

## SPIS TREŚCI

NUMERU 8 (116)

Nieciągłości w wirowaniu pulsarów <i>dr Mieczysław Prószyński</i>	str. 1
Odbicie Macha <i>dr Zbigniew Walenta</i>	str. 4
Zasada nieciągłości w ewolucji <i>prof. dr Leszek Kuźnicki</i>	str. 6
Zadania	str. 7
Jak nieciągłe mogą być funkcje <i>dr Jerzy Ryll</i>	str. 8
Patrz w niebo	str. 10
Zjawiska krytyczne, czyli co się dzieje w pobliżu punktu krytycznego <i>dr Marek Napiórkowski</i>	str. 10
Kamieniołom na Szklanej Górze <i>dr inż. Krzysztof Żmijewski</i>	str. 14
Czym są dystrybucje <i>dr Henryk Kolakowski</i>	str. 15
Klub 44	str. 16

**W następnym numerze:**  
**Początek kursu programowania w języku Mizar**

### Nasza okładka:

Fale uderzeniowe można badać rozwiązując równania dynamiki płynów przy użyciu komputera. Seria rysunków na okładce pokazuje powstawanie odsuniętej fali uderzeniowej podczas wejścia stożka w jednorodny gaz z prędkością naddźwiękową. Linie ciągłe są konturami stałego ciśnienia. Na podstawie takiego rozwiązania można np. przewidzieć zjawiska towarzyszące wejściu w atmosferę powracającego na Ziemię pojazdu kosmicznego.

### „Delta”

matematyczno-fizyczno-astrofizyczny  
 miesięcznik popularny  
 Polskiego Towarzystwa  
 Matematycznego, Polskiego  
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
 Towarzystwa Astronomicznego  
 wydawany przy poparciu  
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

#### Komitet Redakcyjny:

dr Bogdan Cichocki  
 dr hab. Jan A. Gaj  
 doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
 prof. dr Kazimierz Goebel  
 doc. dr Tomasz Hofmökł  
 doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz  
 doc. dr Tadeusz Iwiński  
 doc. dr Tadeusz Jarzębowski  
 prof. dr Leon Jeśmanowicz  
 prof. dr Marek Kuczma  
 mgr Andrzej Mąkowski  
 prof. dr Bogdan Paczyński  
 dr Zbigniew Płochocki  
 prof. dr Sławomir Ruciński  
 prof. dr Konrad Rudnicki  
 doc. dr Jerzy Sawicki  
 prof. dr Zbigniew Semadeni  
 prof. dr Grzegorz SitarSKI  
 doc. dr Kazimierz Stępień

prof. dr Mieczysław Subotowicz  
 doc. dr Andrzej Szymacha  
 doc. dr Stefan Turnau  
 doc. dr Aniela Wolska  
 doc. dr Andrzej Woszczyk  
 prof. dr Wojciech Żakowski —  
 przewodniczący

#### Redaguje kolegium w składzie:

mgr Tomasz Chlebowski  
 mgr Maciej Jędrzejczak  
 mgr Krystyna Kordos — sekr. red.  
 dr Marek Kordos — red. nacz.  
 dr Tomasz Kwast — z-ca red. nacz.  
 dr inż. arch. Jacek Mazur  
 dr Jerzy Ryll  
 dr Michał Szurek  
 doc. dr Michał Świącki — z-ca red. nacz.

#### Adres Redakcji

ul. Koszykowa 6a  
 00-564 Warszawa

Krajowe Wydawnictwo Czasopism

RSW „Prasa—Książka—Ruch”

ul. Noakowskiego 14

00-666 Warszawa

Nakład 40 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;

2,50 ark. druk;

papier offsetowy V kl. 70 g.

Wydrukowano w drukarni

im. Rewolucji Październikowej

Warszawa, ul. Mińska 65.

Nr zam. 4562/83 M-10

### WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—

1. dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:

— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,

— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

2. dla osób fizycznych — indywidualnych:

— osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,

— osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych przy użyciu „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy: Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw w Warszawie, ul. Towarowa 28, nr konta NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11.

3. Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

#### Termin przyjmowania prenumeraty:

— od prenumeratorów indywidualnych zamieszkałych w miastach siedzibach oddziałów RSW „Prasa — Książka — Ruch” — do dnia

28 lutego 1983 r. — na II kwartał i dalsze okresy roku bieżącego,

31 maja 1983 r. — na III kwartał i II półrocze roku bieżącego,

31 sierpnia 1983 r. — na IV kwartał roku bieżącego,

— od instytucji, zakładów pracy i prenumeratorów indywidualnych zamieszkałych na wsi i w małych miasteczkach do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty.

#### Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać

„DELTA”:

— w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,

— w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,

— w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,

— w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie

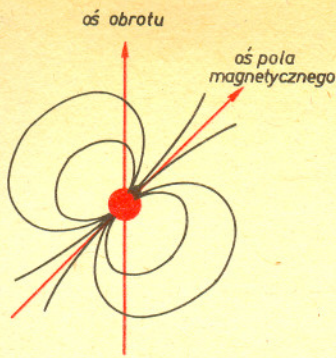
Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with

— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik

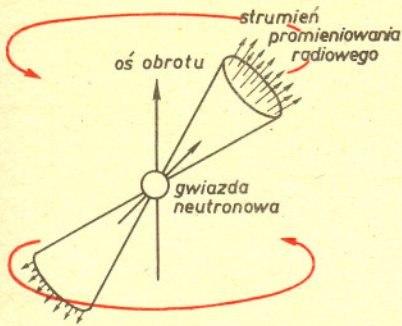
Deutschland,

— Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,

— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.



Rys. 1 Gwiazda neutronowa z dipolowym polem magnetycznym nachylnym względem osi obrotu



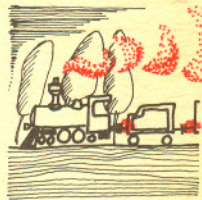
Rys. 2 Wirująca gwiazda neutronowa ze strumieniami promieniowania

Pulsary są wirującymi gwiazdami neutronowymi, obdarzonymi bardzo silnym polem magnetycznym. Gwiazdy neutronowe powstają w wyniku zapadnięcia się centralnej części zwykłych, masywnych gwiazd, gdy te kończą swe życie wybuchając jako supernowe. Gwiazdy neutronowe są obiektami o promieniu kilku, najwyżej kilkunastu kilometrów i o masie bliskiej masie Słońca, co oznacza, że średnia gęstość materii w ich wnętrzu przewyższa gęstość materii w jądrach atomów.

Pulsar — wedle przyjętego dziś modelu — ma bardzo silne pole magnetyczne o strukturze mniej więcej dipolowej, przy czym oś pola nachylona jest względem osi obrotu gwiazdy neutronowej. Nad obydwoma biegunami magnetycznymi, nad powierzchnią gwiazdy, powstają wąskie strumienie naładowanych cząstek, poruszających się na zewnątrz z prędkościami bliskimi prędkości światła. Cząstki te promieniują w kierunku ruchu i w rezultacie nad biegunami powstają wąskie strumienie promieniowania radiowego skierowane na zewnątrz, wzdłuż osi pola magnetycznego. W przypadku kilku pulsarów — strumieniom promieniowania radiowego towarzyszą strumienie światła widzialnego, promieni Roentgena i promieni gamma.

Owe strumienie omiatają niebo w miarę obracania się gwiazdy neutronowej wokół swojej osi. W chwili, gdy któryś z nich zahacza o Ziemię, odbieramy sygnał z pulsara. Oczywiście, są i takie pulsary, które omiatając niebo swoim promieniowaniem nie natrafiają na Ziemię — takich pulsarów nie możemy dostrzec. Szacuje się, że ledwie jeden pulsar na pięć omiatając niebo zahacza przy tym o Ziemię.

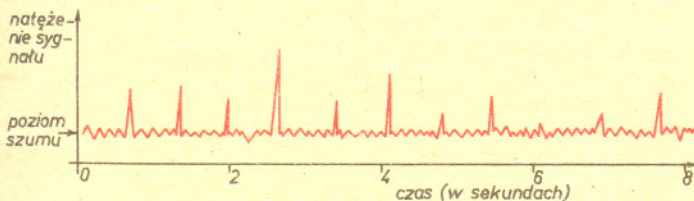
Pierwszy pulsar został odkryty pod koniec roku 1967 i miał okres  $P = 1,33730$  s. Dzisiaj, po piętnastu latach, znamy 333 pulsary. Najmłodszy pulsar, tkwiący w środku Mgławicy Krab w gwiazdozbiore Byka, ma 929 lat i okres  $P = 0,03313$  s (tylko jeden pulsar wiruje szybciej od niego). Wiek przeciętnego pulsara sięga kilku milionów lat, a więc jest znacznie krótszy od czasu istnienia naszej Galaktyki, a nawet Układu Słonecznego. Oznacza to, że pulsary umierają. Mechanizm fizyczny generujący strumienie cząstek nad biegunami gwiazdy neutronowej działa przez kilkanaście, najwyżej kilkadziesiąt milionów lat po jej narodzeniu. Później przestaje. Gwiazda neutronowa przestaje wysyłać strumienie kierunkowego promieniowania — przestaje być pulsarem.



## Nieciągłości w wirowaniu pulsarów

Dr Mieczysław PRÓSZYŃSKI

Pulsary pulsują. Sygnał odbierany przez radioteleskop ma postać bardzo regularnie powtarzających się impulsów: natężenie wzrasta do wartości maksymalnej, spada do poziomu szumu, następnie przez pewien czas sygnału nie ma, po czym wszystko powtarza się od początku. Cały cykl u najszybszego pulsara trwa 0,00155 s, u najwolniejszego 4,308 s, a u przeciętnego około jednej sekundy.



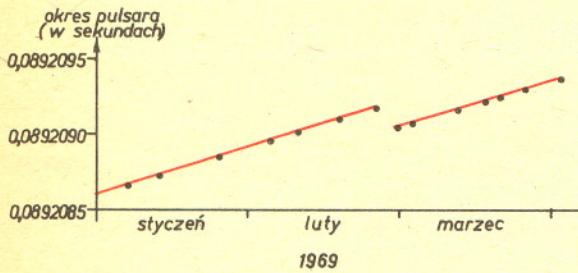
Rys. 3 Sekwencja pulsów odebranych z jednego z najwcześniej odkrytych pulsarów, PSR 0329 + 54. Odstęp między kolejnymi pulsami wynosi 0,714 s.

Pulsary pulsują. Przypominają cykające zegary.

W rzeczywistości pulsary są bardzo dobrymi zegarami. Mechanizmem, który odpowiada za regularne powtarzanie się sygnału, jest ruch obrotowy gwiazdy neutronowej. Puls obserwujemy w chwili, gdy zahacza o nas wąski strumień promieniowania radiowego wysyłany z jednego z biegunów magnetycznych gwiazdy neutronowej. Sercem pulsara jest więc wirująca gwiazda neutronowa, a okres pulsara (odstęp między kolejnymi maksimami sygnału) to okres obrotu gwiazdy neutronowej. W ten sposób z zachowania się okresu pulsara można wnioskować o własnościach gwiazd neutronowych, o ich budowie wewnętrznej, o polu magnetycznym.

Pulsary są bardzo dobrymi zegarami, nie są jednak zegarami idealnymi. Okres pulsara zmienia się z biegiem czasu. Przede wszystkim zegar zwalnia, spóźnia się; okres między kolejnymi pulsami wydłuża się. Są to zmiany powolne. W ciągu roku okres przeciętnego pulsara wydłuża się o  $5 \cdot 10^{-7}$  swojej wartości. Te powolne zmiany są zmianami systematycznymi, to znaczy przewidywalnymi. Zegar co prawda zwalnia, lecz można prawidłowo przewidzieć szybkość jego chodu za rok czy dwa. To systematyczne spowalnianie ruchu obrotowego gwiazdy neutronowej związane jest z obecnością pola magnetycznego.

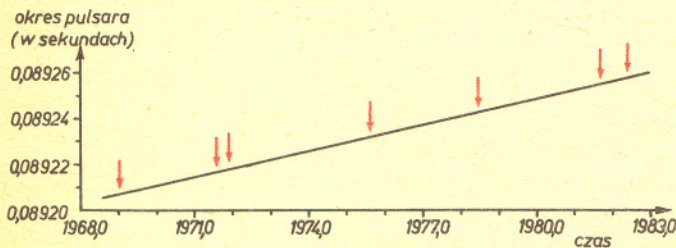
Wyobraźmy sobie wirującą dipol magnetyczny nachylony względem osi obrotu. Dipol taki promieniuje we wszystkich kierunkach monochromatyczną falę elektromagnetyczną o częstotliwości równej częstotliwości wirowania i natężeniu największym w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu. Fala ta unosi energię. Dzieje się to kosztem energii ruchu obrotowego i jeśli nie będziemy mu jej uzupełniać (np. za pomocą silniczka), to dipol będzie zwalniał. Tak samo dzieje się z gwiazdami neutronowymi; oprócz wąskich, lecz bardzo mocnych strumieni promieniowania, skierowanych wzdłuż osi magnetycznej, pulsar wysyła „zwykłą” monochromatyczną falę elektromagnetyczną o częstotliwości równej częstotliwości wirowania gwiazdy. Śmieszne jest przy tym to, że energia wypromieniowywana przez pulsar w postaci snopu promieniowania, który powoduje pulsowanie sygnału w radioteleskopie, jest bardzo mała w porównaniu z energią traconą w postaci „zwykłego” promieniowania, wysyłanego przez wirujące pole magnetyczne pulsara. Tego „zwykłego” promieniowania nie możemy zaobserwować na Ziemi, bo jego natężenie jest znacznie słabsze.



Rys. 4 Nieciągłość okresu pulsara w Żaglu (PSR 0833—45) na przełomie lutego i marca 1969 r. Punkty oznaczają kolejne obserwacje. Dokładny moment skoku nie jest znany.

Szybkość utraty energii, a więc i tempo zmian okresu pulsara zależy od wartości momentu dipolowego pola magnetycznego pulsara (a dokładniej od składowej tego momentu prostopadłej do osi obrotu) i nie zmienia się w sposób znaczący z roku na rok. Dlatego też mówimy, że owo wydłużanie się okresu jest systematyczne i przewidywalne; można przedstawić je przy pomocy wzoru  $P(t) = P_0 + \dot{P}_0 \cdot (t - t_0)$ , gdzie  $P_0$  i  $\dot{P}_0$  są odpowiednio okresem i pochodną okresu w chwili  $t_0$ .

Jednym z pierwszych odkrytych pulsarów był pulsar o okresie  $P = 0,0892$  s, znajdujący się w pobliżu środka wielkiej pozostałości po wybuchu supernowej w gwiazdozbiornie Żagla. Przez kilka pierwszych miesięcy po odkryciu pulsar ten zachowywał się przyzwoicie. Jego okres systematycznie rósł; w ciągu każdej doby wydłużał się o  $1,07 \cdot 10^{-8}$  s. Na przełomie lutego i marca 1969 roku zegar pulsara nagle przyspieszył — gwiazda neutronowa zaczęła wirować szybciej. Okres obrotu zmalał o  $-\Delta P = 2,08 \cdot 10^{-7}$  s, co odpowiada względnej zmianie  $\Delta P/P = -2,34 \cdot 10^{-6}$ . Aby „odrobić” ten



Rys. 5 Systematyczne wydłużanie się okresu pulsara w Żaglu, PSR 0833—45. Chwile, w których nastąpiły skoki okresu, zostały zaznaczone strzałkami. Same nieciągłości są zbyt małe, by można je było dostrzec na tym rysunku. Data 1968,0 oznacza początek roku 1968 itd.

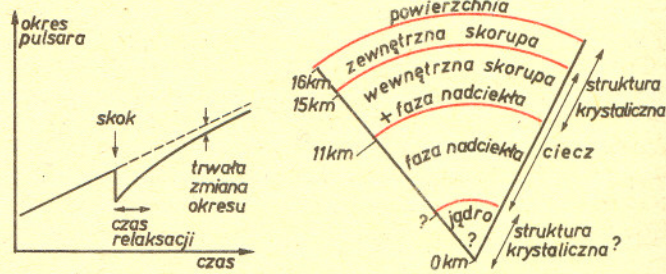
skokiem, pulsar musi systematycznie zwalniać przez 18,6 dnia. Następny skok nastąpił we wrześniu 1971 roku, po 2,5 latach systematycznego zwalniania; znów okres pulsara nagle zmalał. Nieco później, na przełomie 1971 i 1972 roku zaobserwowano kolejny skok, tym razem przeszło 100 razy mniejszy od poprzednich. W następnych latach były jeszcze cztery duże skoki okresu, w 1975, 1978, 1981 i 1982 — wszystkie o podobnej wielkości,  $\Delta P/P$  wahało się między  $-1 \cdot 10^{-6}$  a  $-3 \cdot 10^{-6}$ .

Zauważono kilka podobnych skoków okresu u najmłodszego pulsara, znajdującego się w środku Mgławicy Krab, pozostałości po wybuchu supernowej z roku 1054. Okres tego pulsara,  $P = 0,03313$  s, w ciągu każdej doby systematycznie wydłuża się o  $3,6 \cdot 10^{-8}$  s; w ciągu 10 lat obserwacji wydłużył się o 0,4%. Pierwszy skok okresu zarejestrowano u tego pulsara we wrześniu 1969 roku, dwa następne, bardzo małe w 1971 roku, kolejny — największy do dziś — w lutym 1975 roku i jeszcze jeden mały w 1978 roku. W czasie największego skoku okres zmalał o  $-\Delta P = 1,3 \cdot 10^{-9}$  s, co odpowiada względnej zmianie  $\Delta P/P = -4 \cdot 10^{-8}$ . Efekt był więc pięćdziesiąt razy słabszy niż w przypadku pulsara w Żaglu.

Trzecim i ostatnim do tej pory pulsarem, u którego zaobserwowano nieciągłości w systematycznym wydłużaniu się okresu, jest obiekt oznaczany symbolem PSR 1641—45. Skok nastąpił we wrześniu 1977 roku i wyniósł  $\Delta P/P = -1,9 \cdot 10^{-7}$ .

We wszystkich powyższych przypadkach nieciągłość polegała na tym, że okres nagle malał; po skoku gwiazda neutronowa zaczynała wirować nieco szybciej. We wszystkich tych przypadkach powolne, systematyczne zmiany w czasie między skokami były znacznie większe — skoki objawiały się jako małe zaburzenia w dominującym zwalnianiu.

Zauważono, że bezpośrednio po skoku pulsar zachowuje się dziwnie, tak jakby chciał wytracić przynajmniej część z tego, co nagle zyskał (rys. 6).



Rys. 6 Zachowanie się okresu po skoku Rys. 7 Gwiazda neutronowa — przekrój

Jaka jest bezpośrednia przyczyna tych nieciągłości okresu? Do tej pory nie znamy odpowiedzi na to pytanie. Astronomowie i astrofizycy wymyślili wiele różnych mechanizmów tłumaczących te skoki, jednakże żaden nie jest w pełni zadowalający, żaden nie wyjaśnia wszystkich obserwowanych szczegółów.

Gwiazda neutronowa — wedle najprostszego, dwuskładnikowego modelu — składa się z krystalicznej, zewnętrznej skorupy oraz z neutronowej cieczy wewnątrz. Być może w cieczy, w środku, tkwi jeszcze krystaliczne jądro. Obrazek ten przypomina w sumie jajko, tyle tylko, że gwiazda ma grubszą skorupkę, jest elipsoidą obrotową lekko spłaszczoną na biegunach (odchylenie od kulistości spowodowane jest ruchem obrotowym) i nie wiadomo, czy na pewno w środku jest żółtko. W cieczy neutronowej znajdują się również cząstki naładowane, elektrony i protony; stanowią one kilka procent masy cieczy. Liczba elektronów jest dokładnie równa liczbie protonów, a więc cała ciecz nie ma ładunku elektrycznego netto. Neutrony w cieczy są w stanie nadciekłym, cząstki naładowane — nie.

Być może przyczyną skoku jest nagłe pęknięcie skorupy gwiazdy neutronowej, która następnie stara się ułożyć zgodnie z kształtem chwilowej powierzchni ekwipotencjalnej „efektywnego” pola grawitacyjnego gwiazdy. To efektywne pole jest sumą dwóch pól: *pola grawitacyjnego* wytwarzanego przez gwiazdę i *pola siły bezwładności* (odśrodkowej), związanej z ruchem obrotowym gwiazdy. Powierzchnia stałego potencjału ma kształt elipsoidy obrotowej spłaszczonej wzdłuż osi obrotu, przy czym stopień spłaszczenia zależy od prędkości obrotu i zmniejsza się w miarę, jak maleje prędkość obrotu, a więc wtedy, gdy okres się wydłuża. Skorupa gwiazdy — struktura krystaliczna — nie odkształca się w sposób ciągły w miarę zmian kształtu powierzchni ekwipotencjalnej, stawia opór. W rezultacie w skorupie pojawiają się naprężenia, które narastają i po pewnym czasie dochodzi do kataklizmu, skorupa nagłe pęka i przemieszcza się, starając jak najlepiej się dopasować do chwilowej powierzchni ekwipotencjalnej. Spłaszczenie maleje, toteż maleje i moment bezwładności skorupy. Ponieważ jednak ilość momentu pędu skorupy nie zmalała w czasie zmiany kształtu, przypada go teraz nieco więcej na jednostkę momentu bezwładności, a więc skorupa musi zacząć wirować nieco szybciej. Oto i skokowy wzrost prędkości obrotu, czyli nagłe skrócenie okresu.

Nasz prosty model — wymyślony w 1969 roku przez Bayma, Pethicka, Pinesa i Rudermana — bardzo dobrze wyjaśnia skoki okresu w przypadku pulsara z Mgławicy Krab. Niestety, w przypadku pulsara w Żaglu skoki są zbyt duże i zdarzają się zbyt często. W ciągu kilku lat, jakie mijają między kolejnymi skokami, zmiana kształtu powierzchni ekwipotencjalnej jest przeszło tysiąc razy za mała, by spowodować skok o obserwowanej wielkości. Nasz model mógłby wytłumaczyć pojawienie się w ciągu całego życia pulsara kilkunastu, najwyżej kilkudziesięciu skoków o obserwowanej wielkości. My zaś widzieliśmy aż 6 w ciągu 14 lat.

Można zmodyfikować nieco nasz model przyjmując, że skoki powodowane są przez pęknięcia wewnątrz wielkiego krystalicznego jądra gwiazdy neutronowej, nie zaś skorupy, jak przyjmowaliśmy dotąd. Ta wersja jest lepsza, bowiem takie jądro może być znacznie bardziej spłaszczone, niż wynikałoby to z obecnej prędkości wirowania, i każde kolejne pęknięcie może tylko odrobinę zbliżyć jego kształt do kształtu równowagowego (to znaczy kształtu odpowiedniej powierzchni ekwipotencjalnej). Niestety, nie ma żadnych dowodów na to, że takie krystaliczne jądra rzeczywiście istnieją wewnątrz gwiazd neutronowych.

Inną przyczyną skoku może być niestabilność hydrodynamiczna pojawiająca się nagłe na granicy fazy nadciekłej i skorupy. W przypadku pulsara z Mgławicy Krab przyczyną skoku może być też niestabilność w obszarze magnetosfery, objawiająca się jako nagłe uwolnienie części plazmy uwięzionej w polu magnetycznym pulsara i wirującej wraz z nim. Nie można wykluczyć, iż mimo podobnych objawów skoki okresu są u różnych pulsarów powodowane przez różne mechanizmy fizyczne.

Chociaż obecny stan wiedzy nie pozwala jednoznacznie wyjaśnić, *dlaczego* występują nagłe skoki i na ogół „gładkim” zwalnianiu wirowania pulsarów, obecny model gwiazdy neutronowej zupełnie nieźle tłumaczy to, co się po takim skoku dzieje.

Nieciągłość w wirowaniu gwiazdy neutronowej to w rzeczywistości nieciągłość w prędkości obrotu strumienia promieniowania, a więc pola magnetycznego i skorupy, w którą to pole jest wmrózone; z jakiegoś (nieznanego do końca) powodu skorupa, pole magnetyczne i w ogóle cała zewnętrzna magnetosfera, a także cząstki naładowane znajdujące się

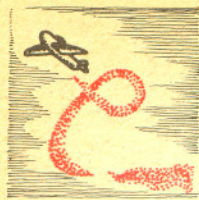
w ciekłym wnętrzu, które też są wmrózone w pole, i krystaliczne jądro (jeśli istnieje) — wszystkie te składniki zaczynają się nagłe obracać szybciej. Natomiast nadciekła część gwiazdy nie reaguje na tę zmianę natychmiast, wiruje z poprzednią prędkością.

W rezultacie zmienia się moment siły tarcia między wnętrzem a skorupą — w pierwszym przybliżeniu jest on proporcjonalny do różnicy prędkości obu faz. Moment siły działa cały czas, wnętrze bowiem przez cały czas wiruje nieco szybciej niż skorupa. (Faza nadciekła musi wirować szybciej niż skorupa, gdyż to skorupa jest ciągle hamowana przez promieniujący dipol, faza nadciekła zaś jest hamowana jedynie przez oddziaływanie, które pojawia się między nią a skorupą tylko wtedy, gdy występuje różnica prędkości). Skok powoduje zmianę względnej prędkości skorupy względem fazy nadciekłej. W momencie skoku stan równowagi zostaje zachwiany, zmienia się różnica prędkości, zmienia się więc też i oddziaływanie hamujące ruch fazy nadciekłej, a przyspieszające skorupę. Układ dąży do odzyskania stanu równowagi. Skorupa oddaje nadmiar swojego momentu pędu dopóty, dopóki różnica prędkości nie wróci do wartości sprzed skoku. Ten mechanizm „neutralizuje” część początkowego skoku prędkości wirowania skorupy. A to, jaka część początkowego skoku zostanie zneutralizowana, zależy od stosunku momentu bezwładności fazy nadciekłej do momentu bezwładności całego pulsara.

Oczywiście, nie ma powodu, by owo przekazywanie nadmiaru momentu pędu ze skorupy do wnętrza miało się odbywać równie szybko, jak inicjujący je skok. W rzeczywistości przebiegu skoku nie udało się do tej pory zaobserwować — zwykle obserwacje przeprowadzane są co kilka dni i analizując kolejną ich porcję stwierdza się, że właśnie coś się zmieniło od poprzedniego razu, że pulsar wiruje szybciej, niż by to wynikało z poprzednich obserwacji i że wobec tego od czasu ostatniej obserwacji musiał zdarzyć się skok. Natomiast *proces relaksacji* — wzajemnego uzgadniania się prędkości wirowania skorupy i nadciekłego wnętrza — może trwać kilka dni (przypadek pulsara z Mgławicy Krab), kilkaset (przypadek pulsara w Żaglu) lub jeszcze dłużej. Czasy relaksacji mogą się tak bardzo różnić w przypadku różnych pulsarów, gdyż moment siły działający między skorupą a wnętrzem zależy także od temperatury fazy nadciekłej, która zmienia się z biegiem czasu i im pulsar jest starszy, tym jest niższa. Może zdarzyć się i tak, że stan równowagi po skoku nigdy nie jest osiągnięty, gdyż wcześniej następuje kolejny skok.

Pulsary nie szcędzą nam zagadek. W 1975 roku podczas największego do dzisiaj skoku okresu u pulsara z Mgławicy Krab skokowo zmieniło się również tempo zwalniania ruchu wirowego. Od tej pory pulsar zwalnia szybciej; pochodna okresu — wielkość, która charakteryzuje szybkość zwalniania — wzrosła o  $2,2 \cdot 10^{-4}$  swojej wartości. Najprawdopodobniej w czasie skoku zmienił się nagłe moment dipolowy pola magnetycznego, a dokładniej — jego składowa prostopadła do osi obrotu, gdyż to jej obecność powoduje utratę energii ruchu wirowego. Być może w czasie skoku pole magnetyczne zmieniło nieco swoje ustawienie względem gwiazdy w taki sposób, że wzrósł kąt między osią pola i osią obrotu tak, iż wzrosła składowa momentu dipolowego prostopadła do osi obrotu.

Niektóre pulsary cierpią prócz tego na ciągle zaburzenia wirowania. Na dominujące, systematyczne wydłużanie się okresu nakładają się niewielkie fluktuacje — okres błądzi wokół wartości przewidywanej, raz jest nieco za mały, raz za duży. Jednym z takich chorych pulsarów jest znany nam już pulsar z Mgławicy Krab. Zmiany te związane są niewątpliwie z jakimś procesem przypadkowym. Być może jest to wynik sumowania się wielu bardzo małych skoków okresu, które zdarzają się tak często, że nie jesteśmy w stanie zobaczyć efektu poszczególnych skoków.



# Odbicie Macha

Dr Zbigniew WALENTA

Czytelnik bez trudu wyprowadzi zależność wynikającą z zasady zachowania masy (rys. 2)

$$\rho_1 v_1 = \rho_0 v_0,$$

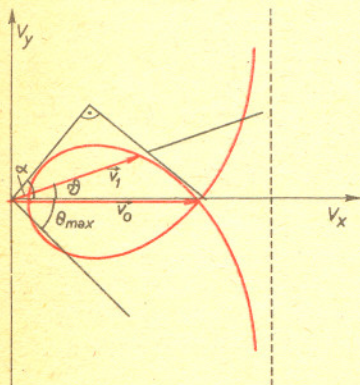
gdzie  $v_0$  ( $v_1$ ) jest składową prędkości przepływu prostopadłą do powierzchni nieciągłości przed (za) falą uderzeniową. Nietrudno również wyprowadzić równanie będące konsekwencją drugiej zasady dynamiki. Zmiana pędu wybranego elementu gazu przy przejściu przez nieciągłość jest równa popędowi siły (różnica ciśnień po obu stronach nieciągłości) działającej na ten element

$$\rho_1 v_1^2 + p_1 = \rho_0 v_0^2 + p_0.$$

Porównując pracę wspomnianej siły, zmianę energii wewnętrznej gazu związaną ze skokiem jego parametrów oraz zmianę energii kinetycznej otrzymujemy

$$\frac{v_1^2 + u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} + \epsilon_1 = \frac{v_0^2 + u_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0} + \epsilon_0,$$

gdzie  $\epsilon(p, \rho)$  jest energią wewnętrzną na jednostkę masy, a  $u$  składową prędkości przepływu równoległą do powierzchni nieciągłości (z zasady zachowania pędu wynika, że  $u_0 = u_1$ ). Znajdź parametry przed falą z równań tych można wyliczyć odpowiednie parametry za nią. Rozwiązania dla prędkości przepływu przedstawia się zwykle w układzie współrzędnych prostokątnych ( $v_x, v_y$ ), którego oś  $v_x$  jest równoległa do kierunku przepływu przed falą. W zależności od kąta  $\alpha$  skośnej fali uderzeniowej otrzymujemy różne prędkości przepływu za falą. Dla płaskiego przepływu gazu nielepkiego prędkości te układają się na krzywej w kształcie liścia Kartezjusza.



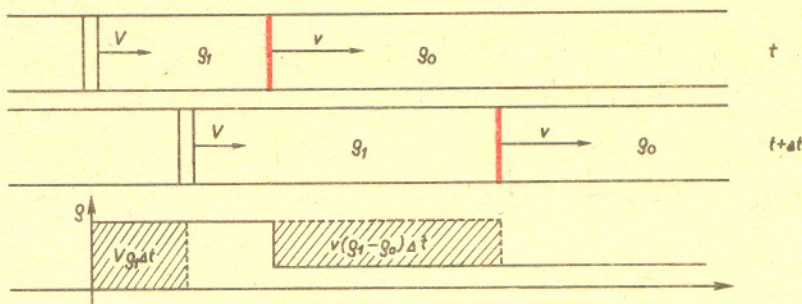
Nietrudne jest uzasadnienie konstrukcji kąta fali uderzeniowej  $\alpha$  dla danego kąta odchylenia przepływu. Jak widać, dla zadanej prędkości przed falą kąt odchylenia przepływu nie może przekroczyć wartości  $\theta_{max}$ .

Dla kątów mniejszych możliwe są dwa rozwiązania (trzęcie odrzucamy, bo odpowiada mu spadek entropii). Doświadczenie wykazuje, że realizuje się na ogół rozwiązanie  $v_1$ , odpowiadające słabszej fali odbitej.

Ruch ciał w gazie z prędkością naddźwiękową oraz silne eksplozje powodują powstanie fal uderzeniowych. Mechanizm narastania i spiętrzania się fali, aż do utworzenia ostrego skoku parametrów gazu (gęstości, ciśnienia, temperatury etc.) opisany był w *Delcie* 10/1981. Skok taki nie jest nieciągłością w sensie matematycznym (czynnikiem wygładzającym są efekty dysypacyjne — lepkość, przewodnictwo cieplne i dyfuzja), ale ponieważ następuje na odległościach rzędu średniej drogi swobodnej cząsteczek gazu, może być w większości zagadnień przez taką nieciągłość przybliżony.

W artykule tym przedstawimy niektóre zjawiska towarzyszące oddziaływaniu fali uderzeniowej z przeszkodami.

W warunkach laboratoryjnych fale uderzeniowe generuje się np. w długiej, wypełnionej gazem rurze z szybko poruszającym się tłokiem (rys. 1). Rolę tłoka może spełniać rozprężający się tzw. gaz napędzający, sprężony na początku doświadczenia w jednym końcu rury.



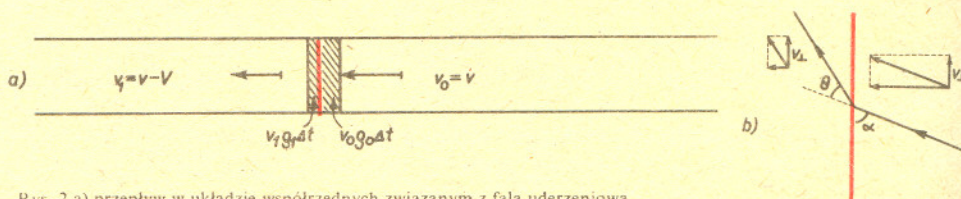
Rys. 1 Z zasady zachowania masy wynika związek między gęstościami przed i za skokiem ciśnienia (kolorowa kreska na rysunku) oraz prędkościami tłoka ( $V$ ) i nieciągłości ( $v$ ):

$$\rho_1(v - V) = \rho_0 v,$$

gdzie gęstość  $\rho_1 > \rho_0$ .

Nieciągłość parametrów gazu nie powstaje od razu. Początkowo, przy rozpędzaniu tłoka, granica między gazem jeszcze spoczywającym a już poruszającym się z prędkością tłoka jest rozmyta. Z biegiem czasu granica ta staje się jednak coraz ostrzejsza, doganiają ją bowiem zaburzenia od przyspieszającego tłoka. Nieciągłość, kiedy już powstanie, jest niezwykle stabilna. Jej prędkość jest większa niż prędkość dźwięku (tj. prędkość, z którą rozchodzą się małe zaburzenia) w nieruchomym gazie przed nią. Żadne zaburzenie ze strony tłoka nie może więc nieciągłości wyprzedzić i jej wygładzić. Jednocześnie prędkość tych zaburzeń w zszereżonym i nagrzanym gazie jest tak duża, iż doganiają one nieciągłość i powodują wzrost jej natężenia.

Dokładną analizę zmiany parametrów ośrodka przy przejściu fali uderzeniowej prowadzi się zwykle w inercjalnym układzie współrzędnych, w którym fala spoczywa (rys. 2). Strumień gazu o prędkości naddźwiękowej dopływa teraz do powierzchni nieciągłości, gdzie następuje skokowa zmiana jego prędkości, ciśnienia, temperatury, gęstości itd. Wartość skoku wyznacza się wykorzystując warunki zgodności wynikające z zasad zachowania (masy, pędu i energii) oraz równanie stanu gazu.

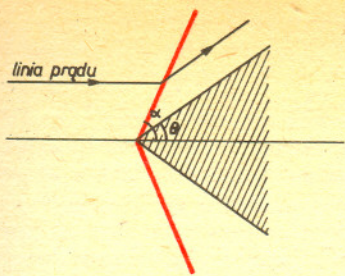


Rys. 2 a) przepływ w układzie współrzędnych związanym z falą uderzeniową, b) przepływ w układzie poruszającym się dodatkowo wzdłuż fali uderzeniowej.

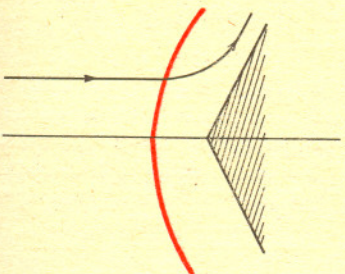
Falę uderzeniową spoczywającą w układzie laboratoryjnym uzyskuje się w tunelach aerodynamicznych, gdzie badane ciała opływane są przez poruszający się ze stałą prędkością gaz. Na rysunku 3 pokazana jest skośna fala uderzeniowa powstająca przy oddziaływaniu naddźwiękowego przepływu z klinem. W odróżnieniu od poprzednio omawianej fali prostopadłej w fali skośnej przepływ nie jest prostopadły do powierzchni nieciągłości.

Wróćmy jeszcze do prostopadłej fali uderzeniowej z rysunku 2 i wyobraźmy sobie, że obserwatorowi związanemu z falą nadano stałą prędkość równoległą do płaszczyzny fali (rys. 2b). W takim układzie współrzędnych przepływ załamuje się na fali uderzeniowej.

Wykorzystując warunki zgodności można określić kąt  $\alpha$ , który tworzy fala uderzeniowa powstająca na klinie z osią klina. Wystarczy zauważyć, że przepływ po załamaniu się na nieciągłości musi być równoległy do powierzchni bocznej klina. Tylko wtedy możliwy jest dalszy ruch gazu bez zaburzeń.



Rys. 3 Fala uderzeniowa (skośna) powstająca przy naddźwiękowym ruchu klina



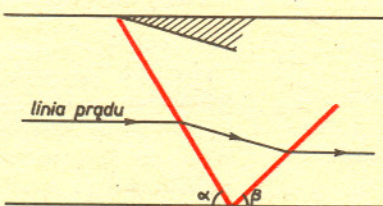
Rys. 4 Odsunięta fala uderzeniowa dla  $\theta > \theta_{gr}$

Odsuniętą falę uderzeniową zaobserwować można wykorzystując fakt, że równania opisujące przepływ płytkiej wody z powierzchnią swobodną są takie same, jak równania płaskiego przepływu gazu doskonałego. W analogii tej grubość warstwy wody odpowiada gęstości gazu, a prędkość rozchodzenia się fal powierzchniowych — prędkości dźwięku w gazie. W praktyce wiele własności fal uderzeniowych można sprawdzić bez tunelu aerodynamicznego ciągnąc model po płytkiej wodzie.

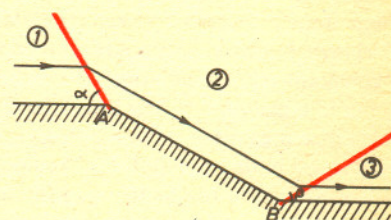
Okazuje się, że fala uderzeniowa o tej własności nie zawsze istnieje. Żadna skośna fala uderzeniowa nie może bowiem odchylić przepływu o kąt większy niż pewien kąt graniczny zależny od własności gazu i prędkości przepływu. Dla  $\theta > \theta_{gr}$  gaz zmienia swe parametry już w pewnej odległości przed ostrzem klina i powstaje tzw. odsunięta fala uderzeniowa o zakrzywionej powierzchni nieciągłości (rys. 4). Podobne fale powstają przy naddźwiękowym ruchu samolotu o tępym dziobie (duży kąt rozwarcia klina).

Jest rzeczą ciekawą, że o ile za falą prostopadłą prędkość gazu jest zawsze poddźwiękowa, o tyle za falą skośną prędkość może być w zależności od warunków bądź poddźwiękowa, bądź naddźwiękowa. Zatem występowanie dwóch stacjonarnych, prostopadłych fal uderzeniowych w tym samym strumieniu gazu, niedaleko jedna za drugą, nie jest możliwe (prędkość przed falą musi być naddźwiękowa), natomiast możliwe jest, by tuż za skośną falą uderzeniową powstała druga. W szczególności możliwe jest odbicie skośnej fali uderzeniowej od płaskiej ścianki. Odbicie takie można badać np. w następującym doświadczeniu. W tunelu aerodynamicznym za pomocą klina przy jednej ze ścianek wytwarzamy skośną falę uderzeniową (rys. 5). Przepływ po załamaniu na tej fali nie jest równoległy do przeciwległej ścianki i musi pojawić się druga nieciągłość (fala odbita) odchylająca przepływ do pierwotnego kierunku.

Odbicie fali uderzeniowej można też sprowadzić do opisanego wyżej oddziaływania przepływu naddźwiękowego z klinem. Wyobraźmy sobie, że za padającą w punkcie *A* falą (rys. 6) załamaliśmy ściankę tak, aby była równoległa do przepływu, a w punkcie *B* z powrotem wyprostowaliśmy. Jeżeli przepływ w obszarze (2) jest naddźwiękowy, powstanie druga fala uderzeniowa zmieniająca jego kierunek. Zbliżając punkty *A* i *B* otrzymamy odbicie z rysunku 5.

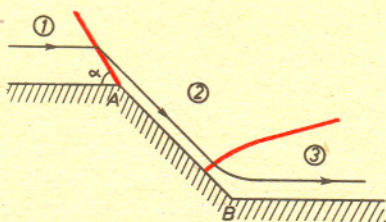


Rys. 5 Odbicie regularne fali uderzeniowej w tunelu aerodynamicznym

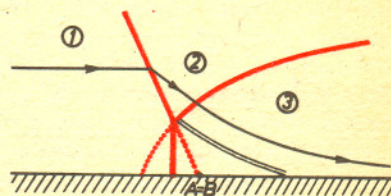


Rys. 6 Rozsuniecie punktu padania i punktu odbicia przez odpowiednie ukształtowanie ścianki

Rozważmy teraz sytuację, gdy w punkcie *B* powstaje odsunięta fala uderzeniowa (rys. 7). Zsuniecie punktów *A* i *B* daje teraz absurdalny wynik — fala odbita wyprzedza falę padającą (linia przerywana na rysunku 8). W rzeczywistości poniżej punktu przecięcia fale zlewają się w jedną o odpowiednio większym natężeniu, zwaną falą Macha. Obraz komplikuje dodatkowo fakt istnienia jeszcze jednej powierzchni nieciągłości (podwójna linia na rysunku 8). Ciśnienia po obu jej stronach są jednakowe, natomiast prędkość przepływu, temperatura, gęstość przyjmują różne wartości.



Rys. 7 Przed punktem *B* powstaje fala odsunięta.

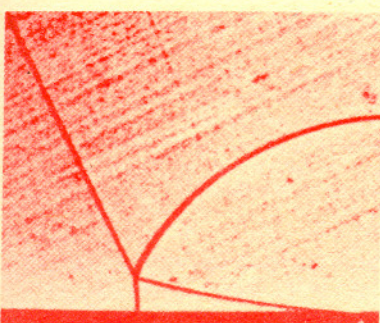


Rys. 8 Odbicie nieregularne fali uderzeniowej

Odbicie tego typu, tzw. odbicie nieregularne, jest znane od przeszło stu lat, do dziś jednak nie zostało do końca zbadane. Nie ma w szczególności pełnej zgody co do kryteriów przechodzenia od odbicia regularnego do nieregularnego, istnieje bowiem zakres parametrów, w którym oba rodzaje odbicia są możliwe.

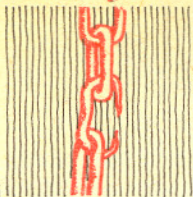
Na zakończenie proponujemy Czytelnikom jako przykład praktycznych zastosowań powyższych rozważań rozwiązanie następującego problemu: Z kanału o płaskich, równoległych ściankach wypływa strumień gazu z prędkością naddźwiękową. Jakie zjawiska wystąpią w tym strumieniu, gdy ciśnienie za wylotem kanału (w obszarze, do którego strumień wpada) będzie wyższe niż ciśnienie w samym strumieniu? (Należy zauważyć, że inne są sytuacje, gdy ciśnienia różnią się nieznacznie oraz gdy różnią się w sposób istotny).

Rozwiązanie problemu w numerze.



**Rozwiązanie zadania M 339.**  
Rozpatrując *n*-kąt foremny  $B_1 \dots B_n$  zawierający nasz *n*-kąt  $A_1 \dots A_n$  i taki, że  $B_1 B_{i+1} \parallel A_i A_{i+1}$  zauważymy, że odległość *A* od prostej  $A_i A_{i+1}$  jest równa odległości *A* od prostej  $B_i B_{i+1}$  zmniejszonej o odległość prostych  $A_i A_{i+1}$  i  $B_i B_{i+1}$ . Ponieważ suma odległości *A* od prostych  $B_i B_{i+1}$  jest stała (patrz zadanie poprzednie), więc stała jest również suma odległości *A* od prostych  $A_i A_{i+1}$ , c.b.d.o.

Prof. dr Leszek KUŹNICKI,  
członek korespondent PAN



Tytuł artykułu jest przekorny. Żadna z teorii ewolucji biologicznej, poczynając od darwinowskiej aż po współczesne socjobiologiczne koncepcje E. O. Wilsona i R. Dawkinsa czy kladystyczną ideę specjacji punktowej S. Goulda i N. Eldredge'a, nie postulowała rzeczywistej — fizycznej nieciągłości przemian. Zatem moje rozważania ograniczę do określonej klasy zjawisk, dla których „nieciągłość” ma inny zakres pojęciowy niż w języku potocznym.

Określenie „ewolucja” — rozumiane jako rozwój czy zmiana zachodząca w czterowymiarowej przestrzeni, stosowane jest od kosmogonii po socjologię i językoznawstwo. Wśród różnych zjawisk ewolucyjnych miejsce szczególne przypada rozwojowi życia na Ziemi. Wynika to nie tylko z faktu, że jest to proces dotyczący bezpośrednio nas — ludzi, ale po prostu — że jest najlepiej poznany, jeśli chodzi o opis i mechanizmy. Ewolucja biologiczna na Ziemi zachodziła na różnych poziomach organizacji. Pierwszy poziom dotyczy budowy i funkcji makromolekuł (kwasów nukleinowych, białek, wielocukrów i lipidów) oraz elementów subkomórkowych (chromosomów, mitochondriów). Drugi poziom to organizmy. Należy jednak pamiętać, że współcześnie występujące organizmy różnią się stopniem złożoności. Organizmem może być pojedyncza komórka, jak również układ zbudowany z miliardów komórek, jakim np. jest człowiek. Wreszcie należy wyróżnić trzeci — ponadosobniczy poziom organizacji, tj. populacje i gatunki, które tworzą zintegrowany system planetarny, czyli biosferę.

Dyskutowany współcześnie w piśmiennictwie naukowym problem „nieciągłości” w ewolucji dotyczy sposobu powstawania gatunków, tzn. należy do klasycznej tematyki z zakresu ewolucjonizmu, wywodzącej się bezpośrednio z poglądów C. R. Darwina, wyłożonych w „On the origin of species” (1859).

Przyroda żywa, tak obecnie, jak i przed miliardem lat składa się z osobników oraz ponadosobniczych zespołów — tj. populacji, krzyżujących się ze sobą organizmów. Najprostsza definicja gatunku to wytworzony w toku ewolucji zespół populacji, którego osobniki krzyżują się ze sobą i wydają płodne potomstwo; jednocześnie nie krzyżują się z osobnikami innych populacji, zamieszkujących w tym samym środowisku. Osobnik ma genetycznie ograniczony czas życia. Średnia długość życia organizmu jest cechą przystosowawczą, która zapewnia mu wydanie optymalnej liczby potomstwa, czyli umożliwia kontynuację gatunku (populacji) w czasie. Osobnik — jako śmiertelny — nie jest jednostką ewolucji, uczestniczy jednak w procesach ewolucji przekazując geny oraz za ich pośrednictwem — swoje właściwości następnym pokoleniom. W odróżnieniu od osobników ich naturalne zespoły, jak populacje i gatunki, są jednostkami potencjalnie nieśmiertelnymi. Oznacza to, że żadne mechanizmy wewnętrzne nie ograniczają czasu ich trwania. Środowisko, w którym istnieją gatunki, podlega jednak zmianom, co prowadzi do ewolucji biologicznej. Gatunki, a ściślej ich populacje, mogą przekształcać się bądź wymierać; a w przypadku skrajnej stabilizacji otoczenia pozostawać w nie zmienionej postaci przez setki milionów lat, jak np. skorupiak — przekopnica, ostrygi czy miłorząb.

Większość gatunków ulega przekształceniom stopniowym, kiedy to w wyniku doboru naturalnego osobników zmianie podlega

pula genowa krzyżujących się populacji. Dzieje się tak, kiedy w długim szeregu pokoleń nosiciele jednych genów mają większe szanse pozostawienia potomstwa, niż nosiciele innych genów.

W pewnych przypadkach gatunki mogą powstać nagle — w następstwie podwojenia całego zespołu chromosomów (genomu), czyli w wyniku *poliploidii*. Ale nawet i w tych przypadkach, kiedy ewolucja była spowodowana poliploidalnością, żaden gatunek nie był nigdy odcięty od genów swoich poprzedników i niezależnie od sposobu rozrodu (płciowy, bezpłciowy) przekazywał geny swoim potomkom. Każde przerwanie strumienia genów oznacza bezpowrotne wypadnięcie ze strumienia życia. Załóżmy, że możemy, zasiadając w wehikule czasu, prześledzić wstecz proces ewolucji, poczynając od nas samych aż do jakiegoś organizmu jednokomórkowego, który żył w środowisku wodnym przed dwoma miliardami lat.

Oglądając wstecz wszystkie poprzedzające nas pokolenia stwierdzimy, że strumień naszych genów nie tylko wpływa do wspólnej rzeki dla wielu dzisiaj bardzo różnych od nas gatunków, lecz również, że nie możemy w tym procesie określić granic międzygatunkowych. Jest to zaskakujące, skoro różnice między człowiekiem a współcześnie żyjącymi ssakami, należącymi do naczelnych, są tak duże, że nawet wybitny ewolucjonista George C. Simpson stwierdził, iż „Człowiek będąc jednym z gatunków zwierząt równocześnie nie jest jednym ze zwierząt”.

*Homo sapiens* jest unikatem pod wieloma względami. W toku ewolucji nabył nie spotykane nigdzie umiejętności, jak posługiwanie się językiem symbolicznym i myśleniem abstrakcyjnym. Powstanie gatunku *Homo sapiens*, jak i każdego innego gatunku, nie było zdeterminowane, a ewolucja form człowiekowatych, aczkolwiek zawiera nadal wiele nie wyjaśnionych zagadek, była uwarunkowana tymi samymi przyczynami, co innych gatunków zwierzęcych.

Teoria darwinowska, jak i współczesna jej postać — syntetyczna teoria ewolucji — zakładały, że większość gatunków powstała stopniowo — gradualistycznie. Wyraźne granice między nimi są wynikiem szczególnie ostrej selekcji pośrednich populacji i gatunków.

W okresie ostatnich dziesięciu lat szerokie uznanie w badaniach pokrewieństwa między gatunkami i odtwarzania drzew genealogicznych istot żywych uzyskała metoda *kladystyczna*.

**Kladystyka** (od greckiego *klados* — gałąź, pęd) — metoda ustalania pokrewieństw między gatunkami, wychodząca z założenia, że ponadgatunkowe jednostki systematyczne (rodzaj, rodzina, rząd, gromada) są tylko wówczas naturalne, kiedy pochodzą od jednego gatunku. Ustalania owych pokrewieństw dokonuje się na podstawie cech najmłodszych, odizolowanych bezpośrednio po przodkach, a nie — najstarszych, najbardziej prymitywnych.

Na jej gruncie powstała niegradualistyczna hipoteza powstawania gatunków autorstwa S. Goulda i N. Eldredge'a, którą można uznać za współczesny wyraz zasady nieciągłości ewolucji.

Populacje, które zmieniają się w sposób ciągły — gradualistycznie, podlegają procesom ewolucji, ale nie przekształcają się w nowe gatunki. Nowe gatunki są wytworem specjalnych procesów, które mają charakter naglej specjacji. Nie każda populacja może podlegać takim przekształceniom. Przede wszystkim populacja musi się znaleźć na pobrzeżach obszaru zajętego przez gatunek. Po drugie, musi się różnić od pozostałych cechami genetycznymi. Jest to populacja o zakłóconej równowadze genetycznej. Przejście do nowej równowagi dokonuje się nagle w ciągu kilku kolejnych pokoleń. Jest to równoznaczne z powstawaniem nowego gatunku. Proces ten wspomaga izolacja przestrzenna między populacją podlegającą specjacji a sąsiadującymi populacjami gatunku wyjściowego.

Założenie, że małe, izolowane populacje o zakłóconej równowadze genetycznej są zawsze początkiem nowych form, wyjaśnia wielką rzadkość form przejściowych, jakie spotyka się wśród szczątków organizmów wymarłych. Idee Eldredge'a i Goulda zbliżone do wcześniejszych koncepcji ewolucji kwantowej Simpsona tłumaczą szereg faktów, z którymi nie bardzo sobie mogła poradzić klasyczna koncepcja gradualistyczna. Eldredge i Gould twierdzą, że nagła specjacja marginalnych populacji była uniwersalnym sposobem przemian gatunkowych. Ten punkt widzenia pozostaje jednak otwarty, gdyż gradualizm ewolucji ma nadal wielu zwolenników i dysponuje mocniejszymi argumentami.

Niezależnie, jakie będą dalsze losy tej kontrowersji, wprowadzenie do filogenetyki (odtworzenia genealogii) i systematyki biologicznej metod kladystycznych spowodowało rewolucję.

Wynika ona z dwóch podstawowych założeń:

- 1) każda jednostka systematyczna, jak rodzaj, rodzina, rząd, gromada jest pochodzenia monofiletycznego, tzn. wywodzi się od jednej wyjściowej populacji, a nie z populacji kilku gatunków, choćby blisko spokrewnionych;
- 2) miarą pokrewieństwa gatunków mogą być tylko cechy pochodne, tj. wspólnie odziedziczone po najbliższych przodkach, nie zaś prymitywne, odziedziczone po przodkach wcześniejszych.

Zastosowanie tych zasad spowodowało między innymi zaginięcie gadów jako odrębnej jednostki taksonomicznej. Okazało się

bowiem, że gady ssakokształtne były bliżej spokrewnione z ssakami niż z innymi gadami, a krokodyle bliższe są ptakom niż jaszczurkom.

Kladystyka wniosła również ferment i zamieszanie do wyobrażeń na temat rodowodu człowieka rozumnego. Dotychczas przyjmowano, że droga do *Homo sapiens* prowadziła przez gatunki zbliżone morfologicznie do *Australopithecus robustus* → *Homo habilis* → *Homo erectus*.

Zdaniem zwolenników metody kladystycznej *Homo erectus* był zbyt różny od *Homo sapiens*, aby go można uznać za naszego przodka. Nie ma też żadnych dowodów, że któryś z wcześniejszych gatunków czelakokształtnych znajdował się na linii prowadzącej do nowej ludzkiej populacji. Po ponad 100 latach rozwoju badań z zakresu antropogenezy kladystyci chcą nas przekonać, że naprawdę to nie wiemy, kto jest naszym najbliższym przodkiem.

W dotychczasowych dziejach ewolucjonizmu różne idee antygradualistyczne (W. Bateson, S. Korziński, H. de Vries, T. D. Łysenko, O. H. Schindewolf) miały głównie charakter destrukcyjny. Najbliższe lata wykażą, czy ostatnio głoszona hipoteza nieciągłej — punktowej w czasie specjacji wyłamie się z tej tradycji.



## Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 337. Dwie liczby naturalne  $m$  i  $n$  nazwiemy podobnymi, gdy każda liczba pierwsza dzieląca  $m$  dzieli również  $n$  i na odwrót. Liczby  $m$  i  $n$  nazwiemy bardzo podobnymi, gdy podobne są zarówno  $m$  i  $n$ , jak też  $m+1$  i  $n+1$  (np. bardzo podobne są 6 i 48).

Czy istnieje nieskończenie wiele par liczb bardzo podobnych?

Rozwiązanie na str. 9

M 338. Wykazać, że suma odległości punktu  $A$  leżącego wewnątrz  $n$ -kąta foremnego od prostych, na których leżą boki tego  $n$ -kąta, nie zależy od położenia tego punktu wewnątrz  $n$ -kąta.

Rozwiązanie na str. 9

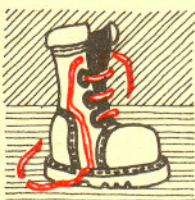
M 339. Wykazać, że teza poprzedniego zadania pozostaje prawdziwa, gdy zażądamy jedynie, by wszystkie kąty  $n$ -kąta były równe.

Rozwiązanie na str. 5

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 138. W otwartym naczyniu szklanym znajdują się równe ilości wzajemnie nierozpuszczalnych cieczy. Dolną warstwę stanowi woda, górną — cykloheksan ( $C_6H_{12}$ ). Naczynie ustawiono na łaźni wodnej i rozpoczęto ogrzewanie. W jakiej temperaturze nastąpi wrzenie mieszaniny i jak będzie przebiegało? Woda wrze w temperaturze  $100^\circ C$ , cykloheksan przy  $80,7^\circ C$ .

Rozwiązanie na str. 9



## Manowce terminologii

- 1) Zbiór, który nie jest domknięty, wcale nie musi być otwarty.
- 2) Jeżeli  $X$  jest gęsty w  $X$ , to wcale nie znaczy, że  $X$  jest w sobie gęsty.
- 3) Wiązki wektorowe na krzywych algebraicznych mogą być lub nie być stabilne. Ale wiązka, która nie jest stabilna, wcale nie musi być niestabilna, bo niestabilna to taka, która nie jest półstabilna.
- 4) W geometrii algebraicznej bada się m.in. krzywe eliptyczne. Elipsa nie jest krzywą eliptyczną, ma bowiem (podobnie jak

linia prosta) typ eliptyczny, a nie — jak wszystkie krzywe eliptyczne — typ paraboliczny. Łatwo zgadnąć, że hiperbola nie ma typu hiperbolicznego (mają go krzywe stopni  $\geq 4$ ). A jedyną z dokładnością do izomorfizmu krzywą eliptyczną jest powierzchnia torusa.

5) Z książki „Technik, Wydawnictwo dla inżynierów, 1936” przepisujemy „Koniec nitki nawiniętej na rozwiniętą opisuje rozwijającą, jeśli się go odwija z rozwiniętej”.

P.S. Niektórzy psychologowie wśród różnych ludzkich fobii wymieniają także matefobię — lęk przed matematyką.



# Jak nieciągłe mogą być funkcje?

Dr Jerzy RYLL

Zacniemy od kilku przykładów. Będziemy rozpatrywać tylko funkcje, których dziedziną i przeciwdziedziną jest zbiór  $\mathbf{R}$  liczb rzeczywistych.

Funkcja może nie być ciągła w żadnym punkcie. Standardowym przykładem jest funkcja Dirichleta:

$$\chi_Q(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \text{ jest liczbą wymierną,} \\ 0, & \text{gdy } x \text{ jest liczbą niewymierną.} \end{cases}$$

Jej nieciągłość wynika z tego, że w otoczeniu dowolnego punktu przyjmuje zarówno wartość 0, jak i 1. Za pomocą funkcji Dirichleta łatwo skonstruować funkcję, która jest ciągła tylko na skończonym zbiorze  $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ . Określamy ją wzorem

$$g(x) = \chi_Q(x) \cdot (x - a_0)(x - a_1) \cdot \dots \cdot (x - a_n).$$

Oznaczmy przez  $M$  średnicę zbioru  $A$ , tj. różnicę między największą i najmniejszą liczbą z  $A$ . Jeżeli  $0 < \delta < 1$  i  $a_i - \delta < x < a_i + \delta$ , to

$$|g(x) - g(a_i)| = |g(x)| < \delta \cdot (M+1)^n.$$

A zatem dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  wystarczy wziąć

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{(M+1)^n} \right\},$$

by z tego, iż  $|x - a_i| < \delta$  wynikało, że  $|g(x) - g(a_i)| < \varepsilon$ . To zaś znaczy, że  $g$  jest ciągła w  $a_i$ , dowolnie wybranym punkcie zbioru  $A$ . Gdyby funkcja  $g$  była ciągła w jakimkolwiek punkcie  $x \notin A$ , to funkcja  $\chi_Q$  (jako iloraz dwu funkcji ciągłych w  $x$ ) byłaby też ciągła w  $x$ .

Można też skonstruować funkcję, która będzie ciągła tylko w punktach o współrzędnych całkowitych:

$$h(x) = \chi_Q(x) \cdot \sin(\pi x).$$

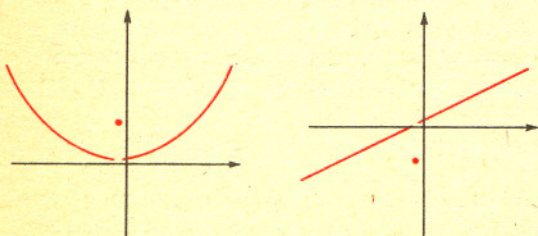
Dowód ciągłości jest jeszcze łatwiejszy, a nieciągłości — taki sam jak poprzednio. A czy uda się Czytelnikowi znaleźć funkcję ciągłą tylko w zbiorze liczb wymiernych?

Podamy teraz przykłady funkcji, które są ciągłe w „większości” punktów. Oto funkcja nieciągła tylko w jednym punkcie:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Można z niej łatwo zrobić funkcję ciągłą wszędzie zmieniając jej wartość w 0. O tego rodzaju nieciągłości mówimy, że jest *usuwalna* (rys. 1). A oto funkcja ciągła wszędzie poza 0, przy czym nieciągłość w 0 jest *nieusuwalna* (rys. 2).

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$



Rys. 1 Nieciągłości usuwalne

Funkcją o nieusuwalnych nieciągłościach w skończonym zbiorze  $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  jest na przykład

$$\varphi(x - a_0) + \varphi(x - a_1) + \dots + \varphi(x - a_n),$$

a w zbiorze liczb naturalnych:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \varphi(x - n).$$

A oto funkcja, której zbiór punktów nieciągłości (usuwalnych) jest zbiorem liczb wymiernych  $\mathbf{Q}$ . Nazywa się ona funkcją Riemanna:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1/q & \text{gdy } x = p/q, \text{ a ułamek } p/q \text{ jest nieskracalny,} \\ 0 & \text{gdy } x \text{ jest liczbą niewymierną.} \end{cases}$$

Można łatwo sprawdzić, że ma ona postulowane własności; można też poszukać dowodu „gdzieś” w numerze. Jeśli zaś kogoś interesuje przykład funkcji o nieusuwalnych nieciągłościach w punktach wymiernych, powinien spojrzeć na koniec artykułu.

W „teoretycznej” części artykułu podamy dwa twierdzenia mówiące coś o zbiorach nieciągłości funkcji rzeczywistej. Wyróżnimy najpierw dwie klasy zbiorów:  $F_\sigma$  i  $G_\delta$ . Powiemy, że zbiór pewnych liczb rzeczywistych jest typu  $F_\sigma$ , jeśli jest sumą przeliczalnej rodziny zbiorów domkniętych; jest zaś typu  $G_\delta$ , jeśli jest częścią wspólną przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych.

**Zbiór jest przeliczalny, gdy jego elementy można ustawić w ciąg. Zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny, a zbiór (wszystkich) liczb rzeczywistych nie.**

Łatwo zauważyć, że zarówno zbiory otwarte, jak i zbiory domknięte są i  $F_\sigma$ , i  $G_\delta$ . Zbiór jest typu  $G_\delta$  wtedy i tylko wtedy, kiedy jego dopełnienie jest typu  $F_\sigma$ . Także przeciwnie: jest typu  $F_\sigma$  wtedy i tylko wtedy, gdy uzupełnienie jest typu  $G_\delta$ . Zbiór liczb wymiernych jest typu  $F_\sigma$  — jest bowiem przeliczalną sumą jednopunktowych zbiorów domkniętych.

Wzorując się na poprzednim przykładzie można dla dowolnego zbioru  $A$  typu  $F_\sigma$  znaleźć funkcję, dla której  $A$  będzie zbiorem punktów nieciągłości. Okazuje się, że więcej przykładów znaleźć nie można.

**Twierdzenie** Zbiór punktów nieciągłości funkcji rzeczywistej jest typu  $F_\sigma$ .

Oczywiście, równoważnym sformułowaniem twierdzenia jest: zbiór punktów ciągłości funkcji rzeczywistej jest typu  $G_\delta$ .

Dowód tego twierdzenia nie jest trudny. Nazwijmy *oscylacją* funkcji  $f$  w przedziale  $(a, b)$  liczbę

$$\omega(a, b) = \sup \{ |f(x) - f(y)| : x, y \in (a, b) \},$$

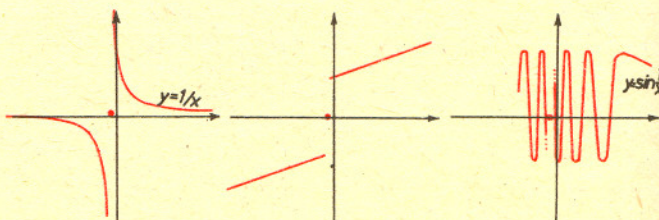
a *oscylacją w punkcie*  $x$  wielkość

$$\omega(x) = \inf \{ \omega(x - \varepsilon, x + \varepsilon) : \varepsilon > 0 \}.$$

Pokażemy, że zbiór  $G_\varepsilon = \{x : \omega(x) < \varepsilon\}$  jest otwarty. Niech  $x_0$  będzie takim punktem, że oscylacja funkcji jest w nim mniejsza niż  $\varepsilon$ . Znaczy to, że dla pewnego  $\varepsilon > 0$  mamy

$$\omega(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) < \varepsilon.$$

Niech  $|x_1 - x_0| < \varepsilon/2$ . Wtedy przedział  $(x_1 - \varepsilon/2, x_1 + \varepsilon/2)$



Rys. 2 Nieciągłości nieusuwalne

jest zawarty w  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ , a więc  $\omega(x_1 - \varepsilon/2, x_1 + \varepsilon/2) \leq \omega(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ , czyli  $\omega(x_1) < t$ .

Pokazaliśmy, że dla dowolnego punktu  $x_0 \in G_t$  pewne jego otoczenie jest zawarte w  $G_t$  – a więc  $G_t$  jest istotnie zbiorem otwartym. Dla zakończenia dowodu twierdzenia wystarczy zauważyć, że

$$\{x: \omega(x) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x: \omega(x) < 1/n\},$$

oraz że funkcja  $f$  jest ciągła w pewnym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy ma w nim zerową oscylację.

Jeśli Czytelnikowi nie udało się skonstruować funkcji ciągłej tylko w zbiorze liczb wymiernych, to właśnie z powodu powyższego twierdzenia (a jeżeli udało się, to ... pomylił się). Wykażemy bowiem, że zbiór liczb niewymiernych nie jest zbiorem typu  $F_\delta$ . Załóżmy, że są takie zbiory domknięte  $F_1, F_3, F_5, F_7, \dots$ , (wygodnie nam będzie numerować je liczbami nieparzystymi), że

dopełnienie  $Q$  do  $R$  jest ich sumą:  $R \setminus Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{2n-1}$ . Ustawmy

liczby wymierne w ciąg i określmy  $F_{2n}$  jako zbiory jednopunktowe złożone z poszczególnych liczb wymiernych. Mamy zatem

$$R = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Ponieważ ani zbiór liczb wymiernych, ani liczb niewymiernych nie zawierają żadnego przedziału, więc dla dowolnego przedziału  $(a, b)$  i dowolnego naturalnego  $n$  mamy  $(a, b) \setminus F_n \neq \emptyset$ .



#### Rozwiązanie zadania F 138.

Nie wnikając w szczegóły mechanizmu tworzenia się, wzrostu i ruchu pęcherzyków pary należy stwierdzić, że wrzenie cieczy jednorodnej odbywa się w temperaturze, przy której pręężność pary nasyconej zawartej w pęcherzyku przekroczy wartość ciśnienia atmosferycznego. W naszym przypadku pęcherzyki powstają na granicy faz i zawierają pary nasycone obu cieczy. Zgodnie z prawem Daltona pręężność mieszaniny jest równa sumie pręężności obu par i zależy jedynie od temperatury. W momencie, gdy rozpoczyna się wrzenie, musi być ona równa ciśnieniu atmosferycznemu. Wynika stąd, że temperatura wrzenia jest niższa niż  $80,7^\circ\text{C}$ . Znajomość

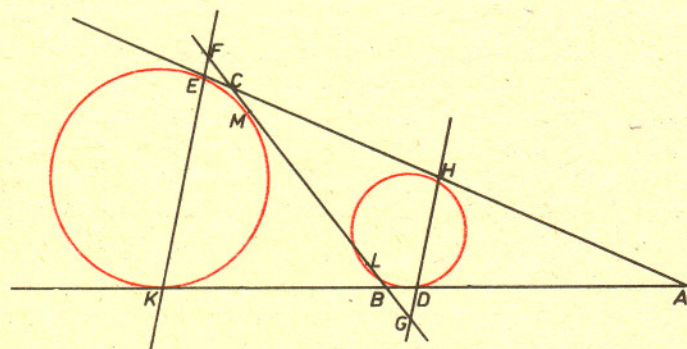
temperaturowej zależności pręężności par nasyconych dla obu cieczy wyznacza jednoznacznie tę wartość ( $69,4^\circ\text{C}$ ) oraz odpowiadające tej temperaturze ciśnienia poszczególnych par (533 Tr – cykloheksan, 227 Tr –  $\text{H}_2\text{O}$ ). Z równania Clapeyrona wynika stosunek mas składników w ulatniających się oparach (ok. 11-krotnie więcej węgłowodoru niż wody). Z naczynia zniknie szybciej cykloheksan, wrzenie ustanie i rozpocznie się ponownie, gdy temperatura wzrośnie do  $100^\circ\text{C}$ . Przytoczona obok tabela pręężności par nasyconych pozwoli Czytelnikowi sprawdzić, czy podane wyżej wartości liczbowe są prawdziwe.

Temperatura [ $^\circ\text{C}$ ]	$P_{\text{nas}}(\text{C}_6\text{H}_{12})$ [Tr]	$P_{\text{nas}}(\text{H}_2\text{O})$ [Tr]
10	47,48	9,2
20	77,51	17,53
30	121,7	31,82
40	184,7	55,32
50	271,8	92,51
60	389,2	149,4
65	461,4	187,5
70	543,8	233,7
75	637,4	289,1
80	743,2	355,1



#### Rozwiązanie zadania M 338.

Dzieląc  $n$ -kąt  $A_1 \dots A_n$  odcinkami  $\overline{AA_1}, \dots, \overline{AA_n}$  na trójkąty zauważymy, że jego pole  $S$  równa się  $\frac{a}{2}(h_1 + \dots + h_n)$ , gdzie  $a$  jest długością boku wielokąta, a  $h$  jest wysokością trójkąta  $AA_1A_{i+1}$  poprowadzoną z  $A$  (czyli odległością  $A$  od prostej  $A_1A_{i+1}$ ). Widać stąd, że  $h_1 + \dots + h_n = \frac{2S}{a}$  nie zależy od położenia  $A$ .



Utwórzmy teraz ciąg przedziałów domkniętych  $\langle a_n, b_n \rangle$  o następujących własnościach

$$\langle a_{n+1}, b_{n+1} \rangle \subset \langle a_n, b_n \rangle; F_n \cap \langle a_n, b_n \rangle = \emptyset.$$

Określmy go rekurencyjnie. Przyjmijmy  $a_0 = 0, b_0 = 1$ . Zbiór  $(a_n, b_n) \setminus F_{n+1}$  jest niepusty i otwarty, a więc zawiera pewien niepusty przedział  $\langle a_{n+1}, b_{n+1} \rangle$ . Z twierdzenia o zbieżności ciągów monotonicznych wynika, że  $a_n \rightarrow a$  i że dla każdego  $n$  jest  $a \in \langle a_n, b_n \rangle$ . Czyli (przy dowolnym  $n$ )  $a \notin F_n$ , mimo że suma zbiorów  $F_n$  dawała całe  $R$ ; sprzeczność.

Odpowiedź na tytułowe pytanie jest nieco inna, gdy ograniczymy się tylko do klasy funkcji monotonicznych.

Zbiorem punktów nieciągłości funkcji monotonicznej może być dowolny zbiór przeliczalny (i tylko taki).

Jeżeli funkcja  $f$  jest np. niemalejąca, to każdemu punktowi nieciągłości  $a$  odpowiada przedział otwarty  $(\inf\{f(x): x > a\}, \sup\{f(x): x < a\})$ , przy czym różnym punktom odpowiadają przedziały rozłączne. Takich przedziałów, a zatem i punktów nieciągłości może być tylko przeliczalnie wiele.

Oto przykład funkcji niemalejącej, której zbiorem punktów nieciągłości jest zbiór przeliczalny  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

$$f(x) = \sum_{\{n: a_n < x\}} 2^{-n}$$

(umawiamy się, że suma po zbiorze pustym jest równa 0, a sumujemy po takich  $n$ , dla których  $a_n < x$ ).



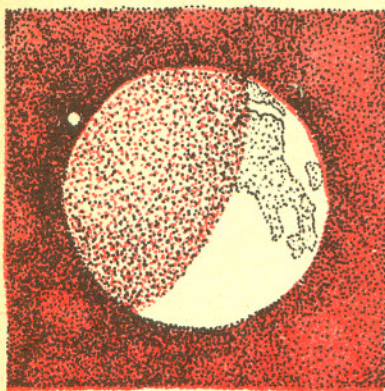
#### Rozwiązanie zadania M 337.

Liczby  $n$  i  $n^2$  są oczywiście zawsze podobne. Jeżeli teraz  $n+1 = 2^k$  ( $k \geq 2$ ), to  $n-1$  i  $n^2-1 = 2^k(n-1)$  są również podobne, ponieważ  $n-1$  i  $n^2-1$  oraz  $2|n-1$ . Otrzymujemy więc nieskończony ciąg par liczb bardzo podobnych postaci  $2^k-2$  i  $2^k(2^k-2)$  ( $k = 2, 3, \dots$ ). Bardzo podobne są też liczby 75 i 1215. Nie wiadomo dotychczas, czy są inne pary liczb bardzo podobnych.

## Znajdź twierdzenie

Na rysunku obok widzimy trójkąt z okręgiem wpisanym i jednym z okręgów dopisanych. „Widzimy” także, że proste  $DH$  i  $KF$  są równoległe, promień „małego” okręgu jest dwa razy mniejszy od promienia dużego,  
 $AD = DK = AH = HE,$   
 $BD = CE = CM = LB,$   
 $BG = CF.$

I oto pytanie: która z powyższych własności przysługuje tylko takiemu trójkątowi, jak tu narysowany (no i trójkątom do niego podobnym), a która dowolnym trójkątom?



Rozwiązanie problemu (Odbicie Macha). Naddźwiękowy strumień gazu wpływający do obszaru o wyższym ciśnieniu zachowuje się tak, jak gdyby płynął kanałem o ściankach nachylonych do wewnątrz. W miejscu załamania granicy strumienia powstają skośnie fale uderzeniowe. Fale te bądź przetną się na osi strumienia (mała różnica ciśnień między obszarem otaczającym i strumieniem), bądź też w pobliżu osi strumienia wytworzą falę Macha (różnica ciśnień większa). Jeżeli w osi strumienia umieścimy płaską, sztywną ściankę, przypadek pierwszy okaże się identyczny z regularnym odbiciem fali od tej ścianki. Przypadek drugi będzie natomiast odbiciem nieregularnym.

12 września wieczorem Jowisz zostanie zakryty przez Księżyc. Zjawisko to będzie widoczne w całej Polsce. Rysunek obok przedstawia Jowisza tuż przy tarczy Księżycy, na kilka minut przed zakryciem. Moment zjawiska jest inny dla różnych rejonów kraju, w Warszawie nastąpi ono o godz. 20<sup>h</sup>43<sup>m</sup> czasu letniego. Księżyc będzie w fazie bliskiej I kwadry, a moment zniknięcia Jowisza za ciemnym brzegiem naszego satelity będzie dobrze widoczny, o ile pogoda dopisze. Niestety, nastąpi to przy niskim położeniu Księżycy nad horyzontem (4°–6°) i nie będzie można oglądać już odkrycia planety (przy jasnym brzegu Księżycy, który będzie już pod horyzontem).

Zakrycia planet przez Księżyc, widoczne z terenu Polski, są zjawiskami rzadkimi — zdarzają się co kilka, a nawet co kilkanaście lat. Obecny rok jest pod tym względem wyjątkowy: w Polsce są widoczne aż trzy zakrycia Jowisza przez Księżyc (poprzednie miały miejsce 6 marca i 26 maja). Zakrycia planet i podobne zjawiska — zakrycia gwiazd przez Księżyc — wzbudzają zawsze duże zainteresowanie wśród obserwatorów, a także wśród rzesz miłośników astronomii. W Polsce regularne obserwacje tego typu prowadzą członkowie Polskiego Towarzystwa Miłośników Astronomii.

Czym powodowane jest zainteresowanie tym obserwowanym od początków astronomii zjawiskiem? Otóż, obserwacje tego typu ciągle przynoszą nam informacje na temat:

- 1) tzw. profilu Księżycy, tzn. kształtu globu księżycowego, wysokości gór na jego powierzchni, ich położenia itd;
- 2) orbity naszego satelity; orbita ta, najlepiej znana ze wszystkich orbit, jest wyjątkowo w szczegółach skomplikowana. Dziesiątki drobnych poprawek (m.in. wpływ Słońca, perturbacje od innych planet, efekty relatywistyczne, precesja) wymagają dokładnego określenia;
- 3) średnic planet, ich księżyców i gwiazd. W przypadku gwiazd wykorzystuje się tu obraz dyfrakcyjny, który tworzy się na krawędzi Księżycy. Odstępstwa tego obrazu od obrazu źródła punktowego pozwalają na wyznaczenie średnic gwiazd rozmiarów 10<sup>-3</sup> sekundy łuku;
- 4) rozkładu jasności na powierzchni gwiazd i ich ewentualnej podwójności;
- 5) istnienia i struktury pierścieni wokół planet itd.

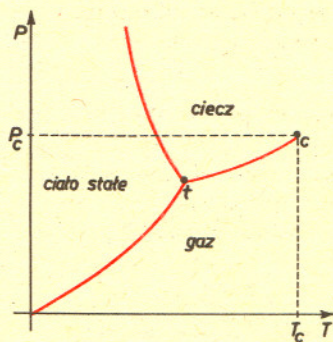
Zjawiskiem podobnego typu są zakrycia gwiazd przez planety i planetoidy. Są to zjawiska wyjątkowo rzadkie dla danego punktu obserwacji. Pas zakrycia (pas na powierzchni Ziemi, z którego widać zakrycie) ma taką szerokość, jak zakrywająca planeta. W przypadku planetoid może on mieć szerokość paru kilometrów. Z obserwacji tych można również uzyskać wiele informacji m.in. o kształcie planetoid (czasem bardzo dziwnym, jak się okazuje), ich ewentualnej podwójności (też odkryto takiego dziwołoga).

Roman FANGOR i Tomasz CHLEBOWSKI

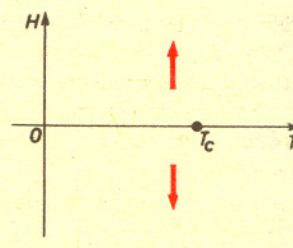
## Zjawiska krytyczne, czyli co się dzieje w pobliżu punktu krytycznego

Dr Marek NAPIÓRKOWSKI

Zanim odpowiemy na postawione w tytule pytanie, przypomnijmy przebieg wykresu fazowego typowej substancji, np. dwutlenku węgla. Wykres taki (w zmiennych ciśnienie ( $p$ ) i temperatura ( $T$ )) przedstawiony jest na rysunku 1. Krzywe pokazane na wykresie są krzywymi współistnienia dwóch spośród trzech różnych stanów skupienia (faz), w jakich dwutlenek węgla może występować. Spotykają się one w jednym punkcie, tzw. *punkcie potrójnym* ( $t$ ), w którym współistnieją wszystkie trzy fazy. Innym charakterystycznym punktem wykresu jest tzw. *punkt krytyczny* ( $c$ ), w którym kończy się krzywa współistnienia fazy ciekłej i gazowej. Dla temperatur wyższych od temperatury krytycznej (dla dwutlenku węgla  $T_c = 304,2$  K,  $p_c = 72,8$  atm) nie ma sensu rozróżnianie fazy gazowej i fazy ciekłej. Tę jedyną fazę występującą dla  $T > T_c$  określa się często mianem *fazy płynnej*.



Rys. 1



Rys. 2

Dzięki temu, że istnieje punkt krytyczny, z fazy gazowej można przejść do fazy ciekłej w sposób ciągły, tj. nie przecinając krzywej współistnienia tych faz. Oznacza to, że tak naprawdę między ciekłą i gazem nie ma wielkiej różnicy.

Rozważmy teraz diagram fazowy dla zupełnie innej substancji; dla ciała o właściwościach magnetycznych. Jako przykład weźmy trójbromek chromu ( $\text{CrBr}_3$ ), który jest ferromagnetykiem. Ograniczymy się teraz do fazy stałej, w której  $\text{CrBr}_3$  zmienia swe własności magnetyczne w zależności od warunków zewnętrznych. W tym też sensie będziemy mówić o diagramie fazowym. Jest on przedstawiony na rysunku 2. Na wykresie zaznaczony został punkt krytyczny, w którym, podobnie jak to było w poprzednim przykładzie, zanika różnica między fazami. O tym, jakie to są fazy — za chwilę. Zbudujemy najpierw prosty mikroskopowy model ferromagnetyka.

Wyobraźmy sobie, że układ nasz składa się z elementarnych momentów magnetycznych umieszczonych w węzłach sieci krystalicznej. Struktura sieci nie jest w naszych rozważaniach istotna. Załóżmy ponadto, że każdy elementarny moment magnetyczny może przyjmować tylko dwie orientacje: „do góry” i „w dół”. Oddziaływanie momentów magnetycznych uwzględnimy w najprostszy sposób zakładając, że każdy moment oddziałuje wyłącznie ze swoimi najbliższymi sąsiadami: w przypadku trójwymiarowej sieci kubicznej jest ich sześć, a w przypadku dwuwymiarowej sieci kwadratowej cztery. Energia wzajemnego oddziaływania dwóch momentów może przyjmować tylko dwie wartości:  
 —  $I$ , gdy momenty są skierowane zgodnie i  $+I$ , gdy są skierowane przeciwnie ( $I > 0$ ).

Spróbujmy teraz powiązać ten mikroskopowy model z mierzonymi doświadczalnie, makroskopowymi cechami ferromagnetyka.

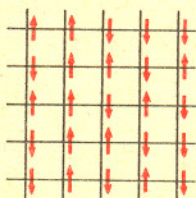
Nie ma oczywiście sensu porównywanie wypadkowego momentu magnetycznego dla danej konfiguracji z mierzonym doświadczalnie momentem magnetycznym układu. Kontakt układu z otoczeniem (termostatem) i wzajemne oddziaływanie cząstek powodują bowiem ciągle zmiany konfiguracji elementarnych momentów magnetycznych nawet wtedy, gdy obserwowane własności makroskopowe są niezmiennie w czasie, jak to ma miejsce w stanie równowagi termodynamicznej. Z danymi doświadczalnymi porównuje się średni moment magnetyczny obliczony w następujący sposób.

Rozważmy wiele układów modelowych w tych samych warunkach zewnętrznych (temperatura). Dla każdego z nich można obliczyć wypadkowy moment magnetyczny i dopiero średnią tych momentów porównuje się z doświadczeniem.

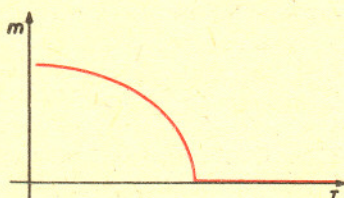
Jeżeli układ znajduje się w dość wysokiej temperaturze, to typowa konfiguracja momentów magnetycznych jest taka, jak na rysunku 3. Mniej więcej tyle samo jest momentów skierowanych „do góry” co i „w dół” i wypadkowy moment magnetyczny jest równy zeru. Takiej sytuacji odpowiadają punkty wykresu fazowego  $\text{CrBr}_3$ , dla których  $H = 0$  i  $T > T_c$ . Gdy układ umieścimy w polu magnetycznym (jednorodnym, skierowanym „do góry”), wówczas elementarne momenty magnetyczne będą chętnie ustawiały się zgodnie z kierunkiem pola. Spowoduje to, że średni wypadkowy moment magnetyczny będzie różny od zera i skierowany „do góry” (górną strzałką na rysunku 2). Podobnie, gdy zewnętrzne pole magnetyczne jest skierowane „w dół”, taki sam kierunek ma średni wypadkowy moment magnetyczny (strzałka dolna).

Nic nie powiedzieliśmy jeszcze o sytuacji, gdy  $H = 0$  i  $T < T_c$ . Z danych doświadczalnych wiadomo, że wówczas układ także ma niezerowy średni moment magnetyczny. A zatem przy  $H = 0$  trójbromek chromu może istnieć w dwóch fazach — tzw. fazie paramagnetycznej z  $m = 0$  ( $m$  jest to wielkość zwana *magnetyzacją*, równa średniemu momentowi magnetycznemu przypadającemu na jeden węzeł) dla  $T \geq T_c$  i fazie ferromagnetycznej z  $m \neq 0$  dla  $T < T_c$ ; mówimy wtedy, że układ wykazuje *spontaniczną magnetyzację*. W punkcie krytycznym ( $T = T_c$ ) znika spontaniczna magnetyzacja, a więc zacierza się różnica między fazami.

Magnetyzacja układu jest przykładem tzw. *parametru uporządkowania*. Pochodzenie nazwy jest oczywiste; przy  $H = 0$  dla  $T < T_c$  w układzie panuje „porządek”, bo większość



Rys. 3



Rys. 4

momentów magnetycznych skierowana jest w tę samą stronę, dla  $T > T_c$  uporządkowanie to znika (rys. 4). Parametr uporządkowania można zdefiniować również dla płynu (wykres fazowy z rysunku 1). Jest nim różnica aktualnej gęstości  $n$  i gęstości w punkcie krytycznym  $n_c$ . Tak zdefiniowany parametr uporządkowania, podobnie jak magnetyzacja, znika w punkcie krytycznym.

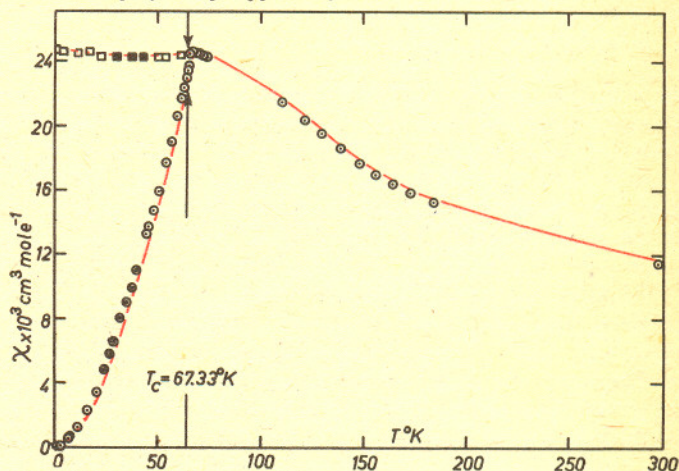
Doświadczenie pokazuje, że różne układy w punkcie krytycznym mają kilka wspólnych cech. Jedną z nich jest rozbieżność podatności magnetycznej (rys. 5) w przypadku ferromagnetyka i ściśliwości izotermicznej ( $\kappa$ ) w przypadku płynu. Podatność

magnetyczna  $\chi = \left( \frac{\partial m}{\partial H} \right)_{T=\text{const}}$  opisuje reakcję magnetyzacji na

zmiany zewnętrznego pola magnetycznego przy ustalonej

temperaturze. Ściśliwość  $\kappa = \frac{1}{n} \left( \frac{\partial n}{\partial p} \right)_T$  określa natomiast

reakcję gęstości na zmiany ciśnienia, a więc podobnie jak podatność opisuje zmianę parametru uporządkowania wywołaną zmianami kontrolowanego w doświadczeniu zewnętrznego bodźca. Ponadto eksperymentalnie stwierdzono, że w punkcie krytycznym staje się nieograniczone ciepło właściwe; dokładnie w przypadku magnetyków — ciepło właściwe  $c_H$  mierzone przy stałym polu zewnętrznym, a w przypadku płynów — ciepło właściwe przy stałej objętości  $c_V$ .



Rys. 5 Podatność magnetyczna  $\text{MnF}_2$  w otoczeniu punktu krytycznego

Gdy dla różnych układów zmierzono wymienione wyżej wielkości, to okazało się, że ich rozbieżności mają podobny charakter. Można je opisać za pomocą prawa potęgowego i tzw. *wykładników krytycznych*. Na przykład gdy  $H = 0$  i  $T \searrow T_c$ , to rozbieżność podatności magnetycznej opisana jest przez

$$\chi \sim \tau^{-\gamma}, \text{ gdzie } \tau = \frac{T - T_c}{T_c}.$$

Zmienna  $\tau$  jest bezwymiarową miarą odległości od punktu krytycznego (wzdłuż osi  $H = 0$ ), a wykładnik krytyczny  $\gamma$  opisuje charakter rozbieżności. Identycznie zachowuje się ściśliwość  $\kappa$ : gdy do punktu krytycznego zbliżamy się wzdłuż izochory krytycznej (gęstość płynu cały czas jest równa gęstości krytycznej), to  $\kappa \sim \tau^{-\gamma}$ . Oczywiście a priori  $\gamma$  dla magnetyka i  $\gamma$  dla płynu są to dwie różne wielkości.

Rozbieżność ciepła właściwego charakteryzuje się za pomocą wykładnika krytycznego  $\alpha$ : gdy  $H = 0$  i  $T \searrow T_c$ , to  $c_H \sim \tau^{-\alpha}$ , a gdy  $n = n_c$  i  $T \searrow T_c$ , to  $c_V \sim \tau^{-\alpha}$ .

Również zmienność parametru uporządkowania w pobliżu punktu krytycznego można opisać zależnością potęgową wprowadzając jeszcze jeden wykładnik krytyczny  $\beta$ : dla ferromagnetyka przy  $H = 0$  i  $T \nearrow T_c$   $m \sim (-\tau)^\beta$ . Tym razem wykładnik krytyczny charakteryzuje zdużanie wielkości fizycznej do zera, a nie do nieskończoności.

Na tych trzech przykładach ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) zamknijmy listę wykładników krytycznych. Doświadczalnie mierzy się ich znacznie więcej; znacznie bogatsza jest lista osobliwych cech układów w punkcie krytycznym.

Oto tabelka, w której przytoczone są wartości liczbowe zmierzonych wykładników krytycznych dla trzech typowych substancji: płynu ( $\text{CO}_2$ ) i dwóch ferromagnetyków ( $\text{Ni}$  i  $\text{CrBr}_3$ ).

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
$\text{CO}_2$	0,1	0,34	1,35
$\text{CrBr}_3$	0–0,2	0,37	1,22
$\text{Ni}$	0	0,42	1,35

Jak widać, dla różnych układów wykładniki krytyczne mają w granicach nie zaznaczonego w tabelce błędu doświadczalnego prawie jednakowe wartości. Na podstawie tych danych wysunięto tzw. hipotezę uniwersalności, według której wykładniki krytyczne nie są czułe na szczegóły budowy substancji, nie zależą np. od struktury sieci krystalicznej ani od szczegółów oddziaływania międzycząsteczkowego. Zależą natomiast od kilku ogólnych cech układu, takich jak jego wymiar przestrzenny i symetrie.

Pojawia się teraz nowy problem: mamy model ferromagnetyka i chcemy wyznaczyć jego własności krytyczne, w tym wykładniki krytyczne. Jak to zrobić? Sprawa nie jest prosta i dotychczas udało się ściśle, tj. bez żadnych przybliżeń, rozwiązać ten problem tylko dla kilku najprostszych modeli. Należy do nich model, którym posługiwaliśmy się do tej pory. Jest to tzw. *model Isinga*. Jego nazwa pochodzi od nazwiska niemieckiego fizyka, który w roku 1925 rozwiązał ten model w wersji jednowymiarowej. Niestety, rozwiązanie to nie przyniosło nic ciekawego, układ nie wykazywał spontanicznej magnetyzacji i nie miał punktu krytycznego. Dlatego też modelem tym przestano się interesować i dopiero po prawie 20 latach norweski fizyk pracujący w Stanach Zjednoczonych, Lars Onsager, rozwiązał jego wersję dwuwymiarową. Tym razem układ wykazywał spontaniczną magnetyzację, znaleziono punkt krytyczny

i wyznaczono wykładniki krytyczne:  $\beta = \frac{1}{8}$ ,  $\gamma = \frac{7}{4}$ , a ciepło

właściwe przy  $H = 0$  dąży do nieskończoności logarytmicznie:  $c_H \sim \ln \tau$ . Dzięki rozwiązaniu Onsagera model Isinga wzbudził zainteresowanie fizyków i obecnie należy do najważniejszych modeli fizyki statystycznej.

Wobec niewielkiej liczby ścisłych wyników istnieje wiele przybliżonych sposobów obliczania wykładników krytycznych. Jeden z nich, zwany *teorią pola średniego*, opiera się na następującym założeniu: każdy moment magnetyczny układu oddziałuje z każdym z pozostałych w taki sam sposób, niezależnie od jego odległości. Każdy moment „czuje” więc wpływ całej reszty układu. Wpływ ten może być reprezentowany przez pewne dodatkowe, zależne od stanu układu, pole magnetyczne, które należy dodać do pola zewnętrznego. Układ traktujemy wówczas jak zespół nieoddziałujących momentów poddany działaniu sumarycznego pola. Wykładniki krytyczne obliczone w ramach

tego modelu mają następujące wartości:  $\beta = \frac{1}{2}$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\alpha = 0$

(oznacza to, że ciepło właściwe doznaje skoku przy przechodzeniu przez punkt krytyczny). Wartości te są inne niż w przypadku dwuwymiarowego modelu Isinga, ale też i modele są zasadniczo różne. W modelu Isinga oddziaływanie ma bardzo krótki zasięg —

oddziałują tylko najbliżsi sąsiedzi, a w teorii pola średniego każdy moment „czuje” obecność wszystkich pozostałych. Na tym przykładzie widać, jak funkcjonuje hipoteza uniwersalności — zasięg oddziaływania należy do tych czynników, które mają wpływ na wartości wykładników krytycznych. Zwróćmy ponadto uwagę, że teoria pola średniego nie prowadzi do ilościowo poprawnych wyników.

Od dwunastu lat fizycy dysponują nową, niezwykle efektywną metodą obliczania wykładników krytycznych. Została ona zaproponowana przez amerykańskiego fizyka K. G. Wilsona, który w zeszłym roku otrzymał za nią nagrodę Nobla w dziedzinie fizyki.

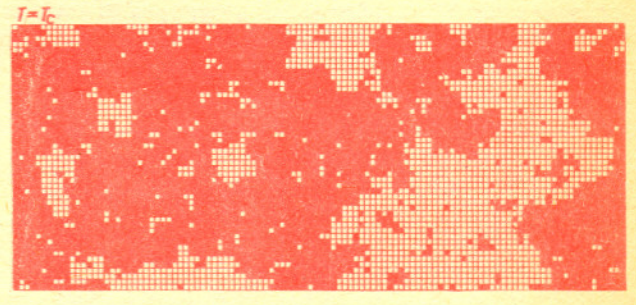
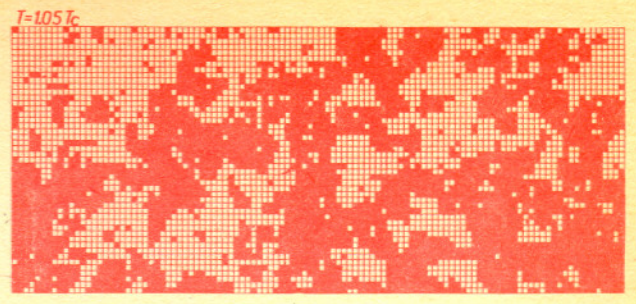
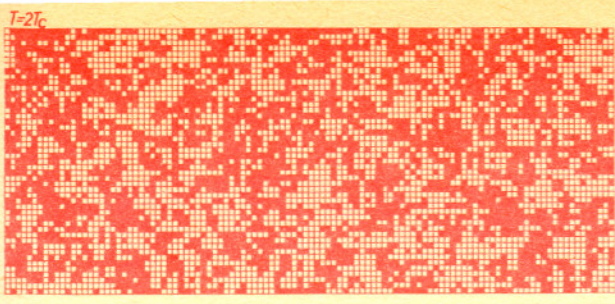
Metoda ta zwana potocznie *metodą grupy renormalizacji* jest obecnie powszechnym sposobem analizy zjawisk krytycznych. Jej zasadniczym sukcesem jest możliwość obliczania wykładników krytycznych, my jednak ograniczymy się do przedstawienia prostej idei, na której jest oparta.

Na początek spójrzmy jeszcze raz na dwuwymiarowy model Isinga. Założmy, że układ znajduje się w pobliżu punktu krytycznego:  $H = 0$ ,  $T > T_c$ . W punkcie krytycznym pojawia się spontaniczna magnetyzacja, która rośnie w miarę obniżania temperatury. Poniżej punktu krytycznego większość momentów skierowana jest średnio w tę samą stronę, zaś powyżej punktu krytycznego średnio połowa jest skierowana w górę i połowa w dół.

Dokładny obraz mikroskopowy jest następujący: w miarę zbliżania się do punktu krytycznego w układzie pojawiają się grona momentów magnetycznych, których większość skierowana jest w tę samą stronę. Im bliżej punktu krytycznego, tym te grona są większe. Ilustruje to rysunek 6, który został opracowany na podstawie modelowania układu magnetycznego na komputerze. Zwróćmy uwagę na sytuację w punkcie krytycznym. W dużym gronie momentów, których większość jest skierowana w górę, widać kilka mniejszych gron, w których większość momentów jest skierowana w dół. Z kolei w tych ostatnich można wyróżnić kilka jeszcze mniejszych gron, w których większość momentów jest skierowana do góry, w nich mniejsze itd., itd. Obraz ten można prowadzić dalej aż do poziomu pojedynczego momentu. Co z niego wynika?

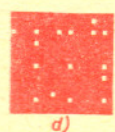
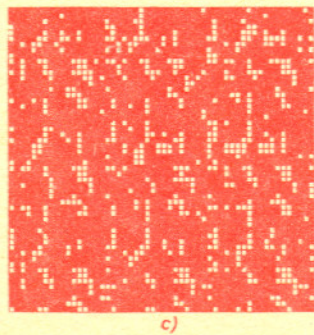
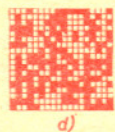
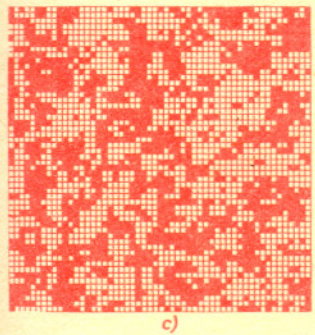
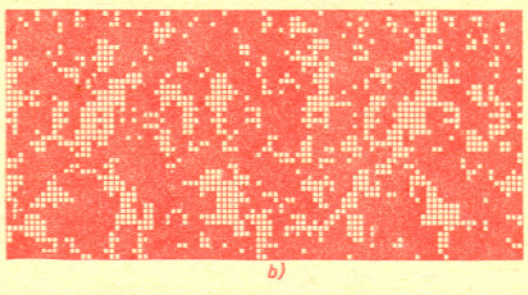
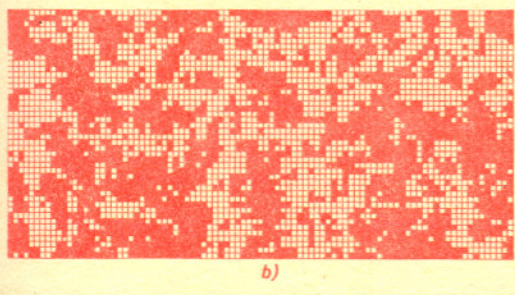
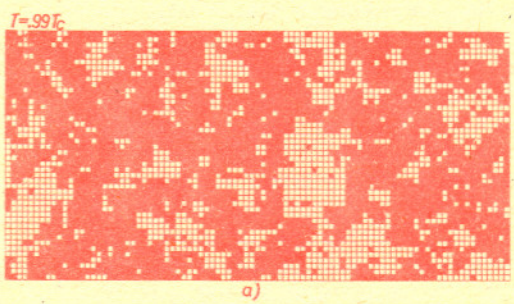
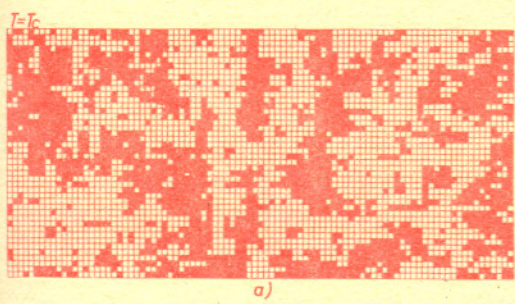
Gdyby za elementarny moment magnetyczny przyjąć nie pojedynczy moment umieszczony w węzle sieci, ale grono momentów, to wówczas układ zbudowany z tych nowych elementarnych momentów magnetycznych wyglądałby w punkcie krytycznym tak samo, jak wyjściowy układ (rys. 7). Zwróćmy jednocześnie uwagę, że obraz ten nie zależy od rozmiarów grona traktowanego jako elementarny składnik układu. Ta cecha układu nosi nazwę niezmienności względem skalowania — układ wygląda tak samo niezależnie od skali długości stosowanej przy jego obserwacji. Metoda grupy renormalizacji polega na wykorzystaniu tego faktu. Należy zatem opisać ten sam układ w dwóch różnych skalach długości, a następnie zażądać, by opisy te były takie same. Oznacza to żądanie, by oddziaływanie pomiędzy elementarnymi składnikami układu było, niezależnie od skali opisu, takie samo. Z uzyskanych w ten sposób równań można już wydobyc informację na temat wykładników krytycznych.

Metoda grupy renormalizacji wykorzystywana jest nie tylko przy opisie zjawisk krytycznych. Stosuje się ją także do analizy takich zagadnień, jak błędzenie przypadkowe czy też do analizy pewnych problemów fizyki cząstek elementarnych. Jest ona również wykorzystywana do badania zjawisk towarzyszących dochodzeniu układu do stanu równowagi.



Rys. 6 Każdy kwadracik reprezentuje elementarny moment magnetyczny umieszczony w węźle sieci dwuwymiarowej. Kolor biały oznacza moment skierowany „do góry”, czarny „w dół”.

Rys. 7 Ten sam układ obserwowany w różnych skalach długości. Obraz b) układu otrzymuje się z obrazu wyjściowego a) przez reprezentowanie każdego kwadratu  $3 \times 3$  jednym momentem magnetycznym o kierunku takim, jaki ma większość momentów w tym kwadracie. Tak samo otrzymuje się obraz c) na podstawie b) itd. Widać, że gdy  $T = T_c$ , to obraz się nie zmienia.



# Kamieniolom na Szklanej Górze

Dr inż. Krzysztof ŻMIJEWSKI

Inżynierowie budowlani to dziwna kasta gnomów.

W kamieniolomach matematycznej Szklanej Góry wylamują bloki i tłuczeń, aby po przeróbce wznosić z nich nie szklane, lecz żelbetowe domy. Niszcząc krystaliczną strukturę nauki o świecie rzeczy, których nie ma, budują świat aż nazbyt realny. Nie badają istotnej struktury materii — to przywilej fizyków. Inżynierowie jako pragmatycy patrzą przez filtry eliminujące to, co z ich punktu widzenia pominąć można. W tak skonstruowanym zastępczym schemacie rzeczywistości pojawiają się zjawiska i obiekty rodem ze Szklanej Góry. Zobaczmy, jak wygląda ten zastępczy świat.

W trakcie projektowania konstrukcji należy określić, jakie obciążenia na nią działają, z jakiego materiału jest wykonana i jak ten materiał się zachowuje. Są to dane wejściowe, po zakończeniu obliczeń otrzymujemy informacje o odpowiedzi konstrukcji na obciążenia. Jeżeli odpowiedź nie jest zadowalająca, to zmieniamy dane wejściowe, jeżeli zaś rezultat jest pomyślny, to proces się kończy — na placu budowy.

Bardzo często się zdarza, że obciążenie pewnej konstrukcji skoncentrowane jest w otoczeniu pewnego punktu. W takim przypadku korzystamy z pojęcia siły skupionej. Siła ta jest wypadkową tego obciążenia, na przykład ciężarem znajdującego się tam ciała. Linoskoczek jest dla inżyniera dystrybucyjną nieciągłością obciążenia liny, na której stoi. Jednakże widzowie oglądający popisy akrobaty nie są traktowani jako zbiór sił skupionych, lecz jako ciągle obciążenie widowni, jeżeli tylko siedzą dostatecznie gęsto.

Niech  $x \in \Omega$ , gdzie  $\Omega$  jest obszarem przestrzeni zajęтым przez konstrukcję. Przez  $q$  oznaczmy funkcję opisującą obciążenie; gdy jest ono siłą skupioną, funkcja ta ma postać

$$q(x) = P \cdot \delta(x - x_0),$$

$x_0 \in \Omega$  jest tu punktem przyłożenia siły, a  $P$  jej wartością,  $\delta$  jest *dystrybucją Diraca*.

Równie istotne jak modelowanie obciążenia w przestrzeni jest jego przedstawienie w czasie. I tu także napotykamy świat nieciągłości. Obciążenie działające w ciągu bardzo krótkiego czasu (chwilowe) możemy zapisać następująco:

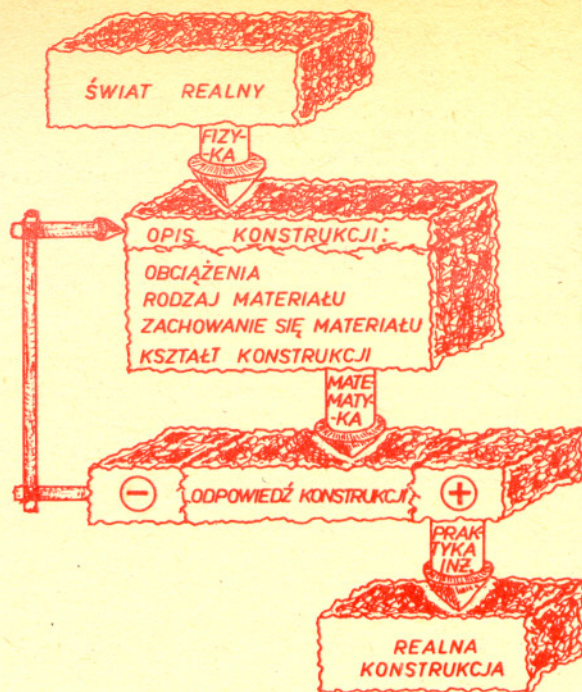
$$q(x, t) = \tilde{q}(x) \cdot \delta(t - t_0),$$

gdzie  $t_0$  jest chwilą, w której pojawiła się i zniknęła siła. Opis powyższy odpowiada gwałtownej eksplozji lub uderzeniu pociskiem. Oczywiście bombardowanie kroplami deszczu lub molekułami gazu modelujemy funkcjami ciągłymi.

Obciążenie, które nagle pojawiło się na konstrukcji, ale na niej pozostało, przedstawiamy w postaci

$$q(x, t) = \tilde{q}(x)\theta(t - t_0),$$

$t_0$  jest chwilą przyłożenia obciążenia  $\tilde{q}$ , a  $\theta$  jest *dystrybucją Heaviside'a*.



Zmienna w czasie może być nie tylko wartością siły, ale i jej położenie. Koło lądującego samolotu wywiera na pas startowy nacisk, który można określić w następujący sposób:

$$q(x, t) = P(t) \cdot \delta(x - x_0(t)) \cdot \theta(t - t_0),$$

gdzie  $x_0(t)$  oznacza położenie koła w chwili  $t$ . Skupiony charakter obciążenia opisuje tu  $\delta$  Diraca, a nagły sposób jego przyłożenia  $\theta$  Heaviside'a.

Obciążenia skupione (modelowane za pomocą dystrybucji  $\delta$ ) pełnią rolę szczególną. Jest to spowodowane nie tylko ich częstym występowaniem w praktyce inżynierskiej, ale przede wszystkim podstawowym charakterem uzyskiwanych za ich pomocą rozwiązań. Poszukiwanie odpowiedniej konstrukcji (a w zasadzie jej matematycznego modelu) sprowadzane jest zazwyczaj do znalezienia rozwiązania liniowego problemu granicznego.

W teorii równań różniczkowych przez rozwiązanie problemu granicznego w obszarze  $\Omega$  rozumiemy funkcję spełniającą: pewne liniowe równanie różniczkowe w każdym punkcie  $x \in \Omega$ , na jego brzegu pewien warunek zwany warunkiem brzegowym, a w chwili  $t_0$  warunek nazywany warunkiem początkowym. Postać równania i warunków granicznych zależy od fizycznego aspektu problemu.

W przypadku problemu o stałych współczynnikach dysponowanie rozwiązaniem podstawowym  $\varepsilon$ , tzn. takim, w którym prawą stroną (obciążeniem) jest  $\delta$  Diraca, umożliwia znalezienie rozwiązania  $u$  dla praktycznie dowolnego obciążenia  $\tilde{q}$ . Mamy wtedy

$$u(x) = \int_{\Omega} \tilde{q}(y) \cdot \varepsilon(x - y) dy,$$

jeżeli tylko powyższa całka istnieje.

Czarnoksiężnik ze Szklanej Góry, a nawet jego uczeń z łatwością rozpozna w tym tekście rękę kamieniarza. Wyrafinowany aparat teorii dystrybucji potraktowany tu został tak, jak wielka pieczęć królewska, ale orzechy lubią wszyscy.

Dowód, że funkcja Riemanna

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1/q, & \text{gdy } x = p/q \text{ i ułamek } p/q \text{ jest} \\ & \text{nieskracalny,} \\ 0, & \text{gdy } x \text{ jest liczbą niewymierną} \end{cases}$$

jest ciągła w każdym punkcie niewymiernym, a nieciągła w wymiernym. Weźmy bowiem dowolną liczbę  $\varepsilon > 0$  i niech  $a$  będzie dowolnym punktem osi liczbowej. Wybierzmy  $m$  większe niż  $1/\varepsilon$ . W sumie przedziałów otwartych  $(a-2, a) \cup (a, a+2)$  jest skończona liczba takich punktów wymiernych  $p/q$ , że  $q \leq m$  (nie więcej niż  $4m^2$ ). Niech  $\delta$  będzie odległością  $a$  od najbliższego takiego punktu. Z określenia funkcji  $\varphi$  wynika, że dla każdego  $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$  mamy  $|\varphi(x)| < \varepsilon$  (jeśli  $x \notin \mathbb{Q}$ , to  $\varphi(x) = 0$ ; a jeśli  $x \in \mathbb{Q}$  i  $x = p/q$ , to  $q \leq m$ ). Wynika stąd, że funkcja  $\varphi$  jest ciągła w każdym punkcie niewymiernym i nieciągła w wymiernym. Nieciągłość jest usuwalna — można w punkcie wymiernym zmienić wartość funkcji z  $1/q$  na 0.

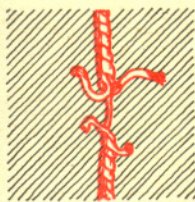
W końcu lat dwudziestych tego wieku Dirac tworząc matematyczne podstawy mechaniki kwantowej różniczkował funkcję

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

otrzymując „funkcję” zwaną dziś deltą Diraca. Wykonywał na niej różne operacje, m.in. różniczkując ją. Nie miało to sensu (tak samo, jak bezpodstawne były operacje, jakie Newton wykonywał na wielkościach nieskończenie małych) — z wyjątkiem takiego, że matematycznie wyprowadzone prawa mechaniki kwantowej zgadzały się ze znanymi już danymi doświadczalnymi.

Z początkami analizy matematycznej też tak było, choć Berkeley, główny oponent Newtona napisał „Wyniki rachunków na wielkościach nieskończenie małych dlatego zgadzają się z doświadczeniem, że horrendalne błędy, jakie popełnia się w trakcie obliczeń, znoszą się nawzajem”. Należało tylko zadbać o logiczną poprawność podstaw teorii.

Jak poprawnie zdefiniować deltę Diraca? Trzeba spojrzeć na nią nie jak na funkcję, a jak na dystrybucję. Szczegóły w artykule.



## Czym są dystrybucje

Dr Henryk KOŁAKOWSKI

Oznaczmy przez  $E$  zbiór funkcji całkowalnych na każdym skończonym przedziale  $(a, b)$ . Do zbioru  $E$  należą w szczególności wszystkie funkcje ciągłe, określone na prostej rzeczywistej  $\mathbb{R}$ . Oczywiście z faktu, że  $f \in E$  nie wynika ciągłość, a tym bardziej różniczkowalność  $f$ . Przykładem może być funkcja  $\theta$  przyjmująca w punkcie  $x$  wartość

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \geq 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

$\theta$  należy do  $E$ , ale nie ma pochodnej w punkcie  $x = 0$ .

Zajmiemy się tutaj rozszerzeniem zbioru  $E$  do pewnego nowego zbioru  $D'$ , w którym dałoby się sensownie określić operację różniczkowania. Uzyskamy w ten sposób możliwość różniczkowania dowolnego elementu ze zbioru  $E$ .

Zapoznajmy się wpierw z kilkoma pojęciami. Symbolem  $C^\infty$  oznaczamy zbiór funkcji mających pochodne dowolnego rzędu.

Powiemy, że funkcja  $\varphi$  jest *funkcją próbną* lub krótko  $\varphi \in D$ , jeżeli  $\varphi \in C^\infty$  i istnieje taka liczba  $r > 0$ , że  $\varphi(x) = 0$  dla  $x \notin (-r, r)$ . Przykład funkcji próbnej  $\varphi$  (a jest liczbą dodatnią):

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}} & \text{dla } x \in (-a, a) \\ 0 & \text{dla } x \notin (-a, a). \end{cases}$$

Powiemy, że ciąg funkcji próbnych  $(\varphi_n)$  jest *zbieżny w  $D$*  do funkcji  $\varphi \in D$ , jeżeli

1) istnieje taka liczba  $r > 0$ , że dla każdego  $n$

$$\varphi_n(x) = 0 \quad \text{dla } x \notin (-r, r),$$

2) dla każdego  $k$  ciąg  $(\varphi_n^{(k)})$  jest jednostajnie zbieżny do  $\varphi^{(k)}$  ( $f^{(k)}$  oznacza pochodną rzędu  $k$  funkcji  $f$ ).

Powiemy, że ciąg  $(\varphi_n)$  elementów zbioru  $C^\infty$  jest *zbieżny w  $C^\infty$*  do funkcji  $\varphi \in C^\infty$ , jeśli dla każdego  $k$  ciąg  $(\varphi_n^{(k)})$  jest jednostajnie zbieżny do  $\varphi^{(k)}$  w dowolnym przedziale  $\langle a, b \rangle$ .

Mówimy, że ciąg funkcji  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zbiega jednostajnie do funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\text{gdy } \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} \bigwedge_{x \in \mathbb{R}} |f_{n+k}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Niech  $f$  będzie odwzorowaniem zbioru funkcji próbnych w liczby rzeczywiste, tzn.  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ . Symbolem  $(f, \varphi)$  oznaczamy wartość odwzorowania  $f$  na elemencie  $\varphi$ , czyli liczbę  $f(\varphi)$ . Przechodzimy teraz do zdefiniowania zbioru  $D'$ .

Powiemy, że odwzorowanie  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  jest *dystrybucją* (należy do  $D'$ ), jeżeli

1) dla dowolnych  $\varphi_1, \varphi_2 \in D; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$(f, \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) = \alpha_1 (f, \varphi_1) + \alpha_2 (f, \varphi_2),$$

2) dla dowolnego ciągu  $(\varphi_n)$  zbieżnego w  $D$  do funkcji  $\varphi$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f, \varphi_n) = (f, \varphi),$$

tzn.

1)  $f$  jest odwzorowaniem liniowym,

2)  $f$  jest odwzorowaniem ciągłym.

Podobnie określa się zbiór  $E'$  odwzorowań zbioru  $C^\infty$  w zbiór  $\mathbb{R}$ .  $f: C^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  jest elementem  $E'$ , jeśli

1)  $f$  jest odwzorowaniem liniowym,

2)  $f$  jest odwzorowaniem ciągłym, tzn. jeśli ciąg  $(\varphi_n)$  zbiega

w  $C^\infty$  do  $\varphi$ , to  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f, \varphi_n) = (f, \varphi)$ .

### Przykłady

1) Niech  $f \in E, \varphi \in D$ . Wzór

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx$$

określa dystrybucję (oznaczamy ją nadal symbolem  $f$ ), a więc  $f \in D'$ . Tak więc każdą funkcję  $f \in E$  możemy traktować jako element  $D'$ . W szczególności funkcja  $\theta$  też jest dystrybucją zwaną dystrybucją Heavisida'a.

2) Tzw. delta Diraca ( $\delta$ ) jest dystrybucją określoną wzorem

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0)$$

( $\delta$  jest również elementem zbioru  $E'$ , w szczególności  $(\delta, 1) = 1$ ). Okazuje się, że nie istnieje taka funkcja  $f \in E$ , że  $(\delta, \varphi) = (f, \varphi)$  dla każdej funkcji próbnej  $\varphi$ . A więc zbiór  $D'$  zawiera  $E$  jako podzbiór właściwy.

Załóżmy, że  $f_1$  i jej pochodna  $f_1'$  należą do  $E$ , a  $\varphi$  jest funkcją próbną. Korzystając ze wzoru na całkowanie przez części możemy napisać

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1'(x) \varphi(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \varphi'(x) dx.$$



Wzór ten jest punktem wyjścia do zdefiniowania pochodnej dystrybucyjnej dowolnej dystrybucji  $f$ .

Pochodną dystrybucji  $f$  nazywamy taką dystrybucję  $g$ , że dla dowolnej funkcji próbnej mamy

$$(g, \varphi) = -(f, \varphi').$$

Zamiast  $g$  piszemy dalej po prostu  $f'$ .

Znajdźmy pochodną dystrybucji Heaviside'a  $\theta$ . Zgodnie z definicją

$$(\theta', \varphi) = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

Zatem w sensie dystrybucyjnym  $\theta' = \delta$ .

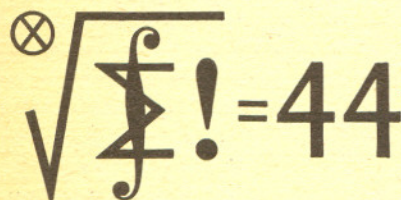
Na zakończenie wskażemy na pewne zastosowania pojęcia dystrybucji. Zastanówmy się, jak określić funkcję gęstości  $g$  związaną z punktem materialnym o masie 1. Powiedzmy, że punkt ten pokrywa się z punktem  $x = 0$  na osi liczbowej  $\mathbf{R}$ . Rozmieścimy masę 1 równomiernie wzdłuż odcinka  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ .

W rezultacie otrzymamy następującą funkcję gęstości

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & \text{dla } x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ 0 & \text{dla } x \notin (-\varepsilon, \varepsilon) \end{cases}$$

spełniająca warunek

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x) dx = 1.$$



Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań z numeru 1/1983

Marek Gałecki	- Milanówek	50,41pkt
Zbigniew Bartold	- Gdynia	48,83pkt
Dariusz Sowizdrzał	- Szczecin	44,51pkt
Krzysztof Trautman	- Warszawa	40,50pkt
Artur Smolczyk	- Tarnów Op.	34,95pkt
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	34,04pkt
Mariusz Fiszer	- Duszniki Z.	31,80pkt
Tomasz Biegański	- Lublin	28,68pkt

1 zadań z numeru 2/1983

Krzysztof Trautman	- Warszawa	48,41pkt
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	39,92pkt
Mariusz Fiszer	- Duszniki Z.	36,72pkt
Artur Smolczyk	- Tarnów Op.	34,95pkt
Jacek Uryga	- Bytom	34,53pkt
Tomasz Biegański	- Lublin	28,68pkt
Marian Roman	- Ełk	27,32pkt

Współczynniki trudności zadań:

43	44	45	46	47	48
2,90	2,21	2,88	3,39	2,36	2,84

Kolejnymi uczestnikami ligi, którzy weszli do Klubu 44, są panowie: M. Gałecki, Z. Bartold, D. Sowizdrzał, K. Trautman.

Reprezentują - jak widać - Wybrzeże oraz Warszawę z okolicą.

**Klub 44**

Przyjmijmy na początek, że

$$g(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_\varepsilon(x) = \begin{cases} +\infty & \text{dla } x = 0 \\ 0 & \text{dla } x \neq 0. \end{cases}$$

Funkcja  $g$  jako funkcja gęstości powinna spełniać warunek

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1.$$

Tymczasem  $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 0$ . A więc nie tędy droga.

Powiemy, że ciąg dystrybucji  $(f_n)$  jest *zbieżny słabo* do  $f \in D'$ , jeśli dla każdej funkcji próbnej  $\varphi$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi).$$

Obliczmy teraz słabą granicę funkcji  $g_\varepsilon$  (traktowanych jako elementy  $D'$ ). Granica ta istnieje i jest równa delcie Diraca. Istotnie

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} \varphi(x) dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

W celu otrzymania pełnej gęstości należy więc obliczyć wartość delty Diraca na funkcji równej tożsamościowo jedności. Tak więc wspomniana wyżej funkcja gęstości  $g$  nie jest już zwykłą funkcją, lecz dystrybucją.

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Deltę”

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4 - 3 \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 9/1981.

### Zadania nr 58, 59, 60

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 X 1983

58. Jak wiadomo, wartość funkcji wykładniczej  $e^x$  jest dla każdego  $x$  równa sumie szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \text{ Który wyraz tego szeregu jest (przy ustalonym } x > 0) \text{ największy?}$$

59. Jakim trójkątom  $ABC$  przysługuje własność następująca: dla każdego punktu  $P$  leżącego wewnątrz trójkąta  $ABC$  można z odcinków  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$  zbudować trójkąt?

60. Liczbę 24 można na dwa sposoby zapisać w postaci sumy czterech swoich różnych dzielników:  $24 = 1 + 3 + 8 + 12 = 2 + 4 + 6 + 12$ . Jaka jest maksymalna liczba sposobów, na które liczba naturalna może być przedstawiona jako suma czterech swoich różnych dzielników? Wskazać najmniejszą liczbę naturalną realizującą to maksimum.  
Zadanie 59 przysłał nasz Czytelnik, pan Piotr Chrzastowski z Warszawy.

**Przypominamy treść zadań z nr 4/1983**

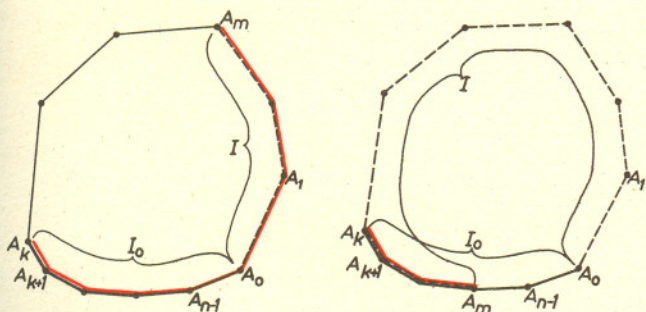
52. Na płaszczyźnie dana jest łamana zamknięta  $L$  o  $n$  bokach. Dowieść, że można ponumerować jej wierzchołki kolejno:  $A_0 \dots A_{n-1}$  tak, by dla każdego  $m < n$  było  $A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{m-1} A_m \geq \frac{m}{n} \cdot \text{długość } L$ .

53. Udowodnić zbieżność i znaleźć granicę ciągu określonego wzorem rekurencyjnym  $x_1 = a+b, x_{n+1} = a+b-ax_n^{-1}, a+b \neq 0$ .

54. Czy zbiór wypukły na płaszczyźnie nie zawierający żadnej półprostej musi być ograniczony? To samo dla podzbioru wypukłego przestrzeni trójwymiarowej.

**Rozwiązania zadań z numeru 4/1983**

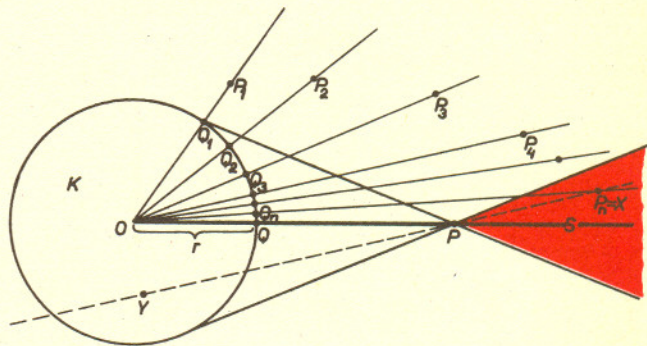
52. Dla dowolnej części  $J$  łamanej  $L$ , złożonej z  $m$  kolejnych boków ( $m$  dowolne  $\leq n$ ), oznaczmy długość  $J$  przez  $d(J)$  i przyjmijmy  $h(J) = d(J) - (m/n)d(L)$ . Oczywiście  $h(L) = 0$ . Niech  $J_0$  będzie taką częścią, dla której  $h$  ma wartość najmniejszą (jeśli takich części jest kilka, wybieramy dowolną z nich). Gdyby  $J_0$  było identyczne z całą łamaną  $L$ , znaczyłoby to, że  $h$  przyjmuje tylko wartości  $\geq 0$ , co jest możliwe jedynie wtedy, gdy wszystkie boki są równe. Teza jest w tym przypadku, rzecz jasna, spełniona. Odrzucając ten przypadek, możemy przyjąć, że  $J_0$  jest właściwym podzbiorem  $L$ . Oznaczmy przez  $A_0$  jeden z końców  $J_0$  i ponumerujmy wierzchołki  $L$  kolejno  $A_0, A_1, A_2, \dots$ , wyruszając z punktu  $A_0$  w kierunku oddalającym od  $J_0$ . Niech  $A_k$  będzie drugim końcem  $J_0$ , tak, że  $J_0 = A_k A_{k+1} \cup \dots \cup A_{n-1} A_0$ .



Pokażemy, że określona przez nas numeracja spełnia zadany warunek. Załóżmy, że tak nie jest, to znaczy, istnieje  $m$  takie, że dla  $J = A_0 A_1 \cup \dots \cup A_{m-1} A_m$  mamy  $d(J) < (m/n)d(L)$ , czyli  $h(J) < 0$ . Jeżeli  $m \leq k$ , to, jak łatwo sprawdzić,  $h(J_0 \cup J) = h(J_0) + h(J) < h(J_0)$ , a jeżeli  $m > k$ , to  $h(J_0 \cap J) = h(J_0) + h(J) < h(J_0)$ , wbrew minimalności  $h(J_0)$ . [Na rysunkach ilustrujących te dwie sytuacje  $J_0$  zaznaczona jest grubą linią ciągłą, a  $J$  — grubą linią przerywaną; linia kolorowa oznacza część łamanej  $L$ , dla której wartość  $h$  byłaby mniejsza, niż  $h(J_0)$  — na pierwszym rysunku tą częścią są  $J_0 \cup J$ , a na drugim  $J_0 \cap J$ ].

53. Gdy  $a \neq b$ , sprawdzamy indukcyjnie, że  $x_n = (a^{n+1} - b^{n+1}) \times (a^n - b^n)^{-1}$  (zatem  $x_n \neq 0$ , co zapewnia poprawność definicji rekurencyjnej). Ponieważ z założenia  $a+b \neq 0$ , więc  $|a| \neq |b|$ . Niech np.  $|a| > |b|$  i niech  $c = b/a$ . Wtedy  $|c| < 1$  oraz  $x_n = (a - bc^n)(1 - c^n)^{-1} \rightarrow a$  przy  $n \rightarrow \infty$ . Zatem granicą ciągu  $x_n$  jest ta z liczb  $a, b$ , która ma większy moduł. Gdy  $a = b$ , sprawdzamy indukcyjnie, że  $x_n = a(1 + 1/n)$ , skąd  $x_n \rightarrow a$ .

54. a) Niech  $W$  będzie zbiorem wypukłym na płaszczyźnie, nie zawierającym żadnej półprostej. Możemy założyć, że  $W$  nie leży na prostej (jeśli leży, to jest odcinkiem i zadanie jest trywialne). Istnieje więc w  $W$  trójka punktów niewspółliniowych, a zatem, dzięki wypukłości,  $W$  ma niepuste wnętrze: istnieje koło  $K$  o środku  $O$  i promieniu  $r$ , zawarte w  $W$ . Przypuścimy, że zbiór  $W$  jest nieograniczony; znajdzie się więc ciąg punktów  $P_n$  ( $P_n \in W$ ) taki, że długości odcinków  $OP_n$  dążą do nieskończoności. Niech  $Q_n$  będzie punktem półprostej  $OP_n$  położonym w odległości  $r$  od  $O$ . Z ciągu punktów  $Q_n$  można (wobec jego ograniczoności) wybrać podciąg zbieżny; można wręcz założyć, że  $Q_1, Q_2, \dots$  jest już tym podciągiem. Niech  $Q = \lim Q_n$ . Zgodnie z założeniem, istnieje na półprostej  $OQ$  punkt  $P$  nie należący do  $W$ . Oznaczmy



przez  $S$  sektor płaszczyzny złożony z punktów  $X$  takich, że półprosta  $XP$  przecina koło  $K$ , ale odcinek  $\bar{X}P$  jest z  $K$  rozłączny (na rysunku  $S$  jest obszarem czerwonym). Ponieważ  $\lim |OP_n| = \infty$ , a kierunki półprostych  $OP_n$  dążą do kierunku  $OP$ , przeto prawie wszystkie punkty  $P_n$  należą do  $S$ . Niech  $X = P_n$  będzie jednym z tych punktów. Na mocy określenia  $S$  istnieje punkt  $Y \in K \cap (XP - \bar{X}P)$ . Otrzymujemy sprzeczność z wypukłością  $W$ , bowiem  $X \in W, Y \in W, P \notin W, P \in \bar{X}Y$ . Przy założeniu, że  $W$  jest zbiorem nieograniczonym, okazało się błędne.

b) Dla zbiorów wypukłych w przestrzeni odpowiedź jest taka sama. Gdy  $W$  jest zbiorem płaskim, wynika to z części a). Gdy  $W$  nie jest płaski, zawiera czwórkę punktów niewspółpłaszczyznowych, więc ma niepuste wnętrze. Dalsze rozumowanie jest dokładnym powtórzeniem rozumowania z części a), z tą jedyną różnicą, że  $K$  jest teraz kulą, zaś  $S$  stożkiem.

Uwaga. Przez oczywistą indukcyjną rozumowanie przenosi się na przestrzenie dowolnego wymiaru.

**Zadania, których nie umiemy rozwiązać (dziś trochę z przymrużeniem oka)**

1. Uprościć wyrażenie

$$\left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right) : \frac{8}{\left( \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} \right) \left( \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - 2 \right)}$$

(G. H. Chrystal, Algebra, An Elementary Textbook; A & C. Black, Ltd London 1886).

2. Gdy 86 łokci Polskich wyrównują 97 łokciom Litewskim, 54 Litewskich idzie na 59 Rossyjskich, 32 Rossyjskich na 33 Amsterdamskie, Amsterdamskie 31 na 24 Lipskie, Lipskich 15 na 13 Berlińskich, Berlińskich 7 na 6 Wiedeńskich, łokci Polskich 454 ile uczyni Wiedeńskich?

(P. Lhulier, Arytmetyka sposobem do pojęcia łatwym ułożona ..., Paryż 1785, przekład polski 1841).