

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 7 (91)

Zapisać rzecz prostą w sposób skomplikowany <i>dr Marcin E. Kuczma</i>	str. 1
Śnieg laserowy <i>dr Krzysztof Ernst, mgr Jacek Hoffman</i>	str. 5
Typowe, to znaczy jakie? <i>mgr Krzysztof S. Nowiński</i>	str. 9
Zgadnij największą <i>Danuta i Władysław Majewscy</i>	str. 10
Ustalanie zapasów części zamiennych do maszyn rolniczych metodą Monte Carlo <i>dr Krzysztof Mikucki</i>	str. 14
Zadania	str. 15
Rodzaj ruchu zwany ciepłem <i>dr Krzysztof Szymborski</i>	str. 16

### W następnym numerze:

Wiek XVII

„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

#### Komitet Redakcyjny:

doc. dr Jerzy Bartke  
doc. dr Andrzej Bączyński  
doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
prof. dr Kazimierz Goebel  
doc. dr Bolesław Grabowski  
dr Jan Hanasz  
doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz  
doc. dr Tadeusz Iwiński  
doc. dr Andrzej Januszajtis  
doc. dr Tadeusz Jarzębowski  
prof. dr Leon Jeśmanowicz  
dr Henryk Kaczorek  
prof. dr Marek Kuczma  
mgr Andrzej Mąkowski  
prof. dr Bohdan Paczyński  
prof. dr Zdzisław Pawlak  
prof. dr Arkadiusz Piekara  
doc. dr Sławomir Ruciński  
prof. dr Konrad Rudnicki  
prof. dr Zbigniew Semadeni  
doc. dr Grzegorz Sitariski

prof. dr Józef Smak  
prof. dr Jan Stankowski  
doc. dr Kazimierz Stepien  
prof. dr Mieczysław Subotowicz  
doc. dr Stefan Turnau  
prof. dr Jerzy Wdowczyk  
doc. dr Andrzej Woszczyk  
prof. dr Janusz Zakrzewski —  
wiceprzewodniczący  
prof. dr Wojciech Zakowski —  
przewodniczący

Redaguje Kolegium w składzie:  
mgr Tomasz Chlebowski  
mgr Maciej Jędrzejczak  
dr Marek Kordos — red. nac.  
dr inż. arch. Jacek Mazur — ilustracje  
dr Krzysztof Prażmowski — red. techn. graf.  
dr Michał Szurek  
mgr Krystyna Szcypio — sekr. red.  
doc. dr Michał Świącki — z-ca red. nac.

#### Adres Redakcji

ul. Hoża 69 pok. 151,  
00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.  
Ossolińskich — Wydawnictwo  
Wrocław, Oddział w Warszawie  
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.  
wyd.; 2,50 ark. druk.;  
papier offsetowy III kl. 80 g. 61 × 86  
Wydrukowano w Drukarni im.  
Rewolucji Październikowej  
Warszawa, ul. Mińska 65  
Nr zam. 355/12/81 L-15

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60—, cena prenumeraty półrocznej zł 30—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:  
— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następnego  
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.  
Jednostki gospodarki społecznej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.  
Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorzy indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.  
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

#### Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.  
Sprzedż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.  
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław  
w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa  
w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7  
00-068 Warszawa, Poland or with  
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68,  
Bundesrepublik Deutschland.  
— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,  
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 5— nr indeksu 35723/35550

# Zapisać rzecz prostą w sposób skomplikowany

O pewnym profesorze mówiono: To bardzo mądry człowiek — potrafi najprostszą ideę zawikłać tak, że jedynie najbystrzejsi słuchacze są w stanie go zrozumieć ... Niejeden autor stwarza pozory szczególnej głębi spojrzenia ubierając banalne treści w nadmiernie wyszukaną formę. Czyżby to miało istotnie znamionować klasę uczonego? Czy w ogóle może mieć sens postępowanie w myśl sugestii zawartej w tytule? Spora część badań naukowych w dziedzinach „teoretycznych” polega na wyrażaniu rzeczy skomplikowanych w sposób prostszy — ale także vice versa. O celowości pierwszej z tych metod nie trzeba chyba nikogo przekonywać. Natomiast druga budzi raczej odruch nieufności. Komplikować? Po co?

Nie mamy zamiaru kontynuować rozprawki filozoficznej na temat sensowności komplikowania — choć rozwinięcie tego zagadnienia mogłoby być frapujące. Zamiast tego, ograniczymy się do pewnego przykładu.

W naszym przykładzie „rzeczą prostą” będzie pojęcie silni:

$$(1) \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

Rzeczywiście: definicja ta jest jasna, zrozumiała, nic tu trudnego ani przesadnie mądrego. No to — zamiast cieszyć się prostotą, napiszemy coś takiego:

$$(2) \quad n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n+\varepsilon_n}, \quad \text{gdzie} \quad 0 < \varepsilon_n < \frac{1}{12n}.$$

Jest to sławny **wzór Stirlinga**. Zgodzą się chyba wszyscy, że panu Jamesowi Stirlingowi (1692—1770) udało się zapisać rzecz prostą w sposób wysoce skomplikowany ...

Skąd się bierze ten przedziwny wzór? Zainteresowanych możemy odesłać do podręczników analizy matematycznej (w wielu z nich można znaleźć wzór Stirlinga z pełnym dowodem) — lub też zachęcić do dokończenia czytania niniejszego tekstu.

Samo pojęcie silni bywa w matematyce bardzo użyteczne. Z definicji (1) nie wynikają jednak żadne „rozsądne” reguły działań na symbolu  $n!$ . Otóż zaleta wzoru (2) tkwi w tym, że wyrażenie stojące po jego prawej stronie dobrze się nadaje do wykonywania operacji arytmetycznych. Najlepiej to zilustrują przykłady. W różnych zagadnieniach analizy spotyka się ciągi mające w mianowniku  $n!$ . Czynniki te uważa się za dość silnie „uzbieśniający”; znaczy to tyle, że  $n!$  dąży dość szybko do nieskończoności. Jak szybko? Jak to wymierzyć? Mówimy, że ciąg  $(b_n)$  dąży do nieskończoności szybciej niż  $(a_n)$  jeśli  $\frac{b_n}{a_n} \rightarrow \infty$ . Jeśli natomiast iloraz ten ma granicę dodatnią skończoną, mówimy, że ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$  dążą do nieskończoności jednakowo szybko. Sytuacja jest idealna, gdy tą granicą jest jedynka; wtedy mówimy, że rozważane ciągi są asymptotycznie równe i piszemy:  $a_n \approx b_n$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Wzór (2) pokazuje, że

$$(3) \quad n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (n \rightarrow \infty),$$

stąd zaś widać natychmiast, że ciąg  $(n!)$  dąży do nieskończoności szybciej, niż  $(n^2)$ , niż  $(n^3)$ , ogólnie, niż  $(n^p)$ , gdzie  $p$  jest dowolnie dużym wykładnikiem; także szybciej, niż  $(2^n)$ , niż  $(3^n)$ , ogólnie, niż  $(a^n)$ , gdzie  $a$  jest dowolnie dużą podstawą; ale wolniej, niż np. ciąg  $(n^n)$ . Te wnioski można zresztą otrzymać, też bez większego trudu, bezpośrednio z definicji (1). Znacznie bardziej subtelne jest np.

stwierdzenie, że ciąg  $(n!)$  dąży do nieskończoności szybciej, niż  $\left(\frac{1}{3}n\right)^n$ , ale

wolniej, niż  $\left(\frac{1}{2}n\right)^n$ . Wywnioskować to wprost z definicji (1) byłoby trudno;

natomiast z wzoru (3) jest to widoczne od razu — wystarczy tylko wiedzieć, że  $2 < e < 3$ .

W zbiorach zadań z analizy matematycznej często można znaleźć takie ćwiczenie: obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

Do wzoru (2) związanego z nazwiskiem Stirlinga doszli niezależnie w 1730 roku Stirling i de Moivre. Żaden z nich nie był w stanie podać naprawdę ścisłego dowodu, pierwsze pełne dowody pochodzą dopiero od Gaussa.

Wzór Stirlinga dla  $n = 20$  daje  $20! = 24288 \cdot 10^{14}$ , podczas gdy dokładna wartość jest

$20! = 2432902008176640000$ ; błąd względny wzoru Stirlinga wynosi tu więc ok. 0,4 procenta.



Granice tę da się wyznaczyć metodami całkiem elementarnymi (wystarczy wiadomości szkolne) — ale zadanie jest wtedy niełatwe. Za to dla znających wzór Stirlinga zadanie jest typu „samograj”:

$$\frac{1}{n} (n!)^{1/n} = \frac{1}{n} (\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n+\epsilon_n})^{1/n} = (2\pi n)^{1/2n} e^{-1+\epsilon_n/n} \rightarrow \frac{1}{e}.$$

To, że ciąg  $(\sqrt[n]{n!})$  dąży do nieskończoności, jest dość jasne (jego wyrazy to średnie geometryczne początkowych odcinków ciągu 1, 2, 3, ...). Otrzymany przed chwilą wynik daje dodatkową informację, że  $\sqrt[n]{n!}$  dąży do nieskończoności tak samo szybko, jak  $n$ ; dokładniej, dostaliśmy równość asymptotyczną

$$\sqrt[n]{n!} \approx \frac{n}{e} \quad (n \rightarrow \infty).$$

(Kto podejmie trud przeprowadzenia dowodu elementarnego, łącznie zrozumie, dlaczego wzór Stirlinga jest „mocnym” twierdzeniem).

Przypomnijmy sobie — dla odmiany — trójkąt Pascala. Jak wiadomo, jego  $n$ -ty wiersz (numeracja od  $n = 0$ ) składa się z  $n + 1$  liczb naturalnych, tak zwanych

współczynników Newtona  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ,  $k = 0, \dots, n$ . Oto dla przykładu

wiersz ósmy:

1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1 rozpoczyna się od jedynki, następnie współczynniki wzrastają; począwszy od połowy długości wiersza współczynniki maleją aż do jedynki; część wznosząca jest symetryczna do opadającej. Wymienione własności przysługują wszystkim wierszom trójkąta Pascala. Są one powszechnie znane. Spróbujmy się zorientować, jaki jest „rozkład masy” w wierszach o dużym numerze. Cóż to znaczy? Wyobraźmy sobie, że podzieliliśmy pewien ustalony, wzorcowy odcinek na  $n + 1$  równych przegródek i że do każdej z nich sypiemy

piasek w ilości proporcjonalnej do odpowiedniego współczynnika  $\binom{n}{k}$ ; przy tym ogólna masa piasku jest stała, niezależna od  $n$  — przyjmijmy ją za jedność. Ponieważ suma współczynników Newtona w  $n$ -tym wierszu równa się  $2^n$ , więc

masa piasku nasypanego do  $k$ -tej przegródki będzie równa  $2^{-n} \binom{n}{k}$ . Gdyby

rozkład masy był równomierny, ilość piasku w każdej przegródce byłaby równa  $1/(n+1)$ . Rzecz jasna, tak nie jest. W przegródkach blisko środka piasku będzie więcej, w przegródkach skrajnych — mniej. Piasek utworzy górkę. Interesuje nas kształt tej góry przy  $n \rightarrow \infty$ .

Gdy  $n$  jest parzyste, górka ma wyraźny wierzchołek:  $n$ -ty wiersz trójkąta Pascala ma wyraz środkowy, największy. Prześledźmy zachowanie się współczynnika

Newtona  $\binom{n}{n/2}$ , gdy  $n$  dąży do  $\infty$  przyjmując wartości parzyste.

Na mocy wzoru Stirlinga [piszemy  $n - k = l$ ]:

$$(4) \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n+\epsilon_n}}{\sqrt{2\pi k} k^k e^{-k+\epsilon_k} \cdot \sqrt{2\pi l} l^l e^{-l+\epsilon_l}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{n}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{l}\right)^{l+\frac{1}{2}} e^{\epsilon_n - \epsilon_k - \epsilon_l} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{n}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{l}\right)^{l+\frac{1}{2}} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Przyjmijmy  $k = l = \frac{1}{2} n$ ; dostaniemy wtedy

$$2^{-n} \binom{n}{n/2} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Widać stąd, że ten środkowy współczynnik gromadzi niepokojąco dużą część ogólnej „masy”. Zamiast wielkości rzędu  $1/n$ , która należałaby się przy rozkładzie równomiernym, mamy wielkość rzędu  $1/\sqrt{n}$ .

A więc wierzchołek góry będzie coraz wyżej. Ponieważ masa ogólna się nie zmienia, można się domyślać, że nasza górkę będzie kształtem coraz bardziej przypominać iglicę (rzut oka na rysunki: dla  $n = 4$  mamy rozbudowane „podium zwycięzców”, dla  $n = 8$  sylwetkę Pałacu Kultury i Nauki).

Spróbujmy to udowodnić. Pokażemy mianowicie, że jeśli  $a$  jest dowolną liczbą



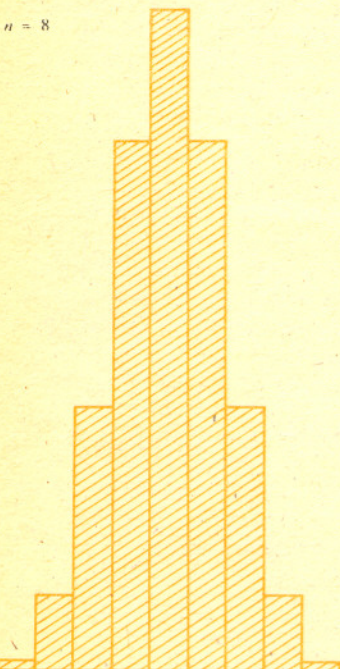
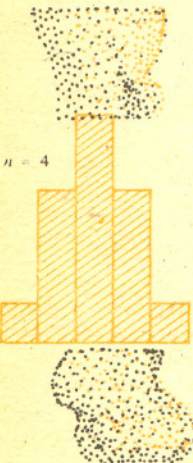
Trójkąt Pascala

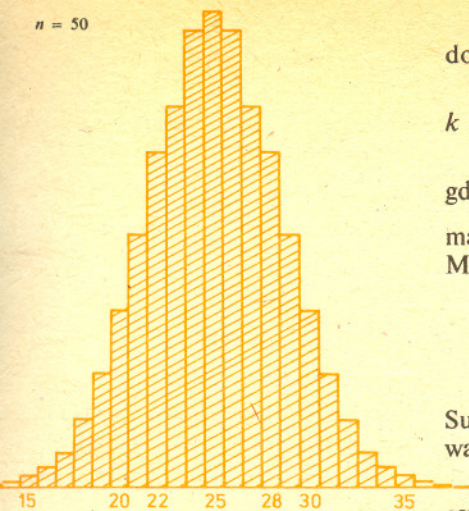
```

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

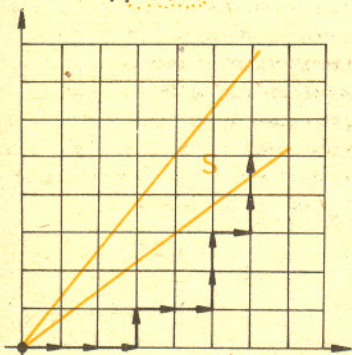
```

O różnych ciekawych własnościach tego trójkąta pisaliśmy na przykład w numerze 1 1980.

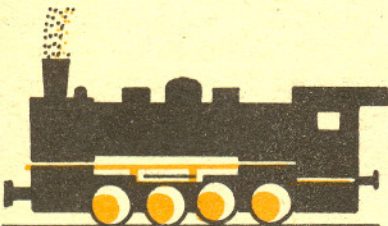




$[x]$  oznacza część całkowitą liczby  $x$ , tj. najmniejszą liczbę całkowitą nie przekraczającą  $x$ .



Do punktu kratowego  $(k, l)$  można dotrzeć z punktu  $(0, 0)$  na  $\binom{k+l}{k}$  sposobów.



dotadnią mniejszą niż  $\frac{1}{2}$ , to suma współczynników Newtona  $\binom{n}{k}$  względem  $k \leq an$  zgromadzi, przy dużych  $n$ , znikomo małą część sumy wszystkich  $\binom{n}{k}$ ,

gdy  $k \leq n$ . Przez symetrię, jeśli  $\frac{1}{2} < b < 1$ , to również „na prawo od  $b$  będzie mało masy”. Zatem prawie cała masa będzie skupiona blisko środka. Mamy więc wykazać, że  $q_n \rightarrow 0$ , gdzie

$$q_n = \left( \sum_{k \leq an} \binom{n}{k} \right) : \left( \sum_{k \leq n} \binom{n}{k} \right) = 2^{-n} \sum_{k \leq an} \binom{n}{k}$$

Suma ta ma  $[a(n+1)]$  składników; największym z nich jest ostatni, odpowiadający wartości  $k = [an]$ . Stąd oszacowanie (doprawdy, mało subtelne)

$$(5) \quad q_n < 2^{-n} [a(n+1)] \binom{n}{[an]}$$

Prosi się teraz skorzystać z wzoru (4) podstawiając  $k = [an]$ . Otóż my sobie ułatwimy życie jeszcze bardziej i przyjmijmy po prostu  $k = an$  (wyrażenie po prawej stronie wzoru (4) ma sens także dla  $k$  i  $l$  niekoniecznie całkowitych). Oczywiście  $[an] \approx an$  ( $n \rightarrow \infty$ ), więc asymptotyczna równość we wzorze (4) zostanie zachowana:

$$\binom{n}{[an]} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left( \frac{n}{an} \right)^{an+1/2} \left( \frac{n}{(1-a)n} \right)^{(1-a)n+1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi na(1-a)}} \left( a^a (1-a)^{1-a} \right)^n$$

Wobec nierówności (5) ciąg  $(q_n)$  szacuje się asymptotycznie przez wyrażenie

$$(6) \quad \frac{a(n+1)}{\sqrt{2\pi na(1-a)}} \left( 2a^a (1-a)^{1-a} \right)^n$$

Dla  $a \in (0, 1/2)$  liczba w dużym nawiasie jest mniejsza od jedności (co można sprawdzić zwykłą metodą rachunku różniczkowego). Zatem ciąg (6) dąży do zera, wobec czego także  $q_n \rightarrow 0$  — a o to właśnie chodziło.

Wykorzystując oszacowanie (5)—(6) nietrudno przeliczyć, że jeśli sypimy piasek na drogę długości 1 kilometra według podanej recepty, przyjmując np.  $n = 1000$  (czyli dzieląc ten kilometr na działki metrowej długości), to środkowa stumetrowka zgromadzi  $> 99,8\%$  całej masy piasku.

Opisane zjawisko można zinterpretować w nieco innym języku. Wyobraźmy sobie, że punkt wędrujący po płaszczyźnie startuje z położenia  $(0, 0)$  i w każdym kroku przesuwa się o wektor jednostkowy poziomo w prawo lub pionowo w górę (wybór jest losowy, z równym prawdopodobieństwem). Niech  $S$  oznacza dowolny sektor wyznaczony przez dwie półproste wychodzące z punktu  $(0,0)$  i zawierający w swoim wnętrzu dwusieczną pierwszej ćwiartki płaszczyzny (prostą  $y = x$ ). Wówczas nasz błądzący punkt znajdzie się w obrębie sektora  $S$  z prawdopodobieństwem dowolnie bliskim 1, po dostatecznie wielu krokach.

Kolejny, ostatni już, przykład będzie nieco „lżejszej natury”. Panowie S, W, N, E grają w brydża. Jaka jest szansa, że w pierwszym rozdaniu S otrzyma 13 trefli, W — 13 kar, N — 13 kierów, a E — 13 pików? Znikoma — to pewne. Przy założeniu pełnej losowości szansa ta równa się oczywiście  $1/N$ , gdzie  $N$  oznacza liczbę wszystkich możliwych rozkładów.

$N$  jest dużą liczbą naturalną. Ale jak dużą? Miliard? Bilion? Ilocyfrowa to liczba? I znów wzór Stirlinga pomoże nam zorientować się w rzędzie jej wielkości. „Ręka”

gracza S może być wybrana z talii na  $\binom{52}{13}$  sposobów. Dla gracza W zostaje

39 kart, z których 13 można wybrać na  $\binom{39}{13}$  sposobów. Z pozostałych 26 kart

wyberamy na  $\binom{26}{13}$  sposobów kartę gracza N. 13 kart, które zostały, otrzymuje gracz E. Zatem

$$N = \binom{52}{13} \binom{39}{13} \binom{26}{13} = \frac{52!}{(13!)^4}$$

Za Szczepanem Jeleńskim („Śladami Pitagorasa”) podajemy, że  $(52!/13!)^4 = 53644737765488792839237440000$ .  
 Tamże znajdzie Czytelnik wyliczenie, jak długo trzeba grać w brydża, żeby wyczerpać wszystkie możliwe rozkłady. W. E. Hartley obliczył, że gdyby mieć tyle talii małych, pasjansowych kart, żeby w każdej z nich karty były ułożone inaczej, i gdybyśmy te wszystkie talie schowali ciasno do sześciennego pudełka, to jego przekątna miałaby 201 lat świetlnych.

Zastosujmy wzór (2):

$$52! = \sqrt{104\pi} 52^{52} e^{-52+\varepsilon_{52}},$$

$$13! = \sqrt{26\pi} 13^{13} e^{-13+\varepsilon_{13}}.$$

Dzieląc pierwszą z tych liczb przez drugą w czwartej potędze dostajemy

$$N = 2^{103.5} (13\pi)^{-1.5} e^w,$$

gdzie

$$(7) \quad w = \varepsilon_{52} - 4\varepsilon_{13}; \quad -\frac{1}{39} < w < 0.$$

Interesuje nas liczba cyfr w zapisie dziesiętnym liczby  $N$ . Należy w tym celu liczbę  $N$  zlogarytmować (przy podstawie 10). Jeśli nie zależy nam zbyt mocno na dokładności, zastąpmy wielkość  $13\pi$  przez 40, pominiemy czynnik  $e^w$  jako bliski jedności i przyjmijmy 0,3 jako przybliżoną wartość  $\log 2$ . Wówczas rachunki stają się tak proste, że można je wykonać w pamięci. Ich wynik: 28,65. Popelniamy przy tym błąd  $< 0,2$ :

$$28,45 < \log N < 28,85.$$

A więc  $N$  jest liczbą 29-cyfrową! Prowadząc obliczenie starannie (z użyciem tablic logarymicznych) otrzymujemy rezultat

$$(8) \quad 28,72 < \log N < 28,74.$$

Na lepszą dokładność (przy zastosowanej metodzie) nie stać nas; dokładność ta jest bowiem ograniczona oszacowaniem (7) wykładnika  $w$ . Z nierówności (8) wynika, że

$$5,24 \cdot 10^{28} < N < 5,49 \cdot 10^{28}.$$

Jest to więc bardzo duża liczba. Gdyby całą powierzchnię kuli ziemskiej, wraz z górami, oceanami itp., obsadzić gęsto brydżystami (4 m<sup>2</sup> na jeden stolik z czwórką graczy), przyjmując średni czas rozgrywki itd. — dokończenie tego rodzaju spekulacji pozostawimy tym z Czytelników, których to bawi. Pozostała nam kwestia dowodu wzoru Stirlinga. Zapewne wielu z Czytelników nie lubi przyjmować wiadomości tylko „na wiarę”; wśród nich znajdują się i tacy, którzy wolą potrzebne uzasadnienie wymyślić, niż szperać w literaturze. (Taka postawa nie jest rzadkością i wśród twórczych naukowców; czasem świadczy ona o dociekliwości, czasem o lenistwie).

Dla tych Czytelników podamy tutaj pobieżny szkic tego dowodu. Uzupelnienie szczegółów może stać się interesującym ćwiczeniem.

Rozpatrujemy szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , gdzie

$$a_1 = -1, \quad a_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln \frac{n}{n-1} - 1 \quad \text{dla } n > 1.$$

Wyrazy tego szeregu spełniają dla  $n > 1$  nierówność  $0 < a_n < 1/12n(n-1)$ ; można to wykazać np. wykorzystując rozwinięcie funkcji  $\ln(1+x)$  w szereg potęgowy. Zatem szereg  $\sum a_n$  jest zbieżny, a oznaczając przez  $s$  jego sumę, zaś przez  $s_n$  jego  $n$ -tą sumę częściową łatwo dostać oszacowanie na różnicę  $\varepsilon_n = s - s_n < 1/12n$ .

Przez indukcję sprawdzamy, że

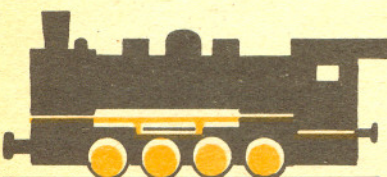
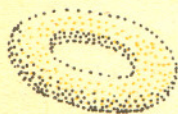
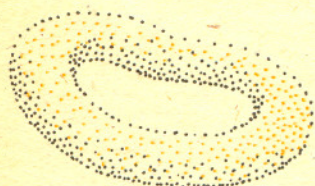
$$s_n = s - \varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n - \ln n!, \quad \text{a stąd}$$

$$(9) \quad n! = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n-s+\varepsilon_n}.$$

Powołujemy się teraz na wzór Wallisa (por. np. Delta 8/1980):

$$\frac{1}{2} \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{((2n)!)^2 (2n+1)}.$$

Po uwzględnieniu wzoru (9) stwierdzamy, że wartość tej granicy wynosi  $\frac{1}{4} e^{-2s}$ , skąd  $e^{-s} = \sqrt{2\pi}$ . Podstawiamy to do (9) i wychodzi nam wzór (2). Jak ten Stirling do tego doszedł?!

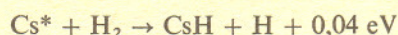


# Śnieg laserowy

Dr Krzysztof ERNST, mgr Jacek HOFFMAN

## Co to jest?

Nazwa „śnieg laserowy” pojawiła się po raz pierwszy w 1976 roku na Międzynarodowej Konferencji Elektroniki Kwantowej w Amsterdamie, gdzie pod takim właśnie tytułem W. Happer przedstawił wyniki doświadczenia wykonanego w Uniwersytecie Columbia. Oświetlał on mianowicie komórkę zawierającą pary cezu, wodór i hel światłem lasera argonowego o długości fali 458 nm. W komórce pod wpływem światła powstawały zawieszony w gazie cząstki o rozmiarach rzędu 1  $\mu\text{m}$ . Cząstki te, dobrze widoczne dzięki rozproszeniu na nich światła (tego samego lasera argonowego), opadały na dno komórki stwarzając wrażenie padającego śniegu. Stąd też nazwa zaobserwowanego efektu. Podana przez Happera interpretacja zjawiska jest następująca: Światło laserowe absorbowane jest przez atomy cezu, co można stwierdzić obserwując jego pochłanianie przy przejściu przez komórkę lub świecenie wzbudzonych atomów cezu. W zderzeniach wzbudzonych atomów cezu z cząsteczkami wodoru zachodzi reakcja chemiczna



Powstające w niej cząsteczki CsH mogą następnie łączyć się w drobne kryształki  $(\text{CsH})_n$ , które są obserwowane jako śnieg.

W okresie ostatnich lat ukazało się wiele dalszych prac dotyczących powstawania śniegu laserowego w rozmaitych ośrodkach gazowych ( $\text{NO}_2 + \text{SO}_2$ ,  $\text{SF}_6$ ,  $\text{CS}_2$ ,  $\text{UF}_6$ ) pod wpływem światła laserowego o różnych długościach fali. Rozmiary obserwowanych cząstek zmieniały się w granicach 0,5–3  $\mu\text{m}$ , natomiast szybkość ich produkcji była na ogół niewielka (np. w przypadku  $\text{CS}_2$  rzędu  $10^{-6}$  g/h), co stanowiło istotną trudność w zastosowaniu metod analizy chemicznej do określania składu chemicznego cząstek śniegu.

Śnieg laserowy jest jednym z interesujących a równocześnie bardzo efektywnych przejawów intensywnie ostatnio badanych reakcji chemicznych indukowanych światłem laserowym.

## Dlaczego laser?

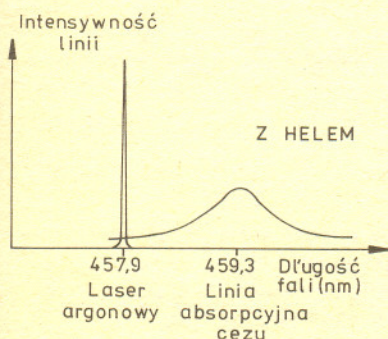
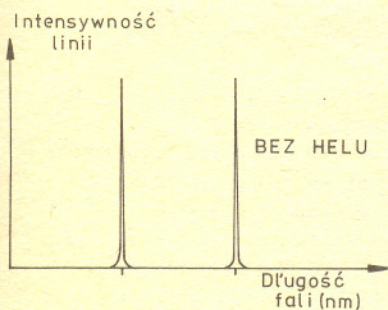
Reakcje fotochemiczne, czyli reakcje chemiczne indukowane przez światło, znane były już na długo przed skonstruowaniem pierwszego lasera. Ich wykorzystanie doprowadziło na przykład do powstania techniki fotograficznej. Stosowana była też od dawna w fotochemii metoda fotolizy błyskowej, w której badaną substancję w stanie gazowym naświetlano światłem silnych lamp błyskowych. Dlaczego więc laser stał się czynnikiem stymulującym rozwój badań reakcji fotochemicznych?

Korzyści wynikające z zastosowania laserów wiążą się z pewnymi cechami charakteryzującymi światło laserowe. Należą do nich przede wszystkim: wąska linia widmowa, możliwość strojenia oraz duże natężenie wiązki. Możliwość wyboru długości fali w szerokim zakresie pozwala na przygotowanie atomów lub cząsteczek w ściśle określonym stanie wzbudzonym, duża zaś moc zapewnia uzyskanie wysokiej ich koncentracji.

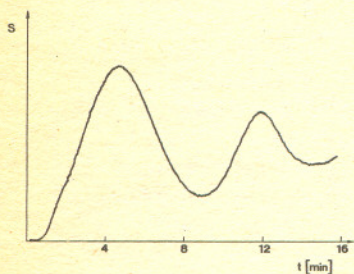
Własności chemiczne wzbudzonego atomu lub cząsteczki mogą różnić się zasadniczo od ich własności w stanie podstawowym. Na przykład, cząsteczka nie wykazująca aktywności chemicznej w stanie podstawowym staje się aktywna po zaabsorbowaniu kwantu światła o odpowiedniej energii.

Tak właśnie dzieje się w zdecydowanej większości przypadków prowadzących do powstania śniegu laserowego. Reakcje inicjujące wszelkie dalsze procesy wymagają przygotowania atomów lub cząsteczek gazu w określonym stanie. Jest to więc zjawisko o charakterze rezonansowym.

I tak na przykład w przypadku wzbudzenia linią 458 nm lasera argonowego, która jest nieco przesunięta względem linii absorpcyjnej cezu, Happer musiał dodać do komórki hel pod ciśnieniem kilku atmosfer. Rozszerzenie linii absorpcyjnej cezu pod wpływem tego ciśnienia pozwoliło na wzbudzenie go linią nie będącą dokładnie „w rezonansie”.



W laserach barwnikowych osrodkami czynnymi są roztwory barwników organicznych. Charakteryzują się one szerokim, do kilkudziesięciu nm, pasmem fluorescencji, a tym samym możliwością generacji wiązki laserowej w szerokim obszarze widma. Generacja tylko określonej długości fali uzyskiwana jest przez zastąpienie jednego ze zwierciadeł lasera odbiciową siatką dyfrakcyjną ustawioną pod odpowiednim kątem. Długość fali generowanego światła można regulować obracając siatkę (dlaczego?)



Podobne doświadczenie powtórzone zostało niedawno przy użyciu lasera barwnikowego. Możliwość dokładnego dostrojenia się do rezonansowej długości fali cezu pozwoliła na użycie jedynie cezu i wodoru.

Istnieje wiele interesujących efektów zarówno chemicznych jak i fizycznych związanych z powstawaniem śniegu. Jednym z ciekawych, a jednocześnie dość zaskakujących są opisane poniżej oscylacje.

## Oscylacje czasowe światła rozproszonego na cząstkach

Zmiany w czasie natężenia światła ( $S$ ) rozproszonego na cząstkach śniegu wytwarzanych w parach dwusiarczku węgla przedstawione są na rysunku. Aby wyjaśnić krótko obserwowane oscylacje można posłużyć się następującym jakościowym modelem zjawiska. Wzrost rozmiarów cząstek w wyniku efektów kondensacji i koagulacji produktów reakcji fotochemicznej prowadzi również do wzrostu rozpraszania. Z drugiej jednak strony, w miarę zwiększania swoich rozmiarów, a tym samym i masy, cząstki te zaczynają opadać coraz szybciej i wypadać z obszaru produkcji. Ubytek cząstek i to tych decydujących o natężeniu światła rozproszonego, bo największych, powoduje, że natężenie światła rozproszonego maleje. Kiedy duże cząstki zrobią po sobie miejsce w obszarze produkcji, może rozpocząć się ponownie proces narastania nowych cząstek prowadzący do wzrostu rozpraszania i rozpoczęcia kolejnego cyklu oscylacji. Należy zwrócić tu uwagę na bardzo istotny dla powyższego modelu fakt, że w obszarze, w którym cząstki zostały już wytworzone, cząsteczki powstające jako produkt reakcji chemicznej „przyklejają się” do tych już istniejących i nie zachodzi proces tworzenia cząstek nowych.

Efekt podobny do opisanego powyżej obserwowano również przy produkcji cząstek śniegu w sześciofluorku uranu wzbudzonym laserem barwnikowym.

## Czy śnieg może „padać do góry”?

Zwiększenie ciśnienia gazu może prowadzić do zaniku obserwowanych oscylacji. Jest to związane ze zjawiskiem konwekcji. W obszarze, przez który przechodzi wiązka światła laserowego i w którym zachodzi absorpcja promieniowania, następuje ogrzewanie gazu. Prowadzi to do wytworzenia się gradientu temperatury i związanego z nim gradientu gęstości w komórce. Pojawia się więc siła wyporu działająca na ogrzany gaz. Jej wartość rośnie wraz z ciśnieniem w komórce powodując ruch gazu mieszający cząstki. Utrudnia to powstanie oscylacji polegających na periodycznym opadaniu cząstek śniegu.

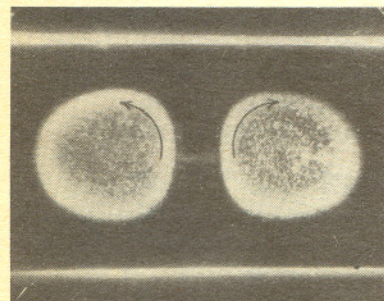
Wpływ konwekcji gazu na zachodzące w komórce procesy można zresztą w prosty sposób zaobserwować śledząc ruch wytworzonych cząstek śniegu. Dobranie odpowiedniej mocy lasera może spowodować, że cząstki w obszarze wiązki pozostaną nieruchome. Dzieje się tak wtedy, kiedy prędkość opadania śniegu względem gazu jest równa prędkości ruchu gazu do góry. Jeśli teraz zmniejszymy natężenie wiązki lub ją wyłączymy, śnieg zaczyna opadać, jeśli natomiast zwiększymy, zaczyna unosić się ku górze.

Szybkość ruchów konwekcyjnych można zwiększyć przez zogniskowanie wiązki laserowej. Pozwala to również na obserwowanie efektywnych wirów konwekcyjnych. Przykład takich wirów przedstawiony jest na zdjęciu. Pokazany jest na nim poprzeczny przekrój komórki zawierającej pary dwusiarczku węgla. Wzbudzająca wiązka z lasera azotowego rozchodzi się prostopadle do płaszczyzny zdjęcia i zogniskowana jest w jego środku. Powstałe cząstki śniegu widoczne dzięki rozproszonemu na nich światłu lasera helowo-neonowego ułożone są w dwa wyraźnie widoczne wiry, a naniesione na zdjęcie strzałki wskazują kierunek ich obrotu.

Wykorzystanie śniegu do badania ruchów konwekcyjnych w gazie jest jednym z możliwych jego zastosowań. Są również inne, z których jedno, najbardziej chyba obiecujące, pragniemy przedstawić na zakończenie.

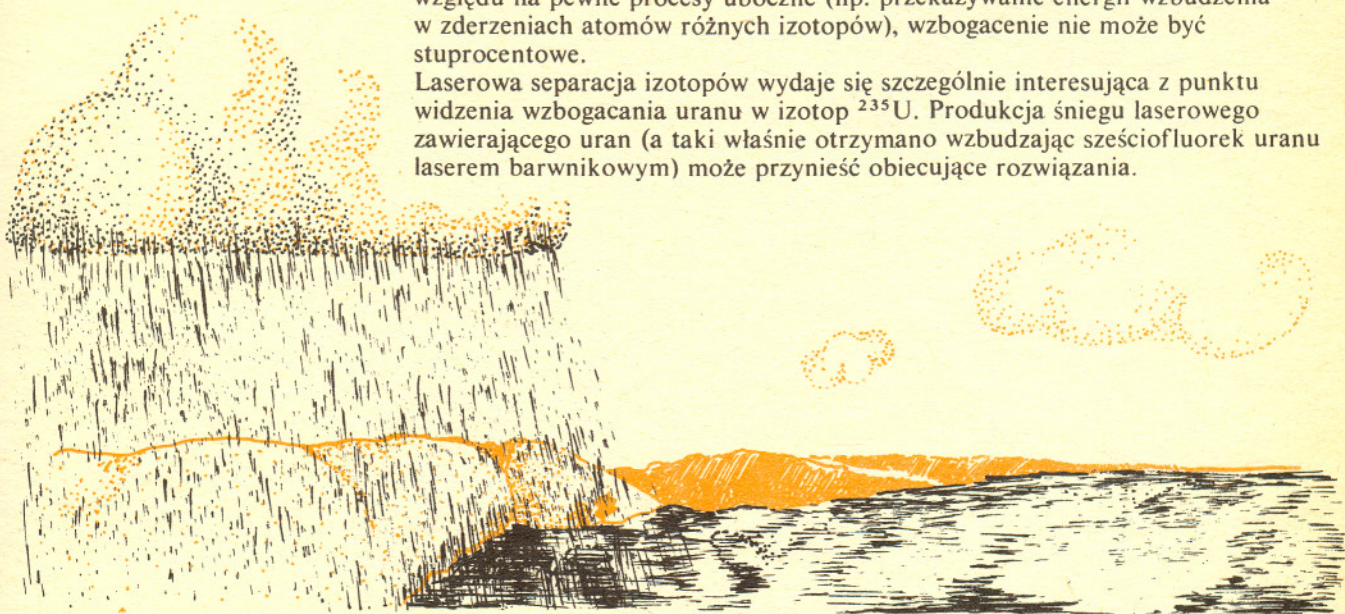
## Laserowa separacja izotopów

Jak wiadomo, izotopy danego pierwiastka różnią się między sobą liczbą neutronów w jądrze atomowym, a stąd także rozmiarami i masą jądra. Oba te czynniki wpływają na widmo atomowe powodując przesunięcie poziomów energetycznych, a tym samym linii absorpcyjnych jednego izotopu względem drugiego.



Przesunięcia te są szczególnie duże dla pierwiastków lekkich (H, He, Li) i ciężkich (U). Mimo niewielkich wartości przesunięcia izotopowego, możliwe jest uzyskanie warunków (w stanie gazowym, pod niezbyt dużym ciśnieniem), w których szerokości linii absorpcyjnych obu izotopów będą mniejsze od ich wzajemnego przesunięcia. Stosując przestrajany laser o dostatecznie wąskiej linii, co jest obecnie w pełni realne, możemy wzbudzić tylko jeden określony izotop, a więc uzyskać śnieg o określonym składzie izotopowym. Następnie można oddzielić od gazu cząstki śniegu wykorzystując jego opadanie lub działanie pola elektrycznego (jeśli cząstki obdarzone są ładunkiem). Uzyskanie ze śniegu czystego pierwiastka metodami chemicznymi jest już stosunkowo proste. Ze względu na pewne procesy uboczne (np. przekazywanie energii wzbudzenia w zderzeniach atomów różnych izotopów), wzbogacenie nie może być stuprocentowe.

Laserowa separacja izotopów wydaje się szczególnie interesująca z punktu widzenia wzbogacania uranu w izotop  $^{235}\text{U}$ . Produkcja śniegu laserowego zawierającego uran (a taki właśnie otrzymano wzbudzając sześćfluorek uranu laserem barwnikowym) może przynieść obiecujące rozwiązania.



Rozwiązanie zadania F 96. Najprostsze rozwiązanie tego zadania można uzyskać przechodząc od układu odniesienia związanego z powierzchnią stołu do układu związanego z końcem sprężyny. Jest to przejście z jednego układu inercjalnego do drugiego, gdyż koniec sprężyny porusza się ze stałą prędkością względem powierzchni stołu. W układzie odniesienia związanym z końcem sprężyny koniec ów spoczywa, a klocek w chwili początkowej porusza się z prędkością  $-v$  (rys. 2). Gdy wydłużenie sprężyny będzie maksymalne, prędkość klocka w tym układzie odniesienia wyniesie oczywiście zero (rys. 3). Ponieważ powierzchnia stołu jest idealnie gładka, otrzymaliśmy bardzo proste zadanie na wykorzystanie zasady zachowania energii!!! Energia kinetyczna klocka w chwili początkowej jest równa energii potencjalnej sprężyny w momencie jej największego wydłużenia:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{k(\Delta x_{\max})^2}{2}, \text{ gdzie } \Delta x_{\max} \text{ maksymalne wydłużenie sprężyny. Stąd } \Delta x_{\max} = v \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Oczywiście możliwe jest rozwiązanie zadania w układzie odniesienia związanym z powierzchnią stołu. Oto przykład takiego rozwiązania. Na układ klocek-sprężyna działa niezrównoważona, zmienna w czasie siła  $F(t)$ . Siła ta po czasie  $t$  od chwili rozpoczęcia swego działania nadaje układowi pęd  $p = \int_0^t F(t') dt'$ ;  $p = mv_k$ , gdzie  $v_k$  prędkość klocka

w chwili  $t$ .  
Zatem

$$(1) \quad \int_0^t F(t') dt' = mv_k \quad (\text{Patrz rys. 4})$$

W chwili  $t$  energia układu jest sumą energii potencjalnej sprężyny i kinetycznej klocka. Jest ona równa pracy, którą wykonała siła  $F(t)$  do chwili  $t$ . (W chwili początkowej energia układu jest równa zero). W małym odstępie czasu  $\Delta t$  koniec sprężyny, a zatem punkt przyłożenia siły  $F(t)$  przebywa drogę  $v \cdot \Delta t$ . Na drodze tej wykonuje ona pracę elementarną  $\Delta W = F(t) \cdot v \cdot \Delta t$ .

$$\text{Do chwili } t \text{ siła ta wykona pracę równą } \int_0^t F(t') v dt' = v \int_0^t F(t') dt'.$$

Stąd

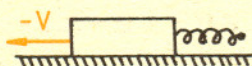
$$(2) \quad v \int_0^t F(t') dt' = \frac{k(\Delta x)^2}{2} + \frac{mv_k^2}{2}$$

$$\text{Podstawiając (1) do (2) dostajemy } v mv_k = \frac{k(\Delta x)^2}{2} + \frac{mv_k^2}{2},$$

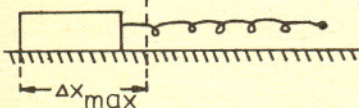
$$(\Delta x)^2 = -\frac{m}{k} v_k^2 + \frac{2mv}{k} v_k.$$

Łatwo widać, że funkcja  $(\Delta x)^2(v_k)$ , będąca funkcją kwadratową, osiąga maksimum dla  $v_k = v$ . Dotyczy to oczywiście także funkcji  $\Delta x(v_k)$ . Zatem  $\Delta x_{\max} = v \sqrt{\frac{m}{k}}$ .

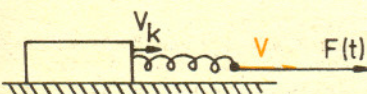
Korzyści płynące z doboru odpowiedniego układu odniesienia dla uproszczenia niektórych problemów widać w tym zadaniu jak na dłoni.



Rys. 2



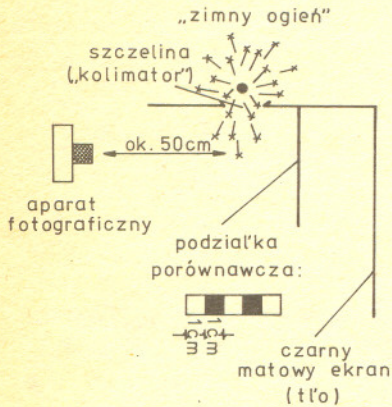
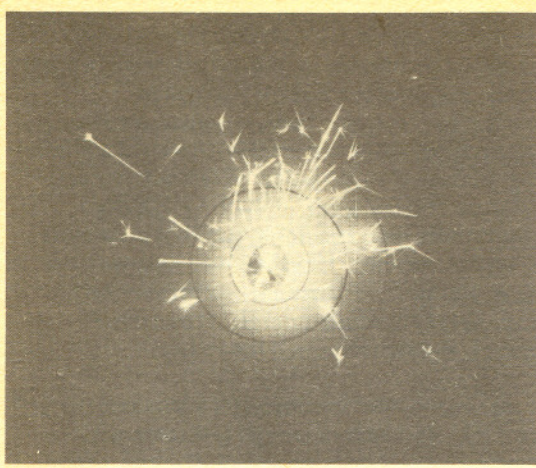
Rys. 3



Rys. 4

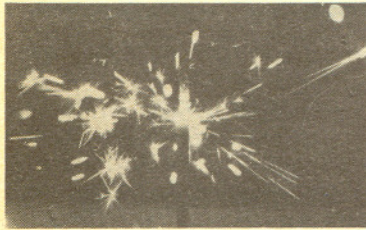


# Wyniki konkursu „Z jaką prędkością wyrzucane są iskry?”

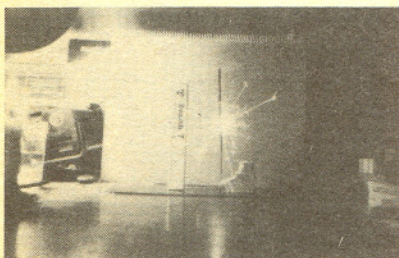
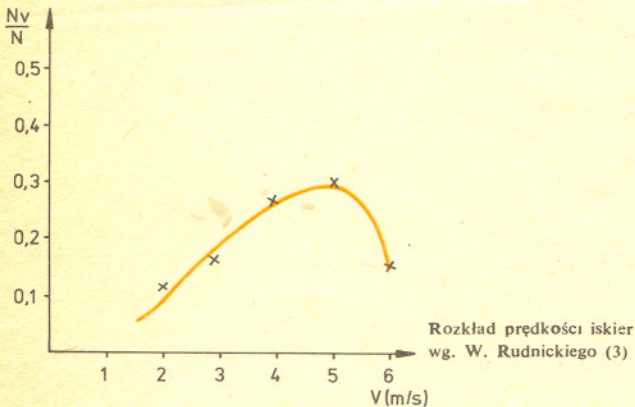


Zdjęcie z doświadczenia W. Z. Krawców(5)

Schemat doświadczenia J. Nogali (1)



Zdjęcie z doświadczenia J. Słomińskiego (2)



Doświadczenie Sł. Prochockiego (4)

Na konkurs nadesłano 11 rozwiązań. W większości nadesłanych prac do wyznaczenia prędkości iskiek wyrzucanych z „zimnego ognia” wykorzystano aparat fotograficzny. Jedynie w trzech pracach za podstawę posłużył pomiar maksymalnego zasięgu iskiek. Pierwsza metoda polegała na wyznaczaniu, na podstawie zdjęcia, drogi jaką przebywa iskra w czasie gdy otwarta jest migawka aparatu. Pozwalało to na oszacowanie średniej prędkości iski w tym czasie, przy założeniu, że opóźnienie wywołane oporem powietrza i utlenianiem jest stałe. Prawie wszyscy uczestnicy konkursu zwrócili uwagę na fakt, że założenie to jest tym lepiej spełnione im krótszy jest czas ekspozycji i dlatego stosowali czasy nie dłuższe niż 1/125 sek.

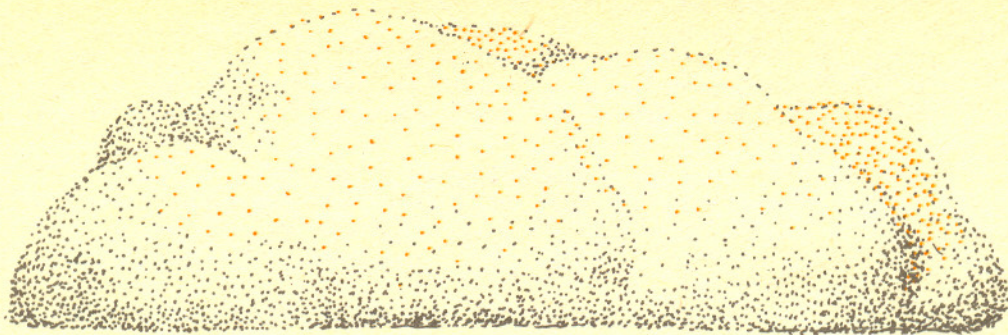
Innym istotnym problemem był wybór spośród wielu torów widocznych na zdjęciu tych, które są równoległe do płaszczyzny obiektywu. Tylko dla nich bowiem możliwe jest wyznaczenie rzeczywistej długości toru. Zaproponowano dwa rozwiązania. Pierwsze polegało na zbudowaniu osłony ze szczeliną, przepuszczającą tylko iskry o torach leżących w płaszczyźnie obiektywu (1). Drugie rozwiązanie polegało na fotografowaniu iskiek przy całkowicie otwartym obiektywie czyli najmniejszej głębi ostrości. Tylko tory leżące w płaszczyźnie obiektywu są wtedy ostre na całej długości (2). Oba rozwiązania obarczone są kilkuprocentowym błędem. Pierwsze dlatego, że szczelina nie może być zbyt wąska, a drugie bo nawet przy całkowicie otwartym obiektywie głębia ostrości wynosi 2—3 cm.

Najlepsze w tej grupie są prace Jacka Nogali z Włocławka (1) i Jacka Słomińskiego z Kamiennej Góry (2) — dwie pierwsze nagrody. Obie prace zawierają szczegółową analizę błędów. Na uwagę zasługują próby oszacowania przez Jacka Nogalę opóźnienia w ruchu iskiek. Drugą nagrodę uzyskała praca Wiesława Rudnickiego z Przemyśla (3), który jako jedyny wyznaczył rozkład prędkości iskiek. Ponadto postanowiliśmy wyróżnić Wojciecha i Zdzisława Krawca z Puław (5) za oryginalny sposób przedstawienia wyników. Druga metoda określenia prędkości iskiek ma tę przewagę nad pierwszą, że poza linijką nie wymaga żadnych przyrządów. Wśród iskiek wyrzucanych z poziomo ustawionego „zimnego ognia” największy zasięg mają te wyrzucane pod kątem 45°. Pomiar zasięgu (od „zimnego ognia” do miejsca, w którym spadły pozostałości iskiek) pozwala wyznaczyć ich początkową prędkość. Metoda ta obarczona jest jednak dużym błędem, bo opiera się na założeniu, że wszystkie iskry mają na początku zbliżone prędkości. Poza tym błąd systematyczny polegający na zaniedbaniu oporów powietrza prowadzi do zaniżenia wyniku. Najlepsze opracowanie tej metody nadesłał Sławomir Prochocki z Ełku (4). Jego praca uzyskała trzecią nagrodę. Jest to jednocześnie jedyna praca zawierająca wyniki uzyskane obiema metodami.

Zwycięzcom gratulujemy. Nagrody przesyłamy pocztą.

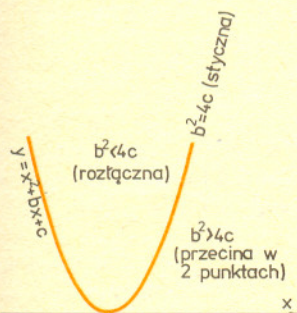
A oto lista nagród i wyniki zwycięzców (w m/sek):

- |                                 |   |   |
|---------------------------------|---|---|
| (1) Jacek Nogala                | I nagroda — zestaw części do majsterkowania | 3.2±0.3<br>(średnia z kilku pomiarów)                               |
| (2) Jacek Słomiński             | I nagroda — zestaw części do majsterkowania | 8.0 <sup>+0.2</sup> <sub>?</sub> , 4.0 <sup>+0.3</sup> <sub>?</sub> |
| (3) Wiesław Rudnicki            | II nagroda — lutownica pistoletowa          | 5±1 (maksimum rozkładu)   |
| (4) Sławomir Prochocki          | III nagroda — szachy gabinetowe             | 2.5±?   |
| (5) Wojciech i Zdzisław Krawiec | wyróżnienie — książki                       |   |



## Typowe, to znaczy jakie?

Czy styczność dwu krzywych jest zjawiskiem typowym, normalnym? Rozpatrzmy parabolę o równaniu  $y = x^2 + bx + c$  i prostą o równaniu  $y = 0$ . Łatwo przekonać się, że są one styczne, wtedy i tylko wtedy, gdy  $\Delta = b^2 - 4c = 0$ . Jest to warunek, którego nie spełnia „prawie każda” (zgodnie z regułami gramatyki należało tu napisać „prawie żadna”) parabola. Jeśli na przykład umówimy się, że punkt o współrzędnych  $b, c$  na płaszczyźnie reprezentuje parabolę o równaniu  $y = x^2 + bx + c$ , to parabole styczne do naszej prostej  $y = 0$  wypełnią krzywą o równaniu  $b^2 - 4c = 0$  (a więc znów parabolę); pozostałe punkty płaszczyzny odpowiadają parabolom przecinającym naszą prostą w dwóch punktach (które?) lub nie przecinającym jej w żadnym (które?). A oto inne uzasadnienie słów „prawie każda”, będące równocześnie kluczem do pojęcia „typowości”. Równanie paraboli stycznej możemy „zaburzyć”, zmieniając dowolnie mało jeden z jej parametrów tak, by nowa parabola przecinała oś  $x$  w dwóch punktach lub nie przecinała jej w ogóle. Natomiast parabola przecinająca oś  $x$  w dwóch punktach lub nie przecinająca jej wcale znajduje się w „równowadze trwałej”: przy dostatecznie małym zaburzeniu współczynników zachowa swoje położenie: oś  $x$  nie będzie do niej styczna. Można to uwidocznic na takim oto obrazku.



Rys. 1. Dowolnie małe zaburzenie parametrów niszczy styczność

Możemy zatem powiedzieć tak: pewna własność jest nietypowa wśród obiektów pewnego zbioru  $X$ , gdy dowolnie blisko obiektów mających tę własność leżą obiekty jej pozbawione.

„Typowość” zjawisk zależy więc od tego, jakie obiekty uznamy za bliskie. Powróćmy jeszcze do naszych krzywych. Jeżeli krzywe, przedstawione na rysunku obok uznamy za bliskie, to zjawisko „przecinania krzywej pod danym kątem” nie będzie typowe. Jeżeli jednak będziemy wymagać, by bliskie krzywe miały bliskie lokalne kierunki — powróci sytuacja opisana na początku na przykładzie paraboli i prostej.

Pojęcia „blisko” i „daleko” będą miały bardziej precyzyjny sens, jeżeli będziemy mieli wzór na mierzenie odległości między krzywymi. Ograniczymy się do krzywych, będących wykresami funkcji  $y = f(x)$  ciągłych i różniczkowalnych na skończonym przedziale  $I$ . Nietrudno przekonać się, że jeżeli odległość między krzywymi  $y = f_1(x)$  i  $y = f_2(x)$  obliczymy według wzoru

$$\rho(f_1, f_2) = \sup_{x \in I} |f_1(x) - f_2(x)|,$$

to krzywe przedstawione na rysunkach 2 i 3 będą dość bliskie. Gdy jednak zastosujemy wzór

$$\rho(f_1, f_2) = \sqrt{\sup |f_1(x) - f_2(x)|^2 + \sup |f_1'(x) - f_2'(x)|^2},$$

to krzywe z rysunku 2 będą już dość odległe, zaś te przedstawione na rysunku 3 pozostaną całkiem bliskie.

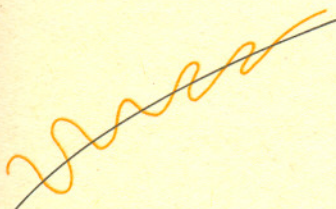
A oto kilka zjawisk typowych i nietypowych w przestrzeni trójwymiarowej: Typowa para krzywych jest rozłączna.

Typowe jest przebicie powierzchni przez krzywą pod niezerowym kątem.

Typowa para powierzchni przecina się wzdłuż krzywej.

Typowe przecięcie stożka jest elipsą, parabolą lub hiperbolą.

*Mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI*



Rys. 2



Rys. 3 „Bliskość” tych dwu krzywych jest „mocniejsza” niż tych z rys. 2.

## Zgadnij największą!

Danuta i Władysław  
MAJEWSKY

— Zagrajmy w odgadywanie liczb — zaproponował Marek.  
 — To znaczy pomyślisz jakąś liczbę, a ja mam odgadnąć? — zaciekawiał się Darek.  
 — Niezupełnie tak. Pomyślę sobie nie jedną liczbę, lecz cały ciąg i każdą z tych liczb zapiszę na oddzielnej kartce. Potem kartki potasuję i będę je kolejno odkrywał. Ty, gdy uznasz, że pokazana liczba jest największą spośród wypisanych przeze mnie, przerywasz grę. Trafieś — wygrales; nie — wygrałem ja. Jasne?  
 — Jasne, ale nasze szanse nie są równe.  
 — Masz rację i dlatego proponuję; ty za wygraną otrzymasz np. 5 pkt, a gdy ja wygram, wzbogacę się o 1 punkt. Zgoda?  
 — Zgoda — odparł Darek i po namyśle dodał — sądzę, że wystarczą mi trzy punkty.  
 — No to zaczynamy — Marek wziął się szybko za zapisywanie liczb, jakby bojąc się, że Darek zmieni zdanie.  
 Czy Darek, ustalając punktację, nie przecenił swych szans? Przecież w wypadku, gdy Marek zapisze bardzo dużo liczb, odgadnięcie największej wydaje się bardzo trudne. Zanim zaczniesz czytać następną akapit pomyśl: w jaki sposób zamierza Darek odgadywać, a więc jaką zamierza przyjąć strategię i na jaki procent poprawnych odpowiedzi może liczyć stosując ją? Zakładamy, że gra trwa długo i że przed każdą partią Marek podaje Darkowi, ile liczb tym razem napisał, powiedzmy  $n$ .

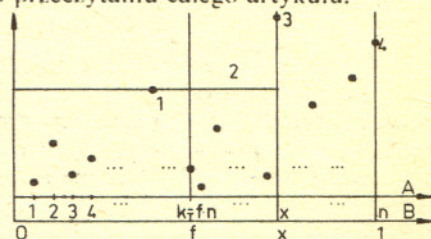
+ + +

Darek postępuje tak: przegląda  $k$  początkowych liczb bez przerywania gry i zapamiętuje największą spośród nich. Następnie widząc pierwszą liczbę większą od zapamiętanej uznaje ją za największą. Oczywiście, jeśli wśród pozostałych  $(n-k)$  liczb nie znajdzie się większa — Darek nie wybiera żadnej i przegrywa „walkowerem”. Jakiej jednak powinien wybrać  $k$ ?

+ + +

Jakie jest prawdopodobieństwo, że dla danych  $k$  i  $n$  Darek poprawnie wskaże największą liczbę oraz dla jakiego  $k$  prawdopodobieństwo to jest największe? Przy obliczaniu posłużymy się techniką często stosowaną w matematyce: zastąpimy zadanie sformułowane dla skończonego ciągu liczb całkowitych analogicznym zadaniem dla odcinka  $[0, 1]$ . Pozwoli to zmienić sumy na całki i znacznie uprości rachunki. Wynik uzyskany w ten sposób jest dobrym przybliżeniem nawet dla niezbyt dużych  $n$ . Jak duże musi być  $n$ , aby błąd nie przekroczył np. 1%? Zastanów się nad tym po przeczytaniu całego artykułu.

Przedstawmy graficznie możliwy ciąg  $n$  liczb:  
 1 — największa spośród liczb początkowych  
 2 — w tym przedziale nie ma większych liczb  
 3 — największa liczba  
 4 — druga co do wielkości liczba



a następnie przeskalujemy oś  $OX$  przekształcając odcinek od 1 do  $n$  na odcinek  $[0, 1]$  — wariant B na rysunku. Oznaczyliśmy przy tym stosunek  $k/n$  przez  $f$ , a położenie największej liczby przez  $x$ . Widzimy, że przyjęta strategia przyniesie powodzenie, gdy ciąg ma następujące własności:

1° Największa liczba znajduje się w przedziale  $(f, 1)$  — tj. wśród końcowych  $(n-k)$  liczb

oraz 2° Druga co do wielkości liczba jest w przedziale  $(0, f)$ .

Prawdopodobieństwo tego zdarzenia =  $f$

lub Druga liczba jest w  $(x, 1)$ , a trzecia w  $(0, f)$ .

Prawdopodobieństwo =  $f \cdot (1-x)$

lub Druga i trzecia jest w  $(x, 1)$ , a czwarta w  $(0, f)$ .

Prawdopodobieństwo =  $f \cdot (1-x)^2$

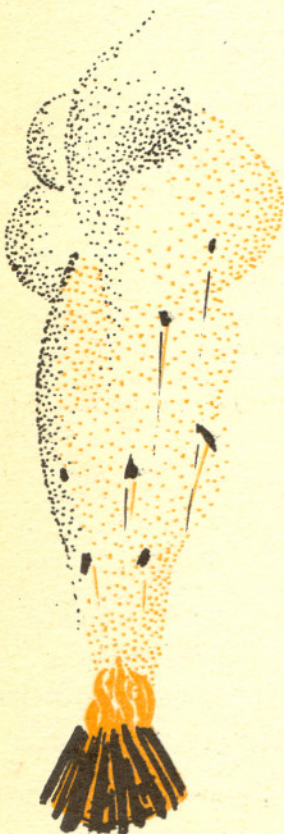
lub Druga, trzecia i czwarta w  $(x, 1)$ , piąta w  $(0, f)$ .

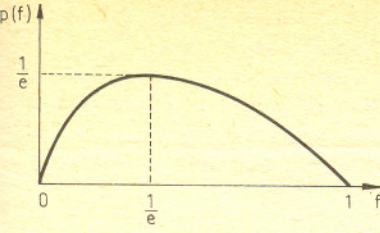
Prawdopodobieństwo =  $f \cdot (1-x)^3$  itd.

Prawdopodobieństwo spełnienia któregoś z wariantów warunku 2 jest równe:

$$f \cdot (1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + \dots) = f/x.$$

Szereg w nawiasie jest znany ze szkolnego programu matematyki w postaci  $a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots = 1/(1-a)$ .





Prawdopodobieństwo sukcesu, a więc trafnego odgadnięcia, jest równe całce po wartościach  $x$  spełniających warunek  $1^\circ$  z prawdopodobieństwa spełnienia warunku  $2^\circ$ . Jest to uogólnienie wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe na przypadek, gdy zmienia się ono w sposób ciągły w obszarze argumentów spełniających warunek:

$$p(f) = \int_f^1 (f/x) dx = f \cdot (\ln 1 - \ln f) = f \cdot \ln(1/f)$$

Wykres  $p(f)$  przedstawia rysunek obok. Prawdopodobieństwo na maksimum dla  $f = 1/e \approx 0,37$ , co można wykazać obliczając pochodną i przyrównując ją do zera:

$$p'(f) = \ln(1/f) - 1$$

$$p'(f) = 0 \rightarrow 1/f = e \quad \text{czyli} \quad f = 1/e$$

+ + +

Teraz jest już jasne: Darek może zadowalać się stawkami 3 : 1 na swoją korzyść. Jeżeli wskazując największą liczbę prawidłowo otrzymuje on  $Z$  punktów (w naszym przypadku  $Z = 3$ ), a przy porażce przegrywa jeden punkt, to oczekiwany wynik każdej gry jest równy:

$$(1/e) \cdot Z - (1 - 1/e) \cdot 1$$

A więc jeżeli  $Z > (e - 1) \approx 1,72$ , to przy długotrwałej grze Darek ma pewność wygranej.

+ + +

Jeżeli proponowana gra spodobała Ci się, to postaraj się zastanowić, czy proponowana strategia jest na pewno najlepsza?

Ile wynosi prawdopodobieństwo sukcesu dla  $n = 2, 3, 4, 5, 10$ ?

Jak zmieni się optymalna strategia i prawdopodobieństwo wygranej, gdyby:

- a. Marek mógł układać liczby według swego uznania zamiast je tasować?
- b. Darek nie znał każdorazowo liczby  $n$ , a jedynie wiedział, że jest ona większa od  $n_1$  i mniejsza od  $n_2$ ?
- c. Darek nie musiał dać odpowiedzi, tj. w sytuacji, gdy nie wskaże on żadnej liczby — uznawano remis?
- d. zastosować modyfikacje a, b, c jednocześnie wszystkie lub parami.

Prześlijcie nam wyniki swych przemyśleń. Odpowiedzi na niektóre pytania my też nie znamy.

W jednej ze szkół warszawskich miała miejsce straszliwa awantura. Rodzice zarzucali nauczycielce, że przekazuje dzieciom nieprawdziwe wiadomości. Meritum sprawy można było streścić tak: czy równoległobok jest trapezem? Ze zdumieniem dowiedzieliśmy się, że nie jest! (Karol Szymański, Edward Zegadło, Matematyka 5). Oto stosowne określenie (str. 135) *Czworokąt wypukły, który ma dokładnie jedną parę boków równoległych, nazywamy trapezem.* Można i tak. Ostatecznie to jest kwestia definicji. Ale — konsekwentnie — kwadrat nie powinien być prostokątem (a na stronie 144 autorzy twierdzą, że jest), liczba 2 nie powinna być wymierna (bo jest przecież całkowita ...), a koń nie powinien być zwierzęciem.

Stan naszego konta w rozliczeniach ze światem wyraża się prostym ułamkiem, którego licznik opisuje to, co mamy, a mianownik — to, co chcemy mieć. Możemy albo zwiększać licznik (co czyni Zachód), albo zmniejszać mianownik (co zawsze zalecała filozofia Wschodu).

(Dean Inge, „Mathematical Student” 1934)

### Kącik Czytelniczy

#### Kulej geometrii

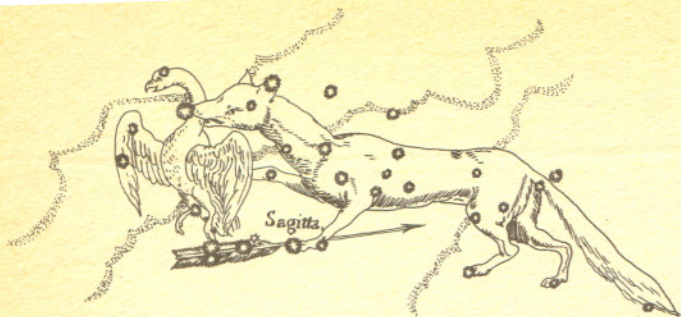
— Ech, WNUKu zatracony — powiedział Bańdzioch zbliżając się groźnie do Kostii Rudenko. — Na co to się porywa ... Z powszechnej do gimnazjum się zachciało! Nawet srebrnych guzików nie macie ani mundurków ... A pchacie się, gdzie nie trzeba ...  
 — Wy — to szkoła średnia, a my szkoła wyższa, mimo że powszechna — powiedział chytrze Kostia Żuk. — A uczyliśmy się więcej od was ... Powiedz mi na przykład, gdzie mamy połowę sumy podstaw?  
 Bańdzioch jeszcze nigdy w życiu nie zetknął się z „połową sumy podstaw”.  
 — Kicham na twoje połowy sumy podstaw — wściekał się Bańdzioch. — Przyłożę ci zaraz pieczętkę na facjacie, to będziesz wiedział ...

(Lew Kassil, Szwambrania)

### Zastosowania geometrii

— To znaczy wszedłeś także pod kołdrę?  
 — Pod kołdrę — powtórzył — z parą zimnych, nagich ramion wokół szyi i z dygocącym, wstrząsanym szlochami ciałem, przytulonym do mego ciała.  
 Rivers popił trochę whisky i przechylony na oparcie fotela długo palił w milczeniu.  
 — Prawda — odezwał się wreszcie. Cała prawda i nic tylko prawda. Wszyscy świadkowie składają tę samą przysięgę i zeznają o tych samych wydarzeniach. Rezultatem jest oczywiście pięćdziesiąt siedem odmian fikcji. Która z nich jest najbliższa prawdy? Stendhal czy Meredith? Anatol France czy D. H. Lawrence? Źródła najgłębszego życia niechaj się złączą w złocistej czystości świątecznego uczucia czy też reakcje płciowe samicy ludzkiej?  
 — Znasz odpowiedź? — zapytał.  
 Potrzęsnał głową.  
 — Może geometria mogłaby tu coś wyjaśnić. Przedstawić fakt na zasadzie trzech współrzędnych. — Cybuchem fajki Rivers wykreślił w powietrzu dwie linie, zbiegające się pod kątem prostym, a z punktu ich przecięcia poprowadził trzecią, ciągnąc ją aż.ponad głowę.

(Aldous Huxley, Geniusz i bogini)



## Patrz w niebo

Pomiędzy trzema gwiazdami tworzącymi wierzchołki Wielkiego Trójkąta Letniego (Vega, Deneb i Altair) można zauważyć mały, ale charakterystyczny i łatwy do zapamiętania gwiazdozbiór Strzały (*Sagitta*, *Sga*). W tej karłowatej konstelacji (wśród 88 gwiazdozbiorów istnieją tylko dwa mniejsze — Kruk i Żrebek) aż dwie gwiazdy zasługują na poświęcenie im naszego odcinka. Gwiazda WZ *Sge* wybuchającą ostatnio co 33 lata zajmiemy się może w przyszłym roku, dzisiaj zatrzymamy się przy jedynej w swoim rodzaju gwiazdzie FG *Sge*.

Czytelników popularnej literatury astronomicznej, którzy patrzą na niebo, gwiazdy, galaktyki, cały Wszechświat jakby zastygły w bezruchu, zadziwia i jednocześnie budzi wątpliwości stosunkowo duża wiedza astronomów o czasowej ewolucji obiektów kosmicznych. Często pojawiają się pytania: skąd wiadomo, że Wszechświat powstał najprawdopodobniej 15 miliardów lat temu? skąd wiadomo, że ramiona galaktyk spiralnych „nawijają się”, a nie „odwijają”, skoro my widzimy je w bezruchu (a w dodatku nie wiemy, która strona galaktyki nachylonej ukośnie jest nam bliższa)? na jakiej podstawie twierdzimy, że białe karły były kiedyś czerwonymi olbrzymami? itd. Oczywiście istnieją odpowiedzi na te i podobne pytania, jednak często się zdarza, że próbując na nie odpowiedzieć musimy uciec się do bardziej „technicznej” strony matematyki i fizyki, co, niestety, zniechęca pytających (odpowiedź na pytanie „skąd wiadomo ...?” jest zawsze trudniejsza niż odpowiedź na pytanie „co wiadomo ...?”). Chyba że przyjdzie nam z pomocą tak ciekawa gwiazda jak FG *Sge*.

Odbywa ona najprawdopodobniej szybką część swojej ewolucji praktycznie na naszych oczach. I tu należy się parę słów teoretycznego wyjaśnienia. Z rachunków modelowych wiemy, że różne procesy w gwiazdach zachodzą z różnymi szybkościami. Można wyróżnić trzy skale czasowe: 1) najwolniejsza — nuklearna; procesy w tej skali trwają przeważnie setki milionów i miliardy lat, należy do nich przede wszystkim „spalanie się” pierwiastków w jądrach gwiazd; 2) wielokrotnie szybciej zachodzą procesy w tzw. termicznej skali czasowej (rzędu tysięcy lat); z tą prędkością tworzą się mgławice planetarne, zapadają się obłoki gazu tworząc gwiazdy, ustalają się warunki równowagi termicznej w przypadku jej zachwiania itd; 3) najszybsze procesy zachodzą w tzw. dynamicznej skali czasowej (sekundy — dni), w takim tempie następują pulsacje gwiazd, wybuchy, tyle trwają okresy orbitalne ciasnych układów podwójnych itd. Różne fazy ewolucji gwiazd zachodzą, oczywiście, z różnymi prędkościami, jednak ze względu na to, że 99,999% swojego życia gwiazda ewoluje w nuklearnej skali czasowej, z kolei procesy zachodzące w dynamicznej skali czasowej są bardzo widowiskowe (wybuchy, pulsacje, zaćmienia), bardzo trudno jest uchwycić gwiazdę w takiej fazie ewolucji, która przebiega w termicznej skali czasowej. Otóż FG *Sge* jest jedyną znaną nam dotychczas gwiazdą, która jest „żywym dowodem” na istnienie szybkich, w skali termicznej, faz ewolucji między zapłonem wodoru w centrum nowo powstałej gwiazdy a jej śmiercią termiczną lub wybuchem supernowej, których konsekwencją jest powstanie zdegenerowanego karła, gwiazdy neutronowej lub czarnej dziury.

FG *Sge* w ciągu ostatnich dziesięcioleci szybko zwiększała swoją jasność, zmniejszając jednocześnie temperaturę powierzchni (co oznacza, że zwiększa swoje rozmiary). W swojej ewolucyjnej wędrówce po diagramie H-R (patrz „Delta” 7/79) gwiazda ta powinna ostatnio wejść w tzw. pas niestabilności, co spowodowałoby pulsacje. I rzeczywiście, istnieją (niepotwierdzone) dane, że gwiazda pulsuje „ostatnio” z okresem ok. 60 dni.

W ciągu najbliższych lat będziemy z uwagą obserwować FG *Sge* sprawdzając, czy zachowuje się ona zgodnie z naszymi przewidywaniami.

mgr Tomasz CHLEBOWSKI



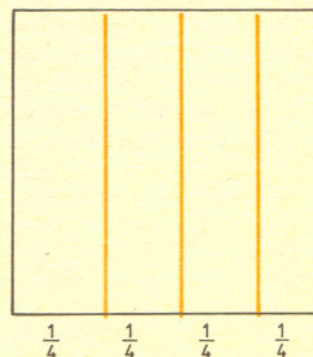
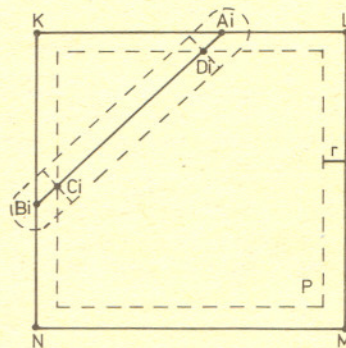
**Rozwiązanie zadania M 266.** Niech  $B_i$  będzie dowolnym punktem wnętrza trójkąta  $CA_iD$  odciętego z trójkąta  $A_1A_1A_m$  przez prostą  $A_{i-1}A_{i+1}$ . Gdy teraz  $k < l < m$ , to jedynym punktem spośród  $B_i$  leżącym w trójkącie  $A_kA_lA_m$  jest punkt  $B_l$ .



**Rozwiązanie zadania M 265.** Oznaczmy przez  $U_i$  sumę wszystkich kół o środkach w punktach jednego z danych odcinków  $A_iB_i$  i o promieniu  $r$ . Niech  $P$  będzie kwadratem powstałym z danego przez odciecie paszków o szerokości  $r$  wzdłuż każdego z boków. Pole  $P$  wynosi  $(1-2r)^2$ . Niech teraz  $C_iD_i = A_iB_i \cap P$ . Łatwo zauważyć, że  $|C_iD_i| \leq |A_iB_i| - 2r$  i że pole  $P \cap U_i$  jest nie większe od  $2r|C_iD_i|$ . Wiemy ponadto, że ponieważ  $|A_iB_i| < \sqrt{2}$ , to odcinków  $A_iB_i$  musi być co najmniej trzy. Mamy teraz

$$\begin{aligned} \text{Pole} (P \cap \bigcup_i U_i) &\leq \sum_i \text{pole} (P \cap U_i) \leq \\ &\leq 2r \sum_i |C_iD_i| \leq 2r \left( \sum_i (|A_iB_i| - 2r) \right) \leq \\ &\leq 2r(3-6r). \end{aligned}$$

Gdy  $r < \frac{1}{8}$ , mamy  $2r(3-6r) = 6r(1-2r) < (1-2r)^2$  i wobec tego suma zbiorów  $U_i$  nie może pokrywać  $P$ . Dowolny nie pokryty punkt możemy przyjąć za środek poszukiwanego koła.  
Uwaga: Można umieścić trzy odcinki jednostkowe tak, by nie mieściło się już koło (domknięte) o promieniu  $\frac{1}{8}$ .



## Jak wykazać łączność działania?

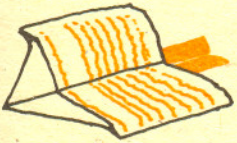
Przypuśćmy, że w skończonym zbiorze  $X$  jest określone działanie za pomocą tabelki, np.

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

lub

	0	a	b	c	d	e
0	0	a	b	c	d	e
a	a	b	0	d	e	c
b	b	0	a	e	c	d
c	c	e	d	0	b	a
d	d	c	e	a	0	b
e	e	d	c	b	a	0

(mnożenie w ciele siedmioelementowym) (mnożenie w nieabelowej grupie o sześciu elementach).



Takie działanie jest przemienne, jeżeli jego tabelka jest symetryczna (względem przekątnej poprowadzonej na „południowy wschód”). A zatem dowód, że dane działanie jest — albo nie jest — przemienne, jest bardzo pogładowy.

Z warunkiem łączności rzecz ma się gorzej, gdyż na ogół nie sposób sprawdzić wszystkich równości  $a + (b + c) = (a + b) + c$ . Jest ich bowiem aż  $n^3$  (gdzie przez  $n$  oznaczyliśmy liczbę elementów w zbiorze  $X$ ). Uczniów (a także studentów) zbywa się słowami „można dowieść”, „dowód jest łatwy, ale bardzo żmudny” itp. Pół biedy ze studentami lub słuchaczami kursów kwalifikacyjnych, gdyż w dalszej części programu figurują odpowiednie pojęcia algebraiczne (struktury ilorazowe) i na przykład wykazanie łączności pierwszego z opisanych działań można odłożyć do czasu, gdy wykaże się, że  $Z_6$  jest izomorficzne z  $Z/6Z$ .

Opisany poniżej sposób jest w każdym razie nie rachunkowy, a pogładowy. Najpierw przygotowujemy nożyczki. Następnie na papierze (lepiej na kartonie) rysujemy 2 kopie tabelki naszego działania. Pierwszą z nich rozcinamy na paski poziome, drugą na pionowe.

Teraz:

- dla każdego  $x \in X$  układamy rzędy pierwszej tabelki w takim porządku, w jakim ich nagłówki występują w  $x$ -owej kolumnie drugiej tabelki, oraz
- kolumny tabelki drugiej ustawiamy w takim porządku, jak ustawione są ich nagłówki w  $x$ -owym rzędzie pierwszej tabelki.

Sprawdzamy, czy otrzymane w punkcie 2 i 3 tablice są identyczne. Jeśli tak jest przy każdym  $x \in X$ , to działanie jest łączne.

Dowód: W nie pojętej tablicy na miejscu  $(i, j)$  stoi iloczyn  $x_i x_j$  ( $i$ -ty element przez  $j$ -ty). W ułożonej tak jak w punkcie 1) na tym miejscu pojawia się  $(x_i x)_j$ , a na sposób 2)  $x_i (x x_j)$ .

Przykład 1. Mnożenie w ciele siedmioelementowym; niech  $x = 2$ :

0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	6	1	3
3	0	3	6	2	5	1
4	0	4	1	5	2	6
5	0	5	3	1	6	4
6	0	6	5	4	3	2

wiersze ustawiamy w kolejności 0 2 4 6 1 3 5

0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	6	1	3
3	0	3	6	2	5	1
4	0	4	1	5	2	6
5	0	5	3	1	6	4
6	0	6	5	4	3	2

kolumny ustawiamy w kolejności 0 2 4 6 1 3 5

Przykład 2. (Nieabelowa grupa sześcioelementowa); weźmy  $x = d$ :

0	a	b	c	d	e
0	0	a	b	c	d
a	a	b	0	d	e
b	b	0	a	e	c
c	c	e	d	0	b
d	d	c	e	a	0
e	e	d	c	b	a

wiersze ustawiamy w porządku d d c e a 0 b

0	a	b	c	d	e
0	0	a	b	c	d
a	a	b	0	d	e
b	b	0	a	e	c
c	c	e	d	0	b
d	d	c	e	a	0
e	e	d	c	b	a

kolumny ustawiamy w porządku d c e a 0 b

# Ustalanie zapasów części zamiennych do maszyn rolniczych metodą Monte Carlo

Dr Krzysztof MIKUCKI

Podczas eksploatacji maszyn rolniczych niektóre elementy tych maszyn ulegają uszkodzeniom, których naprawa odbywa się przez wymianę uszkodzonego elementu na nowy. Właściwy przebieg eksploatacji ustalonej grupy maszyn rolniczych danego rodzaju wymaga zapewnienia odpowiedniej liczby elementów wymienianych w czasie eksploatacji. W tym celu należy opracować właściwą metodę ustalania zapasów części zamiennych. Metoda ta powinna uwzględniać losową zmienność liczby wymian elementu w ciągu sezonu agrotechnicznego. Badania statystyczne wykazują, że liczbę wymian elementu w ciągu sezonu agrotechnicznego można opisać za pomocą dyskretnej zmiennej losowej.

Wprowadzamy następujące wielkości:

$N$  — liczba maszyn danego rodzaju,

$X$  — dyskretna zmienna losowa opisująca liczbę wymian elementu w jednej maszynie w ciągu sezonu agrotechnicznego.

$\beta$  — prawdopodobieństwo tego, że części zamiennych wystarczy.

Niech

$$(1) \quad P(X = x_i) = p_i \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

przy czym rozpatrujemy tylko te wartości  $x_i$ , dla których  $p_i > 0$ .

Oczywiście  $\sum_{i=1}^r p_i = 1$ .

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_N$  będą niezależnymi dyskretnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie określonym wzorem (1). Wówczas zmienna losowa  $Y_N$  określona wzorem:

$$(2) \quad Y_N = \sum_{i=1}^N X_i$$

stanowi probabilistyczny model zapotrzebowania na części zamienne dla  $N$  niezależnie pracujących maszyn rolniczych.

Do wyznaczania zapasów części zamiennych stosujemy następujący wzór

$$(3) \quad z_\beta = \min \{k: P(Y_N \leq k) \geq \beta\}.$$

A więc zapas  $z_\beta$  części zamiennych potrzebnych na jeden sezon do  $N$  maszyn rolniczych przy prawdopodobieństwie wystarczalności  $\beta$  równy jest najmniejszej wartości  $k$ , dla której prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że zapotrzebowanie  $Y_N$  nie przekroczy wartości  $k$  jest co najmniej równe prawdopodobieństwu wystarczalności  $\beta$ . Efektywne wykorzystanie formuły (3) w praktyce wymaga znajomości prawdopodobieństw  $P(Y_N \leq k)$ .

W tym celu musimy wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $Y_N$ . Wyznaczenie rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $Y_N$  metodami analitycznymi w ogólnym przypadku nie jest możliwe. Dlatego też w takiej sytuacji należy zastosować metodę Monte Carlo, o której w Delcie pisał w 1977 r. R. Zieliński. Istotę zastosowania tej metody omówimy na przykładzie. Za pomocą metod statystycznych wykazano dla wybranego elementu kombajnu zbożowego, że zmienna losowa  $X$  ma taki rozkład prawdopodobieństwa, jaki przedstawiony jest w zamieszczonej obok tabeli 1.

Załóżmy, że w celu oszacowania wartości prawdopodobieństw  $P(Y_N = k)$  oraz  $P(Y_N \leq k)$  metodą Monte Carlo potrzebować będziemy  $L = 10$  realizacji zmiennej losowej  $Y_N$ . Załóżmy również, że grupa kombajnów składa się z  $N = 2$  egzemplarzy. Ze sposobu określenia zmiennej losowej  $Y_N$  wnioskujemy, że do otrzymania 10 realizacji zmiennej losowej  $Y_2$  potrzeba 20 realizacji zmiennej losowej  $X$ . W tym celu tworzymy przedziały:

$$A_0 = (0; 0,88]$$

$$A_1 = (0,88; 0,94]$$

$$A_3 = (0,94; 1,00]$$

Następnie za pomocą tablicy liczb losowych tworzymy ciąg złożony z 20 realizacji zmiennej losowej o rozkładzie równomiernym na odcinku (0,1). Niech to będzie następujący ciąg: 0,70; 0,81; 0,96; 0,85; 0,32; 0,48; 0,02; 0,17; 0,37; 0,01; 0,94; 0,38; 0,89; 0,48; 0,25; 0,79; 0,83; 0,39; 0,61; 0,79. Realizacje zmiennej losowej  $X$  tworzymy badając warunek przynależności kolejnych wyrazów ciągu do przedziałów  $A_0, A_1, A_3$ . Jeżeli wyraz ciągu należy do przedziału  $A_0$ , to realizacja zmiennej losowej  $X$  równa się 0; jeżeli do  $A_1$ , to realizacja wyniesie 1; jeżeli należy do  $A_3$ , to realizacja równa się 3.

Powyższe postępowanie spowoduje otrzymanie następującego ciągu realizacji zmiennej losowej  $X$ : 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.



Tabela 1. Rozkład prawdopodobieństwa opisanej w tekście zmiennej losowej  $X$

$x_i$	0	1	3
$p_i$	0,88	0,06	0,06

Tabela 2. Rozkład zmiennej  $Y_2$  (wyniki z komputera wg metody Monte Carlo)

$P(Y_2 = 0) = 0,775,$	$P(Y_2 \leq 0) = 0,775$
$P(Y_2 = 1) = 0,095,$	$P(Y_2 \leq 1) = 0,870,$
$P(Y_2 = 2) = 0,005,$	$P(Y_2 \leq 2) = 0,875$
$P(Y_2 = 3) = 0,120,$	$P(Y_2 \leq 3) = 0,995$
$P(Y_2 = 6) = 0,005,$	$P(Y_2 \leq 6) = 1$

Tabela 3. Rozkład zmiennej  $Y_2$  (wyniki dokładne)

$P(Y_2 \leq 0) = 0,7744$
$P(Y_2 \leq 1) = 0,8800$
$P(Y_2 \leq 2) = 0,8836$
$P(Y_2 \leq 3) = 0,9892$
$P(Y_2 \leq 4) = 0,9964$
$P(Y_2 \leq 6) = 1,0000$

Tabela 4. Zapas części zamiennych

$\beta = 0,90$	
$N$	$z_\beta$
2	3
3	3
4	3
5	4
6	4
7	4
8	4
9	4
10	6
11	6
12	7
13	7
14	7
15	7

Następnie sumujemy kolejne pary wyrazów ciągu realizacji zmiennej losowej  $X$  i w ten sposób otrzymujemy realizacje zmiennej losowej  $Y_2$ . Jest to następujący ciąg realizacji zmiennej losowej  $Y_2$ :

0, 3, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0.

Za pomocą częstości względnej szacujemy prawdopodobieństwa:

$$P(Y_2 = 0), \quad P(Y_2 = 1), \quad P(Y_2 = 3).$$

Otrzymujemy

$$P(Y_2 = 0) = 0,7, \quad P(Y_2 = 1) = 0,2, \quad P(Y_2 = 3) = 0,1.$$

Mamy zatem:

$$P(Y_2 \leq 0) = 0,7, \quad P(Y_2 \leq 1) = 0,9, \quad P(Y_2 \leq 3) = 1.$$

Zgodnie z wzorem (3) dla prawdopodobieństwa wystarczalności  $\beta = 0,8$  otrzymujemy zapas części  $z_\beta = 1$ , natomiast dla  $\beta = 0,95$  jest  $z_\beta = 3$ .

Należy stwierdzić, że w powyższym przykładzie przyjęta liczba realizacji zmiennej losowej  $Y_2$  jest zbyt mała, aby stosunkowo dobrze oszacować prawdopodobieństwa  $P(Y_2 = k)$  oraz  $P(Y_2 \leq k)$ . Dlatego też tego typu obliczenia przeprowadza się na komputerze i wówczas przyjmujemy dużą liczbę realizacji zmiennej losowej  $Y_N$ , rzędu 200 i więcej. Powyższy przykład został zrealizowany również na komputerze ODRA-1305 (w Instytucie Budownictwa, Mechanizacji i Elektryfikacji Rolnictwa) dla liczby realizacji  $L = 200$ .

Otrzymane oszacowania prawdopodobieństw opisuje zamieszczona obok tabela 2.

A więc w tym prostym przypadku wyniki odnośnie zapasu są identyczne zarówno przy obliczaniu za pomocą komputera, jak i bez niego. Warto tutaj zauważyć, że dla zmiennej losowej  $Y_2$  można też łatwo wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa metodami analitycznymi, bez uciekania się do metod Monte Carlo.

A mianowicie

$$P(Y_2 = 0) = P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 0) = 0,88 \cdot 0,88 = 0,7744;$$

$$P(Y_2 = 1) = P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 0) = 2 \cdot 0,0528 = 0,1056;$$

$$P(Y_2 = 2) = P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1) = 0,06 \cdot 0,06 = 0,0036;$$

$$P(Y_2 = 3) = P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 3) + P(X_1 = 3) \cdot P(X_2 = 0) = 0,1056;$$

$$P(Y_2 = 4) = P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 3) + P(X_1 = 3) \cdot P(X_2 = 1) = 0,0072;$$

$$P(Y_2 = 6) = P(X_1 = 3) \cdot P(X_2 = 3) = 0,0036.$$

Analityczne wyznaczanie prawdopodobieństw  $P(Y_N = k)$  oraz  $P(Y_N \leq k)$  znacznie się komplikuje dla dużych  $N$ . Dlatego też w takich przypadkach jedynym efektywnym sposobem postępowania jest metoda Monte Carlo. W tabeli 4 prezentujemy uzyskane z komputera za pomocą metody Monte Carlo wyniki dotyczące zapasów części zamiennych dla  $\beta = 0,90$  oraz  $N = 2, 3, \dots, 15$  w odniesieniu do rozważanego w poprzednim artykule („Delta” 6/1981) elementu kombajnu zbożowego.



## Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

**M 265.** Wewnątrz kwadratu leży pewna liczba odcinków o końcach na obwodzie kwadratu. Suma długości odcinków wynosi 3. Wykazać, że gdy  $r < 1/8$ , to w kwadracie tym można zmieścić koło o promieniu  $r$  nie przecinające żadnego z danych odcinków.

Rozwiązanie na str. 12

**M 266.** Wykazać, że w wypukłym  $n$ -kącie  $A_1 A_2 \dots A_n$  można znaleźć  $n-2$  takich punktów  $B_2, \dots, B_{n-1}$ , że każdy trójkąt  $A_i A_j A_k$  zawiera dokładnie jeden z wybranych punktów.

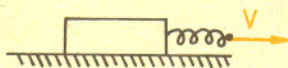
Rozwiązanie na str. 12

**M 267.** Szachista gra dla treningu co najmniej jedną partię dziennie, nie więcej jednak niż 12 partii na tydzień. Wykazać, że można znaleźć kilka (kilkanaście) kolejnych dni, w których łącznie zagrał 20 partii.

Rozwiązanie na str. 12

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

**F 96.** Na idealnie gładkiej powierzchni stołu spoczywa klocek o masie  $m$ . Do klocka przytwierdzona jest nieważka sprężyna o stałej sprężystości  $k$ . W pewnej chwili za koniec sprężyny zaczęto ciągnąć ze stałą prędkością  $v$  (rys. 1). Znaleźć maksymalne wydłużenie sprężyny.



(W. Zielicz)

Rozwiązanie na str. 7



# Rodzaj ruchu zwany ciepłem

Dr Krzysztof SZYMBORSKI

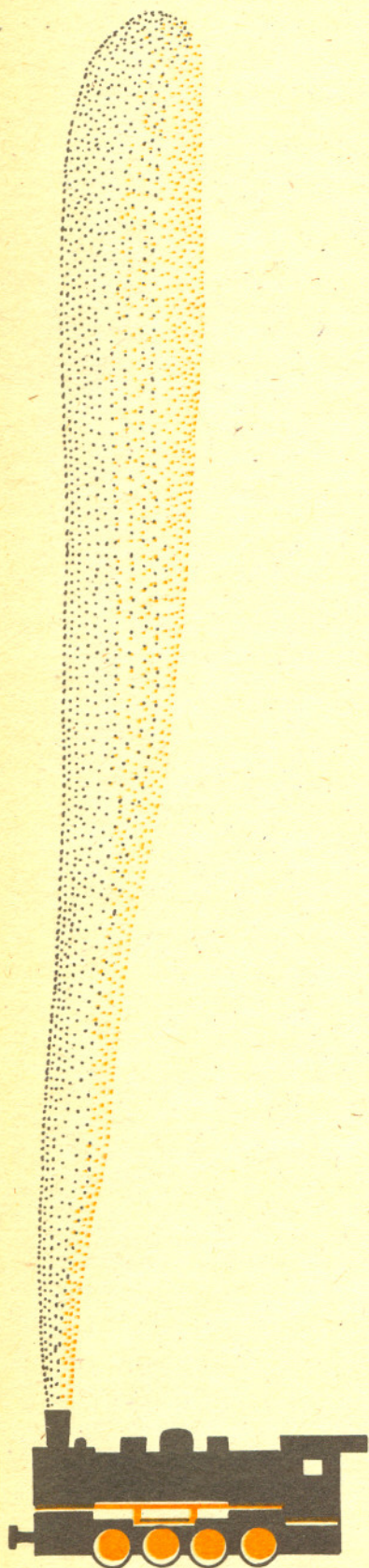
Niewiele dziedzin fizyki miało historię tak barwną i bogatą a na dzieje myśli ludzkiej wywarło wpływ tak doniosły, jak nauka o ciepłe. Współczesna termodynamika, gdy rodziła się w drugiej połowie XVIII stulecia, była wiedzą na wskroś praktyczną — Benjamin Thompson, już jako hrabia Rumford, swe słynne doświadczenia podważające teorię ciepłika prowadził przy wierceniu luf armatnich w monachijskim arsenale; maszyna parowa Jamesa Watta, która wywołała rewolucję w przemyśle, była tworem rzemieślnika, a na naukowe wyjaśnienie zasady jej działania czekać trzeba było jeszcze wiele lat. Z drugiej natomiast strony, owa tak praktyczna dziedzina wiedzy zrodziła najbardziej wyrafinowane problemy teoretyczne, jakie znała fizyka XIX wieku. Problemy, dodajmy, nie tylko rachunkowe i koncepcyjne, lecz wręcz światopoglądowe. Można bez żadnej przesady powiedzieć, że termodynamika — której badaniu poświęcił się Max Planck — była tą dźwignią, która poruszyła szacowny gmach klasycznej newtonowskiej fizyki, doprowadzając do jego zawalenia.

Wiek XIX był w fizyce wiekiem termodynamiki. Wówczas to dojrzało pojęcie energii i sformułowana została zasada jej zachowania, czyli pierwsza zasada termodynamiki. Była to niezmiernie ważna zasada porządkująca spory obszar wiedzy, jednak płodniejsza w konsekwencje okazała się druga zasada, znana w wielu sformułowaniach a stanowiąca na pozór jedynie pewne ograniczenie pierwszej. Gdy bowiem pierwsza głosiła — mówiąc najogólniej — że praca może być zamieniona na ciepło i odwrotnie, druga zasada precyzowała warunek konieczny, by ów odwrotny proces zamiany ciepła na pracę mógł zajść. Jest on możliwy tylko wówczas, gdy w jego toku ciepło przekazywane jest od ciała cieplejszego do chłodniejszego. To na pozór oczywiste spostrzeżenie, oczywiste wobec naszego codziennego doświadczenia, które jest ostoją zdrowego rozsądku, sformułowane jako podstawowe prawo fizyki okazało się właśnie tą bombą z opóźnionym zapłonem, która rozsadziła klasyczną fizykę.

Jak wspominałem, druga zasada termodynamiki doczekała się licznych sformułowań, których samo omówienie wymagałoby osobnego artykułu. Tu nie będę takiej próby podejmować. Przypomnę tylko, że jest ona również zwana Zasadą Carnota. Dlaczego? Kim był Nicolas Léonard Sadi Carnot i jaką rolę odegrał w rozwoju termodynamiki? Spróbuję krótko odpowiedzieć na te pytania.

Sadi Carnot urodził się 1 czerwca 1796 r. w pałacu Petit-Luxemburg, w którym mieszkał — jako członek Dyrektoriatu — jego ojciec Lazare Carnot. Zarówno Sadi jak i jego młodszy brat Hyppolyte otrzymali bardzo staranne wykształcenie w zakresie matematyki, fizyki, nauk przyrodniczych, a także języków i muzyki. W 1812 r., w roku niefortunnej wyprawy Napoleona na Moskwę, Sadi Carnot wstępuje do elitarnej Szkoły Politechnicznej, w której wykładają w tym czasie uczeni tej miary, co Poisson, Gay Lussac, Ampère i Arago. W 1814 jako ochotnik, walczy u wrót Paryża z nacierającymi wojskami Sprzymierzonych. Nie przeszkadza mu to wszakże w tymże roku ukończyć École Polytechnique z szóstą w swej klasie lokatą. Dalsze, dwuletnie studia z zakresu inżynierii wojskowej odbywa w Metz. Z tego okresu pochodzą jego pierwsze, niestety zaginione, publikacje naukowe. Czasy, szczególnie dla Francji, były burzliwe. Napoleon, zesłany na Elbę, powraca do Paryża, by jeszcze przez sto dni władać krajem. Swym ministrem spraw wewnętrznych mianuje na ten czas Lazare'a Carnota. Sprawia to, rzecz jasna, że Sadi staje się przedmiotem szczególnej łaskawości swych zwierzchników. Na krótko. W październiku 1815 stary Carnot skazany zostaje na wygnanie, co nie przeszkadza jednak — cóż za tolerancja! — jego starszemu synowi ukończyć w rok później uczelnię wojskową i rozpocząć służbę w pułku inżynieryjnym w Metz.

Reputacja ojca utrudnia mu początkowo karierę. Przerzucany z garnizonu do garnizonu traci czas na nudne, rutynowe prace inwentaryzacyjne. W 1819 r. udaje mu się jednak przenieść do Paryża, gdzie natychmiast zwalnia się na bezterminowy urlop z czynnej służby i rozpoczyna dalsze studia. Interesuje go właściwie wszystko, lecz szczególnie fascynuje go zagadnienie rozwoju przemysłowego i ekonomia polityczna — pracuje nawet nad projektem reformy systemu podatkowego.





BROJLERNIE  
 WŁASNOŚCIĄ  
 BROJLERÓW  
 - zootechnicy  
 to tylko wynajęci fachowcy:  
 ktoś przecież musi nas karmić.

CZY SAMOTNOŚĆ  
 U MASZERUJĄCYM TĘMIEM  
 TO COŚ WIĘCEJ  
 NIŻ ZWYCZAJNA  
 SAMOTNOŚĆ W TĘMIEM?



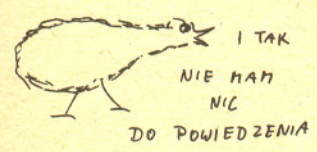
REKOMPENSATY  
w stylu przedwojennym

oto przykład obliczenia uposażenia z sierpnia 1923r.

Płaca zasadnicza	11 600,-
Dodatek drożyzniany	47 260,-
Dodatek wyrównawczy	4 178,-
razem	63 038,-
+250%	157 595,-
razem	220 633,-
+100%	220 633,-
+ 60%	264 760,-
razem	705 026,-
+ 60%	423 616,-
razem	1 129 642,-
+ 33%	372 782,-
razem	1 502 424,-
+ 10%	150 243,-
razem	1 652 667,-
+ 14%	231 374,-
razem	1 884 041,-
+ 28%	462 747,-
RAZEM	2 346 788,-

/wspomnienia Henryka Dziedzica, tom "sierpień", strona 51/

CZY JUŻ WYBRAŁEŚ  
 TEGO  
 KTO BĘDZIE PRACOWAŁ  
 NA CIBBIE



Te chyba właśnie gospodarzce zainteresowania sprawiają, że spotyka się z maszyną parową. Stopniowo ta nowa pasja pochłania go coraz bardziej. Gdy po śmierci ojca jego brat Hyppolyte wraca z Magdeburga do Paryża, zastaje Sadię przy pracy nad książką. Ma to być książka zrozumiała też dla laików, więc Sadi zmusza swego brata do przeczytania rękopisu i przereklamuje jego bardziej zawiłe fragmenty. W czerwcu 1824 r. dzieło: „Refleksje nad siłą motoryczną ognia i nad maszynami stosownymi dla wyzyskania tej siły” („Reflexions sur la puissance motorice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance”) ukazuje się drukiem i zostaje dobrze przyjęte przez środowisko naukowe. Dobrze przyjęte, to nie znaczy — zrozumiane. Zrozumiane i docenione naprawdę zostanie znacznie później. Carnot zyskuje reputację „budowniczego maszyn parowych”, choć nie zachowały się żadne dowody świadczące o tym, że zajmował się jakkolwiek praktyczną działalnością na tym polu. Raczej interesuje go istota zjawiska, sama teoria ciepła.

Ni ją też głównie zajmuje się, przerywając jedynie na rok swe badania, gdy w 1827 r. reorganizacja korpusu sztabu generalnego zmusza go do powrotu do służby wojskowej. Wnet jednak zwalnia się, tym razem na zawsze z wojska i już bez reszty poświęca się nauce. W 1831 rozpoczyna badania fizycznych własności gazów i par, w szczególności związków pomiędzy temperaturą a ciśnieniem. Wczesnym latem 1832 zapada jednak na szkarlatynę, potem na „gorączkę mózgową”, by wreszcie w sierpniu zarazić się cholera. Wycieńczony wcześniejszymi chorobami organizm broni się zaledwie jeden dzień. Sadi Carnot umiera 24 sierpnia 1832 r. w wieku 36 lat.

Niewiele z tego, co pisał, przetrwało — poza „Refleksjami” liczącymi 118 stron druku, dwudziestostronicowy manuskrypt pracy „Badania nad wzorem właściwie przedstawiającym siłę motoryczną pary wodnej”, trochę notatek i tłumaczenia Jamesa Watta. Resztę, zgodnie z obyczajem, spalono po jego śmierci. Już w — pochodzących przypuszczalnie z 1823 r. — „Badaniach” Carnot poszukując takiej ogólnej formuły, która określałaby ilość pracy, jaką wykonać może 1 kilogram pary wodnej, posługuje się modelowym cyklem pracy maszyn parowej, w którym to cyklu po izotermicznym rozprężeniu gazu następuje rozprężanie adiabatyczne, a wreszcie izotermiczne sprężanie. Nie jest to jeszcze pełen cykl. Dopiero uzupełnienie go o czwarty etap adiabatycznego sprężania (Carnot wprowadza tę poprawkę w swej jedynej opublikowanej pracy — w „Refleksjach ...”) sprawia, że gaz znów ogrzewa się do swej początkowej temperatury i cykl zostaje zamknięty. Jest to „cykl Carnota”.

Dzieło Carnota, niemal nie dostrzeżone przez współczesnych, docenione zostało dopiero około 1850 roku przez Williama Thomsona (późniejszego Lorda Kelvina) i Rudolfa Clausiusa. Jego wartość polegała na przyjęciu właściwego systemu pojęć, na przeniesieniu rozważań o ciepłe na skalę makroskopową, na sformułowaniu wniosków o dużej ogólności. Czemu zatem nie doceniono od razu wagi jego pracy? Na to odpowiedzieć trudno. Być może, między innymi, dlatego, że choć wnioski jego były ogólne i wynikały z logicznych przesłanek, okazało się, że to wszystko, czego Carnot dowodził, konstruktorzy maszyn parowych wiedzieli już z praktyki.

Teoretyczne znaczenie rozważań Carnota może dlatego nie spotkało się ze zrozumieniem, że posługiwał się on koncepcją ciepła, która wkrótce okazała się anachroniczna. W „Refleksjach” ciepło jest niezniszczalną, bezbarwną substancją, która „przelewając” się z jednego ciała do drugiego może wykonać pracę. Pod koniec życia, jak świadczą o tym odnalezione w 1878 r. notatki, Carnot skłaniał się ku nowej kinetycznej teorii, w myśl której ciepło było formą ruchu materii. Swych rozważań przedstawionych w „Refleksjach” już jednak nie przetłumaczył na język pojęciowy nowej teorii.

Na koniec pytanie najbardziej chyba zasadnicze — co w pracy tego człowieka, który dowiódł, że „wydajność pracy jakiegokolwiek idealnej maszyny cieplnej zależy tylko od różnicy temperatur ciała oddającego i ciała pobierającego ciepło” było tak rewelacyjne, że aż podważyło fundamenty fizyki! Wiele jest przykładów na to, że najbardziej doniosłe są konstatacje najprostsze. A taką było przyjęcie przez Carnota założenia, że ciepło przepływać może tylko z ciała cieplejszego do chłodniejszego. Niby oczywiste, lecz w myśl klasycznej mechaniki newtonowskiej każdy proces fizyczny można, w zasadzie, odwrócić. Nie ma wśród jej praw takiego, które mogłoby wykluczyć, że jeśli możliwa jest w przyrodzie jakaś zmiana, to i możliwa jest zmiana dokładnie odwrotna. Takie prawo trzeba było w konstrukcję klasycznej fizyki wbudować i wynikały z tego poważne komplikacje. To już jednak zupełnie inna historia ...