Z punktu A (źródła światła) wybiega w przypadkowym kierunku kwant światła padający na prostą E (ekran) w punkcie B . Niech O będzie rzutem prostokątnym A na E , $OA = 1$ i niech X oznacza odległość zorientowaną OB (w sytuacji przedstawionej na rysunku obok wielkość X jest ujemna). Znaleźć gęstość $\varphi(x)$ rozkładu zmiennej X . Szkieł rozwiązania: Sformułowanie zadania upoważnia do przyjęcia, że kąt zorientowany α między AO a AB ma rozkład jednostajny na przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ponieważ $X(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha$, to

$$F_X(x) = P(X(\alpha) < x) = P\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \arctg x\right) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arctg x} 1 \, d\alpha = \frac{1}{\pi} \left(\arctg x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Stąd

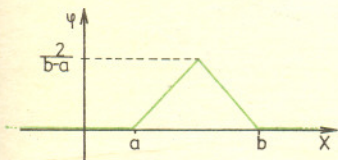
$$\varphi(x) = F_X'(x) = \frac{1}{\pi} (\arctg x)' = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2},$$

a więc zmienna X ma rozkład Cauchy'ego — zob. dalej. (Wg W. Feller'a.)



Rozkład trójkątny

Zmienna X ma rozkład trójkątny na przedziale (a, b) , jeśli jej gęstość znika poza tym przedziałem, a wykres gęstości na (a, b) tworzy trójkąt równoramienny o polu 1 (tj. o wysokości $2/(b-a)$, zob. rys.). Powstaje przy rozpatrywaniu sumy dwu niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie jednostajnym: jeśli np. X i Y są niezależne i każda z nich ma rozkład jednostajny na $(0, 1)$, to $X + Y$ ma rozkład trójkątny na $(0, 2)$. Podstawowe zastosowanie: do formułowania przykładów i zadań w podręcznikach rachunku prawdopodobieństwa.



Znaleźć rozkład sumy dwu niezależnych zmiennych losowych o rozkładach jednostajnych na $(0, 1)$. (Wsk.: skorzystać z definicji niezależności i definicji dystrybuanty.)



Rozkład wykładniczy

Jest to rozkład zmiennej X o gęstości

$$\varphi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x \leq 0, \end{cases}$$

gdzie λ jest pewną liczbą dodatnią. Jedną z możliwych do wyobrażenia interpretacji tej zmiennej jest „czas czekania bez pamięci”: jeśli to, na co czekamy, pojawia się zupełnie przypadkowo, i w taki sposób, że to, jak długo czekamy nie ma najmniejszego wpływu na to, ile jeszcze będziemy czekali, to zmienna „czas czekania” ma rozkład wykładniczy. Parametr λ jest odwrotnością „średniego czasu czekania”. (Rozkład ten jest więc ciągłym odpowiednikiem rozkładu geometrycznego; przy dużej ilości prób rozkład wykładniczy jest dobrym przybliżeniem rozkładu geometrycznego.)

Rozkład wykładniczy wykorzystywany jest z powodzeniem do analizy wielu procesów przyrodniczych i społecznych, m.in. do

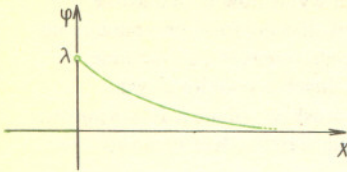
- opisu zjawisk promieniotwórczych (np. w promieniowaniu α czas czekania na emisję pojedynczej cząstki α ma rozkład wykładniczy),
- opisu zjawisk występujących w telekomunikacji przewodowej (czas czekania centrali na zgłoszenie się abonenta, czas trwania rozmów telefonicznych itp.), i ogólniej
- teorii obsługi masowej (teorii kolejek).

Różnorodność zastosowań rozkładu wykładniczego wynika również z jego związku z rozkładem Poissona: jeśli opisywany proces ma tę własność, że liczba interesujących nas zdarzeń w przedziałach czasu o ustalonej długości ma rozkład Poissona i przy tym średnia liczba zdarzeń jest proporcjonalna do tej długości, to czas czekania na takie zdarzenie ma rozkład wykładniczy. Rozkład ten występuje również przy opisie wielu zjawisk innych, niż wyżej opisane, typów.

Przykłady:

- rozkład zasięgu widzialności w rzadkim lesie, jeśli kierunek patrzenia jest losowy (a rozkład kierunków — jednostajny); jeśli zastąpimy drzewa gwiazdami, też będzie dobrze,
- rozkład prawdopodobieństwa tego, że nitka o długości t wytrzyma ustalone obciążenie (t jest tu zmienną losową).

R. Zieliński, *Rachunek...*; W. Feller, *Wstęp...*, t. I i II; i in.



Rutherford i Geiger stwierdzili, że liczby cząstek α wypromieniowywanych przez pewną substancję w 7,5 sekundowych odcinkach czasu mają w przybliżeniu rozkład Poissona ze średnią 3,87 cząstek na okres. Zatem średni czas czekania na kolejną emisję wynosi

$$\frac{7,5}{3,87} = \frac{1}{0,516}$$

i wobec tego rozkład czasu czekania ma gęstość

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0,516 e^{-0,516t} & \text{dla } t > 0, \\ 0 & \text{dla } t \leq 0. \end{cases}$$

Jakie było prawdopodobieństwo tego, że między dwiema kolejnymi emisjami upłynie więcej niż 10 sekund (Wg R. Zielińskiego.)



Formalnie „brak pamięci” zmiennej losowej X można opisać następująco:

$$(*) \quad P(X > t+s | X > t) = P(X > s) \quad \text{dla } s, t > 0.$$

Jeśli przyjąć

$$P(X > s) \stackrel{\text{df}}{=} \varphi(s)$$

to okaże się, że z (*) wynika, iż

$$\begin{cases} \varphi \text{ jest monotoniczna,} \\ \varphi(s+t) = \varphi(s) \cdot \varphi(t) \quad \text{dla } s, t > 0. \end{cases}$$

Stąd z kolei łatwo wywnioskować, że $\varphi(t)$ jest dodatnia dla $t > 0$ i wobec tego $\psi \stackrel{\text{df}}{=} \log \varphi$ jest też monotoniczna i spełnia

$$(**) \quad \psi(s+t) = \psi(s) + \psi(t).$$

Jedynym monotonicznym rozwiązaniem (**) jest funkcja liniowa (por. art. M. Kuczmy, Delta 1/1977), skąd wynika, że Rozkład wykładniczy jest jedynym rozkładem opisującym „procesy bez pamięci”.

Rozkład normalny (Gaussa)

Zmienna losowa ma rozkład normalny o wartości średniej m i odchyleniu standardowym $\sigma > 0$ (ozn. $N(m, \sigma)$), jeśli jej gęstość wyraża się wzorem

$$g(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Dla $\sigma = 1$ i $m = 0$ otrzymujemy gęstość *standardyzowanego* rozkładu normalnego $N(0, 1)$:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Wykres tej gęstości nazywany jest *krzywą Gaussa*.

Jest to — bez przesady — najważniejszy rozkład prawdopodobieństwa i znajduje zastosowanie praktyczne we wszystkich problemach, w których mamy do czynienia bądź ze średnimi z wielu pomiarów, bądź pomiarami zjawisk, na które oddziałuje wiele przypadkowych i niezależnych czynników. Teoretycznym uzasadnieniem tego faktu są tzw. *centralne twierdzenia graniczne*, których sens sprowadza się do tego, że *jeśli $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ jest „dostatecznie porządnym” ciągiem niezależnych zmiennych losowych, to dla dużych n rozkład średniej arytmetycznej*

$$Y_n = \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n)$$

jest w przybliżeniu normalny. W szczególności np. jeśli Z_n jest średnią liczbą sukcesów w schemacie Bernoulliego podzieloną przez \sqrt{npq} , to ciąg dystrybucyjny F_{Z_n} zbiega do dystrybucyjny rozkładu $N(p, 1)$ (jest to twierdzenie de Moivre'a-Laplace'a).

Rozkład ten omawiany jest we wszystkich podręcznikach rachunku prawdopodobieństwa i statystyki i tam też można znaleźć liczne przykłady jego zastosowania (zob. też artykuł R. Zielińskiego).

Rozkład Cauchy'ego

Jest to rozkład zmiennej ciągłej o gęstości

$$\varphi_t(x) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + x^2},$$

gdzie $t > 0$ jest dowolnym parametrem. Rozkład ten ma interesującą własność: jeśli X_1, \dots, X_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o gęstościach odpowiednio $\varphi_{t_1}(x), \dots, \varphi_{t_n}(x)$, to ich suma $X_1 + \dots + X_n$ ma też rozkład Cauchy'ego o gęstości $\varphi_T(x)$, gdzie $T = t_1 + \dots + t_n$. Konsekwencją tej własności jest to, że jeśli zmienne X_1, \dots, X_n mają jednakowe rozkłady o gęstości $\varphi_t(x)$, to ich średnia arytmetyczna $Y = \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n)$ ma też rozkład o gęstości $\varphi_t(x)$.

Wynika stąd z kolei, że nie wszystko w przyrodzie jest normalne: ciąg zmiennych X_1, \dots, X_n, \dots o jednakowym rozkładzie Cauchy'ego jest ciągiem, dla którego nie zachodzi centralne twierdzenie graniczne.

W. Feller, *Wstęp...*, t. II

Sformułowanie to jest — delikatnie mówiąc — niezbyt precyzyjne. Z braku miejsca poprzestajemy jednak na nim, zapraszając Czytelnika do ew. lektury jakiegokolwiek z wymienionych tu podręczników.

(c.d. zadania o kwancie padającym na ekran).

Wykazać, że oświetlenie nieskończonego ekranu płaskiego punktowym źródłem światła umieszczonym w punkcie poza ekranem wyraża się wzorem

$$c \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{k}{k^2 + x^2},$$

gdzie c, k — stałe charakteryzujące źródło światła i jego odległość od ekranu.

(Wsk. Źródło światła to źródło wielu niezależnych fotonów.)



Rozkłady χ^2 i rozkłady t Studenta

Listę naszą zamykają dwie klasy rozkładów, które odgrywają rolę szczególnie ważną w zastosowaniach rachunku prawdopodobieństwa do wnioskowania o pewnych charakterystykach liczbowych badanego zjawiska na podstawie wyników pomiaru, tj. w problematyce wnioskowania statystycznego.

Rozkładem χ^2 o k stopniach swobody nazywamy rozkład takiej zmiennej, która jest sumą kwadratów k ($k = 1, 2, \dots$) niezależnych zmiennych losowych o rozkładach normalnych $N(0, 1)$. Inaczej mówiąc, jeśli X_1, \dots, X_k mają rozkład normalny $N(0, 1)$ i są niezależne, to zmienna

$$Z = X_1^2 + \dots + X_k^2$$

ma rozkład χ^2 o k stopniach swobody.

Rozkładem t Studenta o k stopniach swobody nazywamy rozkład takiej zmiennej T , która jest postaci

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{k} Z}},$$

gdzie X i Z są zmiennymi losowymi niezależnymi, X ma rozkład normalny $N(0, 1)$, a Z ma rozkład χ^2 o k stopniach swobody. Dystrybuanty i gęstości tych rozkładów omawia w swym artykule R. Zieliński. W podanym tam przykładzie ich wykorzystania mamy $k = n - 1 = 4$ stopnie swobody. Jak łatwo sprawdzić, rozkład t o 1 stopniu swobody jest rozkładem Cauchy'ego.

Zob. R. Zieliński, *Rachunek...*; S. Zubrzycki, *Wykłady z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1966.



Doc. dr Lech T. KUBIK

Rozważmy następujące zadanie:

Mamy n cząstek, z których każda może znaleźć się w każdej z $N \geq n$ komórek. Znaleźć prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że w ustalonych n komórkach będzie po jednej cząstce, oraz prawdopodobieństwo zdarzenia B polegającego na tym, że w jakichkolwiek n komórkach będzie po jednej cząstce (inaczej mówiąc, że w żadnej komórce nie będzie więcej niż jedna cząstka). Tego rodzaju zadania rozpatruje się w fizyce statystycznej w odniesieniu do konkretnych cząstek fizycznych. Rolę komórek grają małe obszary, na jakie dzieli się rozpatrywaną przestrzeń.

Rozwiązanie 1 (Model Maxwella-Boltzmann)

Ponumerujemy cząstki liczbami $1, 2, \dots, n$, a komórki liczbami $1, 2, \dots, N$. Rozmieszczenie cząstek w komórkach możemy opisać za pomocą uporządkowanego układu n liczb (i_1, i_2, \dots, i_n) , z których każda może być dowolną z liczb $1, 2, \dots, N$. Stojąca na pierwszym miejscu liczba i_1 podaje numer komórki, w której znalazła się pierwsza cząstka, liczba i_2 — numer komórki, w której znalazła się druga cząstka, ..., liczba i_n — numer komórki, w której znalazła się n -ta cząstka.

Przyjmijmy zbiór wszystkich opisanych wyżej uporządkowanych układów (i_1, i_2, \dots, i_n) , tzn. zbiór wszystkich n -wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru $\{1, 2, \dots, N\}$, za przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω . Jak nietrudno sprawdzić, przestrzeń Ω zawiera N^n zdarzeń elementarnych. Przyporządkujmy każdemu z nich to samo prawdopodobieństwo $1/N^n$. Jeżeli mamy ustalonych n komórek i chcemy, aby w każdej z nich znalazła się jedna cząstka (których łącznie jest n), to możemy otrzymać to na $n!$ sposobów. A zatem

$$P(A) = \frac{n!}{N^n}.$$

Zauważmy, że zdarzenie B składa się z $\binom{N}{n} n!$ zdarzeń elementarnych. Istotnie, spośród N komórek można wybrać n komórek (w których następnie umieścimy po jednej cząstce) na $\binom{N}{n}$ sposobów. A w każdej ustalonej grupie n komórek można — jak stwierdziliśmy przed chwilą — rozmieścić n cząstek tak, aby każda była w innej komórce, na $n!$ sposobów. Mamy więc

$$P(B) = \frac{\binom{N}{n} n!}{N^n} = \frac{N!}{N^n (N-n)!}.$$

Były liczne próby pokazania, że rzeczywiste cząstki fizyczne zachowują się zgodnie z przedstawionym modelem Maxwella-Boltzmann. Okazało się, że większość cząstek zachowuje się zgodnie z tym właśnie modelem jedynie w warunkach małych gęstości i wysokich temperatur gazu tych cząstek. Obserwowane częstości zbytnio odbiegają od prawdopodobieństw wynikających z tego modelu. W związku z tym rozpatrzmy drugi model.

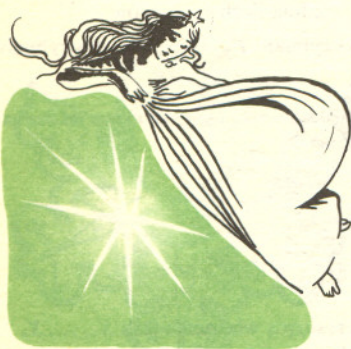
Rozwiązanie 2. (Model Bosego-Einsteina)

W poprzednim rozwiązaniu cząstki ponumerowaliśmy. Traktowaliśmy je więc tak, jakby dały się one od siebie odróżnić. W związku z tym istotne dla nas było nie tylko, w której komórce jest ile cząstek, ale także które cząstki (o jakich numerach) znajdują się w danej komórce. Obecnie uważamy cząstki za nierozróżnialne (co zresztą odpowiada rzeczywistości: tego samego rodzaju cząstek fizycznych nie da się rozróżnić). Wobec tego rozmieszczenie cząstek w komórkach będziemy uważali za dane, gdy będziemy wiedzieć, ile cząstek jest w poszczególnych komórkach. Każde takie rozmieszczenie możemy zapisać za pomocą nieuporządkowanego zespołu liczb (i_1, i_2, \dots, i_n) , z których każda może być dowolną z liczb $1, 2, \dots, N$. Jeżeli liczba 1 wystąpi w takim zespole dokładnie k razy (obojętnie na jakich miejscach), to oznacza to, że w komórce nr 1 znajduje się k cząstek. To samo dotyczy pozostałych liczb $2, 3, \dots, N$. Za przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω przyjmijmy teraz zbiór wszystkich opisanych wyżej nieuporządkowanych zespołów (i_1, i_2, \dots, i_n) (tzn. zbiór wszystkich n -elementowych kombinacji z powtórzeniami zbioru $\{1, 2, \dots, N\}$). Przestrzeń Ω zawiera $\binom{N+n-1}{n}$ zdarzeń elementarnych. Dla przykładu wypisujemy niżej (tabela) wszystkie zdarzenia elementarne przy $N = 3, n = 2$ i odpowiadające im rozmieszczenia cząstek w komórkach we wszystkich trzech rozpatrywanych modelach. W rozpatrywanym obecnie modelu Bosego-Einsteina przyporządkujemy każdemu zdarzeniu elementarnemu to samo prawdopodobieństwo $1/\binom{N+n-1}{n}$. Obecnie zdarzenie A składa się tylko z jednego zdarzenia elementarnego (permutowanie cząstek znajdujących się w ustalonych komórkach nie daje nic nowego, gdyż cząstki są nierozróżnialne). A zatem w obecnie rozpatrywanym modelu

$$P(A) = \binom{N+n-1}{n}^{-1}.$$

Zdarzenie B składa się obecnie z $\binom{N}{n}$ zdarzeń elementarnych. Na tyle bowiem sposobów można wybrać n spośród N komórek, a w wybranych n komórkach można obecnie umieścić po jednej cząstce tylko w jeden sposób.

Będziemy też rozważać zdarzenie C_k polegające na tym, że w ustalonej komórce znajduje się dokładnie k ($k < n$) cząstek. (Red.)



Zmienna X , „ilość cząstek w ustalonej komórce” ma tu rozkład dwumianowy i, jak łatwo sprawdzić,

$$P(C_k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \frac{1}{N^n} (N-1)^{n-k} = \binom{n}{k} \frac{1}{N^k} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-k}$$

Jeśli teraz $N \rightarrow \infty$ i $n \rightarrow \infty$ tak, że średnia ilość cząstek na komórkę $n/N = \lambda$ pozostaje stała, to, jak można udowodnić,

$$P(C_k) \rightarrow e^{-\lambda} \lambda^k / k!$$

(por. Rozkład Poissona). Tak więc tzw. postacią graniczną statystyki Maxwella-Boltzmann jest rozkład Poissona.

Zmienna X , „ilość cząstek w ustalonej komórce” ma tu rozkład

$$P(C_k) = P(X = k) = \binom{N+n-k-2}{n-k} \cdot \binom{N+n-1}{n}$$

Jeśli przyjąć, że $N \rightarrow \infty$ i $n \rightarrow \infty$ w taki sposób, że średnia ilość cząstek na komórkę $n/N = \lambda$ pozostaje stała, to, jak można udowodnić,

$$P(C_k) \rightarrow \frac{\lambda^k}{(1+\lambda)^{k+1}} = \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^k \cdot \frac{1}{1+\lambda}.$$

Oznacza to, że postacią graniczną statystyki Bosego-Einsteina jest rozkład geometryczny

$$z \cdot p = \frac{1}{1+\lambda} \quad i \quad q = \frac{\lambda}{1+\lambda}.$$

Stąd wynika, że

$$P(B) = \binom{N}{n} : (N+n-1).$$

Zgodnie z modelem Bosego-Einsteina zachowują się fotony i atomy zawierające parzystą liczbę cząstek elementarnych. Istnieją jednak cząstki fizyczne, dla których ten model nie jest odpowiedni. W związku z tym rozpatrzmy trzeci model.

Rozwiązanie 3. (Model Fermiego-Diraca)

Przyjmujemy, że cząstki są nierozróżnialne i że w każdej komórce może znajdować się co najwyżej jedna cząstka. Obecnie rozmieszczenie cząstek będzie dane, gdy wskazane będą komórki niepuste (lub — co na jedno wychodzi — puste), gdyż zgodnie z przyjętym założeniem każda niepusta komórka zawiera dokładnie jedną cząstkę. Za przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω przyjmujemy więc w obecnym modelu zbiór wszystkich n -elementowych podzbiorów zbioru N -elementowego (zbioru wszystkich komórek), tzn. zbiór wszystkich n -elementowych kombinacji bez powtórzeń zbioru $\{1, 2, \dots, N\}$. Przestrzeń Ω zawiera więc $\binom{N}{n}$ zdarzeń elementarnych. Każdemu z nich przyporządkujemy to samo prawdopodobieństwo

$$1/\binom{N}{n}.$$

Zdarzenie A składa się oczywiście z jednego zdarzenia elementarnego, więc

$$P(A) = \binom{N}{n}^{-1}.$$

Natomiast

$$P(B) = 1,$$

gdyż zgodnie z przyjętym założeniem jest pewne, że w żadnej komórce nie będzie więcej niż jedna cząstka.

Zgodnie z modelem Fermiego-Diraca zachowują się m.in. elektrony, protony i neutrony. Rozpatrzony przykład jest bardzo pouczający. Widać z niego wyraźnie, że przyjęcie odpowiedniego modelu probabilistycznego zależy od konkretnej sytuacji praktycznej. Wszystkie trzy omówione modele są sensowne z probabilistycznego punktu widzenia. Trudno było z góry przewidzieć, że żadne cząstki fizyczne na ogół nie będą się zachowywać zgodnie z pierwszym modelem (nie jest zresztą wykluczone, że kiedyś takie cząstki zostaną wykryte), że np. fotony będą się zachowywać zgodnie z drugim modelem, a elektrony zgodnie z trzecim.

Tu oczywiście nie można rozważać zdarzenia C_k dla $k > 1$.



Zestawienie zdarzeń elementarnych i odpowiadających im rozmieszczeń cząstek w komórkach przy $N = 3, n = 2$ w rozpatrzonych modelach

1. Model Maxwella-Boltzmannna (kwadraty z liczbami wyobrażają cząstki z odpowiednimi numerami)

Komórka nr	Zdarzenia elementarne								
	(1,1)	(2,2)	(3,3)	(1,2)	(2,1)	(1,3)	(3,1)	(2,3)	(3,2)
1	1 2			1	2	1	2		
2		1 2		2	1			1	2
3			1 2			2	1	2	1

2. Model Bosego-Einsteina (kółka oznaczają cząstki)

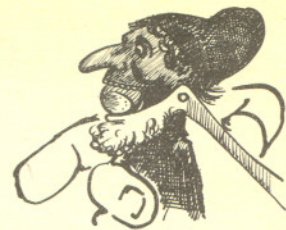
Komórka nr	Zdarzenia elementarne					
	{1,1}	{2,2}	{3,3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}
1	○○			○	○	
2		○○		○		○
3			○○		○	○



3. Model Fermiego-Diraca (kółka oznaczają cząstki)

Komórka nr	Zdarzenia elementarne		
	{1,2}	{1,3}	{2,3}
1	○	○	
2	○		○
3		○	○





Świąteczne orzechy, czyli mały statystyk

Zanim się zje kupione na Święta orzechy warto zorientować się, ile ich jest. Proponujemy wzgardzić zwykłym liczeniem. Oto nasze propozycje:

1 Jeśli zabawa już Ci się znudziła, to przejdź do 4, jeśli zaś nie, to przejdź do następnej nie wykorzystanej jeszcze propozycji.

2 Zsymp orzechy do dużej torby, woreczka, wazy lub garnka, zaczerpnij sporą garść (lub dwie, jeśli to włoskie), policz je i pomaluj — kolor srebrny lub złoty wydają się tu najstosowniejsze. Pomalowane wrzuć z powrotem i dobrze wymieszaj z resztą. Następnie wylosuj (jeśli jest to naczynie otwarte, to nie patrząc lub po ciemku) dwie lub trzy garście i policz, ile wylosowałeś i ile jest wśród nich pomalowanych. Spróbuj teraz oszacować liczbę wszystkich orzechów posługując się

(a) „zdrowym rozsądkiem” (stosunek liczby pomalowanych wśród wylosowanych do liczby wszystkich wylosowanych powinien być w przybliżeniu równy stosunkowi liczby wszystkich pomalowanych do liczby wszystkich w ogóle),

(b) metodą opisaną w przykładzie zastosowania rozkładu hipergeometrycznego do szacowania ilości ryb w stawie.

Przejdź do 1.

3 Wykonaj trzy (lub więcej) niezależne losowania, wrzucając po policzeniu orzechy z powrotem i jako oszacowanie przyjmij średnią z trzech oszacowań typu (a) lub (b).

Przejdź do 1.

4 Policz orzechy i porównaj wynik z otrzymanymi oszacowaniami. Jakie oszacowania były lepsze — (a) czy (b)? Zakończ działalność i przejdź do 9 — o ile nie nabrałeś ochoty do dalszej zabawy i nie straciłeś wiary w skuteczność praktycznych zastosowań rachunku prawdopodobieństwa.

W tym przypadku bowiem możesz skorzystać z dalszych propozycji:

5 Oblicz, jakie było prawdopodobieństwo uzyskania w 2 takiej ilości pomalowanych, jaka zdarzyła się w rzeczywistości, jeśli już wiadomo, ile ich jest naprawdę. Jakie byłoby to prawdopodobieństwo, gdyby było ich dwa razy więcej (przy tej samej ilości pomalowanych), a jakie, gdyby było ich dwa razy mniej? (Przyjmij założenia metody (b)).

Przejdź do 9.

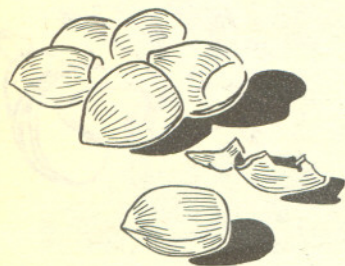
6 Jaki sposób losowania orzechów zapewniłby pełną stosowność metody (a)? Przejdź do 9.

7 Zastosuj tę metodę do obliczenia ilości ziarenek kawy w paczce, zastępując pewną znaną Ci ilość ziarenek kawy tą samą ilością ziarenek fasoli lub groszku (dobry jest też pieprz — po wykonaniu eksperymentu nie trzeba go wybierać: zmielony wraz z kawą w niewielkiej ilości podnosi jej walory smakowe).

Przejdź do 9.

8 Oszacuj ilość ziarn kaszy gryczanej w kilogramie, posługując się ryżem (lub ryżem posługując się kaszą). Dlaczego dopiero w tym przypadku metoda (a) ma prawo dawać wyniki niewiele odbiegające od wyników uzyskiwanych w (b)? Przejdź do 9.

9 Nie zjadaj wszystkich orzechów — zostaw trochę na Święta.



„O trójkącie można nieskończenie”

Czytelnikom, którzy nie wierzą w swoje siły w konkursie BUDUJEMY KOPULĘ, proponujemy inny:

Znaleźć nowe twierdzenie o trójkącie

Przez „znaleźć” rozumiemy samodzielnie wymyślić i udowodnić.

„Nowe” — znaczy takie, które nie zostało nigdzie jeszcze napisane (albo nam tak się zdaje).

Będziemy oceniać

1) elegancję i oryginalność twierdzenia (decyduje gust Redakcji),

2) prostotę dowodu. Dowody błędne dyskwalifikują pracę.

Najciekawsze twierdzenia opublikujemy. Termin nadsyłania — 15 lutego 79.

A oto przykład:

Odcinki łączące punkty styczności boków i okręgu wpisanego w trójkąt z przeciwległymi wierzchołkami tego trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Kto zna powyższe twierdzenie?

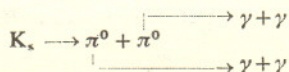


Zadania

F 60a. Stężenie zanieczyszczenia powietrza substancjami radioaktywnymi uważane jest za dopuszczalne, jeśli średnia jego aktywność wynosi $2,7 \cdot 10^{-12}$ Ci/l (Ci — kiur — jest jednostką aktywności substancji promieniotwórczej i odpowiada $3,7 \cdot 10^{10}$ rozpadów na sekundę. Powietrze w laboratorium zostało zanieczyszczone jodem J^{131} w takim stężeniu, że rzeczywista aktywność wynosi $2,252 \cdot 10^{-12}$ Ci/l. Pomiary kontrolne przeprowadza się pobierając 1 litr powietrza i licząc rozpad w ciągu minuty. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pomiar kontrolny wykaże stężenie większe od dopuszczalnego?

Rozwiązanie na str. 16

F 60b. Mezon K_s^0 jest praktycznie jedyną cząstką, której rozpad może dawać cztery kwanty γ — rozpad taki przebiega wtedy wg schematu



Dysponujemy detektorem, w którym prawdopodobieństwo rejestracji pojedynczego kwantu γ wynosi $\alpha = 0,4$. W pewnym badaniu zarejestrowano 1000 rozpadów, w których pojawiły się dokładnie cztery kwanty γ (i które wobec tego zidentyfikowano jako rozpady mezonu K_s^0), oraz pewne ilości rozpadów z trzema, dwoma i jednym kwantem γ . Ile spośród nich mogło być w rzeczywistości omawianego typu rozpadami K_s^0 ? Oszacować ilość wszystkich takich rozpadów. Rozwiązanie na str. 16

Redaguje mgr Andrzej MAKOWSKI

M 178. Udowodnić, że jeżeli a, b, c są liczbami rzeczywistymi, to $(ab + ac + bc)a^2b^2c^2 \leq a^8 + b^8 + c^8$.

Rozwiązanie na str. 16

M 179. Udowodnić, że okręgi opisane na dwóch ścianach czworościanu przecinają się pod takim samym kątem, jak okręgi opisane na pozostałych dwóch jego ścianach.

Uwaga. Kątem, pod którym przecinają się dwa okręgi, nazywamy kąt utworzony przez styczne do nich w punkcie przecięcia.

Rozwiązanie na str. 16

M 180. W turnieju szachowym rozgrywanym systemem „każdy z każdym” uczestniczyło ośmiu szachistów. Każdy z nich zdobył inną liczbę punktów niż pozostali. Zdobywca drugiego miejsca uzyskał tyle punktów, ile razem zebrali ostatni czterej. Jaki był wynik partii między czwartym a szóstym zawodnikiem w ostatecznej klasyfikacji?

Rozwiązanie na str. 16

Co to są przedziały ufności

Doc. dr Ryszard ZIELIŃSKI

„W celu wyznaczenia ładunku elektronu wykonano pięć niezależnych pomiarów tego ładunku i otrzymano wyniki (w absolutnych jednostkach elektrostatycznych): $4,781 \cdot 10^{-10}$; $4,795 \cdot 10^{-10}$; $4,769 \cdot 10^{-10}$; $4,792 \cdot 10^{-10}$ i $4,779 \cdot 10^{-10}$. Pytanie: ile wynosi ładunek elektronu? Co w ogóle można na ten temat powiedzieć mając takie wyniki pomiarów?”

Stały Czytelnik Deltę zauważył być może, że już kiedyś rozważaliśmy zadania tego typu: w artykule „O metodzie najmniejszych kwadratów” (Delta 8/1978) podaliśmy pewną zasadę postępowania przy rozwiązywaniu takich zadań. Zasada ta prowadziła do odpowiedzi, że ładunek elektronu jest równy średniej arytmetycznej otrzymanych wyników (a więc w naszym przypadku wynosi $4,783 \cdot 10^{-10}$). Można się spodziewać, że inna seria pięciu pomiarów dałaby inne wyniki i że wobec tego średnia tych nowych wyników byłaby różna od przed chwilą obliczonej. Mielibyśmy więc dwie różne odpowiedzi na to samo pytanie. Nie ma w tym nic dziwnego, bo przecież już pierwsza seria pomiarów dała nam pięć różnych odpowiedzi na interesującą nas wielkość, ale fakt, że odpowiedź ciągle zmienia się w miarę wykonywania coraz to nowych pomiarów może być irytujący.

Pewnym wyjściem z tej „niestabilnej” sytuacji byłoby zaokrąglenie wszystkich wyników pomiarów do dwóch cyfr znaczących; wtedy każdy wynik brzmiałby: $4,8 \cdot 10^{-10}$ i odpowiedź byłaby pozornie jednoznaczna. Co więcej, przy takich różnicach pomiędzy wynikami poszczególnych pomiarów, jakie obserwowaliśmy do tej pory, można by z dużą dozą pewności oczekiwać, że dalsze pomiary nie zmienią tej odpowiedzi. Odpowiedź taka jest jednak tylko pozornie jednoznaczna, bo powinniśmy jakoś zaznaczyć fakt zaokrąglania wyników pomiarów, co można zrobić pisząc $(4,8 \pm 0,05) \cdot 10^{-10}$ zamiast po prostu $4,8 \cdot 10^{-10}$. To postępowanie prowadzi do *oceny przedziałowej* interesującej nas wielkości (oceny za pomocą przedziału), zamiast poprzednio stosowanej *oceny punktowej* (oceny za pomocą pojedynczej liczby). Jeżeli bardziej wnikliwie przyjrzymy się naszemu zadaniu, zauważymy dalsze problemy. Przede wszystkim powstaje pytanie czy jeżeli już decydujemy się na ocenę przedziałową, to musi to być ocena uzyskiwana — tak jak wyżej — za pomocą zaokrąglania wyników. Może „lepszy” byłby na przykład przedział, którego dolnym końcem byłby najniższy, a górnym najwyższy wynik z naszej serii pomiarów, a więc w rozważanym przypadku przedział $(4,769 \cdot 10^{-10}; 4,795 \cdot 10^{-10})$? Ten nowy przedział jest krótszy od poprzedniego, daje więc bardziej precyzyjne oszacowanie interesującej nas wielkości, ale...

Otóż istnieje pewne „ale”, związane z następującymi okolicznościami. Wyobraźmy sobie, że decydujemy się wykonać jeszcze jeden, szósty, pomiar ładunku elektronu. Czy możemy być pewni, że wynik tego pomiaru znajdzie się w wyznaczonym przedziale $(4,769 \cdot 10^{-10}; 4,795 \cdot 10^{-10})$? Na pewno możemy być bardziej pewni, że nowy wynik znajdzie się w szerszym przedziale $(4,8 \pm 0,05) \cdot 10^{-10}$, ale czy z kolei tego możemy być pewni „na 100%”? Jak zbudować przedział, który byłby „dostatecznie pewny”? Pewność ta zresztą powinna dotyczyć nie tyle tego, że dalsze wyniki pomiarów znajdują się w tym przedziale, ile tego, że dany przedział zawiera szacowaną wielkość, w naszym przypadku „prawdziwą” wartość ładunku elektronu. Oto pewne rozwiązanie zagadnienia estymacji przedziałowej. Oznaczmy wielkość szacowaną przez q (w naszym zadaniu jest to ładunek elektronu), wyniki pomiarów oznaczmy przez x_1, x_2, \dots, x_n (w naszym zadaniu mamy $n = 5$) i przez $I(x_1, x_2, \dots, x_n)$ oznaczmy przedział zbudowany na podstawie tych wyników. Niech γ będzie ustaloną liczbą z przedziału $(0, 1)$.

Definicja. Przedział $I(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nazywamy *przedziałem ufności* na poziomie ufności γ , jeżeli

$$P\{q \in I(x_1, x_2, \dots, x_n)\} = \gamma,$$

tzn. jeżeli przedział $I(x_1, x_2, \dots, x_n)$ z prawdopodobieństwem γ zawiera szacowaną wielkość q . Teoria przedziałów ufności stanowi obszerny fragment statystyki matematycznej. Zilustrujemy na bardzo ważnych dla zastosowań przykładach typowe rozwiązania podawane przez tę teorię, a na zakończenie wrócimy do naszego wyjściowego zadania szacowania ładunku elektronu.

Przykład 1 (rozkład wykładniczy). Za pomocą licznika Geigera-Müllera badamy intensywność pewnego źródła promieniowania. Intensywność źródła mierzymy średnią liczbą cząstek wypromieniowanych (dokładniej: zarejestrowanych przez licznik) w ciągu sekundy. Liczne badania zagadnienia promieniotwórczości pozwalają na sformułowanie prawa, że jeżeli intensywność promieniowania jest λ , to odstęp czasu pomiędzy dwoma kolejnymi „tyknięciami” licznika (oznaczymy ten odstęp przez T) jest zmienną losową o *rozkładzie wykładniczym*:

$$P\{T \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0.$$

Wzór ten można również napisać w postaci:

$$(1) \quad P\{\lambda T \leq t\} = 1 - e^{-t}.$$

Dla danej liczby γ , powiedzmy $\gamma = 0,95$, znajdziemy takie t_γ , żeby $1 - e^{-t_\gamma} = \gamma$.

Otrzymujemy (log oznacza logarytm naturalny), że $t_\gamma = -\log 0,05 = 2,996$.

Jeżeli więc w pewnym eksperymencie zaobserwujemy, że badany odstęp czasu wynosi T , to na mocy wzoru (1) mamy

$$P\left\{\lambda \leq \frac{2,996}{T}\right\} = 0,95$$



i przedział $\left(0, \frac{2,996}{T}\right)$ jest przedziałem ufności na poziomie ufności 0,95 dla interesującej nas intensywności λ . Innymi słowy: z prawdopodobieństwem 0,95 intensywność badanego źródła promieniowania mieści się w tak obliczonym przedziale.

Przykład 2 (rozkład normalny). W teorii pomiarów uzasadnia się, że w wielu typowych sytuacjach błąd pomiaru jest zmienną losową o *rozkładzie normalnym (rozkładzie Gaussa)*. Oznacza to, że jeżeli X jest wynikiem pomiaru wielkości μ , to

$$(2) \quad P\{X \leq x\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt,$$

gdzie σ jest parametrem rozkładu charakteryzującym dokładność pomiarów (σ nazywa się odchyleniem średnim lub odchyleniem standardowym, natomiast σ^2 nazywa się wariancją. Jest to dokładnie taka sama wariancja zmiennej losowej X , z jaką Czytelnik spotyka się w podręczniku W. Szenia dla szkoły średniej).

Wzór (2) można oczywiście zapisać w postaci
$$P\{X \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

lub w postaci

$$(3) \quad P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Prawa strona tego wzoru, funkcja
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

jest stabilizowana, a jej tablice są łatwo dostępne; nazywa się ona dystrybucją rozkładu normalnego. Jak w poprzednim przykładzie, możemy dla danej liczby $\gamma \in (0, 1)$ znaleźć takie x_γ , żeby $\Phi(x_\gamma) = \gamma$.

Jeżeli znamy wartość parametru σ , to ze wzoru (3) otrzymujemy natychmiast „jednostronny” przedział ufności dla μ na poziomie ufności γ , mamy bowiem

$$P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq x_\gamma\right\} = \gamma$$

czyli $P\{\mu \geq X - x_\gamma \cdot \sigma\} = \gamma$, co prowadzi do przedziału ufności $(X - x_\gamma \cdot \sigma, +\infty)$. Ze wzoru (3) łatwo otrzymuje się wzór

$$(4) \quad P\left\{\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| \leq x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1.$$

Jeżeli z_γ jest taką liczbą, że $2\Phi(z_\gamma) - 1 = \gamma$, to otrzymujemy wzór

$$P\left\{\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| \leq z_\gamma\right\} = \gamma,$$

który natychmiast daje „dwustronny” przedział ufności dla μ na poziomie ufności γ : $(X - z_\gamma \cdot \sigma, X + z_\gamma \cdot \sigma)$.

Przykład 3 (rozkład t Studenta). Jeżeli nie znamy wartości parametru σ , podane wzory stają się bezużyteczne i musimy postępować inaczej.

Przypuśćmy, że wykonaliśmy serię pomiarów pewnej nieznanej wielkości μ i że otrzymaliśmy wyniki x_1, x_2, \dots, x_n . Niech

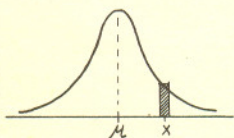
$$(5) \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Wielkość \bar{x} jest po prostu średnią arytmetyczną naszych wyników, natomiast s^2 jest wielkością, za pomocą której szacuje się nieznaną σ^2 . W rachunku prawdopodobieństwa dowodzi się, że ma miejsce następujący wzór (analogiczny do wzoru (3)):

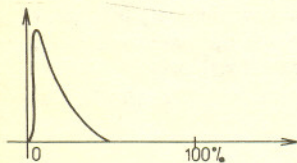
$$P\left\{\frac{\bar{x}-\mu}{s} \sqrt{n} \leq x\right\} = c_{n-1} \int_{-\infty}^x \frac{dt}{\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{n/2}},$$

gdzie c_{n-1} jest pewną stałą. Funkcja występująca po prawej stronie tego wzoru — oznaczmy ją przez $H_{n-1}(x)$ — nazywa się dystrybucją *rozkładu t Studenta*. Funkcja ta, podobnie jak dystrybucja rozkładu normalnego, jest stabilizowana i tablice jej są łatwo dostępne.

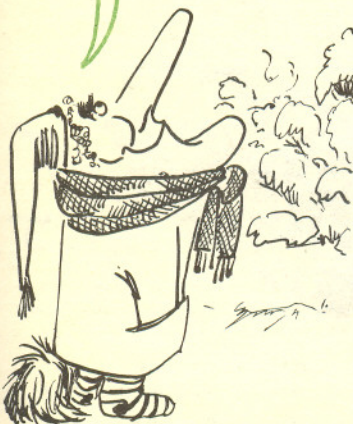
Błąd pomiaru może mieć rozkład normalny tylko wtedy, gdy pomyłki w kierunku nadmiaru są tak samo prawdopodobne, jak pomyłki w kierunku niedomiaru. Na poniższym rysunku przedstawiono tzw. krzywą gęstości rozkładu normalnego; μ jest wielkością mierzoną, a rzędna w punkcie x jest proporcjonalna do prawdopodobieństwa, że wynik pomiaru będzie równy $x \pm \frac{1}{2} dx$.



Jeżeli zmierzmy np. zawartość (w procentach) jakiegoś składnika w wodzie rzecznej i ta zawartość jest bardzo niska, a nasz pomiar niezbyt precyzyjny, to krzywa opisująca rozkład prawdopodobieństwa błędów będzie miała raczej kształt taki, jak na poniższym rysunku, a więc bardzo różny od kształtu odpowiedniej krzywej rozkładu normalnego.



W takiej sytuacji budowa przedziału ufności wymaga zupełnie innego postępowania niż opisane w artykule.





Odpowiednikiem wzoru (4) jest teraz wzór

$$P \left\{ \left| \frac{\bar{x} - \mu}{s} \sqrt{n} \right| \leq x \right\} = 2 H_{n-1}(x) - 1,$$

jeżeli więc znajdziemy taką liczbę t_γ , że $2H_{n-1}(t_\gamma) - 1 = \gamma$,

to na mocy wzoru

$$(6) \quad P \left\{ \left| \frac{\bar{x} - \mu}{s} \sqrt{n} \right| \leq t_\gamma \right\} = \gamma$$

otrzymujemy przedział ufności dla μ

$$\left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\gamma, \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\gamma \right).$$

Przykład 4 (rozkład χ^2). W sytuacjach, gdy parametr σ nie jest znany, możemy być zainteresowani w jego oszacowaniu za pomocą przedziału ufności. Odpowiedni wzór, analogiczny do wzorów (1), (3) i (6), ma teraz postać

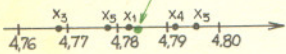
$$P \left\{ \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq x \right\} = a_{n-1} \int_0^x t^{\frac{n-3}{2}} e^{-\frac{t}{2}} dt,$$

gdzie a_{n-1} jest pewną stałą. Funkcja występująca po prawej stronie tego wzoru jest dystrybuantą rozkładu χ^2 (rozkładu chi-kwadrat); tablice tej funkcji są również łatwo dostępne. Bardziej szczegółowe uwagi na temat wszystkich omawianych wyżej sposobów konstrukcji przedziałów ufności znajdzie Czytelnik w mojej książeczce „*Rachunek prawdopodobieństwa z elementami statystyki matematycznej*”, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne 1976.

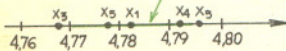
Na zakończenie powróćmy do naszego zadania szacowania ładunku elektronu. Przypuśćmy, że zgodnie z ogólną teorią błędów pomiarów mamy tu do czynienia z rozkładem normalnym i że nie znamy precyzji metody, za pomocą której otrzymaliśmy nasze wyniki, tzn. nie znamy parametru σ . W tej sytuacji powinniśmy skorzystać ze wzoru (6). Niech np. $\gamma = 0,9$. Z tablic otrzymujemy $t_\gamma = 2,132$. Na podstawie wzorów (5) mamy $\bar{x} = 4,783 \cdot 10^{-10}$ oraz $s = 0,011 \cdot 10^{-10}$. Jako rozwiązanie otrzymujemy przedział $(4,772 \cdot 10^{-10}; 4,794 \cdot 10^{-10})$, a więc znacznie krótszy od proponowanych na wstępie.

γ	x_γ	z_γ	t_γ (dla $n = 5$)
0,9	1,282	1,645	2,132
0,95	1,645	1,960	2,776
0,99	2,326	2,576	4,604

oszacowanie punktowe Delta 8/1978



oszacowanie przedziałowe



Według najnowszych pomiarów ładunek elektronu wynosi $1,6021892 \cdot 10^{-19}$ kulomba, co w absolutnych jednostkach elektrostatycznych równa się $4,803242 \cdot 10^{-10}$.

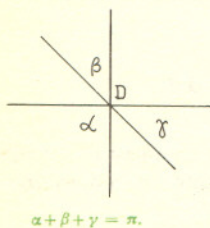
Rozwiązanie zadania M 178

Do dowodu trzykrotnie wykorzystamy pożyteczną nierówność $xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2$ (jest ona równoważna nierówności $\frac{1}{2} [(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] \geq 0$).

Przyjmijmy kolejno $(x, y, z) = (a^4, b^4, c^4)$, (a^2b^2, b^2c^2, c^2a^2) , (ab^2c, abc^2, a^2bc) :
 $a^8 + b^8 + c^8 \geq a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4 \geq a^2b^4c^2 + b^2c^4a^2 + c^2a^2b^2 \geq a^2b^3c^3 + b^2c^3a^3 + c^2a^3b^3 = (bc + ca + ab)a^2b^2c^2$.

Rozwiązanie zadania M 179.

Niech A, B, C, D będą wierzchołkami czworoscianu. Niech α będzie kątem, pod którym przecinają się okręgi opisane na ścianach mających wspólną krawędź AD , podobnie β niech odpowiada krawędzi BD , $\gamma - CD$, $\alpha' - BC$, $\beta' - CA$, $\gamma' - AB$. Kąty α, β, γ przy wierzchołku D utworzone są przez styczne w punkcie D do okręgów opisanych na trójkątach BCD, ACD i ABD . Styczne te leżą w jednej płaszczyźnie, a mianowicie w płaszczyźnie stycznej w punkcie D do sfery opisanej na czworoscianie. Jest więc (por. rysunek)



$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Podobnie, rozpatrując pozostałe wierzchołki, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \alpha + \beta' + \gamma' &= \pi, \\ \alpha' + \beta + \gamma &= \pi, \\ \alpha' + \beta' + \gamma &= \pi. \end{aligned}$$

Dodając stronami równości pierwszą i drugą oraz trzecią i czwartą dostajemy $2\alpha + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 2\pi$, skąd $\alpha = \alpha'$.

Rozwiązanie zadania M 180

Niech x_i będzie liczbą punktów zdobytych przez zawodnika, który zajął i -te miejsce w turnieju. Mamy $7 \geq x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5 > x_6 > x_7 > x_8$, a więc $x_2 \leq 6,5$. Ostatni czterech zawodnicy rozegrali między sobą 6 partii, punkty za te partie zostały przyznane tym zawodnikom, zatem $x_4 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 6$, skąd $x_2 \geq 6$. Musi więc być $x_2 = 6,5$ lub $x_2 = 6$. W pierwszym przypadku drugi zawodnik musiałby sześć partii wygrać i jedną zremisować, pierwszy z drugim by najwyżej zremisował i $x_1 \leq 6,5 = x_2$, co przeczy nierówności $x_1 > x_2$. Musi więc być $x_2 = 6$, zatem $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 6$, tzn. każdy z ostatnich czterech szachistów uzyskał punkty tylko z partii rozgrywanych z pozostałymi trzema z tej grupy, a więc przegrał z każdym z zawodników, którzy zajęli pierwsze cztery miejsca. W szczególności czwarty zawodnik wygrał z szóstym.

Rozwiązanie zadania F 60a

Zakładamy, że zmienna losowa X : „liczba rozpadów na minutę w objętości 1 litra” ma rozkład Poissona. Rzeczywiście stężenie J^{131} w atmosferze laboratorium daje przeciętnie $2,252 \cdot 10^{-12} \cdot 3,7 \cdot 10^{10} \cdot 60 \approx 5$ rozpadów na minutę i litr, zatem prawdopodobieństwo $P(X = k)$ tego, że w pomiarze kontrolnym zaobserwuje się k rozpadów, wynosi w przybliżeniu

$$\frac{5^k}{k!} e^{-5}.$$

Dopuszczalne stężenie J^{131} odpowiada $2,7 \cdot 10^{-12} \cdot 3,7 \cdot 10^{10} \cdot 60 \approx 6$ rozpadom na minutę i litr. Pomiar wykaże więc stężenie większe od dopuszczalnego, jeśli zaobserwuje się w nim co najmniej 7 rozpadów, wobec czego szukanym prawdopodobieństwem jest

$$P(X \geq 7) = 1 - e^{-5} \sum_{i=0}^6 \frac{5^i}{i!} \approx 0,24.$$

Rozwiązanie zadania F 60b.

Z danych zadania wynika, że proces rejestracji kwantów γ pochodzących z pojedynczego rozpadu mezonu K_0^0 na cztery kwanty γ możemy traktować jako schemat Bernoulliego złożony z czterech prób o prawdopodobieństwie sukcesu $\alpha = 0,4$. Liczba X zarejestrowanych kwantów γ jest wtedy ilością sukcesów w tym schemacie, i wobec tego prawdopodobieństwa zaobserwowania k kwantów γ wynoszą

$$P(X = k) = \binom{4}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{4-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Do uzyskania odpowiedzi na postawione pytania możemy teraz zastosować następujące (uproszczone!) wnioskowanie: Interpretujemy prawdopodobieństwa jako względne częstości. Ponieważ z nieznannej ilości M rozpadów omawianego typu zarejestrowaliśmy 1000 rozpadów z czterema kwantami γ , a względna częstość ich występowania wynosi $\binom{4}{1}(0,4)^1(0,6)^3 = (0,4)^4 = 0,0256$, to

$$0,0256 M = 1000,$$

skąd

$$M \approx 39062.$$

Interpretując dalej prawdopodobieństwa jako częstości znajdujemy: oszacowanie liczby rozpadów nie zarejestrowanych

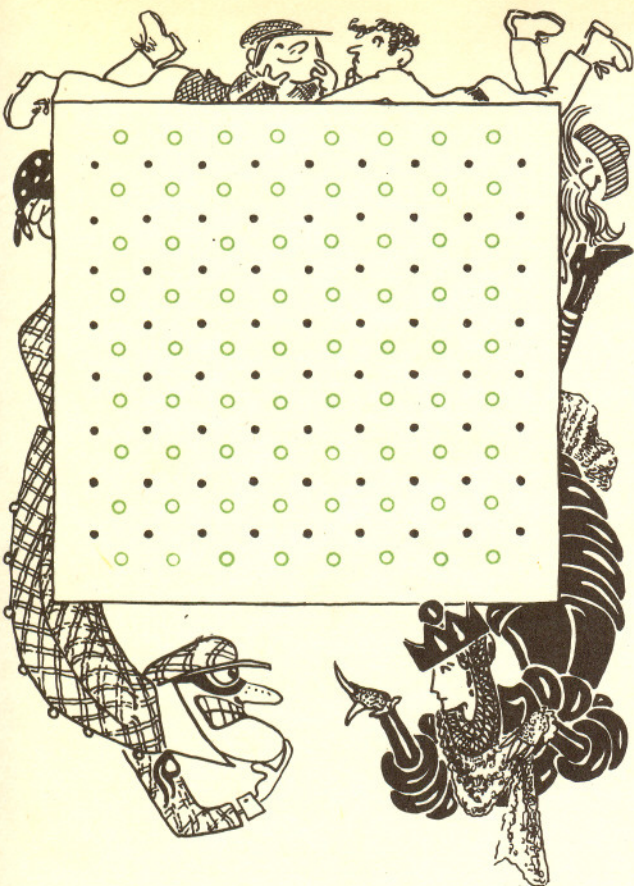
$$N(0) \approx 39062 \cdot (0,6)^4 \approx 5062$$

oraz oszacowania liczb rozpadów omawianego typu zarejestrowanych odpowiednio jako rozpady z 1, 2 i 3 kwantami γ :

$$N(1) = 39062 \cdot 4 \cdot (0,6)^3 \cdot 0,4 \approx 13500,$$

$$N(2) = 39062 \cdot 6 \cdot (0,6)^2 \cdot (0,4)^2 \approx 13500,$$

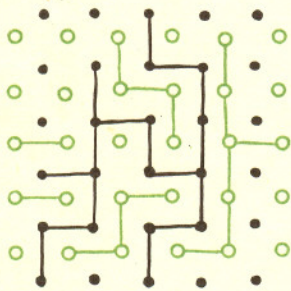
$$N(3) = 39062 \cdot 4 \cdot 0,6 \cdot (0,4)^3 \approx 6000.$$



Gra, którą opiszemy, stanowi pomysł amerykańskiego matematyka, Davida Gale'a (1958). Szachownicę do gry w „mosty” widzimy na rysunku. Jeden z graczy stawia czerwone (lub na przykład przerywane) linie pomiędzy czerwonymi punktami (czy np. białymi kropkami), drugi rysuje czarne (lub ciągłe) linie pomiędzy czarnymi kropkami. Gracze wykonują ruchy na przemian. Żadne z narysowanych linii nie mogą się przecinać. Zwycięzcą zostaje ten z graczy, który pierwszy zdoła połączyć przeciwległe brzegi szachownicy (oznaczone jego kolorem) linią swojego koloru („mostem”). Gdybyśmy chcieli używać szachownicy wielokrotnie, powinniśmy zamiast rysowania kresek układać na niej odpowiednio zabarwione patyczki.

Ta gra jest zdeterminowana, to znaczy wynik można przewidzieć, jeśli tylko gracze grają mądrze. W naszej grze gracz zaczynający ma zwycięską strategię; powinien wygrać. Strategia ta jest nieskomplikowana, chociaż wpaść na nią nie jest tak łatwo. Aby nie psuć od razu zabawy Czytelnikom, nie podamy jej w tym numerze. Zresztą wprawny gracz (zaczynający) wygra i bez zalgorytmizowanej strategii. Proponujemy jednak pewne nowe warianty gry.

1. Zwycięzca dostaje 15 pkt pomniejszone o liczbę „prześei” swojego „mostu”. Przykładowo, w sytuacji przedstawionej na rysunku gracz czarny dostałby 4 pkt. Następną grę rozpoczyna drugi z graczy i tura toczy się np. do 21 pkt. Nie jest znana strategia, która zapewnia zbudowanie jak najkrótszego mostu.
2. Nieznana jest również strategia pozwalająca zbudować most w jak najmniejszej liczbie posunięć. Dlatego można umówić się, że zwycięzca dostaje np. 20 pkt pomniejszone o liczbę posunięć wykonanych w czasie gry. Na naszym rysunku dostałby 4. Potem następuje zmiana zaczynającego i gra toczy się do ustalonej liczby punktów.
3. Każdy z graczy ma prawo w dowolnym momencie gry „wysadzić w powietrze” jeden segment mostu przeciwnika, tzn. zetrzeć odpowiednią linię i postawić tam swoją. Linia ta nie może być już starta przez przeciwnika (w ciągu całej gry). Z tego „prawa do dywersji” każdy z graczy może skorzystać tylko jeden raz w ciągu partii. Gracz nie ma prawa do wysadzenia mostu przeciwnika, jeśli jego przeciwnik postawił właśnie linię kończącą most z jednego brzegu na drugi (bo w tym momencie gra zostaje zakończona).
4. Kolejny wariant (okładka) można nazwać „nasi ludzie są wszędzie” lub jakoś tak. Należy zbudować linię (siatkę szpiegowską) z A (ważne miasto Szwabramanii) do B (stolica Piligrinii), unikając zasadzek, jakie zastawia Urodonal Chatelena, as kontrwywiadu Piligrinii.



Gracz „czarny” wygrał!

