

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 3 (63)

Co to jest teoria retraktów <i>Prof. dr Karol Borsuk</i>	str.	1
Fizyka wzrostu kryształów <i>Dr Marian A. Herman</i>	str.	6
O początkach metody aksjomatycznej <i>Dr Jan Waszkiewicz</i>	str.	10
Drobiazgi	str.	12
Mała Delta	str.	13
Zadania	str.	15
Mechanika, komputer, człowiek (VII) <i>Prof. dr Dominik Rogula</i>	str.	16

**W następnym numerze:**  
**Ochrona środowiska**

„Delta”  
 matematyczno-fizyczny miesięcznik  
 popularny  
 Polskiego Towarzystwa  
 Matematycznego i Polskiego  
 Towarzystwa Fizycznego  
 wydawany przy poparciu  
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania  
 Komitet Redakcyjny

doc. dr J. Bartke  
 doc. dr A. Bączyński  
 doc. dr B. Gleichgewicht  
 prof. dr K. Goebel  
 doc. dr B. Iwaszkiewicz  
 doc. dr T. Iwiński  
 doc. dr A. Januszajtis  
 prof. dr L. Jeśmanowicz  
 mgr H. Kaczorek  
 prof. dr M. Kuczma  
 mgr A. Mąkowski  
 prof. dr Z. Pawlak  
 prof. dr A. Piekara  
 prof. dr Z. Semadeni  
 prof. dr J. Stankowski  
 prof. dr M. Subotowicz  
 doc. dr S. Turnau

doc. dr J. Wdowczyk  
 prof. dr Janusz Zakrzewski —  
 wiceprzewodniczący  
 prof. dr Wojciech Żakowski —  
 przewodniczący

Redaguje Kolegium w składzie:  
 doc. dr T. Hofmokl z-ca red. nac.  
 B. Jaworska-Kordos — ilustracje  
 dr M. Kordos — red. nac.  
 dr K. Prażmowski — red. techn. graf.  
 mgr K. Szypcio — sekr. red.  
 dr M. Szurek  
 doc. dr M. Świącki  
 Adres Redakcji  
 ul. Hoża 69 pok. 151,  
 00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.  
 Ossolińskich — Wydawnictwo  
 Wrocław, Oddział w Warszawie  
 Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.  
 wyd.; 2,50 ark. druk.;  
 papier offsetowy III kl. 80 g. 61 × 86  
 Wydrukowano w Drukarni im.  
 Rewolucji Październikowej  
 Warszawa ul. Mińska 65.  
 Nr zam. 1664/78 C-36

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60, — cena prenumeraty półrocznej, zł 30 —

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:  
 — do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny  
 — do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.  
 Jednostki gospodarki społecznej instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.  
 Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorzy indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.  
 Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.

Sprzedż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7

00-068 Warszawa, Poland or with

— Kubon Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68,

Bundesrepublik Deutschland.

— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,

— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 5— nr indeksu 35723/35550

# Co to jest teoria retraktów?

Prof. dr Karol BORSUK, członek rzeczywisty PAN

**1. Pojęcie przestrzeni.** Przez *przestrzeń* rozumiemy zbiór  $X$ , którego elementy nazywamy punktami i w którym określone jest pojęcie *granicy*, a więc ustalone jest kiedy punkt  $x \in X$  jest granicą ciągu punktów  $x_1, x_2, \dots \in X$ , czyli kiedy  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ . Pojęcie granicy ma przy tym spełniać pewne proste warunki, których

- 1°  $\rho(x, x') = \rho(x', x)$ ,
- 2°  $\rho(x, x') = 0$  wtedy i tylko wtedy gdy  $x = x'$ ,
- 3° dla każdej trójki punktów  $x, x', x''$  jest  $\rho(x, x'') \leq \rho(x, x') + \rho(x', x'')$  oraz taką, że wyznaczone przez tę odległość pojęcie zbieżności jest identyczne z danym pojęciem zbieżności w  $X$ .

Nie każda przestrzeń jest metryzowalna, w dalszym jednak ciągu rozważać będziemy jedynie przestrzenie metryzowalne. Jasne jest, że każdy podzbiór przestrzeni jest przestrzenią.

Klasycznym przykładem przestrzeni jest tzw. *n-wymiarowa przestrzeń euklidesowa*  $E^n$ , której punktami są wszystkie układy liczb rzeczywistych  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , z odległością daną przez wzór

$$\rho((x_1, \dots, x_n), (x'_1, \dots, x'_n)) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - x'_k)^2}$$

Naturalnym odpowiednikiem przestrzeni  $E^n$  jest nieskończenie-wymiarowa *przestrzeń Hilberta*  $E^\infty$ , której punktami są wszystkie ciągi liczb rzeczywistych  $(x_1, x_2, \dots)$  takie, że  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$  i gdzie odległość dana jest przez wzór

$$\rho((x_1, x_2, \dots), (x'_1, x'_2, \dots)) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - x'_k)^2}$$

**2. Najprostsze pojęcia topologiczne.** Punkt  $a$  przestrzeni  $X$  nazywa się *punktem skupienia* zbioru  $A \subset X$ , jeżeli w  $A$  istnieją różne od  $a$  punkty  $a_1, a_2, \dots$  takie, że  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$ . Zbiór  $A$ , który zawiera wszystkie swe punkty skupienia nazywa się *domkniętym*. Podzbiór  $B$  przestrzeni  $X$  nazywa się *otwartym*, jeżeli zbiór  $X \setminus B$  jest domknięty.

Mówimy, że przestrzeń jest *spójna*, jeżeli nie jest sumą dwóch niepustych i rozłącznych zbiorów domkniętych. Przez *przestrzeń zwartą* rozumiemy przestrzeń, w której każdy zbiór nieskończony ma punkty skupienia. Przestrzenie (metryzowalne) zwarte nazywamy *kompaktami*, a kompakta spójne — *continuami*.

Łatwo okazać, że podzbiór  $Q^n$  (zwany *kostką n-wymiarową*) przestrzeni  $E^n$  złożony ze wszystkich takich punktów  $(x_1, \dots, x_n)$ , że  $0 \leq x_k \leq 1$  dla  $k = 1, \dots, n$  jest continuum i podobnie continuum jest też tzw. *kostka podstawowa Hilberta*, czyli zbiór  $Q^\infty$  złożony ze wszystkich takich punktów  $(x_1, x_2, \dots) \in E^\infty$ , że  $0 \leq x_k \leq \frac{1}{k}$  dla  $k = 1, 2, \dots$

Funkcja  $f: X \rightarrow Y$  przyporządkowująca każdemu punktowi  $x$  przestrzeni  $X$  punkt  $f(x)$  przestrzeni  $Y$  nazywa się *przekształceniem*  $X$  w  $Y$  jeżeli jest *ciągła*, tj. jeżeli dla każdego ciągu punktów  $x_1, x_2, \dots \in X$  relacja  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$  pociąga za sobą relację  $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k)$ . Zbiór  $f(X)$  wszystkich punktów postaci  $f(x)$ , gdzie  $x \in X$ , nazywa się *obrazem* przestrzeni  $X$  przy przekształceniu  $f$ . W przypadku, gdy  $f(X) = Y$ , mówimy, że  $f$  przekształca  $X$  na  $Y$ .

## Informacje historyczne i bibliograficzne.

Pojęcie retrakcji, retraktu i retraktu absolutnego (czyli przestrzeni AR) zostało wprowadzone w roku 1931 w pracy: K. Borsuk, *Sur les rétractes*, *Fund. Math.* 17. Pojęcie absolutnego retraktu otoczeniowego (czyli przestrzeni ANR) zostało wprowadzone w pracy K. Borsuka, *Über eine Klasse von lokal zusammenhängenden Räumen*, *Fund. Math.* 19. Literatura poświęcona teorii retraktów i jej zastosowaniom jest dość obszerna (przeszło 200 prac). Systematyczny wykład tej teorii dany jest w książkach: Sze Tsen Hu, *Theory of Retracts*, Detroit 1965, stron 234 oraz

K. Borsuk, *Theory of Retracts*, Monografie Matematyczne 44, Warszawa 1967, stron 251. Spośród nowszych prac badawczych z zakresu teorii retraktów na specjalną uwagę zasługuje praca J.E. West, *Mapping Hilbert cube manifolds to ANR's: A solution of a conjecture of Borsuk*, *Annals of Math.* 106 (1977), pp. 1—18, w której udowodnione jest, że każda przestrzeń ANR ma typ homotopii pewnego wielościanu. W ostatnich latach ukazało się wiele prac poświęconych przestrzeniom ANR mającym dość nieoczekiwane własności (prace Armentrouta, Binga, Singha i innych).

*Fund. Math.* jest skrótem *Fundamenta Mathematicae*. Jest to tytuł czasopisma matematycznego założonego w Polsce w 1920 roku i poświęconego teorii mnogości i topologii. Jest to pierwsze w świecie czasopismo matematyczne poświęcone tylko wąskiej grupie zagadnień. Do chwili obecnej ukazało się 101 tomów tego pisma.

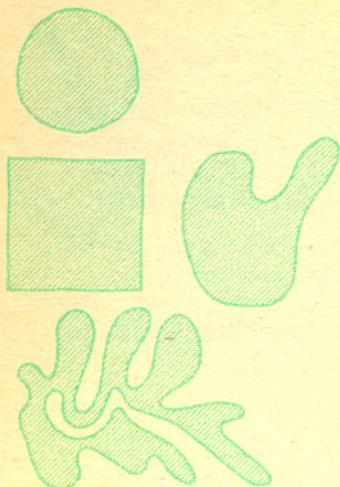
$\sum_{k=1}^{\infty}$  jest symbolem sumy szeregu nieskończonego. Jeżeli ciąg  $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \dots$  sum pewnego ciągu jest zbieżny, to granicę  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k)$  nazywamy sumą szeregu  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$  i oznaczamy przez  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

O pojęciu spójności pisaliśmy szerzej w nr 1/1979.



$gf$  oznacza tu złożenie funkcji  $f$  i  $g$ , tj.

$$(gf)(x) = g(f(x)).$$



Rys. 1. Przerzzenie homeomorficzne

Jeżeli  $f$  przekształca  $X$  na  $Y$  oraz istnieje przekształcenie  $g : Y \rightarrow X$  takie, że  $(gf)(x) = x$  dla każdego  $x \in X$  (przekształcenie  $g$  nazywamy wówczas *odwróceniem* przekształcenia  $f$  i piszemy  $g = f^{-1}$ ), to mówimy, że  $f$  jest *homeomorfizmem*  $X$  na  $Y$ . Jeżeli istnieje homeomorfizm przekształcający  $X$  na  $Y$ , to mówimy, że przestrzenie  $X$  i  $Y$  są *homeomorficzne* (rys. 1 i 2).



Rys. 2. Te przestrzenie nie są homeomorficzne

Korzystać będziemy z następującego **twierdzenia** (Urysohna):

*Każde kompaktum jest homeomorficzne z pewnym podzbiorem domkniętym kostki  $Q^\infty$ .*

Rezygnując z dokładnej definicji wymiaru, przyjmijmy jedynie, że kompaktum  $A$  ma wymiar skończony wtedy i tylko wtedy, gdy jest homeomorficzne z podzbiorem pewnej kostki  $Q^n$ .

Topologia jest nauką o tych własnościach przestrzeni, które są niezmiennikami homeomorfizmów, a więc które zachowują się, gdy daną przestrzeń zastąpimy przez dowolną przestrzeń z nią homeomorficzną. Łatwo okazać, że np. spójność lub zwartość są niezmiennikami homeomorfizmów.

**3. Retrakcje.** Ogólniejszą od klasy homeomorfizmów jest klasa tzw.  $r$ -przekształceń. Mówimy, że przekształcenie  $f : X \rightarrow Y$  jest  $r$ -przekształceniem  $X$  na  $Y$ , jeżeli istnieje przekształcenie  $g : Y \rightarrow X$  prawostronnie odwrotne względem  $f$ , tj. takie, że (rys. 3)

$$fg(y) = y \quad \text{dla każdego } y \in Y.$$

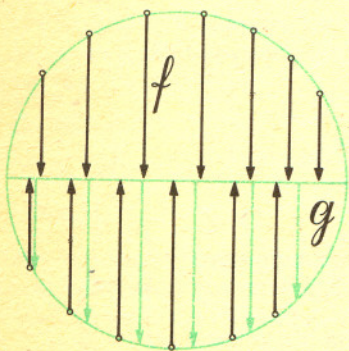
Jeżeli takie  $r$ -przekształcenie  $f : X \rightarrow Y$  istnieje, to mówimy, że  $Y$  jest  $r$ -obrazem przestrzeni  $X$ . Nie żądamy przy tym, by  $g$  przekształcało  $Y$  na  $X$ ; łatwo jednak okazać, że zbiór  $g(Y)$  jest homeomorficzny z  $Y$ . Zauważmy, że jeżeli  $f_1 : X \rightarrow Y$  i  $f_2 : Y \rightarrow Z$  są  $r$ -przekształceniami, to ich złożenie  $f_2 f_1 : X \rightarrow Z$  jest też  $r$ -przekształceniem. A zatem każdy  $r$ -obraz  $r$ -obrazu przestrzeni  $X$  jest też  $r$ -obrazem przestrzeni  $X$ .

Przykładem  $r$ -przekształcenia jest rzutowanie  $f$  (prostopadle) okręgu  $X$  na jego średnicę  $Y$ . Istotnie, jeżeli  $Z$  jest jednym z półokręgów, na które średnica  $Y$  rozcina  $X$ , to przyporządkowując każdemu punktowi  $y \in Y$  taki punkt  $z \in Z$ , że  $f(z) = y$ , otrzymamy przekształcenie  $g : Z \rightarrow Y$  prawostronnie odwrotne względem  $f$  (rys. 3).

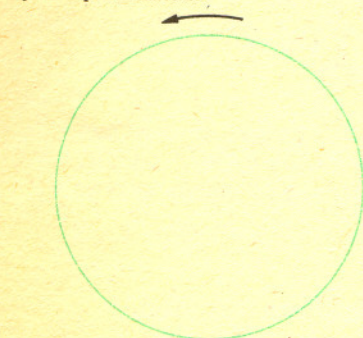
Jeżeli przestrzeń  $Y$  jest podzbiorem przestrzeni  $X$ , to przekształcenie  $f : X \rightarrow Y$  (jeżeli istnieje) nazywamy *retrakcją*, jeżeli  $f(y) = y$  dla każdego  $y \in Y$ . Mówimy wówczas, że  $Y$  jest *retraktem* przestrzeni  $X$ . Jasne jest, że kładąc  $g(y) = y$  dla każdego  $y \in Y$  otrzymamy przekształcenie  $g : Y \rightarrow X$  prawostronnie odwrotne względem  $f$ . A więc każda retrakcja jest  $r$ -przekształceniem.

Zauważmy, że brzeg  $B$  tarczy koła  $K$  nie jest jej retraktem (rys. 4, 5). Istotnie, gdyby istniała retrakcja  $r : K \rightarrow B$ , to oznaczając dla każdego  $y \in B$  przez  $s(y)$  różny od  $y$  koniec średnicy przechodzącej przez  $y$ , otrzymamy takie przekształcenie  $s : B \rightarrow K$ , że przekształcenie  $\varphi = sr : K \rightarrow K$  spełnia warunek  $\varphi(x) \neq x$  dla każdego  $x \in K$ . Wiadomo jednak (tw. Brouwera), że tarcza koła  $K$  należy do klasy przestrzeni  $X$  mających tzw. *własność punktu stałego*, tzn. dla każdego przekształcenia  $\varphi : X \rightarrow X$  istnieje co najmniej jeden taki punkt  $x_0 \in X$ , że  $\varphi(x_0) = x_0$ .

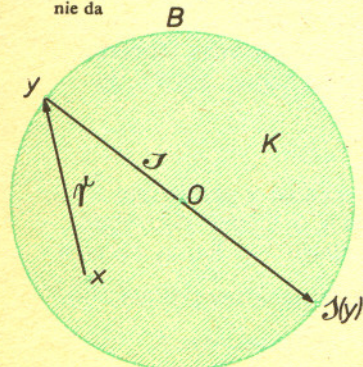
**4.  $r$ -niezmienniki.** Własność przestrzeni, która zachowuje się, gdy przestrzeń zastąpimy przez dowolny jej  $r$ -obraz, nazywamy  *$r$ -niezmiennikiem*. Ponieważ każdy homeomorfizm jest  $r$ -przekształceniem, więc  $r$ -niezmienniki są szczególnym przypadkiem niezmienników homeomorfizmów. Wynika stąd, że ich teoria, czyli *teoria retraktów*, jest działem topologii.



Rys. 3.  $r$ -przekształcenie



Rys. 4. Okrąg łatwo przekształcić na siebie tak, by żaden punkt nie został na swoim miejscu. Twierdzenie Brouwera mówi, że dla tarczy koła tak zrobić się nie da



Rys. 5. Brzeg koła nie jest jego retraktem



Łatwo zauważyć, że spójność i zwartość są  $r$ -niezmiennikami (a nawet są one niezmiennikami wszelkich przekształceń). Innym przykładem  $r$ -niezmiennika jest posiadanie punktu stałego. Istotnie, jeżeli  $f: X \rightarrow Y$  jest  $r$ -przekształceniem, a  $g: Y \rightarrow X$  jego prawostronnym odwroceniem i jeżeli  $X$  ma własność punktu stałego, to dla każdego przekształcenia  $\psi: Y \rightarrow Y$  wzór  $\varphi = g\psi f: X \rightarrow X$  określa przekształcenie dla którego istnieje punkt  $x_0 \in X$  taki, że  $\varphi(x_0) = x_0$ . Wówczas  $f(x_0) = fg\psi f(x_0) = \psi f(x_0)$ , a więc punkt  $y_0 = f(x_0) \in Y$  spełnia warunek  $\psi(y_0) = y_0$ .

Natomiast zaprzeczenie własności punktu stałego nie jest już  $r$ -niezmiennikiem, bowiem okrąg nie ma własności punktu stałego, ale przestrzeń złożona z jednego tylko punktu (będąca oczywiście  $r$ -obrazem okręgu) ma własność punktu stałego.

Okazuje się, że do  $r$ -niezmienników należy wiele własności bardzo istotnych dla budowy przestrzeni, jak np. ściągłość i lokalna ściągłość.

Aby wyjaśnić sens tych pojęć, oznaczymy dla każdej pary przestrzeni  $X, X'$  przez  $X \times X'$  ich iloczyn kartezjański, tj. przestrzeń, której punktami są pary  $(x, x')$ , gdzie  $x \in X, x' \in X'$  i gdzie odległość określa wzór

$$\varrho((x, x'), (\hat{x}, \hat{x}')) = \sqrt{\varrho(x, \hat{x})^2 + \varrho(x', \hat{x}')^2}.$$

Powiemy, że dwa przekształcenia  $f_0, f_1: X \rightarrow Y$  są *homotopijne* (oznaczenie:  $f_0 \simeq f_1$ ), jeżeli istnieje takie przekształcenie  $\varphi: X \times \langle 0, 1 \rangle \rightarrow Y$ , gdzie  $\langle 0, 1 \rangle$  oznacza przedział liczbowy  $0 \leq t \leq 1$ , że  $f_0(x) = \varphi(x, 0)$  i  $f_1(x) = \varphi(x, 1)$  dla każdego  $x \in X$ .

Powiemy, że podzbiór  $A$  przestrzeni  $X$  jest *ściągalny* w  $X$ , jeżeli przekształcenie  $i: A \rightarrow X$  dane przez wzór  $i(x) = x$  dla każdego  $x \in A$  jest homotopijne ze stałą, tj. z przekształceniem  $e: A \rightarrow X$  przekształcającym  $A$  w jeden punkt przestrzeni  $X$ .

Przez *przestrzeń ściągłą* rozumiemy przestrzeń ściągłą w sobie (rys. 6, 7).

Powiemy, że przestrzeń  $X$  jest *lokalnie ściągła*, jeżeli dla każdego jej punktu  $x_0$  i każdego zbioru otwartego  $G \subset X$  zawierającego punkt  $x_0$  istnieje zbiór otwarty  $G_0 \subset G$  zawierający punkt  $x_0$  i ściągły w  $G$ .

Okrąg koła stanowi prosty przykład continuum, które nie jest ściągłe, lecz jest lokalnie ściągłe. Aby otrzymać przykład continuum, które jest ściągłe, lecz nie jest lokalnie ściągłe, weźmy na płaszczyźnie  $E^2$  punkty  $a_0 = (0, 0)$

i  $a_k = \left(\frac{1}{k}, 0\right)$  dla  $k = 1, 2, \dots$  oraz  $b = (0, 1)$ . Niech  $L_k$  oznacza odcinek o końcach

$a_k$  i  $b$ . Wówczas suma wszystkich odcinków  $L_k$ , a więc zbiór  $X = \bigcup_{k=0}^{\infty} L_k$  jest

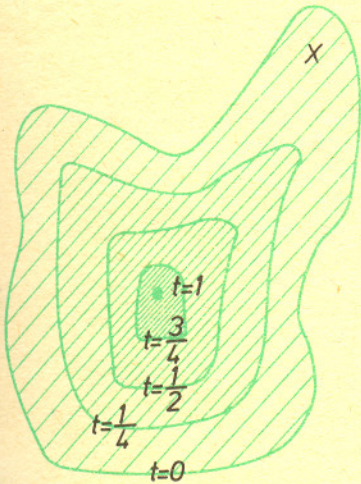
continuum ściągłym, ale nie lokalnie ściągłym, łatwo bowiem zauważyć, że w zbiorze  $G = X \setminus \{b\}$ , który jest w  $X$  otwarty i zawiera punkt  $a_0$ , nie istnieje podzbiór otwarty  $G_0$  zawierający punkt  $a_0$  i ściągły w  $G$ .

Łatwo okazać, że zarówno ściągłość jak i lokalna ściągłość przestrzeni są  $r$ -niezmiennikami.

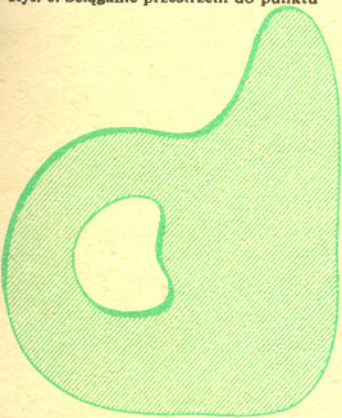
**5. Przestrzenie AR i ANR.** Wyodrębnienie w klasie wszystkich niezmienników homeomorfizmów specjalnie ważnej klasy  $r$ -niezmienników stanowi istotę teorii retraktów. Teoria ta pozwala też na wyodrębnienie w naturalny sposób w klasie wszystkich przestrzeni klasy przestrzeni o specjalnie prostych topologicznych własnościach, a mianowicie klasy tzw. retraktów absolutnych (czyli przestrzeni AR) oraz ogólniejszej od niej klasy tzw. retraktów absolutnych otoczeniowych (czyli przestrzeni ANR). Poprzestanę tu na podaniu ich definicji i podstawowych ich własności, ograniczając się do zakresu kompaktów.

Kompaktum  $A$  nazywa się *retraktem absolutnym* (co zapisujemy:  $A \in AR$ ), jeżeli dla każdego homeomorfizmu  $h$  przekształcającego  $A$  na podzbiór  $h(A)$  dowolnej przestrzeni  $X$ , zbiór  $h(A)$  jest retraktem przestrzeni  $X$ .

Kompaktum  $A$  nazywa się *retraktem absolutnym otoczeniowym* (co zapisujemy:  $A \in ANR$ ), jeżeli dla każdego homeomorfizmu  $h$  przekształcającego  $A$  na podzbiór  $h(A)$  dowolnej przestrzeni  $X$ , zbiór  $h(A)$  jest retraktem pewnego zbioru  $G$  otwartego w  $X$ .



Rys. 6. Ściąganie przestrzeni do punktu



Rys. 7. Tej przestrzeni nie da się ściągnąć do punktu





Przestrzenie ANR stanowią dość obszerną klasę przestrzeni, zawierającą w szczególności wszystkie wielościany (pojęcie wielościanu, w zakresie podzbiorów przestrzeni euklidesowej  $E^3$ , jest dobrze znane z geometrii elementarnej, w sposób naturalny definiuje się też wielościany wymiarów wyższych). Również znaczna część przestrzeni rozpatrywanych w innych działach matematyki należy do klasy przestrzeni ANR. W szczególności przestrzenią ANR jest każda różniczkowa, tj. każde takie continuum  $X$ , że dla każdego punktu  $x_0 \in X$  istnieje w  $X$  zbiór otwarty zawierający  $x_0$  i homeomorficzny z przestrzenią  $E^n$ . Łatwo też okazać, że iloczyn kartezjański dwóch przestrzeni ANR jest też przestrzenią ANR i jeżeli zbiory  $X_1, X_2$  i ich część wspólna  $X_1 \cap X_2$  są przestrzeniami ANR, to ich suma  $X_1 \cup X_2$  jest też przestrzenią ANR. Udowodnijmy teraz następujące

**Twierdzenie.** Aby  $A \in AR$  potrzeba i wystarcza, by  $A$  było  $r$ -obrazem kostki Hilberta  $Q^\infty$ .

Zacznijmy od dowodu pewnego lematu, w dowodzie którego skorzystamy z następującego twierdzenia Tietzego:

Jeżeli kompaktum  $B$  jest podzbiorem przestrzeni  $X$ , to dla każdego przekształcenia  $\alpha$  zbioru  $B$  w przedział liczbowy  $I: 0 \leq t \leq c$ , gdzie  $c > 0$ , istnieje takie przekształcenie  $\bar{\alpha}: X \rightarrow I$ , że  $\bar{\alpha}(x) = \alpha(x)$  dla każdego punktu  $x \in B$ .

**Lemat.** Jeżeli kompaktum  $B$  jest podzbiorem przestrzeni  $X$ , to dla każdego przekształcenia  $\alpha: B \rightarrow Q^\infty$  istnieje takie przekształcenie  $\bar{\alpha}: X \rightarrow Q^\infty$ , że  $\bar{\alpha}(x) = \alpha(x)$  dla każdego punktu  $x \in B$ .

Istotnie, wartościami przekształcenia  $\alpha$  są punkty  $(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots) \in Q^\infty$ .

Wówczas  $\alpha_k$  jest przekształceniem zbioru  $B$  w przedział  $I_k: 0 \leq t \leq \frac{1}{k}$ , a więc istnieje takie przekształcenie  $\bar{\alpha}_k: X \rightarrow I_k$ , że  $\bar{\alpha}_k(x) = \alpha_k(x)$  dla każdego  $x \in B$ . Kładąc

$$\bar{\alpha}(x) = (\bar{\alpha}_1(x), \bar{\alpha}_2(x), \dots) \text{ dla każdego } x \in X,$$

otrzymamy (jak łatwo zauważyć) przekształcenie  $\bar{\alpha}: X \rightarrow Q^\infty$  spełniające tezę lematu.

Dowód twierdzenia. Jeżeli  $A \in AR$ , to na mocy twierdzenia Urysohna istnieje homeomorfizm  $h$  przekształcający  $A$  na pewne kompaktum  $B \subset Q^\infty$ . Wobec  $A \in AR$ , istnieje retrakcja  $r: Q^\infty \rightarrow B$ . Kładąc  $f(x) = h^{-1}r(x)$  dla każdego  $x \in Q^\infty$ , otrzymamy przekształcenie  $f: Q^\infty \rightarrow A$ , dla którego prawostronnym odwróceniem jest  $h: A \rightarrow Q^\infty$ . A więc  $f$  jest  $r$ -przekształceniem i  $A$  jest  $r$ -obrazem kostki  $Q^\infty$ . Z drugiej strony, jeżeli istnieje przekształcenie  $f: Q^\infty \rightarrow A$  mające prawostronne odwrócenie  $g: A \rightarrow Q^\infty$  i jeżeli  $h$  jest homeomorfizmem przekształcającym  $A$  na podzbiór  $B$  przestrzeni  $X$ , to na mocy lematu, dla przekształcenia  $\alpha = gh^{-1}: B \rightarrow Q^\infty$  istnieje przekształcenie  $\bar{\varphi}: X \rightarrow Q^\infty$  takie, że  $\bar{\varphi}(x) = \varphi(x)$  dla każdego  $x \in B$ . Kładąc

$$r(x) = hf\bar{\varphi}(x) \text{ dla każdego } x \in X,$$

otrzymamy takie przekształcenie  $r: X \rightarrow B$ , że dla każdego  $x \in B$  jest

$$r(x) = hf\bar{\varphi}(x) = hfgh^{-1}(x) = hh^{-1}(x) = x.$$

A więc  $r$  jest retrakcją i dowód jest zakończony.

W podobny sposób można udowodnić

**Twierdzenie.** Aby  $A \in ANR$  potrzeba i wystarcza, by  $A$  było  $r$ -obrazem pewnego podzbioru otwartego kostki Hilberta  $Q^\infty$ .

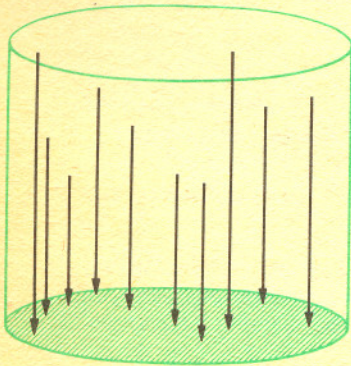
Biorąc pod uwagę, że złożenie dwóch  $r$ -przekształceń jest  $r$ -przekształceniem, otrzymujemy z tych twierdzeń następujący

**Wniosek.** Pojęcia przestrzeni AR i ANR są  $r$ -niezmiennikami.

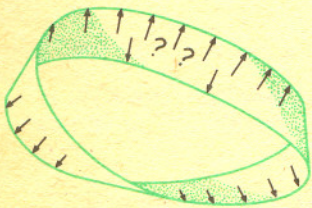
Zauważmy, że kostka Hilberta  $Q^\infty$  jest ściągalna w sobie.

Istotnie, kładąc

$\varphi((x_1, x_2, \dots), t) = (tx_1, tx_2, \dots)$  dla każdego punktu  $(x_1, x_2, \dots) \in Q^\infty$  i dla  $0 \leq t \leq 1$ , otrzymamy przekształcenie  $\varphi: Q^\infty \times \langle 0, 1 \rangle \rightarrow Q^\infty$  takie, że

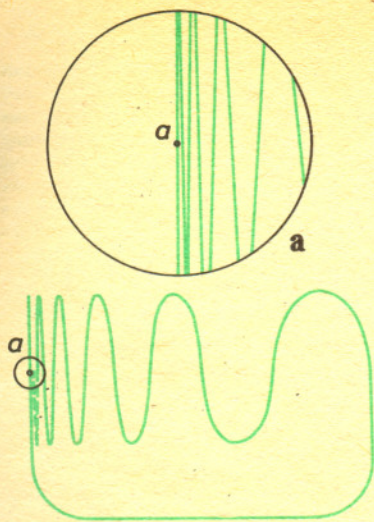


Rys. 8. Podstawa walca jest jego retraktem



Rys. 9. Brzeg wstęgi Möbiusa nie jest jej retraktem (ściśły dowód jest trudny)





Rys. 10. To nie jest rerakt absolutny, bo żadne małe otoczenie punktu  $a$  (rys. 10a) nie jest spójne, a więc i nie jest ściągalne

$\varphi(x, 0) = (0, 0, \dots)$  i  $\varphi(x, 1) = x$  dla każdego  $x \in Q^\infty$ . Podobnie łatwo okazać, że każdy podzbiór otwarty kostki  $Q^\infty$  jest lokalnie ściągalny. Ponieważ ściągłość i lokalna ściągłość są  $r$ -niezmiennikami, wnosimy stąd, że każda przestrzeń AR jest ściągalna w sobie, a każda przestrzeń ANR jest lokalnie ściągalna.

Można okazać, że w zakresie kompaktów wymiaru skończonego, lokalna ściągłość charakteryzuje przestrzenie ANR (rys. 10). Natomiast istnieją kompakta wymiaru nieskończonego, które są lokalnie ściągalne, lecz nie są przestrzeniami ANR. Pozostaje nierozstrzygnięte, jak należy wzmacnić warunek lokalnej ściągłości, by uzyskać scharakteryzowanie wszystkich przestrzeni ANR.

Teoria przestrzeni ANR gra podstawową rolę w badaniach topologicznych własności tzw. różnorodności wymiaru nieskończonego. Różnorodności te są ostatnio przedmiotem intensywnych badań, zwłaszcza w USA (prace R. D. Andersona, T. A. Chapmana, J. E. Westa i innych) oraz w Polsce (prace C. Bessagi, A. Pełczyńskiego, H. Toruńczyka i innych). Warto też wspomnieć, że nowy dział topologii, zwany teorią kształtu, w istotny sposób opiera się na teorii przestrzeni ANR.

**6. Uwagi końcowe.** Przestrzenie ANR wyróżniają się wśród innych przestrzeni dużą regularnością swych własności topologicznych, przypominających w znacznym stopniu własności wielościanów. W tzw. topologii algebraicznej rozpatruje się rozmaite niezmienniki homeomorfizmów o charakterze algebraicznym (w szczególności przyporządkowuje się przestrzeniom rozmaite grupy: homologii, kohomologii, homotopii, kohomotopii). Okazuje się, że grupy te zachowują się w sposób specjalnie prosty, gdy od przestrzeni przechodzimy do jej  $r$ -obrazu, a w przypadku przestrzeni ANR, grupy te mają budowę podobną jak w przypadku wielościanów. Również twierdzenie dotyczące istnienia punktów stałych dla przekształceń (w szczególności tzw. twierdzenie Lefschetza) pozostaje prawdziwe w zakresie przestrzeni ANR, lecz przestaje być prawdziwe w zakresie dowolnych kompaktów. Mimo to wśród przestrzeni ANR występują zjawiska o dość zaskakującym charakterze, nie pojawiające się wśród wielościanów. Tak np. istnieją wielopunktowe continua  $X$  będące przestrzeniami ANR, które nie dają się przedstawić w postaci sumy skończenie wielu zbiorów ANR o średnicach mniejszych od średnicy zbioru  $X$ . Inną osobliwością jest istnienie wśród zbiorów ANR położonych w przestrzeni  $E^3$  continuów, które są wspólnym brzegiem trzech obszarów (tj. zbiorów otwartych w  $E^3$  i spójnych).

Mówimy, że przestrzenie  $X$  i  $Y$  są  $r$ -równe (oznaczenie:  $X \underset{r}{=} Y$ ) jeżeli każda z nich jest  $r$ -obrazem drugiej. Jeżeli  $Y$  jest  $r$ -obrazem przestrzeni  $X$ , lecz  $X$  nie jest  $r$ -obrazem przestrzeni  $Y$ , to mówimy, że  $X$  jest  $r$ -większe od  $Y$  (oznaczenie:  $X \underset{r}{>} Y$ ). Np. okrąg jest  $r$ -większy od odcinka, a odcinek jest  $r$ -większy od przestrzeni złożonej tylko z jednego punktu. Istnieje wiele prac poświęconych badaniu relacji  $\underset{r}{=}$ , ale tematyka ta jest ciągle daleka od wyczerpania.

Ważniejszą od klasyfikacji przestrzeni ANR opartej na relacji  $\underset{r}{=}$  jest klasyfikacja homotopijna. Mówimy mianowicie, że dwa kompakta  $X, Y$  mają ten sam typ homotopii, jeżeli istnieje przekształcenia

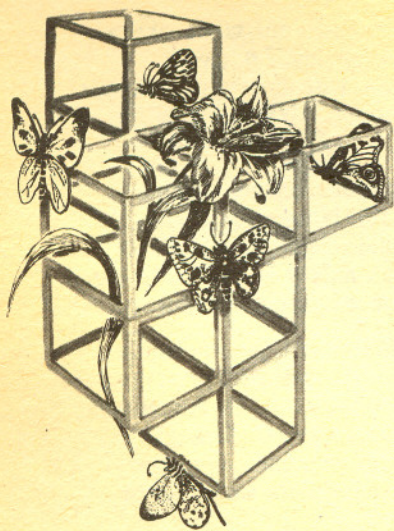
$$f: X \rightarrow Y \quad \text{i} \quad g: Y \rightarrow X$$

takie, że przekształcenie  $gf: X \rightarrow X$  jest homotopijne z przekształceniem  $i_X: X \rightarrow X$  danym przez wzór  $i_X(x) = x$  dla każdego  $x \in X$ , a przekształcenie  $fg: Y \rightarrow Y$  jest homotopijne z przekształceniem  $i_Y: Y \rightarrow Y$  danym przez wzór  $i_Y(y) = y$  dla każdego  $y \in Y$ .

Bardzo istotne dla teorii przestrzeni ANR zagadnienie, czy każda taka przestrzeń ma typ homotopii pewnego wielościanu, postawione już przed kilkudziesięciu laty, zostało ostatnio rozwiązane pozytywnie przez amerykańskiego matematyka J. E. Westa. Wynik ten ustala daleko idący związek między czysto topologicznym pojęciem przestrzeni ANR, a elementarno-geometrycznym pojęciem wielościanu.

Związki między homotopijną klasyfikacją przestrzeni ANR, a ich klasyfikacją według relacji  $\underset{r}{=}$  nie są całkowicie wyjaśnione. Nie wiadomo np., czy każde dwie  $r$ -równe przestrzenie ANR mają jednakowy typ homotopii. Podobne zagadnienie w zakresie wszystkich kompaktów ma odpowiedź negatywną.





# TECHNIKA

## Fizyka wzrostu kryształów

Dr Marian A. HERMAN

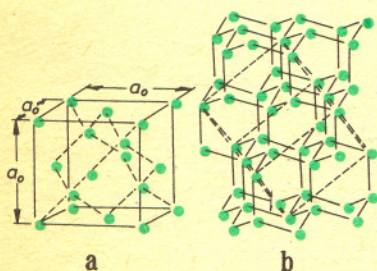
### Co nazywamy kryształem?

Z wielu doświadczeń i uogólnień teoretycznych wiadomo, że otaczające nas substancje składają się z atomów znajdujących się w niustannym chaotycznym ruchu cieplnym i oddziaływających ze sobą różnymi siłami międzyatomowymi. Energia ruchów chaotycznych określa temperaturę ciała, a siły międzyatomowe określają kształt i strukturę wewnętrzną tego ciała. W zależności od tego, który z dwóch wymienionych czynników i w jakim stopniu przeważa nad drugim, substancja przyjmuje jeden z trzech najczęściej na Ziemi spotykanych stanów skupienia: gazowy, ciekły lub stały. Atomy są obok siebie najgęściej ułożone w ciałach stałych. Oznacza to, że w ciałach stałych energia oddziaływań międzyatomowych znacznie przewyższa energię kinetyczną chaotycznych ruchów cieplnych. Gdy przeanalizujemy ułożenie atomów w ciele stałym, stwierdzimy wystąpienie dwóch przeciwnych tendencji. W jednych ciałach stałych atomy ułożone są w ściśle określony sposób według określonych reguł symetrii, tworząc określony porządek lub strukturę wewnętrzną. Charakterystyczne jest przy tym to, że porządek ten rozciąga się w przestrzeni na odległości znacznie przekraczające zasięg działania sił występujących pomiędzy sąsiednimi atomami i że powtarza się on w przestrzeni w sposób okresowy. Mówimy, że istnieje uporządkowanie dalekiego zasięgu (rys. 1 i 2). Ciało stałe, w którym występuje uporządkowanie dalekiego zasięgu, nazywamy ciałem krystalicznym lub krystalizowanym, a substancje o takiej strukturze wewnętrznej nazywamy kryształami. W innych ciałach stałych atomy ułożone są chaotycznie, nie wykazując żadnego uporządkowania dalekiego zasięgu. Takie ciała stałe nazywamy ciałami amorficznymi lub szklistymi.

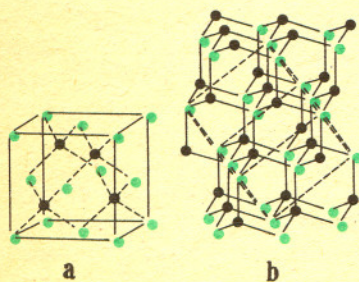
Od wielu wieków ludzkość fascynowała się i do dzisiaj fascynuje się kryształami. Nazwa „kryształ” pochodzi od starogreckiego słowa „*krystallos*”, które oznaczało mróz i lód. Słowo to stosowano również do określenia przezroczystego kryształu górskiego, o którym starożytni myśleli, że wysoko w górach tak silnie zamarzł, że nie może już stopnieć. Z czasem słowa tego zaczęto używać do określenia różnorodnych kryształów, które nieraz częściej, a nieraz bardzo rzadko, znajdowano na powierzchni Ziemi lub w jej głębi, i które następnie przechowywano w muzeach mineralogicznych lub zbiorach prywatnych kolekcjonerów. Obecnie słowo to stosowane jest do określenia wszystkich materiałów krystalicznych, niezależnie od tego czy są one pochodzenia naturalnego, czy też zostały wytworzone w sposób sztuczny.

### Kształt zewnętrzny kryształu

Wewnętrzny porządek ułożenia atomów w kryształ odzwierciedlony jest w kształcie zewnętrznym kryształu. Kryształ złożony z atomów ułożonych tak, że tworzą miniaturowe sześciiany, powinien mieć regularny, kubiczny kształt zewnętrzny. W teorii jest to prawdą, w praktyce realizowane jest bardzo rzadko. Dzieje się tak dlatego, że tylko wówczas, gdy kryształ wzrasta swobodnie (bez ograniczającego działania otoczenia), jego kształt zewnętrzny odzwierciedla uporządkowanie wewnętrzne. Ponieważ wszystkie kryształy w naturze muszą na czymś leżeć, ponieważ zwykle rosną w kontakcie z innymi materiałami bezpośrednio je otaczającymi, więc kształt zewnętrzny kryształu często odzwierciedla tylko częściowo jego wewnętrzne uporządkowanie. Dopiero analiza, wykonana przy użyciu promieni Roentgena, czy odpowiednie trawienie chemiczne lub łupanie ujawniają wewnętrzną strukturę kryształu. Kryształy otrzymane sztucznie w laboratorium prawie nigdy nie przypominają swym kształtem struktury wewnętrznej. Dzieje się tak dlatego, że są one zwykle hodowane w tyglach, i że gotowy kryształ ma kształt tygla. W ten sposób kryształ o strukturze kubicznej może mieć kształt walca, zaś kryształ o strukturze heksagonalnej może mieć kształt sześcianu.



Rys. 1. a. Komórka elementarna struktury diamentu.  
b. Struktura diamentu widziana z innej strony.  
Komórka elementarna jest zaznaczona linią przerywaną.



Rys. 2. a. Komórka elementarna struktury blendy cynkowej (ZnS)  
b. Struktura blendy cynkowej widziana z innej strony.  
Komórka elementarna jest zaznaczona linią przerywaną.



## Czym zajmuje się fizyka wzrostu kryształów?

### Rozwiązanie zadania M 188

Ponieważ  $4444^{4444} < 10000^{4444} = 10^{17776}$ , zatem  $4444^{4444}$  ma  $\leq 17776$  cyfr. Gdyby nawet wszystkie były dziewiątkami, to ich suma byłaby równa 159984. Suma cyfr liczby nie więcej niż sześciocyfrowej mniejszej niż 159984 nie jest na pewno większa niż  $1 + 5 \cdot 9 = 46$ , a suma cyfr liczby nie większej od 46 jest  $\leq 12$ . Zatem końcowa suma jest  $\leq 12$ . Z drugiej strony, widzimy, że

$$4444 \equiv 7 \pmod{9}$$

(tzn. daje z dzielenia przez 9 resztę 7). Inaczej

$$4444 \equiv -2 \pmod{9}$$

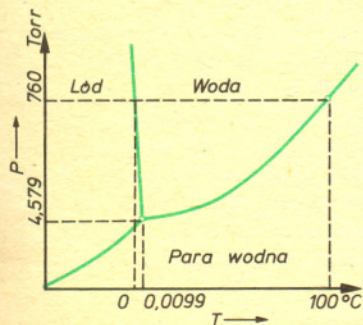
Stąd

$$4444^{10} \equiv (-2)^{10} \equiv -2 \pmod{9}$$

$$4444^{100} \equiv -2 \pmod{9}$$

$$4444^{1000} \equiv -2 \pmod{9}$$

i stąd możemy łatwo obliczyć, że  $4444^{4444} \equiv -2 \pmod{9}$ , a więc daje z dzielenia przez 9 resztę 7. Jediną liczbą  $\leq 12$  dającą z dzielenia przez 9 resztę 7 jest 7.



Rys. 3. Wykres charakterystyczny dla wody we współrzędnych o skali logarytmicznej. W punkcie potrójnym wszystkie trzy stany skupienia znajdują się w równowadze termodynamicznej.

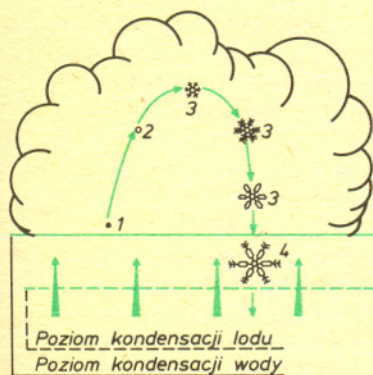
## Sposoby krystalizacji

Proces krystalizacji polega na przejściu jakiejś substancji w stan krystaliczny. Biorąc pod uwagę trzy stany skupienia materii: gazowy, ciekły i stały należy stwierdzić, że najczęściej realizowanym w praktyce przejściem w stan krystaliczny jest przejście ze stanu ciekłego w stały. Przejście to może się odbywać albo przez stygnięcie roztopionej substancji, która ma przejść w stan krystaliczny — jest to wówczas krystalizacja z roztopu, lub może się odbywać przez zmianę stężenia albo stopnia nasycenia roztworu substancji krystalizowanej w innej substancji, zwanej rozpuszczalnikiem — wówczas mamy do czynienia z krystalizacją z roztworu.

Krystalizacja z roztworu może być realizowana np. przez stopniowe obniżanie temperatury roztworu (zmienia się wówczas stopień nasycenia roztworu), albo też przez stopniowe zmniejszanie ilości rozpuszczalnika w roztworze np. przez jego odparowanie, czy też przez zmianę stopnia rozpuszczalności krystalizowanej substancji w rozpuszczalniku, np. przez dodanie innej substancji do roztworu. Ponieważ rozpuszczalność substancji w rozpuszczalniku na ogół silnie zależy od temperatury, krystalizacja z roztworu może być realizowana zwykle przy niższych temperaturach niż te, jakie są wymagane przy krystalizacji z roztopu.

W określonych warunkach przejście do stanu krystalicznego może się również odbyć bezpośrednio ze stanu gazowego z pominięciem stanu ciekłego. Dla przykładu rozważmy wykres charakterystyczny wody przedstawiony na rys. 3. Wykres ten składa się z trzech krzywych równowagi oddzielających obszary wartości ciśnienia i temperatury, w których mogą występować poszczególne stany skupienia wody (analogiczne wykresy można wykonać również dla innych substancji). Pod normalnym ciśnieniem woda przechodzi w lód w temperaturze  $0^{\circ}\text{C}$ , zaś wrze w temperaturze  $100^{\circ}\text{C}$ . Pod ciśnieniem 6,1048 hPa i w temperaturze  $0,0099^{\circ}\text{C}$  woda, lód i para znajdują się w równowadze termodynamicznej (jest to punkt potrójny). Gdy ciśnienie obniży się poniżej tej wartości, ochłodzenie pary wodnej poniżej  $0,0099^{\circ}\text{C}$  spowoduje przejście pary w lód, z pominięciem wody. Krystalizacja, która występuje w tym przypadku, nazywa się krystalizacją z pary. Na tej drodze powstają np. płatki śniegu. Znajdująca się w górnych partiach atmosfery para wodna ma tak niskie ciśnienie, że przy oziębieniu atmosfery pada śnieg (rys. 4).

Krystalizacja z fazy gazowej może również występować wtedy, gdy w wyniku reakcji chemicznych zachodzących pomiędzy różnymi substancjami gazowymi powstaje kryształ. Proces krystalizacji zachodzący w ten sposób nazywa się krystalizacją z wykorzystaniem transportu chemicznego, gdyż zawsze reakcjom chemicznym towarzyszy transport masy reagentów. Możliwe jest również krystalizowanie różnych substancji w bardzo wysokiej próżni, np. przez wykorzystywanie techniki wiązek molekularnych lub techniki reaktywnego rozpylania w procesie wyładowania plazmowego.



Rys. 4. Proces tworzenia się kryształków śniegu w atmosferze.

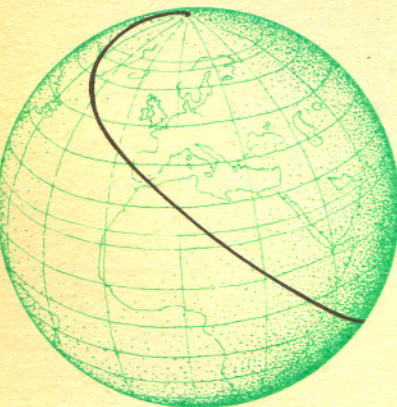
## Mechanizmy krystalizacji

Sposób, w jaki dana substancja jest krystalizowana, określa mechanizm krystalizacji. Aby zrozumieć ten mechanizm, należy poznać zachowanie się atomów krystalizowanej substancji na granicy rozdziału faz, to znaczy na granicy między stanem krystalicznym ciała a stanem ciekłym lub gazowym, z którego zachodzi krystalizacja.





Odpowiedź do zadania M 187  
Do bieguna północnego, po krzywej zwanej  
loksodromą (p. rysunek).



Przy wzroście kryształu granica międzyfazowa przesuwa się w przestrzeni z określoną prędkością, gdyż wzrost ten polega na dołączaniu się poszczególnych atomów do sieci krystalicznej kryształu, czyli do uporządkowanej struktury kryształu, z obszaru, w którym substancja znajduje się w stanie lotnym lub ciekłym. Proces ten zachodzi na powierzchni kryształu, zatem w każdym momencie tylko bardzo mała część całego układu masy uczestniczy w procesie krystalizacji. Zmiana stanu skupienia przy krystalizacji zachodzi więc w skali atomowej w procesie skokowym — przez dołączanie do sieci krystalicznej poszczególnych atomów substancji.

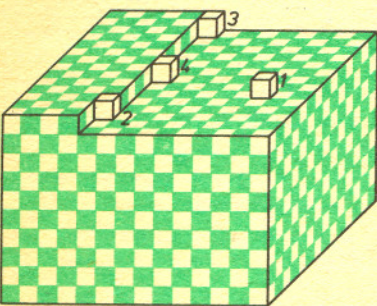
Atom zajmuje w kryształach objętość równą około  $10^{-30}$  m<sup>3</sup>. Przy prędkości wzrostu kryształu równej  $10^{-5}$  m/s (3,6 cm/godz), co stanowi przeciętną wartość dla krystalizacji krzemu w warunkach przemysłowych,  $10^{19}$  atomów musi zostać wbudowanych do sieci krystalicznej na powierzchni 1 mm<sup>2</sup> w każdej sekundzie. Można sobie wyobrazić, że nie jest to proces ani prosty, ani łatwy do precyzyjnego badania.

Proces ten składa się przy tym z różnych etapów. Najpierw krystalizujące atomy muszą się zetknąć z powierzchnią kryształu (muszą do niej dotrzeć). Przy krystalizacji z roztopu nie stanowi to problemu. Kryształ styka się tylko z tymi atomami, które wbudowują się w jego sieć (które krystalizują). Przy krystalizacji z roztworu lub z fazy gazowej kryształ styka się nie tylko z atomami krystalizującymi, ale również z atomami rozpuszczalnika lub gazu nośnego. Wówczas istotnym czynnikiem wpływającym na proces krystalizacji może być dyfuzja w stronę powierzchni kryształu substancji zawierającej krystalizujące atomy.

Na powierzchni kryształu atomy krystalizujące nie mogą się od razu wbudować we właściwe miejsca w sieci krystalicznej — przyklepiają się one najpierw do powierzchni kryształu wraz z innymi atomami, a potem pod wpływem różnych oddziaływań ze swym otoczeniem dyfundują po powierzchni kryształu do momentu, gdy zostaną wbudowane do sieci krystalicznej.

Powierzchnia kryształu nie jest przy tym fizycznie obojętna. Atomy znajdujące się na niej mają od strony roztworu lub gazu otaczającego kryształ niewysyczone wiązania chemiczne. Powoduje to wytworzenie się lokalnych pól elektrycznych, mogących wiązać na powierzchni atomy zanieczyszczeń lub powodować występowanie innych oddziaływań utrudniających wbudowanie się atomów krystalizujących do sieci krystalicznej. Poza tym proces krystalizacji jest procesem dynamicznym. Oznacza to, że poszczególne wbudowane do kryształu atomy mogą się z powierzchni kryształu oderwać, wracając do warstwy przypowierzchniowej znajdującej się w innym stanie skupienia. Proces wzrostu kryształu jest więc wynikiem rywalizacji pomiędzy procesami wbudowywania się atomów do sieci krystalicznej i oddzielania się atomów od powierzchni kryształu. Zrozumiałym jest, że dla tak skomplikowanego procesu, zależnego od tak wielu czynników, jest bardzo trudno opracować dokładną teorię fizyczną opisującą jednoznacznie proces wzrostu kryształu. Do dzisiaj istnieją jeszcze liczne niewyjaśnione problemy dotyczące mechanizmu krystalizacji różnych substancji, wymagające dalszych badań fizycznych.

Prześledzimy pokrótce jeden z dawniejszych modeli podany przez Kossela i Stranskiego. Rozważamy kryształ jonowy o strukturze soli kuchennej. Jony tego kryształu traktujemy jako dwa rodzaje drobnych kostek o tej samej wielkości i różnym ładunku elektrycznym, które wbudowane są na przemian w sieć krystaliczną, jak to pokazuje rys. 5. W środku tej struktury krystalicznej każdy jon jest otoczony 6 jonami drugiego rodzaju. Energia wiązania jonu w sieci krystalicznej wynika z elektrycznych sił przyciągania wywołanych przez sąsiednie jony (najbliżsi sąsiedzi). Dalsi sąsiedzi, 12 jonów o tym samym znaku co jon rozważany, działają siłami odpychającymi, które jednak ze względu na zwiększoną odległość są znacznie mniejsze niż siły przyciągające najbliższych sąsiadów. Dla jonu, który ma zostać wbudowany do sieci krystalicznej na gładkiej powierzchni kryształu (pozycja 1 na rys. 5), sytuacja jest znacznie mniej korzystna, z punktu widzenia wielkości sił wiążących z kryształem, niż dla jonu znajdującego się wewnątrz kryształu. Jon z pozycji 1 jest przyciągany tylko przez 1 jon będący najbliższym sąsiadem, jest natomiast odpychany przez 4 jony będące dalszymi sąsiadami — energia wiązania tego jonu jest więc mała. Po przyciągnięciu do sieci zostanie on szybko uwolniony w wyniku swej energii kinetycznej ruchów cieplnych. Rozważmy inne możliwe pozycje jonów na powierzchni kryształu, w którym rozpoczęła się zabudowa nowej warstwy atomowej (rys. 5). W pozycji 2, najkorzystniejszej dla wbudowania się jonu w sieć krystaliczną, przyciągają go 3 jony będące najbliższymi sąsiadami, zaś 6 dalszych sąsiadów go odpycha. W pozycjach 3 i 4 jon jest przyciągany przez 2 najbliższych sąsiadów i odpychany przez 6 dalszych sąsiadów, co jest korzystniejsze niż oddziaływanie w pozycji 1. W ten sposób te proste rozważania pozwalają wysnuć wniosek, że kryształy jonowe w strukturze soli kuchennej krystalizują zgodnie z mechanizmem, w którym najpierw wypełniają się rzędy jonów na płaszczyźnie kryształu (pozycja 2), potem wypełniają się warstwy atomowe przez narastanie kolejnych rzędów (pozycja 3, 4), a dopiero na końcu zaczyna się wzrost kolejnej warstwy atomowej (pozycja 1). Konkretnie obliczenia teoretyczne oparte o przedstawiony model dają prędkości wzrostu kryształów jonowych pokrywające się z doświadczeniem.



Rys. 5. Model krystalizacji  
Kossela-Stranskiego.



np.  $(\text{CdS})$ ,  $(\text{Cd}_2\text{S})$  lub  $(\text{Cd}_3\text{S})$ . W zależności od tego, które z tych kompleksów przeważają w fazie gazowej, otrzymuje się kryształy w kształcie pryzmatów, piramid, igieł, płytek lub wąsów. Różne kompleksy tworzą bowiem w różny sposób sieć krystaliczną.

## Zarodkowanie

To, co napisano wyżej, dotyczy przebiegu procesu krystalizacji. Powstaje jednak pytanie, jak ten proces się zaczyna, jak tworzą się te najmniejsze kryształki, zwane zarodkami krystalizacyjnymi. Tworzenie się zarodków krystalizacyjnych jest procesem energetycznie niekorzystnym (porównaj sytuację jonu w pozycji 1 na rys. 5). Dlatego może on zachodzić tylko z bardzo małą prędkością. Oznacza to konieczność większego przechłodzenia roztworu lub większego przesyconienia roztworu, z którego wyrastają kryształy, niż ma to miejsce przy krystalizacji rozwiniętej na większych powierzchniach kryształu. Z tego też powodu może się zdarzyć taka sytuacja, w której dana substancja zostanie ochłodzona poniżej temperatury topnienia lub gdy roztwór będzie znacznie przesycony, zaś proces krystalizacji jeszcze się nie zacznie.

Najczęściej zarodki krystalizacyjne nie powstają samoistnie, np. przez zgromadzenie się obok siebie dostatecznie dużej liczby atomów w przechłodzonej lub przesyconej fazie ciekłej. Powstają one na pyłkach kurzu lub na cząsteczkach zanieczyszczeń znajdujących się w krystalizowanej substancji. Mogą one też powstać na ściankach naczynia, lub ich powstanie może być wywołane przez wstrząsy, przez zewnętrzne pole elektryczne lub przez działanie fali dźwiękowej. To, że tworzenie się zarodków krystalizacyjnych jest energetycznie procesem niekorzystnym, ma ogromne znaczenie w procesie krystalizacji, gdyż umożliwia otrzymywanie dużych kryształów, które wyrosły na jednym zarodku. Gdyby był to proces korzystny energetycznie, otrzymalibyśmy zamiast jednego dużego kryształu całe agregaty małych krysztalitów wyrosłych z dużej liczby przypadkowo powstałych zarodków krystalizacyjnych.

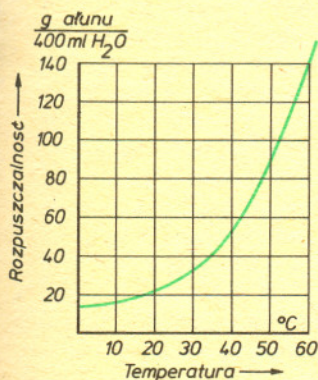
## Jak wykrystalizować kryształ w domu?

Pozostawiając opisane wyżej problemy fizykom zajmującym się problematyką wzrostu kryształów zastanówmy się nad tym, jak wykonać prostymi domowymi metodami eksperyment krystalizacyjny. Spróbujemy krystalizować kryształ alunu przez odparowanie roztworu wodnego.

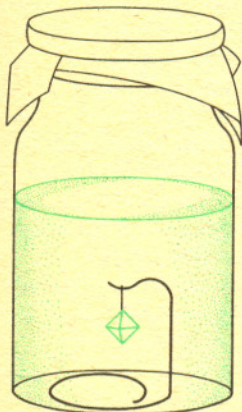
Alun, uwodniony siarczan glinowo-potasowy,  $\text{KAl}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$  można nabyć w drogerii lub w aptece. Najpierw wybieramy właściwe miejsce w domu, gdzie moglibyśmy ustawić nasze naczynie krystalizacyjne (naczynie szklane o objętości około 0,5 litra). Miejsce to powinno się charakteryzować w dzień i w nocy możliwie stałą temperaturą, a więc nie może znajdować się w pomieszczeniu, gdzie panują przeciągi. Powinno ono też być chronione przed wstrząsami. Oznacza to, że w czasie eksperymentu nie wolno przenosić naszego naczynia z miejsca na miejsce. Najlepszy wydaje się być kąt w piwnicy. Z kolei wykonujemy roztwór nasycony alunu w wodzie destylowanej (którą również można kupić w aptece). Rozpuszczalność alunu w wodzie zależy od temperatury. W 400 ml wody — taką ilość roztworu przygotowujemy — rozpuszcza się w temperaturze  $10^\circ\text{C}$  16 g alunu, w temperaturze  $20^\circ\text{C}$  — 24 g, przy  $30^\circ\text{C}$  — 33,6 g (rys. 6).

Po zmierzeniu termometrem temperatury w miejscu, gdzie postawimy naczynie, odważamy odpowiednią ilość alunu i rozpuszczamy go w wodzie. Rozpuszczamy przy tym ilość odpowiadającą temperaturze o  $10^\circ\text{C}$  wyższej od zmierzonej, podgrzewając uprzednio nieco naczynie z wodą na piecyku w kuchni. Oczywiście jest, że wszystkie naczynia i przedmioty z jakimi stykamy roztwór muszą być bardzo czyste, gdyż każdy pyłek kurzu, jaki znajdzie się w roztworze, może działać jak zarodek krystalizacyjny zakłócający proces krystalizacji.

Następnie naczynie z roztworem zamykamy przykrywką (najlepiej ze szkła lub z tworzywa) i ustawiamy w przewidzianym miejscu. Po pewnym czasie (dwa do trzech dni) wytrąca się z roztworu pewna ilość alunu, która stanowi nadmiar w stosunku do rozpuszczalności alunu w wodzie, przy temperaturze w jakiej znajduje się naczynie z roztworem. Otrzymaliśmy roztwór nasycony w temperaturze panującej w miejscu krystalizacji. Następnie zlewamy ostrożnie ten roztwór do drugiego analogicznego naczynia szklanego uważając na to, aby żaden z wytrąconych z roztworu krysztalitów nie dostał się do drugiego naczynia. Wybieramy następnie jeden z tych wytrąconych krysztalitów (możliwie o najwyraźniejszych kształtach), który będzie służył jako zarodek krystalizacyjny, i przywiązujemy go na cienkiej żyłce do stojaczka wykonanego ze szkła lub z aluminium. Całą tę operację wykonujemy czystymi, odfuszczonymi rękoma. Stojak wraz z zarodkiem umieszczamy następnie w naczyniu, w sposób pokazany na rys. 7. Naczynie przykrywamy lekką chusteczką, która będzie chronić roztwór przed zakurzeniem, ale która nie może utrudniać odparowywania cieczy. Przez odparowanie cieczy roztwór staje się przesycony, w wyniku czego na zarodku zaczyna się proces krystalizacji. Po dwóch, trzech tygodniach — zależnie od tego jaka jest temperatura i wilgotność powietrza w pomieszczeniu, gdzie prowadzimy eksperyment — zauważymy piękny kryształ alunu. Po wyjęciu kryształu z roztworu osuszamy go szybko bibułą lub szmatką wchłaniającą wodę i umieszczamy go w słoiku szczelnie zamkniętym, gdzie możemy go przechowywać dowolnie długo, ciesząc się udanym eksperymentem.



Rys. 6. Rozpuszczalność alunu w wodzie destylowanej.



Rys. 7. Naczynie z roztworem i zarodkiem do krystalizacji alunu metodą odparowania roztworu.

Dr Jan WASZKIEWICZ



Każdy, kto dostatecznie długo styka się z matematyką, oswaja się ze stosowaną w niej metodą dedukcyjną. Polega ona na tym, że wszystkie wprowadzane pojęcia opatruje się precyzyjnymi określeniami, zaś wszystkie wypowiadane twierdzenia są ściśle dowodzone. No, może w tym szkicowym obrazie nieco przesadziliśmy. Każdy uczeń potrafi podać przykłady poznanych na lekcjach matematyki pojęć, których definicji mu nie podano, potrafi też wskazać twierdzenia, których dowodu nie przedstawił mu ani nauczyciel, ani podręcznik matematyki. Dziać się tak może z kilku powodów. Czasem przytaczane twierdzenie ma dowód tak łatwy, że można śmiało przyjąć, iż każdy zainteresowany tym uczeń potrafi go przeprowadzić samodzielnie. Czasem jest wręcz przeciwnie — dowód twierdzenia jest tak złożony, że nie ma sensu przytaczać go w całości. Można wówczas podać coś, co nazywa się szkicem dowodu lub w ogóle poprzestać na samym wysłowieniu twierdzenia. Może też zdarzyć się, że przeprowadzenie dowodu wymaga wprowadzenia dodatkowych pojęć i udowodnienia pewnych twierdzeń pomocniczych, które choć dostępne dla ucznia (czy czytelnika) zbyt długo wydużyłyby wykład. W każdym z tych przypadków twierdzenie można przyjąć za prawdziwe: ma ono bowiem dowód, choć dowód ten nie został przedstawiony. Podobnie rzecz przedstawia się z definicjami pojęć...

Jednakże, oprócz takich uchybień przedstawionej zasadzie, są też znacznie istotniejsze. Każda definicja jest odpowiedzią na pytanie „a coż to takiego?”, które może, a nawet wręcz powinien, zadać nauczycielowi (czy też autorowi pracy matematycznej) słuchacz (czy też czytelnik) z chwilą, gdy usłyszy nazwę nowego pojęcia. Jednakże w odpowiedzi na to pytanie pojawić się muszą nazwy pojęć, które powinny też być zdefiniowane. Można więc powtórzyć to samo pytanie — tym razem odnosząc je do pojęć, za pomocą których wyjaśniano pojęcie poprzednie. Proceder taki można kontynuować w nieskończoność. Zarówno w takiej rozmowie, jak i w każdej teorii matematycznej muszą pojawić się pojęcia, których definicji nie podaje się.

Na przykład, pojęcie okręgu definiuje się w matematyce jako „zbiór punktów płaszczyzny równooddalonych od ustalonego punktu”. Na pytanie „a co to jest zbiór?” odpowiedzi już się nie usłyszy — jest to pojęcie, które przyjmuje się bez definicji, co najwyżej ułatwiając kilkoma przykładami zrozumienie go temu, kto słyszy o nim po raz pierwszy.

Podobnie przedstawia się sprawa z twierdzeniami. Dowodząc twierdzeń, odpowiadamy na pytanie „a dlaczego?”, które powinno paść z ust słuchacza (czy czytelnika). Ten łańcuszek też trzeba przerwać w jakimś miejscu. W każdej teorii matematycznej, bez względu na to jak precyzyjnie jest ona zbudowana, muszą pojawić się — te najbardziej podstawowe — pojęcia, których się nie definiuje, i twierdzenia przyjmowane bez dowodu.

Toteż maksymalnie możemy zbliżyć się do ideału precyzji matematycznej, sformułowanego na wstępie, w następujący sposób. Przystępując do budowania (czy też przekazywania) teorii sporządzamy listę tych pojęć — tzw. pojęć pierwotnych, które przyjmujemy bez definicji, oraz twierdzeń przyjmowanych bez dowodu — tzw. aksjomatów. Wszystkie inne pojęcia, które pojawiać się będą w dalszym ciągu — będą już dokładnie określone, wszystkie pozostałe twierdzenia będą miały porządne dowody. Tak zbudowaną teorię nazywa się teorią aksjomatyczną.

Można więc przyjąć, że teorie aksjomatyczne, jako najbliższe ideału matematycznej ścisłości, są dla matematyki czymś naturalnym. Powinny też być czymś na jej gruncie pospolitym. Tak jest na pewno w tej chwili. Operowanie teoriami aksjomatycznymi jest czymś w matematyce codziennym, a prawie wszystkie teorie, nawet jeśli są uprawiane nie w sposób aksjomatyczny, dają się odtworzyć w pewnej uniwersalnej teorii zaksjomatyzowanej (teorii mnogości).

Nie zawsze jednak tak było. Jeśli dzieje matematyki wyprowadzać — jak to się obecnie czyni — z odległej starożytności (najstarsze źródła do dziejów matematyki — pewne mezopotamskie tabliczki klinowe — pochodzą z około 2000 r. p.n.e.), to okaże się, że wynalazek teorii aksjomatycznych jest względnie nowy: pierwszy aksjomatyczny system geometrii datuje się na ok. 350 r. p.n.e., a następne teorie aksjomatyczne pojawiły się dopiero w wieku XIX n.e. (inne systemy geometrii, teoria liczb rzeczywistych, teoria liczb naturalnych). Przez przeszło 2000 lat, wszystkie teorie matematyczne — oprócz geometrii, nie były teoriami aksjomatycznymi! Nie oznacza to jednak, że w tym czasie nie stosowano metody dedukcyjnej. Uprawiano różne teorie matematyczne bez ustalania listy aksjomatów, opierając się często na intuicji — ale zawsze od pewnego poziomu począwszy, twierdzenia były dowodzone w możliwie ścisły sposób!

Jaka jest geneza metody aksjomatycznej? Postaramy się naszkicować odpowiedź na to pytanie w nadziei, że nie tylko pozwoli to zrozumieć istotę ważnego w dziejach matematyki faktu, ale również rzuci światło zarówno na samą metodę, jak i jej współczesne zastosowania. Najstarszym znanym wykładem teorii aksjomatycznej są „Elementy” Euklidesa napisane przez niego około 300 r. p.n.e. Stanowiły one aksjomatyczny wykład całości wiedzy geometrycznej znanej w czasach Euklidesa, pomyślany prawdopodobnie jako podręcznik. Tę też funkcję pełniły „Elementy”, lub ich niezbyt daleko idące przeróbki, jeszcze w XIX wieku. Bertrand Russel wspominał, że jeszcze w czasach jego młodości (około roku 1880) był to jedyny powszechnie

Zanurzyć w teorię mnogości nie można tzw. teorii kategorii, która operuje szerszym niż zbiór pojęciem „klasy”. Na przykład zbiór wszystkich zbiorów nie istnieje, jednakże wszystkie zbiory tworzą klasę.





### Rozwiązanie zadania F 63

Objętość zanurzonej części klocka nie ulegnie zmianie. W stanie równowagi bowiem siła wyporu równoważy ciężar klocka. W układzie związanym z windą rolę ciężaru klocka spełnia wielkość

$$V \rho_k (g + a)$$

natomiast rolę siły wyporu — wielkość

$$V_{zanurz} \rho_w (g + a).$$

Porównując te wielkości otrzymujemy

$$V_{zanurz} = V \frac{\rho_k}{\rho_w}$$

niezależnie od przyspieszenia windy  $a$ . Zachowanie klocka może ulec zmianie jedynie wtedy, gdy wartość  $a$  jest bliska  $-g$ . Wtedy bowiem zaczynają grać istotną rolę siły napięcia powierzchniowego i przylegania.



Powodem tego jest wieloznaczność słów, nieprecyzyjność terminów języka potocznego, pełnego przenośni, porównań, gry słów i ukrytych znaczeń. Człowiek, który nie jest głupcem, nie zawsze jest „niegłupi”, z kolei każdy chyba wolałby być „głupi” niż „głupawy”.

To też z powodu zamierzonego braku precyzji: czy wirus jest organizmem żywym?, czy dawniej było lepiej, czy gorzej?, czy elektron jest falą?

Jeżeli nasze zdanie jest rzeczywiście zaprzeczeniem zdania przeciwnika, taka sytuacja nie może się zdarzyć. Tyle, że czasami trudno jest zdemaskować taką demagogiczną argumentację... „a zatem widzimy, że zabójca nie mógł mieć białego kapelusza. Oskarżony miał czarny kapelusz, a zatem to on zabił”

akceptowany podręcznik geometrii w Anglii. Tak długa aktualność podręcznika Euklidesa świadczy, że udało mu się stworzyć dzieło niemal doskonałe. Wprawdzie przy obecnych standardach ścisłości matematycznej poprawność jego musi budzić liczne wątpliwości i zastrzeżenia, nie zmienia to jednak faktu, że przez współczesnych jak i przez długie późniejsze stulecia było uważane za wzorzec matematycznej precyzji.

Jednakże doskonałość ta ma dla nas pewne ujemne skutki. „Elementy” wyparły bowiem z obiegu wszystkie poprzednie próby usystematyzowania wiedzy matematycznej, toteż jedynie z nazwiska znamy ich autorów. Pierwszym, zgodnie ze starożytnymi źródłami, był Hipokrates (V w. p.n.e.); uczeń Platona, Leon, swoje „Elementy” napisał około 375 r. p.n.e. Wykład geometrii spisał też najwybitniejszy geometra tamtej epoki, Eudoksos... Fakt, że nie znamy dzieł tych w oryginałach, powoduje, że nie można prześledzić ewolucji metody aksjomatycznej od jej początku do niemal doskonałej postaci. Można wprawdzie, co czynią historycy matematyki, szukać w „Elementach” Euklidesa, poprzez subtelną analizę tekstu, śladów opracowań, na których opierał się pisząc swoje dzieło, jednakże jest to metoda dostarczająca wątplych i bardzo wątpliwych danych.

Powstaje przede wszystkim pytanie: czy poprzedzające euklidesowy podręcznik geometrii miały budowę aksjomatyczną? Może nie wszystkie, ale prawie na pewno niektóre z nich tak właśnie prowadziły swój wykład. O ile bowiem Platon, żyjący w latach 428—347 p.n.e., pisząc wiele o potrzebie uprawiania i nauczania geometrii nie mówi nic o metodzie aksjomatycznej, o tyle Arystoteles w swoich dziełach pisanych niedługo po śmierci Platona opisuje tę metodę jako coś dobrze i powszechnie znanego. Daty te pozwalają na określenie ram czasowych całkowitej ewolucji metody aksjomatycznej. Od pierwszych prób jej zastosowania do powstania jej wzorca minęło niewiele ponad 50 lat... Tyle czasu potrzeba było na dokonanie ogromnej rewolucji w sposobie uprawiania matematyki i na powszechną akceptację jej wyników! Znowu rodzi się pytanie o przyczyny tak niezwykłego zjawiska.

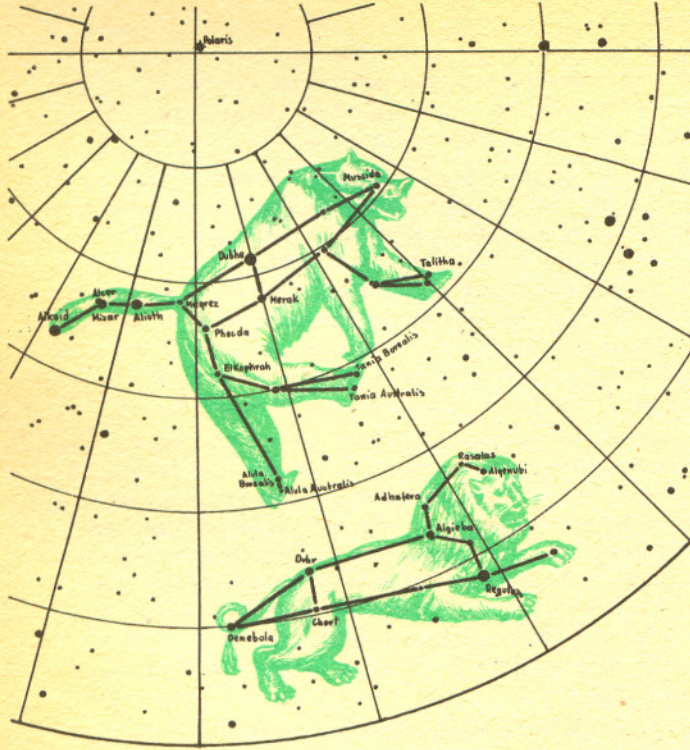
Odpowiedzi na postawione pytania poszukamy idąc śladem historyka geometrii i komentatora Euklidesa — Proklosa. Stwierdził on, że „każdy podziwiał „Elementy” dla porządku i wyboru twierdzeń, albowiem nie wszystko w nich umieścił, co mógł zgromadzić, lecz wszystko co wprowadza w pierwsze zasady geometrii”. Po czym chwali Euklidesa za szeroki wachlarz stosowanych rozumowań i dodaje: „W dodatku używał on wszystkich metod dialektycznych...” Słownik wyrazów obcych wyjaśni nam w tym miejscu, że w starożytności dialektyka była to „sztuka dyskusowania, umiejętność dotarcia do prawdy przez ujawnienie sprzeczności w sądach przeciwnika” (W. Kopaliński).

A więc spór, dyskusja... Metoda dedukcyjna i jej szczególna aksjomatyczna postać byłaby więc jedynie wysubtelnieniem metod prowadzenia dyskusji? Przypomnijmy obraz, który przedstawiliśmy na początku: autora pracy matematycznej czy też podręcznika dyskutującego z czytelnikiem, zadającym bez przerwy pytanie „dlaczego?”, a czasem sprzeciwiającego się komunikowanemu stwierdzeniu. Tak więc metoda stosowana w matematyce nie tylko wywodziłaby się z dyskusji, ale nigdy nie przestawała być samą dyskusją. Tyle, że zapisany zawsze jest tylko jeden głos, autora. Rolę drugiego dyskutanta powinniśmy odgrywać sami...

Wprowadzenie z dialektyki (czy też po prostu — sztuki dyskusowania) metody dedukcyjnej pozwala wytłumaczyć kilka jej osobliwości. Weźmy dla przykładu tzw. zasadę wyłączonego środka, która stwierdza, że spośród dwóch zdań — danego zdania „ $p$ ” i jego zaprzeczenia „nie  $p$ ” — dokładnie jedno musi być prawdziwe. Zasada ta, ustawicznie stosowana w rozumowaniach matematycznych i niemal powszechnie zaakceptowana przez matematyków, budzi poważne zastrzeżenia logików i filozofów. W języku potocznym, jak również w naukach innych niż matematyka, można podać przykłady zdań, które przeczą zasadności tego prawa. Skąd więc bierze się jego uznanie przez matematyków?

Łatwo można zauważyć, że zasada ta wynika z samych zasad gry, jaką była (a i bywa czasami) dyskusja. Przypuśćmy bowiem, że dwie osoby postanowiły przedyskutować jakieś zagadnienie. W greckiej tradycji dyskusja taka z reguły miała narzucony nie tylko temat, ale i tezę, którą podejmował się udowodnić inicjator sporu. Dalej — również reguły gry kazały, by każde zdanie wypowiedziane przez dyskutanta zyskiwało bądź akceptację przeciwnika, bądź też żądanie dalszych wyjaśnień (połączone z domniemaniem fałszywości wyrażonego sądu). Jeśli zaś dyskutant nie potwierdzałby akceptacji sądu przeciwnika, ani też go nie kwestionował, oznaczałoby to po prostu brak zainteresowania kwestią. Spór stawałby się niemożliwy.

I na zakończenie jeszcze jeden przykład — dowód nie wprost. Przypuśćmy, że w trakcie sporu chcemy przekonać przeciwnika do własnego zdania, on zaś broni zdania przeciwnego. Można wówczas użyć następującego wybiegu. Zamiast dowodzić, że racja jest po naszej stronie, wykazać, że nasz przeciwnik nie ma racji. (Zauważmy, że nie zawsze musi to oznaczać to samo, ale reguły dyskusji dopuszczały takie postępowanie). Tak więc, aby obalić sąd przeciwnika, możemy przyznać mu rację po to tylko, by pokazać do jak absurdalnych wniosków prowadzi jego stanowisko. Tak też postępuje się przy dowodzie nie wprost twierdzenia matematycznego. Toteż każdemu czytelnikowi takiego dowodu, który ma kłopoty ze zrozumieniem go, lub choćby tylko z zanegowaniem dowodzonego twierdzenia, radzimy, by wyobraził sobie tę sytuację w bardziej dramatycznej postaci: sporu dwóch dyskutantów. Jeszcze lepiej, niech popróbuje odegrać rolę przeciwnika autora dowodu. To pomaga...



**Patrz w niebo**

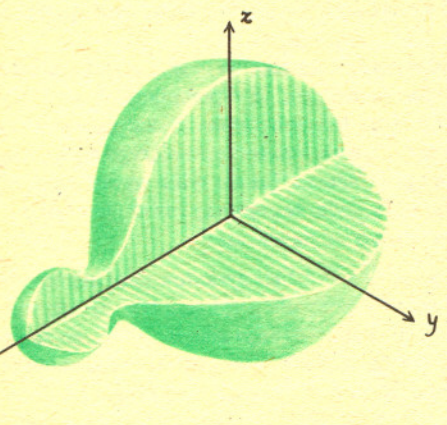
Otwieramy dziś nowy kącik pt. Patrz w niebo. Będziemy w nim opisywać zjawiska codzienne i niecodzienne, które można, albo nie można zobaczyć, ale które dzieją się na niebie. Co miesiąc pod pretekstem zapoznawania Was z wyglądem najlepiej widocznych gwiazdozbiorów, będziemy wprowadzać Was w najnowsze zdobycze astrofizyki.

W ciągu najbliższego miesiąca wieczorami prawie w zenicie (zenit to punkt dokładnie nad głową) znajduje się dobrze znany gwiazdozbiór Wielkiej Niedźwiedzicy (*Ursa Major, UMa*) natomiast nad południowym horyzontem typowo wiosenna konstelacja Lwa (*Leo*).

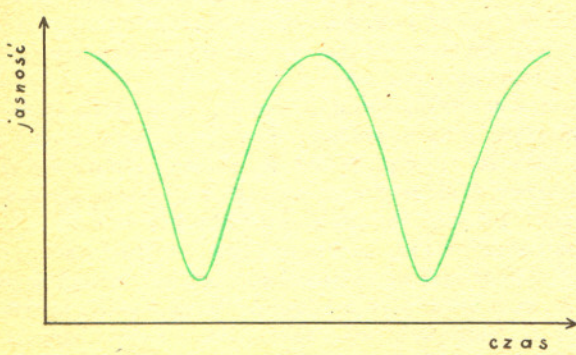
Jeśli dobrze przyjrzeć się Wielkiej Niedźwiedzicy, można zauważyć w pobliżu jednej z gwiazd słabszego towarzysza (spróbujcie go zobaczyć sami). To *Mizar* i *Alkor* (po arabsku Koń i Jeździec). Rzeczywiście są bardzo blisko siebie, ale może jedna z tych gwiazd jest dużo dalej niż druga, może jest to tylko efekt projekcji na *sferę niebieską*. Wieloletnie obserwacje wykazały, że jest to układ fizycznie podwójny. Obie gwiazdy obiegają wspólny środek masy. Jeśli macie chociaż niewielką lunetę (np. lornetkę), zwróćcie ją na *Mizara* — zobaczycie, że gwiazda ta składa się z dwóch składników (A i B). Jest to pierwsza gwiazda podwójna odkryta za pomocą lunety (Riccoli ok. 1650 r.). W 1889 r. astronom amerykański, E. C. Pickering, analizując światło składnika A stwierdził, że jest to znowu układ podwójny, jednak składniki jego są tak blisko siebie, że nawet największymi teleskopami nie uda się nam ich rozdzielić. Obecnie wydaje się, że jest to układ potrójny! Składnik B *Mizara* też jest układem podwójnym. A więc w sumie jest to układ sześciokrotny i nie jest to przypadek wyjątkowy, wręcz przeciwnie: w sąsiedztwie Słońca prawie co druga gwiazda należy do jakiegoś układu podwójnego lub wielokrotnego.

Układy gwiazd mogą być tak ciasne, że ich składniki prawie stykają się swymi powierzchniami. Jedną z najciekawszych gwiazd tej klasy jest słynna *W Ursae Majoris*, również leżąca w Wielkiej Niedźwiedzicy. Oba jej składniki zaćmiewają się nawzajem co 4 godziny, co powoduje okresowe słabnięcie blasku układu. Jak widać z rysunku, gwiazdy stykają się „brzuchami”, następuje wymiana materii, wzajemne oświetlanie się, splaszczanie na skutek ruchu dookoła wspólnej osi i inne zjawiska, które stają się źródłami wielu ciekawych efektów, o których napiszemy w najbliższych numerach.

*mgr Tomasz CHLEBOWSKI*



Rys. 2. Układ podwójny typu *UMa*



Rys. 3. Krzywa zmian jasności układu *W UMa*

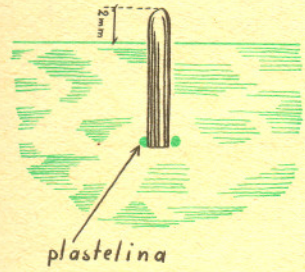
Centrum Astronomiczne im. M. Kopernika, Obserwatorium Astronomiczne Uniwersytetu Warszawskiego oraz Polskie Towarzystwo Miłośników Astronomii zapraszają na cykl odczytów popularno-naukowych.

- Oto najbliższe z nich:
- 15.III.1979, Lacertydy, *mgr T. Chlebowski*,
  - 19.III.1979, Gwiazdy rentgenowskie, *dr J. Ziolkowski*,
  - 22.III.1979, Kieszonkowe planety, *mgr M. Czerny*,
  - 26.III.1979, Historyczne supernowe, *dr M. Kozłowski*,
  - 29.III.1979, Gdzie w kosmosie są kwarki?, *mgr Z. Otwinowski*,
  - 02.IV.1979, Najtwardsze światło, *mgr W. Kluźniak*,
  - 05.IV.1979, Plazma kosmiczna, *dr M. Sroczyńska-Kożuchowska*,
  - 09.IV.1979, Czy kwazar to supergwiazda z dziurą? *prof. B. Paczyński*,
- W poniedziałki odczyty odbywają się w Centrum Astronomicznym im. M. Kopernika, Warszawa, ul. Bartycka 18 o godz. 17. W czwartki — w Obserwatorium Astronomicznym UW, Warszawa, Al. Ujazdowskie 4 o godz. 17. Wstęp wolny.

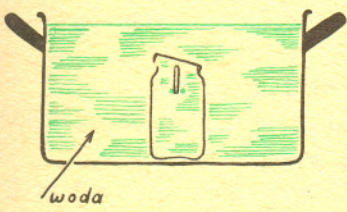
# mata delta



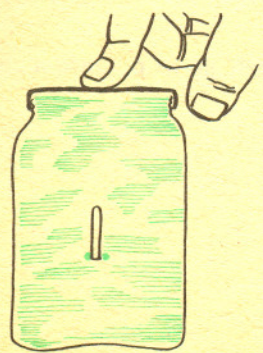
Rys. 1



Rys. 2



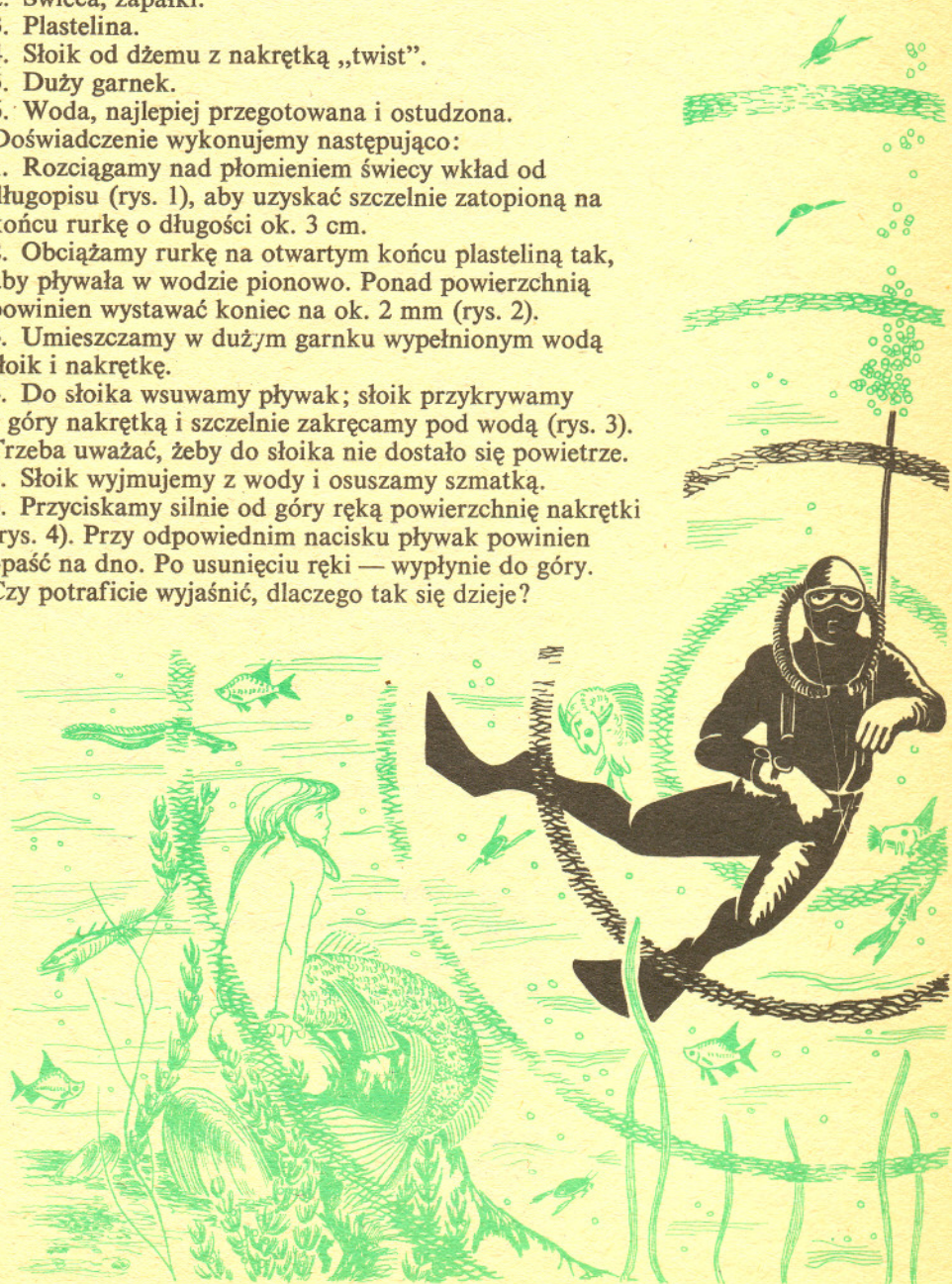
Rys. 3



## Nurek Kartezjusza

Opisane poniżej doświadczenie wymyślił Kartezjusz, wybitny francuski fizyk, matematyk i filozof, który żył w pierwszej połowie XVII wieku. Można je przeprowadzić posługując się bardzo prostymi środkami. Potrzebne są:

1. Wypisany plastikowy wkład od długopisu.
  2. Świeca, zapałki.
  3. Plastelina.
  4. Słoik od dżemu z nakrętką „twist”.
  5. Duży garnek.
  6. Woda, najlepiej przegotowana i ostudzona.
- Doświadczenie wykonujemy następująco:
1. Rozciągamy nad płomieniem świecy wkład od długopisu (rys. 1), aby uzyskać szczelnie zatopioną na końcu rurkę o długości ok. 3 cm.
  2. Obciążamy rurkę na otwartym końcu plasteliną tak, aby pływała w wodzie pionowo. Ponad powierzchnią powinien wystawać koniec na ok. 2 mm (rys. 2).
  3. Umieszczamy w dużym garnku wypełnionym wodą słoik i nakrętkę.
  4. Do słoika wsuwamy pływak; słoik przykrywamy z góry nakrętką i szczelnie zakręcamy pod wodą (rys. 3). Trzeba uważać, żeby do słoika nie dostało się powietrze.
  5. Słoik wyjmujemy z wody i osuszamy szmatką.
  6. Przyciskamy silnie od góry ręką powierzchnię nakrętki (rys. 4). Przy odpowiednim nacisku pływak powinien opaść na dno. Po usunięciu ręki — wypłynie do góry. Czy potraficie wyjaśnić, dlaczego tak się dzieje?



Jedną z rozrywek matematycznych XVII i XVIII wieku było odgadywanie pomyślanej liczby — oparte na prostych, a złośliwie „zagnatwanych” własnościach liczb i działań. Dziś moglibyśmy opracować np. taką zgadywanke: „pomyśl dowolną funkcję kwadratową (to znaczy funkcję postaci  $ax^2 + bx + c$ ) i powiedz mi, jakie wartości przyjmuje ona dla 0, 1 oraz 2, a natychmiast powiem ci, jaka to funkcja”.

Odgadnienie jest bardzo proste. Przypuśćmy, że podano ci liczby  $-5, 1, 9$ . Napisz (albo oblicz w pamięci) różnice między tymi liczbami, a potem różnicę różnic. Powstanie taka tabelka

-5	1	9
6	8	
	2	

Współczynnik przy  $x^2$  pomyślanej funkcji jest równy połowie najniższej stojącej liczby. Współczynnik przy  $x$  jest równy pierwszej liczbie środkowego wiersza, zmniejszonej o połowę liczby dolnej. Wyraz wolny pomyślanej funkcji jest pierwszą liczbą górnego wiersza. W naszym przykładzie obliczymy od razu, że kolega pomyślał o funkcji  $x^2 + 5x - 5$ .

Takie obliczanki mają wiele wspólnego z ... całkowaniem i mają zastosowanie przy rozwiązywaniu poważniejszych problemów. Weźmy funkcję  $x \rightarrow x^4 - 3x^3 + 7x^2 - x + 12$ . Obliczmy jej wartości w punktach 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, następnie różnice tych wartości, różnice różnic i tak dalej. Otrzymamy taką tabelę:

kolejne liczby	0	1	2	3	4	5	6	7
wartości	12	16	30	72	184	432	906	1720
I różnice		4	14	42	112	248	474	814
II różnice			10	28	70	136	226	340
III różnice				18	42	66	90	134
IV różnice					24	24	24	24

Można wykazać, że dla każdej funkcji czwartego stopnia czwarte różnice będą zawsze takie same. Odwrotnie, jeżeli funkcja wielomianowa ma wszystkie czwarte różnice takie same, to musi być czwartego stopnia. To samo dotyczy oczywiście i innych stopni. Na tym polega „zgadywanie” wzoru określającego funkcję, gdy dane są jej wartości:

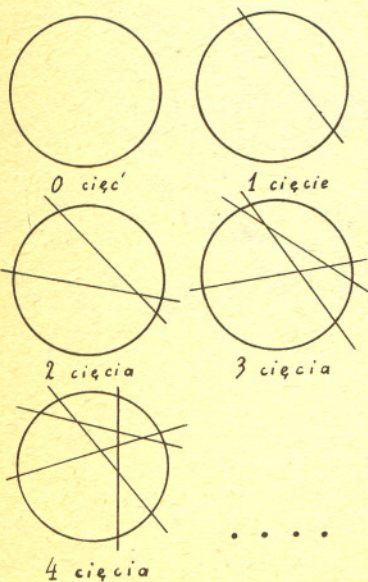
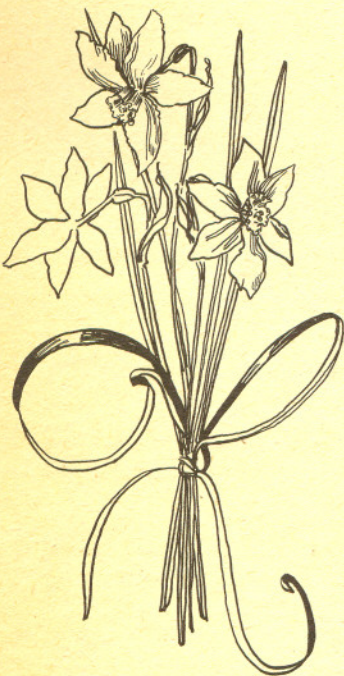
Gdyby dano nam zagadkę: „jaka to funkcja, która dla 0 jest równa 12, dla 1—16, dla 2—30, dla 3—72, dla 4—184, dla 5—432, dla 6—906, dla 7—1720?” to rozwiązalibyśmy ją tak. Ustalilibyśmy, że jest ona najprawdopodobniej czwartego stopnia. Oznaczylibyśmy jej współczynniki powiedzmy przez  $a, b, c, d, e$ .

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 12$$

(skąd wiemy, że  $e = 12$ ?). Podstawiając za  $x$  kolejno 1, 2, 3, 4 otrzymalibyśmy układ czterech równań liniowych z czterema niewiadomymi; no i trzeba by było go rozwiązać.

Kroimy tort. Na ile (najwyżej) kawałków możemy pokroić go za pomocą  $n$  cięć? Układamy tabelę

	0	1	2	3	4	5	6
liczba kawałków	1	2	4	7	11	16	21
I różnice		1	2	3	4	5	6
II różnice			1	1	1	1	1

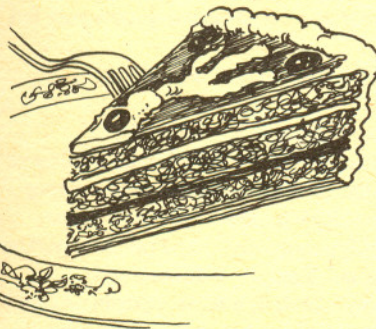


Jeżeli drugie różnice są stałe, funkcja najprawdopodobniej jest kwadratowa i metodą opisaną na początku możemy znaleźć, że jest to funkcja  $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$ .

Dlaczego tylko „najprawdopodobniej” a nie „na pewno”? Po pierwsze dlatego, że szukana funkcja nie musi przecież być wielomianem (bo i niby dlaczego?). Po drugie zaś, nie wiemy, czy naprawdę wszystkie drugie różnice są takie same (zbadaliśmy tylko pięć). Nasz wynik można tylko sformułować tak: najprostszą funkcją, przyjmującą w punktach 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 wartości 1, 2, 4, 7, 11, 16, 21 jest  $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$ . Ale są i inne. Czy wobec tego nasz wynik jest bezwartościowy? Nic podobnego. Wprawdzie wzór trzeba jeszcze udowodnić, ale już wiadomo, jaki.

Opisana metoda daje się zastosować i do zgadywania funkcji wyższych stopni. Do funkcji drugiego stopnia prowadzą zaś na przykład następujące zadania:

- 1) znaleźć największą liczbę obszarów, które mogą powstać przez przecięcie  $n$  kół na płaszczyźnie,
- 2) znaleźć największą liczbę obszarów powstałych przez przecięcie  $n$  elips na płaszczyźnie,
- 3) znaleźć największą liczbę obszarów trójkątnych utworzonych przez  $n$  przecinających się prostych.
- 4) znaleźć sumę liczb od 1 do  $n$ .
- 5) maksymalne liczby elektronów w poszczególnych powłokach atomu są kolejno równe (idąc od jądra atomowego) 2, 8, 18, 32, 50, .... Znaleźć funkcję określającą te liczby.



*Małą Deltę opracowali: Jerzy GINTER  
i Michał SZUREK*



## Zadania

*Redaguje dr Michał SZUREK*

**M 187.** Dokąd dojdziemy, gdy będziemy stale szli na północny zachód?

Rozwiązanie na str. 8

**M 188.** Dana jest liczba  $4444^{4444}$ . Obliczamy jej sumę cyfr, potem sumę cyfr powstałej liczby i jeszcze raz sumę cyfr. Co otrzymamy? (MOM 1975)

Rozwiązanie na str. 7

**M 189.** Ile najwięcej koni szachowych (skoczków) można ustawić na szachownicy tak, by się nie szachowały?

Rozwiązanie na str. 16

*Redaguje dr Waldemar GORZKOWSKI*

**F 63.** W windzie umieszczono naczynie z wodą, w którym pływa drewniany klocek.

Następnie windę wprowadzono w ruch jednostajnie przyspieszony do góry z przyspieszeniem równym  $a$ . Czy zanurzenie klocka w czasie ruchu windy będzie inne niż w czasie spoczynku? Jeżeli nie ulegnie ono zmianie, to dlaczego? Jeżeli zaś ulegnie zmianie, to jak?

Objętość klocka  $V$ , gęstość wody  $\rho_w$ , gęstość klocka  $\rho_k$ .

Rozwiązanie na str. 11



Prof. dr Dominik

ROGULA

## Działanie celowe

Umiejętność realizacji zadań na podstawie ich treści, to umiejętność osiągania pewnych celów. Sposób realizacji zadania to sposób osiągnięcia odpowiedniego celu.

Czy maszyna może działać celowo? Aby móc uzyskać jaśniejszy pogląd, problem ten musimy uściślić. Uściślenia tego dokonamy przede wszystkim z punktu widzenia „normalnego” stawiania zadań komputerowi, polegającego na zakomunikowaniu mu treści zadania, bez podawania sposobu realizacji w postaci programu.

1. Dany jest świat, który może znajdować się w różnych stanach, i w którym możliwe są określone działania elementarne zmieniające w pewien sposób stan świata. Cel to pewien warunek logiczny orzekający coś o stanie świata. Osiągnięcie celu, to przekształcenie świata do stanu, w którym cel jest spełniony. Działanie to łańcuch działań elementarnych. Działanie celowe, to działanie zmierzające skutecznie do osiągnięcia celu.

2. Hipotetyczną na razie maszynę działającą w sposób celowy nazwiemy w skrócie *robotem*. Jeżeli robot ma skutecznie wykonywać swe zadania, to w każdym przypadku mamy dwie możliwości: albo (1) robot z góry „zna” sposób osiągnięcia postawionego celu, albo (2) jest w stanie taki sposób „wynaaleźć”.

Już tradycyjne programowanie daje na postawione wyżej pytanie odpowiedź pozytywną w zakresie nadających się do tego celów: odpowiednio oprogramowany komputer „zna” przecież algorytmy wykonywania zadań pewnej klasy i może wobec tego działać zgodnie z pierwszą możliwością. Istotnie nowym elementem postawionego pytania jest więc możliwość druga (2).

Można by zatem zwęzić pojęcie działania celowego, ograniczając je do sytuacji, kiedy nie jest z góry znany algorytm osiągania celu. Nie uczynimy tak, mając na względzie praktyczną stronę tego pojęcia: stawiając robotowi zadanie interesujemy się wynikiem, a nie kwestią czy wynik był osiągnięty w drodze zastosowania algorytmu, czy inaczej.

Z punktu widzenia teorii ważny jest natomiast jedynie „trudny” przypadek, gdy algorytm osiągania celu nie jest znany.

3. Możliwość celowego działania w tym istotnym sensie sprowadza się do możliwości wykonywania zadań w sytuacji, gdy odpowiedni algorytm nie jest znany. Rozwiązanie problemu stanowi wspomniane już programowanie heurystyczne. Można nawet powiedzieć więcej: istotą programowania (i w ogóle postępowania) heurystycznego są próby osiągania pewnych celów.

4. Jakiego rodzaju ułatwień można oczekiwać od działających celowo maszyn? Przede wszystkim byłoby możliwe tak ważne dla nas „normalne” stawianie zadań. Ponadto różnorodność wykonywanych zadań mogłaby być nieporównywalnie większa niż dziś, a to ze względu na fakt, że algorytmy nie odgrywają w działaniu robota roli decydującej. Procedury heurystyczne mogą być dużo bardziej uniwersalne niż algorytmy.

Możliwe są rozmaite interpretacje robota. Jeżeli zadaniem robota jest faktyczne osiągnięcie postawionego celu, to jest to *robot-wykonawca*. Możliwy jest także *robot-planista*, którego zadaniem jest sporządzenie planów. Plan to opis sekwencji dopuszczalnych działań prowadzących od dowolnego stanu świata  $\alpha$  spełniającego pewien warunek  $P$  do pewnego stanu  $\beta$  spełniającego warunek (cel)  $K$ . Robot-planista może planować zarówno działania własne, jak i cudze, pod warunkiem znajomości dopuszczalnych działań elementarnych.

Jeżeli „świat” to pamięć i rejestry komputera, a dopuszczalne działania to operacje komputera, robot-planista staje się *robotem-programistą*. Jest on zdolny do układania programów rozwiązywania zadań na danej EMC.

5. Przedstawione wyżej uściślenia pojęcia działania celowego można jeszcze uogólnić, opisując cel nie za pomocą warunku logicznego, lecz ogólniej — za pomocą relacji preferencji, będącej relacją częściowego uporządkowania zbioru stanów świata. Jeżeli  $\alpha < \beta$  w sensie relacji preferencji, to stan  $\beta$  jest bardziej pożądanym niż stan  $\alpha$ . Cel w postaci warunku logicznego  $K$  odpowiada szczególnej relacji preferencji

$$\alpha < \beta \stackrel{\text{df}}{\equiv} (\text{nie } K(\alpha) \wedge K(\beta)) \vee (\alpha = \beta).$$

Tak uogólnione działanie celowe leży całkowicie w możliwościach programowania heurystycznego.

6. Stopień trudności działania celowego zależy od wielu okoliczności. Milcząco przyjmowaliśmy, że stan świata może ulegać zmianie wyłącznie wskutek działań podmiotu. Można jednakże dopuścić zarówno spontaniczne transformacje świata zachodzące według pewnych reguł („praw przyrody”), jak i zmiany wynikłe z działań innych podmiotów. Te inne działania też mogą być celowe, co w zależności od relacji pomiędzy celami prowadzi do problemów współdziałania, przeciwdziałania, konkurencji itp. W tych warunkach plan zastępuje strategia, a skuteczne osiąganie celów staje się sprawą trudniejszą.

Osiąganie celów „odległych”, tzn. wymagających długich łańcuchów działań, może dla robotów najbliższej przyszłości okazać się trudne. Jest ono trudne również dla człowieka. Wydaje się, że w najbliższej przyszłości największy pożytek przyniosą komputery zaprogramowane na realizację celów stosunkowo prostych, niezbyt odległych, lecz bardzo różnorodnych. Zwolni to człowieka od wielu uciążliwych drobiazgów, pozwalając mu skoncentrować swą inteligencję na sprawach skrojonych na jej miarę.



### Rozwiązanie zadania M 189

Ustawmy 32 skoczki na czarnych (albo białych) polach. Widoczne jest, że się nie szachują. Gdyby w jakikolwiek sposób można było rozstawić więcej niż 32, to przynajmniej jeden z ośmiu prostokątów  $4 \times 2$ , na które można pociąć szachownicę, zawierałby 5 skoczków. Ale na tak małym prostokącie nie-można ustawić 5 skoczków tak, by się nie szachowały, gdyż pola tego prostokąta można połączyć w pary o tej własności, że skoczek stojący na jednym polu pary szachuje drugie pole tej pary.

Uzupełnione algorytmami osiągnięcia „odległych” celów specjalnych programy takie mogą się okazać nadzwyczaj pożyteczne. Budowa systemów łączących podejście algorytmiczne z heurystycznym nie nastęrcza koncepcyjnie większych trudności: zasadniczo wystarczy dołączyć algorytmicznie wykonywane makrooperacje do listy dostępnych działań elementarnych.

7. Wykonywanie zadań niejasno postawionych, niemożliwe w podejściu algorytmicznym, jest zupełnie naturalne w działaniu celowym opartym na zasadach heurystycznych. Nie jest wykluczone, że takie zadania będą nawet pod pewnymi względami sprawniej realizowane.

W poprzednim numerze podaliśmy sposób konstrukcji dziewięciopolowych kwadratów magicznych, w których suma magiczna jest daną liczbą naturalną podzielną przez 3 i większą lub równą 15. A oto inny sposób takiej konstrukcji, dający kwadrat o sumie magicznej  $3(5+M)$ :

$4+M$	$9+M$	$2+M$
$3+M$	$5+M$	$7+M$
$8+M$	$1+M$	$6+M$

Można zapytać o istnienie kwadratów magicznych złożonych z różnych liczb pierwszych. Zauważmy, że jeżeli liczby  $a+kr$  ( $k = 1, 2, \dots, 8, 9$ ) są liczbami pierwszymi, to

$a+4k$	$a+9k$	$a+2k$
$a+3k$	$a+5k$	$a+7k$
$a+8k$	$a+k$	$a+6k$

jest dziewięciopolowym kwadratem magicznym złożonym z liczb pierwszych. Liczby  $a+kr$  ( $k = 1, 2, \dots, 8, 9$ ) są pierwsze np. dla  $r = 210$  i  $a = -11$ ,  $a = 199$ .

W roku 1961 opublikowano kwadrat magiczny złożony ze 169 różnych liczb pierwszych, nie tworzących jednak ciągu arytmetycznego. Skonstruował go anonimowy pensjonariusz jednego z więzień amerykańskich. Oto ten kwadrat:

1153	8923	1093	9127	1327	9277	1063	9133	9661	1693	991	8887	8353
9967	8161	3253	2857	6823	2143	4447	8821	8713	8317	3001	3271	907
1831	8167	4093	7561	3631	3457	7573	3907	7411	3967	7333	2707	9043
9907	7687	7237	6367	4597	4723	6577	4513	4831	6451	3637	3187	967
1723	7753	2347	4603	5527	4993	5641	6073	4951	6271	8527	3121	9151
9421	2293	6763	4663	4657	9007	1861	5443	6217	6211	4111	8581	1453
2011	2683	6871	6547	5227	1873	5437	9001	5647	4327	4003	8191	8863
9403	8761	3877	4783	5851	5431	9013	1867	5023	6091	6997	2113	1471
1531	2137	7177	6673	5923	5881	5233	4801	5347	4201	3697	8737	9343
9643	2251	7027	4423	6277	6151	4297	6361	6043	4507	3847	8623	1231
1783	2311	3541	3313	7243	7417	3301	6967	3463	6907	6781	8563	9091
9787	7603	7621	8017	4051	8731	6427	2053	2161	2557	7873	2713	1087
2521	1951	9781	1747	9547	1597	9811	1741	1213	9181	9883	1987	9721

Kwadrat ten ma interesującą własność: powstały zeń przez usunięcie skrajnych kolumn i wierszy kwadrat o 121 polach jest magiczny, gdy usuniemy znowu z tego kwadratu skrajne kolumny i wiersze, otrzymany kwadrat o 81 polach będzie znow magiczny itd.

Zauważmy na marginesie, że najdłuższy znany rosnący ciąg arytmetyczny złożony z liczb pierwszych ma 17 wyrazów. Jest to ciąg

$$a_k = 3\ 430\ 751\ 869 + 87\ 297\ 210\ k, \quad 0 \leq k \leq 16.$$

Znalazł go w roku 1977 przy pomocy maszyny matematycznej Amerykanin Sol Weintraub.

Andrzej MAKOWSKI

