

SPIS TREŚCI

NUMERU 9 (117)

Rozmowa z prof. dr. Andrzejem Schinzlem	str. 1
Atomy rydbergowskie <i>prof. dr Kazimierz Rosiński</i>	str. 4
Mizar	str. 8
Analiza i synteza światła białego <i>dr Zbigniew Płochocki</i>	str. 10
Zadania	str. 11
Redukcjonizm w biologii <i>prof. dr Władysław J. H. Kunicki-Goldfinger</i>	str. 12
Nowy test mechaniki kwantowej <i>doc. dr Michał Świącki</i>	str. 14
Patrz w niebo	str. 16
Klub 44	str. 17

W następnym numerze:

Inwersja

„Delta”
matematyczno-fizyczno-astrofizyczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:
dr Bogdan Cichocki
dr hab. Jan A. Gaj
doc. dr Bolesław Gleichgewicht
prof. dr Kazimierz Goebel
doc. dr Tomasz Hofmök
doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz
doc. dr Tadeusz Iwiński
doc. dr Tadeusz Jarzembowski
prof. dr Leon Jeśmanowicz
prof. dr Marek Kuczma
mgr Andrzej Mąkowski
prof. dr Bogdan Paczyński
dr Zbigniew Płochocki
prof. dr Sławomir Ruciński
prof. dr Konrad Rudnicki
doc. dr Jerzy Sawicki
prof. dr Zbigniew Semadeni
prof. dr Grzegorz Sitarski
doc. dr Kazimierz Stępień

prof. dr Mieczysław Subotowicz
doc. dr Andrzej Szymacha
doc. dr Stefan Turnau
doc. dr Aniela Wolska
doc. dr Andrzej Woszczyk
prof. dr Wojciech Żakowski —
przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
mgr inż. Krzysztof Biesaga
mgr Tomasz Chlebowski
mgr Maciej Jędrzejczak
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.
dr Marek Kordos — red. nac.
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.
dr inż. arch. Jacek Mazur
dr Jerzy Ryll
doc. dr Michał Świącki — z-ca red. nac.

Adres Redakcji
ul. Koszykowa 6a
00-564 Warszawa

Krajowe Wydawnictwo Czasopism
RSW „Prasa—Książka—Ruch”
ul. Noakowskiego 14
00-666 Warszawa
Nakład 40 000 egz. Objętość 2 ark. wyd:
2,50 ark. druk;
papier offsetowy V kl. 70 g.
Wydrukowano w drukarni
im. Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 4678/83 M-10

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
- dla osób fizycznych — indywidualnych:
— osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
— osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych przy użyciu „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy: Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw w Warszawie, ul. Towarowa 28, nr konta NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11.
- Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zlecających indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

Termin przyjmowania prenumeraty:

- od prenumeratorów indywidualnych zamieszkałych w miastach siedzibach oddziałów RSW „Prasa — Książka — Ruch” — do dnia 28 lutego 1983 r. — na II kwartał i dalsze okresy roku bieżącego, 31 maja 1983 r. — na III kwartał i II półrocze roku bieżącego, 31 sierpnia 1983 r. — na IV kwartał roku bieżącego,
- od instytucji, zakładów pracy i prenumeratorów indywidualnych zamieszkałych na wsi i w małych miasteczkach do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty.

Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:
— w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,
— w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,
— w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,
— w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,
— Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Czy Wielkie Twierdzenie Fermata jest ważnym zagadnieniem matematycznym?

Rozmowa z *profesorem dr. Andrzejem SCHINZLEM*,
członkiem korespondentem Polskiej Akademii Nauk,
wiceprezesem Polskiego Towarzystwa Matematycznego

— *Panie Profesorze, często w matematyce słyszymy opinię: to jest ważne twierdzenie. Czy można wytłumaczyć, jakie kryteria przyjmujemy uznając odkrycie (czy hipotezę) za ważne? W teorii liczb granica między ważnym twierdzeniem a efektywnym jednostkowym faktem wydaje mi się dość wąska...*

— Rozróżniłbym dwa dosyć pokrewne pojęcia: twierdzenie *ważne* i *poważne*. Przytoczę może kilka myśli matematyka angielskiego Hardy'ego. W swojej książce „*A Mathematician's Apology*” pisze on, że jego zdaniem powaga (*seriousness*) twierdzenia nie leży w jego konsekwencjach, ale w znaczeniu idei matematycznych, które wiąże. Idea matematyczna jest *znacząca*, jeżeli, z grubsza mówiąc, może być w naturalny i konkretny sposób związana z szerokim kompleksem innych idei. Szekspir wywarł ogromny wpływ na rozwój języka angielskiego, Otway prawie żadnego, ale to nie dlatego Szekspir był lepszym poetą. Był lepszym poetą po prostu dlatego, że pisał lepsze wiersze.

Znaczenie idei matematycznych można mierzyć ich *ogólnością* i *głębokością*. Hardy pisze, że żadnej z tych jakości nie umie określić precyzyjnie, ale ogólność idei matematycznej polega na jej istotnej obecności w wielu konstrukcjach, w dowodach wielu twierdzeń różnorodnych typów. Na przykład dowód Pitagorasa niewymierności liczby $\sqrt{2}$ dopuszcza wiele daleko idących uogólnień. Zwykle łatwiej jednak zobaczyć, że twierdzenie *nie jest* poważne: gdy mianowicie dotyczy tylko izolowanych, kuriozalnych osobliwości. Na przykład: że 8712 i 9801 są jedynymi liczbami czterocyfrowymi, podzielnymi przez swoje „odwrotności”: 2178 i 1089. Albo że 1, 153, 370, 371 i 407 są jedynymi liczbami równymi sumie sześcianów swoich cyfr. Ogólności twierdzenia — pisze dalej Hardy — nie należy rozumieć w sensie logicznym, tzn. że dotyczy ono bytów abstrakcyjnych, a nie „konkretnych”. Pewna umiarkowana generalizacja musi być obecna w każdej myśli matematycznej, ale każda rzecz jest właśnie tą rzeczą, a nie czym innym. Różnice między rzeczami są co najmniej tak *samo* interesujące jak podobieństwa. Nie wybieramy przecież swoich przyjaciół dlatego, że ucieleśniają oni wszystkie miłe cechy ludzkości, ale dlatego, że są właśnie tacy, jacy są. Własność wspólna zbyt wielu obiektom rzadko może być naprawdę interesująca. Tu Hardy z kolei cytuje Whiteheada: „owocna koncepcja polega na połączeniu poważnych uogólnień z ograniczeniami narzuconymi przez szczegółowość”, *happy particularity*, jak pisze Whitehead w „*Science and the Modern World*”.

Nieco dwuznacznie brzmiące po angielsku zdanie ujmuje to tak: General embedded in the concrete ... G. Pólya powiedział: matematyk, który umie tylko uogólniać, przypomina małpę, która umie tylko wchodzić po drzewach; a ten kto umie tylko stosować twierdzenia — małpę, która umie tylko schodzić z drzew...

— Hardy pisze dalej o głębokości twierdzeń i pojęć matematycznych. Ma to pewien związek z trudnościami: na ogół im głębsza myśl, tym trudniej ją pojąć do końca. Nie jest to jednak reguła: idee zawarte w dowodzie Pitagorasa niewymierności $\sqrt{2}$ są bardzo głębokie, ale nikt nie uzna ich dziś za trudne. Idee matematyczne są jednak ułożone — pisze dalej Hardy — warstwowo. Każda warstwa, każde piętro jest pełne wzajemnych połączeń z pojęciami leżącymi wyżej, niżej i na tym samym poziomie. Im niższe piętro, im głębsza warstwa, tym głębsze (i na ogół tym trudniejsze) pojęcie. I tak na przykład „niewymierność” jest czymś głębszym niż pojęcie liczby całkowitej, a twierdzenie Pitagorasa o niewymierności $\sqrt{2}$ głębsze niż twierdzenie Euklidesa o tym, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

Tyle, jeśli chodzi o książkę Hardy'ego, z której wybrałem, moim zdaniem, najciekawsze fragmenty. Chciałbym dorzucić jeszcze kilka swoich uwag. Jak już wspomniałem, oprócz pojęcia powagi można, przynajmniej w teorii liczb, mówić o ważności twierdzeń. Tak nazwałbym te twierdzenia, które niosą w sobie wiele informacji o liczbach naturalnych. Teoria liczb jest w tej specyficznej sytuacji, że ma pewien jasno określony przedmiot badań; można go porównać do przedmiotu badań biologii. To jest inaczej, zupełnie inaczej, niż, powiedzmy, w algebrze. I wobec tego są w teorii liczb twierdzenia zawierające *wiele informacji* nie będące *poważnymi* w sensie Hardy'ego.

— Wspomniał Pan o „biologicznym” charakterze teorii liczb. Jako koronny przykład prostego, ale trudnego zagadnienia bywa najczęściej wymieniany problem Fermata nazywany przeważnie Wielkim Twierdzeniem Fermata: równanie $x^n + y^n = z^n$ nie ma rozwiązań naturalnych, gdy $n > 2$. Czy rozstrzygnięcie tego zagadnienia stałoby się punktem zwrotnym teorii liczb, jej kamieniem milowym, czy stałoby się jej świętem?

— Byłoby na pewno świętem dla teoretyków liczb, bo pozbyliby się może zmyły amatorów nadsyłających „dowody” Wielkiego Twierdzenia Fermata. Natomiast nie byłoby ani punktem zwrotnym, ani kamieniem milowym. Wielkie Twierdzenie Fermata stanowi doskonały przykład twierdzenia, które jest poważne w sensie Hardy’ego, ale które nie jest ważne w sensie, który właśnie podałem. Niewątpliwie, rozwiązanie tego zagadnienia wiąże się z bardzo licznymi ideami teorii liczb, zresztą nawet całej matematyki. Do Wielkiego Twierdzenia Fermata Kummer stworzył teorię „czynników idealnych”, którą potem sformalizował Dedekind i z której powstała bardzo dziś ważna w algebrze teoria ideałów. Dlatego jest to poważne zagadnienie. Nie jest za to, według mnie, ważne. Sądzę — a poparłaby mnie na pewno większość matematyków — że informacja, jakiej o liczbach naturalnych dostarcza nam to twierdzenie, jest stosunkowo skąpa. Porównam to może z innym sławnym zagadnieniem teorii liczb: zagadnieniem Goldbacha (czy każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych). To zagadnienie jest otwarte od 240 lat, ale postępy w jego rozwiązaniu mają inny charakter niż te przy twierdzeniu Fermata. Dotychczasowe wysiłki przynoszące znaczny postęp w hipotezie Goldbacha doprowadzały od razu do całej serii podobnych wyników uzyskiwanych tą samą metodą. Na przykład dowód Winogradowa, że każda dostatecznie duża liczba nieparzysta jest sumą trzech liczb pierwszych (a więc każda dostatecznie duża parzysta — sumą czterech; wystarczy odjąć 3) przenosi się na przypadek kombinacji liniowej liczb pierwszych ze współczynnikami całkowitymi. Natomiast przy Wielkim Twierdzeniu Fermata może się okazać, że równanie $x^n + y^n = z^n$ żadnych rozwiązań w liczbach naturalnych nie ma, ale już dla równania $x^n + y^n = 2z^n$ tą metodą nie da się otrzymać „oczekiwanego” wyniku ($x = y = z$). Tu właśnie tkwi różnica, dosyć wyraźna, między Wielkim Twierdzeniem Fermata a hipotezą Goldbacha. W tym ostatnim zagadnieniu każdy postęp przynosi całą serię nowych rezultatów, a w zagadnieniu Fermata każdy postęp w metodach byłby bardzo ważny, ale obecnie otrzymuje się wyniki tylko bardzo specjalne. Gdybym miał więc klasyfikować hipotezy teorii liczb z punktu widzenia ważności, a nie ich powagi, to na pierwszym miejscu postawiłbym uogólnioną hipotezę Riemanna o zerach szeregów Dirichleta. Ma ona najwięcej różnorodnych, już wyprowadzonych z niej konsekwencji: o rozmieszczeniu liczb pierwszych albo np. o najmniejszej nie-reszcie kwadratowej. Jest to sławny problem w teorii liczb: dla danej liczby pierwszej p oszacować od góry jej najmniejszą nie-resztę kwadratową. Uogólniona hipoteza Riemanna daje natychmiast oszacowanie przez $(\ln p)^2$. Stanowczo ta właśnie hipoteza teorii liczb prowadzi do największej liczby rozstrzygających wyników.

— A propos twierdzenia Fermata. Jest ono dziś udowodnione dla wykładników $n \leq 125\,000$ (Wagstaff, 1978). Wiadomo zaś, że ewentualne pierwiastki równania Fermata muszą być większe niż wykładnik, tzn. co najmniej 125 000. To chyba zupełnie niweczy szanse znalezienia kontrprzykładu metodami „usiąść przy biurku — albo przy komputerze — i wylicyć”?

— Tak, to oczywiste. Z tym że oszacowanie przez wykładnik, o którym Pan wspomniał, jest dość trywialne. Bardziej dokładne jest następujące: jeżeli $x^p + y^p = z^p$ (x, y, z — naturalne, p — liczba pierwsza > 2 ; zagadnienie Fermata wystarczy badać dla wykładników będących liczbami pierwszymi), to x, y i z są równe co najmniej p^p . Można znaleźć zresztą i precyzyjniejsze oszacowanie (np. K. Inkeri w 1953 r.).

— No tak, zatem żeby wyrachować, że konkretne x, y, z są rozwiązaniem, musielibyśmy działać na liczbach większych niż 125 000 ¹⁵⁶²⁵⁰⁰⁰⁰⁰⁰, mających zatem ponad 80 miliardów cyfr. To wciąż za duże liczby dla maszyn cyfrowych.

Wspomniał Pan też o tym, że rozwiązanie problemu Fermata przerwałoby może falę listów z jego „dowodami”, jakie wciąż przysyłają amatorzy. Nb. „Delta” też dostawała. Jednak z powodu swojego „biologicznego” charakteru teoria liczb jest specyficzną dyscypliną matematyczną. Większość bowiem gałęzi matematyki jest niezrozumiała dla laika. Żeby ją zrozumieć, trzeba włożyć dużo wysiłku. Dlatego zresztą tak trudno popularyzować matematykę nie splaszczając jej. Tymczasem duże liczby każdy sobie jakoś tam wyobraża; każdemu można wytłumaczyć, co to jest liczba pierwsza i „pokazać” największą znaną. Zwrot „rozłożyć na czynniki pierwsze” wszedł nawet do języka potocznego. Wielu ludzi szuka rozwiązania równania Fermata posługując się kalkulatorami elektronicznymi. Czy można jeszcze coś odkryć w teorii liczb nie będąc profesjonalistą?

— Nieprofesjonalistą matematykiem czy nie — matematykiem?

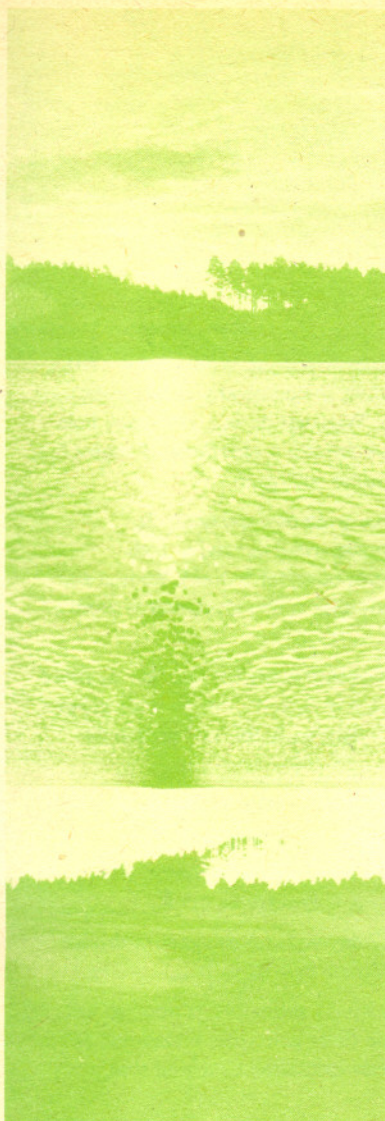
— Nie — matematykiem.

— Mogę przytoczyć bardzo ciekawy przykład. W 1978 roku emerytowany urzędnik bankowy H. L. S. Orde opublikował w „Journal of the London Mathematical Society” elementarny dowód

Mówimy, że liczba naturalna a jest nie-resztą kwadratową modulo p (gdzie p jest liczbą pierwszą), gdy kongruencja

$$x^2 \equiv a \pmod{p}$$

nie ma rozwiązania w liczbach całkowitych.



wzoru Dirichleta dla liczby klas ciał kwadratowych o ujemnym wyróżniku. Było to otwarte zagadnienie od ponad 100 lat. Znane dowody tego twierdzenia wykorzystywały metody analityczne, nieelementarne, związane z przejściem granicznym. Dowód elementarny próbowało bezskutecznie znaleźć wielu matematyków, a największy sukces odniósł w 1927 roku matematyk radziecki Wienkow, który podał dowód obejmujący większość — ale nie wszystkie — możliwe wyróżniki. Panu H. L. S. Orde udało się podać dowód kompletny. Sprawdza się więc powiedzenie „wszyscy wiedzieli, że to się nie da zrobić; ignorant nie wiedział i zrobił”. A więc jest jeszcze pole do popisu dla amatorów w teorii liczb, chociaż rzecz jest niewątpliwie bardzo trudna. Przede wszystkim jest olbrzymia możliwość, że jeżeli „amator” nawet znajdzie jakiś cenny wynik, to ktoś to już odkrył przed nim. Przecież teorią liczb zajmuje się tak wielu ludzi od tak dawna. Bez dokładnego zbadania literatury można dojść do dawno znanych rzeczy. Tak właśnie się zdarzyło na konkursie prac maturalnych PTM i „Delty” w 1982 roku. Jeden z uczniów uogólnił pewne twierdzenie zawarte w książce Sierpińskiego o teorii liczb, ale nie orientował się, że w międzyczasie otrzymano już rezultat znacznie ogólniejszy. Muszę jednocześnie dodać, że rok przedtem w podobnym konkursie pan Jarosław Wróblewski uzyskał w swojej pracy maturalnej ciekawy i zupełnie nowy wynik.

— Kolejne moje pytanie jest związane z poprzednim. Załóżmy, że młody człowiek (uczeń albo student) interesuje się teorią liczb i chciałby się nią zajmować. Czego powinien się nauczyć? Czy teoria liczb jest samowystarczalną dyscypliną matematyki (jak np. niektóre działy geometrii), czy, przeciwnie, korzysta z twierdzeń innych dyscyplin matematycznych?

Teoria liczb korzysta w wysokim stopniu z twierdzeń innych dyscyplin. Można powiedzieć, że wyzyskuje te dziedziny, bo bierze od nich więcej, niż sama im daje. A czego się trzeba nauczyć, chcąc specjalizować się w teorii liczb? To bardzo zależy od działu samej teorii liczb. Nie ma już na świecie osób, które zajmowałyby się wszystkimi czy nawet większością jej działów. Do badań np. nad rozmieszczeniem liczb pierwszych niezbędne są wiadomości z teorii funkcji analitycznych. Do algebraicznej teorii liczb najbardziej potrzebna jest algebra abstrakcyjna, choć przydaje się też teoria funkcji analitycznych. W probabilistycznej teorii liczb niezbędny jest, oczywiście, rachunek prawdopodobieństwa, do równań diofantycznych geometria algebraiczna... Nie znaczy to wcale, że najpierw trzeba opanować jakąś poboczną dziedzinę, a potem wziąć się za teorię liczb. W trakcie studiów teorioliczbowych należy po prostu pogłębiać wiadomości z odpowiednich działów matematyki.

— Specjalizacja w teorii liczb może być skomplikowana, choćby dlatego, że rzadko w programach uniwersyteckich znajduje się wykład albo seminarium z tej dziedziny. Nie ma takiego seminarium w Uniwersytecie Warszawskim ...

W uniwersytecie rzeczywiście, ale od 20 lat odbywa się seminarium z teorii liczb w Instytucie Matematycznym PAN. Jest ono zresztą kontynuacją poprzednio istniejącego uniwersyteckiego i trafiają na nie także studenci. W ostatnich latach miałem kilku doktorantów, którzy swoje prace magisterskie napisali przedtem na tym właśnie seminarium. To nie jest więc zupełna pustka. Wiem, że w roku 1981/82 prof. Władysław Narkiewicz z Uniwersytetu Wrocławskiego prowadził z teorii liczb wykład kursowy.

— Warto tu chyba przypomnieć, że na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Helsinkach w 1978 roku jedynym Polakiem, którego zaproszono do wygłoszenia referatu sekcyjnego, był młody pracownik Instytutu Matematycznego PAN doc. Henryk Iwaniec, specjalizujący się właśnie w teorii liczb. Zaproszenie do wygłoszenia referatu na kongresie jest wielkim wyróżnieniem dla matematyka — dowodzi bowiem, że dany uczonec ma rzeczywiście światową sławę w dziedzinie, którą się zajmuje. Wyższym wyróżnieniem dla matematyka jest chyba tylko referat plenarny na kongresie — no i medal Fieldsa, odpowiednik nagrody Nobla dla matematyków.

— Tak, to prawda.

— Dziękuję za rozmowę.

Rozmawiał Michał SZUREK

Dwa dzielenia

Weźmy dwie liczby naturalne a i b , przy czym niech $b > a$. Jeżeli będziemy dla różnych liczb naturalnych k obliczali resztę z dzielenia $k \cdot (k+a)$ przez $(k+b)$, to okaże się, że prawie zawsze otrzymywać będziemy ten sam wynik.

Weźmy np. $a = 3$, $b = 5$. Mamy wówczas

$$\begin{aligned}57 (57+3) &= 55 (57+5) && \text{reszta } 10, \\100 (100+3) &= 98 (100+5) && \text{reszta } 10, \\222 (222+3) &= 220 (222+5) && \text{reszta } 10\end{aligned}$$

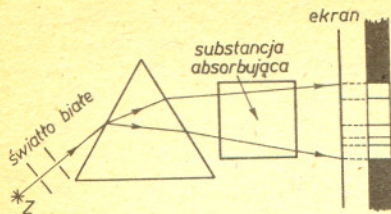
itd.

Dlaczego tak się dzieje? Dla tych, którzy nie umieli bądź nie mieli ochoty sprawdzić, rozwiązanie na stronie 11. Tam też można znaleźć wyjaśnienie, dlaczego ta notatka ma właśnie taki a nie inny tytuł.

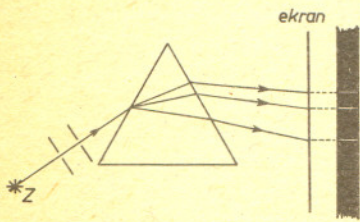
dr Piotr RUDNICKI

Atomy rydbergowskie

Prof. dr Kazimierz ROSIŃSKI



Powstawanie widma absorpcyjnego

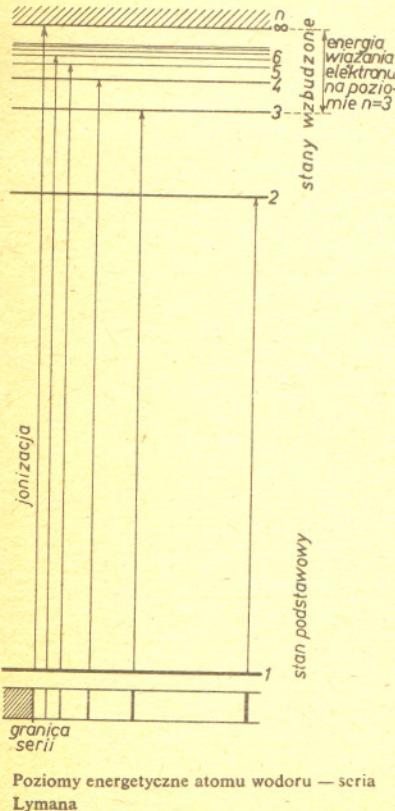


Powstawanie widma emisyjnego

$$\lambda = A \frac{n^2}{n^2 - 2^2} \text{ wzór Balmera}$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{R}{n^2} - \frac{R}{m^2} \text{ wzór Balmera w ogólnej}$$

postaci nadanej mu przez Rydberga



Poziomy energetyczne atomu wodoru — seria Lymana

Widma atomowe

Ciemne linie na jasnym tle ciągłego widma słonecznego zaobserwował już Wollaston w 1802 r., a interpretował je jako granice barw. Nieco później Fraunhofer, utalentowany eksperymentator, szeroko rozwinął i udoskonalił pomiary długości fali światła. Wiedział on już, że ciemne linie tworzące widmo zwane obecnie absorpcyjnym oznaczają brak światła o określonej długości fali, przeciwnie niż w przypadku jasnych linii na ciemnym tle (widmo emisyjne).

Balmer i Rydberg, którzy pod koniec XIX w. wykryli, że linie widmowe układają się w regularne serie opisywane prostymi wzorami, jeszcze nie przeczuwali ukrytej w nich głębokiej treści. Dopiero Bohr około 100 lat po odkryciu widm odczytał tę treść. Widma stały się potwierdzeniem jego rewolucyjnej koncepcji podporządkowania ruchu elektronu w atomie prawom kwantowym.

Energia i moment pędu elektronu np. w atomie wodoru są skwantowane, tzn. energia E_n może przyjmować tylko wartości $E_n = -C/n^2$, gdzie C jest stałą, a $n = 1, 2, 3 \dots \infty$ zwie się główną liczbą kwantową. Kwantowanie energii i jej zależność od n ilustruje „drabinka” poziomów energetycznych.

Moment pędu L może przyjmować wartości $L = l\hbar$ ($\hbar = h/2\pi$, h — stała Plancka), przy tym tzw. orbitalna liczba kwantowa $l = 0, 1, \dots, n-1$.

Wartości $n = 1$ odpowiada najmniejsza energia atomu, czyli stan trwałej równowagi (stan podstawowy). Promień orbity kołowej w modelu Bohra wynosi w tym stanie $0,5 \text{ \AA}$.

Wartościom $n = 2, 3 \dots$ odpowiadają stany wzbudzone (poziomy wyższe) osiągnane w drodze absorpcji promieniowania o częstotliwości spełniającej warunek Bohra $E_n - E_m = h\nu_{nm}$.

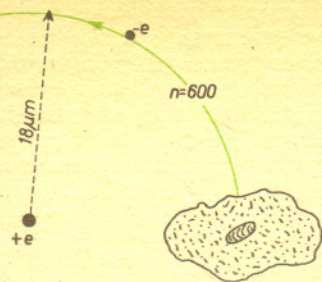
Stan wzbudzony jest stanem nietrwałym. Atom wraca skokowo do stanu podstawowego lub innego o niższej energii wysyłając światło monochromatyczne (linia emisyjna) o częstotliwości fali ν zgodnej z warunkiem Bohra. Mierząc ν można wyznaczyć doświadczalnie C , a stąd stałą Rydberga $R = C/hc$ (c — prędkość światła).

Serię widmową tworzy zbiór linii będących wynikiem przejść na poziom o liczbie kwantowej m z poziomów o liczbie kwantowej $n > m$. Granicy serii odpowiada jonizacja, czyli oderwanie elektronu od atomu. Linie serii zagęszczają się ku jej granicy (por. wykres poziomów).

W widmach jest więc „zakodowana” informacja o strukturze poziomów wzbudzonego atomu, a więc także o oddziaływaniu jego części składowych, oddziaływaniu z innymi atomami i oddziaływaniu z promieniowaniem elektromagnetycznym. Wszystkie te oddziaływania modyfikują bowiem energie poziomów.

Kiedy Bohr tworzył swoją teorię, w laboratoriach uzyskiwano tylko 12 linii emisyjnej serii Balmera (przejścia z $n = 3$ do 14 na $n = 2$), gdy tymczasem należało spodziewać się nieprzeliczonej liczby linii zbiegających do granicy serii zgodnie ze schematem poziomów. Bohr związał to ograniczenie liczby obserwowanych linii z nietrwałością atomów wzbudzonych na wyższe poziomy, spowodowaną zderzeniami z innymi atomami. Istotnie, zgodnie z jego teorią średnica atomu szybko rośnie z n (jak n^2). Nieobserwowane linie trzynasta i dalsze pochodziłyby z atomów o rozmiarach ponad $0,02 \mu\text{m}$ (porównywalnych z rozmiarami np. wirusów), a energia wiązania elektronu w takich atomach jest porównywalna z energią ruchu cieplnego w zwykłych temperaturach. Innym argumentem może być występowanie linii widmowych o $n > 14$ w widmach gwiazd, których atmosfery cechuje znaczne rozrzedzenie.

Bohr doszedł do wniosku, że należy badać serie widmowe w absorpcji, dla której nie ma znaczenia trwałość atomu po wzbudzeniu. Zauważmy jednak, że obserwacja dalszych linii serii widmowych nawet w absorpcji stanowi poważny problem (nie widział go Bohr-teoretyk) ze względu na szybkie ich słabnięcie z n w wyniku malenia prawdopodobieństwa absorpcji. Przykładowo: dwudziesta linia jest już około 10^6 razy słabsza od pierwszej. Ponadto linie zbliżają się do siebie, a że mają skończoną szerokość (rozmycie poziomów wynikające z zasady nieoznaczoności Heisenberga i efektu Dopplera), dla pewnych n zaczynają się nakładać, tak iż nie mogą ich rozdzielić najpotężniejsze przyrządy spektralne. Rekordowym osiągnięciem było uzyskanie przez Wooda w 1908 r. 57 linii ($n = 59$ do $n = 3$) w widmie absorpcyjnym sodu.



Porównanie wymiarów atomu rydbergowskiego i komórki nablonkowej

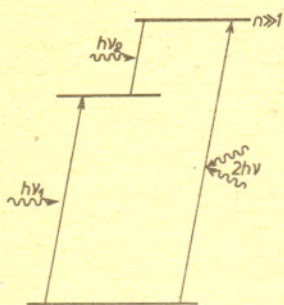
W tym celu użył rury o długości 3 m wypełnionej parami sodu i spektrometru z trzynastoma przyzmatami. Obecnie dzięki niesłychanemu postępowi spektroskopii, m.in. dzięki wynalezieniu laserów, możliwe jest osiągnięcie nawet $n = 150$. Informacji o takim wzbudzeniu nie można jednak uzyskać tradycyjnie za pomocą widm optycznych; absorpcja i emisja są wtedy zbyt słabe.

Powstaje pytanie, dlaczego warto zajmować się tak silnie wzbudzonymi atomami? W odpowiedzi przytoczymy niektóre motywy i niektóre wyniki badań.

Niezwykła skala zjawisk

Zwracają uwagę przede wszystkim ogromne rozmiary takich atomów. Ostatnio uzyskane w laboratorium atomy wzbudzone o $n = 150$ mają średnicę ponad $2 \mu\text{m}$ (!), a atomy wodoru wykryte w galaktycznych obłokach, o $n = 600$, mają średnicę ok. $36 \mu\text{m}$, czyli ok. $1/30 \text{ mm}$. Równocześnie tak odległy elektron jest niezwykle słabo związany z jądrem, np. dla niezbyt wielkiego $n = 30$ energia wiązania wynosi zaledwie 10 meV (w stanie podstawowym ok. 10 eV) i maleje jak n^{-2} . Atomy te więc są tworem niezwykle „kruchymi” i jest zadziwiające, że mogą istnieć i być badane w warunkach laboratoryjnych. Ważnym następstwem słabego związania elektronu w silnie wzbudzonych atomach jest niezwykła podatność na działanie zewnętrznego pola elektrycznego i magnetycznego. Przejawia się to np. w łatwości jonizowania takich atomów. Już słabe pole elektryczne wystarcza do oderwania elektronu. Ta własność została wykorzystana do ich badania.

Różne cechy atomu zależą od wyższych potęg n , ale różnie, wobec czego ze zmianą n różne cechy uzyskują przewagę. Te silnie wzbudzone atomy o „egzotycznych” cechach przyjęto nazywać atomami rydbergowskimi.



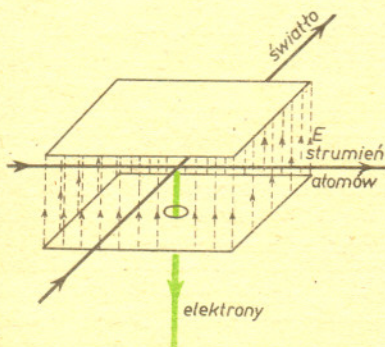
Wzbudzenie dwustopniowe i dwufotonowe

Kłopoty ze wzbudzeniem i badaniem

Wzbudzenie na wysokie poziomy wymaga promieniowania ultrafioletowego, a ponadto absorpcja do tych poziomów jest niezwykle słaba (maleje jak $1/n^3$). Poza tym maleje odległość między sąsiednimi poziomami. W tych warunkach wzbudzenie atomów do wybranych poziomów nie jest możliwe przy użyciu tradycyjnych źródeł światła. Staje się konieczne zastosowanie silnego światła laserowego i to ze specjalnego lasera, np. lasera barwnikowego, w którym można płynnie zmieniać długość fali dopasowując ją do żądanych poziomów. Ponadto jest konieczne zastosowanie nowych metod użycia lasera. Ogólnie dostępne lasery dają z reguły światło widzialne, a potrzebny jest nadfiolet. Wobec tego stosuje się bądź to wzbudzenie dwustopniowe: jeden laser wzbudza atomy na niższy poziom, a drugi — z tego poziomu na wysoki, bądź wzbudzenie dwufotonowe jednym laserem: atom pochłania od razu dwa fotony, co jest możliwe wobec ich ogromnej gęstości w świetle laserowym.

Do stwierdzenia, że otrzymaliśmy atomy rydbergowskie, wykorzystuje się łatwą ich jonizację. Badane atomy umieszcza się w polu elektrycznym. Pojawiające się w wyniku ich jonizacji elektrony lub jony niosą informację o wzbudzeniu. Zwiększając stopniowo natężenie pola elektrycznego obserwujemy pojawianie się elektronów pochodzących kolejno z coraz niższych poziomów atomów rydbergowskich, wytworzonych w wyniku absorpcji światła.

Zjawiska zachodzące w atomach rydbergowskich w laboratorium modelem zjawisk zachodzących w warunkach ekstremalnych



Badanie widma atomów rydbergowskich

Uzyskanie mierzalnych efektów (np. przesunięcie poziomów) pod działaniem pól zewnętrznych w atomach słabo wzbudzonych wymaga bardzo silnych pól. Ostatnio w związku ze spodziewanym występowaniem skrajnie silnych pól magnetycznych w warunkach kosmicznych (gwiazdy neutronowe) zostało postawione zagadnienie: jaki byłby wynik działania na atom pól tak silnych, że ich oddziaływanie na elektron walencyjny byłoby porównywalne z oddziaływaniem nań pola wewnątrzatomowego. Dla ukierunkowania oceny teoretycznej była potrzebna wskazówka ze strony eksperymentu. Jednak w przypadku atomów słabo wzbudzonych byłyby potrzebne pola nieosiągalne w laboratorium. Pomoc przyszła ze strony atomów rydbergowskich.

Efekt diamagnetyczny polega na powstawaniu w ciele namagnesowania skierowanego przeciwie niż zewnętrzne pole magnetyczne. W klasycznym opisie efekt ten wiąże się z indukowaniem mikroskopowych prądów wirowych w momencie włączenia pola magnesującego.

Paramagnetyzm to zjawisko magnesowania się ciała w kierunku w przybliżeniu zgodnym z kierunkiem zewnętrznego pola magnetycznego. Efekt ten jest wywołany orientacją momentów magnetycznych atomów paramagnetyka pod wpływem pola magnetycznego.

Jak wiadomo, pole magnetyczne powoduje efekty paramagnetyczne i diamagnetyczne. Efekt paramagnetyczny związany ze strukturą poziomów energetycznych jest w atomach rydbergowskich taki jak w zwykłych, a więc bardzo słaby. Natomiast efekt diamagnetyczny słaby w zwykłych atomach staje się potężny w rydbergowskich.

Efekt diamagnetyczny jest efektem indukcyjnym wynikającym z oddziaływania pola magnetycznego na elektron poruszający się w atomie. W wyniku tego oddziaływania następuje modyfikacja ruchu elektronu. Energia związana z tym efektem jest proporcjonalna do powierzchni ograniczonej przez orbitę elektronu (w modelu Bohra), czyli do r^2 , a więc bardzo szybko rośnie z n (jak n^4). Porównajmy tę energię z energią wiązania elektronu w atomie wodoru proporcjonalną do $1/n^2$. Stosunek tych energii rośnie z n nadzwyczaj szybko (jak n^6). Dla małych n przeważa oddziaływanie elektryczne, ale bardzo szybko oddziaływanie magnetyczne staje się z nim porównywalne, by dla wyższych n uzyskać zdecydowaną przewagę. Okazuje się więc, że dla otrzymania efektów odpowiadających skrajnie silnym polom wystarczy, w przypadku atomów rydbergowskich, pole magnetyczne łatwo dostępne w laboratorium.

Doświadczenia wykazały, że w obszarze poziomów, w którym przeważa działanie wewnątrz atomowego pola elektrycznego, widmo atomu jest bardzo złożone. W obszarze, gdzie oba oddziaływania zrównują się (przypada on w pobliżu granicy serii), widmo upraszcza się i składa się z linii równoodległych. Wreszcie, gdy pole magnetyczne przeważa, widmo przypadające poza granicą serii pozostaje regularne, ale odstęp linii maleje, jest proporcjonalny do natężenia pola i odpowiada częstości ruchu elektronu po torze kołowym w tym polu (częstość cyklotronowa). Oznacza to, że o ruchu elektronu decyduje pole magnetyczne. Te wyniki okazały się pomocne w poszukiwaniu oceny teoretycznej zagadnienia. Umieemy już przewidywać, posługując się mechaniką kwantową, położenia linii, ale nie potrafimy jeszcze obliczać ich natężeń.

wodór n	sód		
	$l=0$	$l=1$	$l=2$
50	$\delta = 1.4$	0.1	0.01
	$n^* = 48.6$	49.1	50
	$\approx n$		

Szczególność prostota zjawisk w przypadku złożonych atomów

3			
	$l=0$	$l=1$	$l=2$
	$\delta = 1.4$	0.9	0.01
	$n^* = 1.6$	2.1	3
	$\neq n$	$\neq n$	$\approx n$

Porównanie położenia poziomów energetycznych wodoru i sodu w zależności od n i l

Teoretyczne wyjaśnienie własności atomów wodoru w stanach wzbudzonych nie przedstawia trudności. Inaczej jest już w przypadku najprostszych atomów złożonych (wieloelektronowych), jakimi są atomy metali alkalicznych, w których tylko jeden elektron (walencyjny) bierze udział w zjawiskach optycznych, a pozostałe tworzą z jądrem zwarty rdzeń. Moglibyśmy oczekiwać podobieństwa struktury poziomów tych atomów i atomów wodoru. Zaznaczają się jednak istotne różnice, jeżeli ograniczyć się do niskich poziomów. W szczególności energie poziomów dają tym

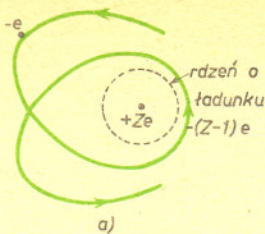
razem wyrażenie $-\frac{C}{(n-\delta)^2}$ podobne jak dla wodoru, ale w mianowniku występuje nie samo n , lecz $n-\delta = n^*$ zwane efektywną liczbą kwantową, przy tym δ (nazywane defektem kwantowym) zależy praktycznie tylko od l , które w przypadku wodoru nie miało wpływu na energię. Jest widoczne, że poziomy atomów metali alkalicznych leżą niżej niż atomów wodoru. Nie będziemy wspominać o innych jeszcze istotnych różnicach. Można przypuszczać, że różnice te są wynikiem oddziaływania elektronów rdzenia na elektron walencyjny. Wobec tego należy spodziewać się, że w atomach rydbergowskich, w których elektron walencyjny znajduje się daleko od rdzenia, wpływ rdzenia będzie mały i wobec tego atom ten powinien okazać się wodoropodobny. I rzeczywiście, dla dostatecznie dużych n defekt kwantowy przestaje odgrywać rolę: $-\frac{C}{(n-\delta)^2} \approx -\frac{C}{n^2}$ i poziomy atomów metali alkalicznych układają się na tej samej wysokości co w wodorze. Pozostają jednak inne różnice. W każdym razie można spodziewać się możliwości modelowania złożonego atomu za pomocą atomu wodoru, a w szczególności połączenia obrazu klasycznych orbit z opisem kwantowym w celu uzyskania bardziej przejrzystego obrazu zjawisk.

Elektron w atomie rydbergowskim sonduje rdzeń atomu

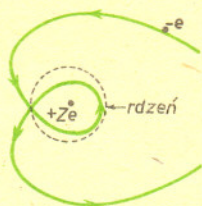
Pierwszą wskazówkę o charakterze ruchu elektronu w atomie metalu alkalicznego daje już położenie niższych poziomów. Okazuje się, że defekt kwantowy dla $l=0$ ma wartość największą, a dla $l=n-1$ — najmniejszą. Oznacza to, że poziomy z $l=0$ są najbardziej przesunięte względem wodorowych, a z $l=n-1$ są praktycznie tak samo położone.

Prowadzi to do wyróżnienia trzech rodzajów torów elektronu: tory zewnętrzne względem rdzenia, tory styczne i tory wnikaące w rdzeń atomu. Elektron na torze zewnętrznym „widzi” w całym swym ruchu ładunek efektywny $Ze+(- (Z-1)e) = e$ (liczba porządkowa),





a)



b)

Orbita zewnętrzna (a) i orbita wnikająca (b)

a więc taki jak w atomie wodoru i wobec tego jego ruch powinien być bardzo zbliżony do ruchu elektronu w atomie wodoru. Ewentualne różnice będą związane z niepunktowością ładunku efektywnego. W przypadku torów stycznych, a szczególnie wnikających, nie można już pomijać przestrzennego rozkładu rdzenia, należy więc oczekiwać znacznych różnic w porównaniu z wodorem. Różnice te są źródłem informacji o rozkładzie ładunku w rdzeniu i charakterze jego oddziaływania z elektronem walencyjnym. Podobnie odchylenia w ruchu sztucznego satelity od ruchu po eliście dostarczają informacji o kształcie Ziemi i rozkładzie masy w jej wnętrzu.

Posługiwaliśmy się dotąd pojęciem klasycznych torów elektronu wziętym ze starej teorii kwantów, a jak wiadomo, nie odzwierciedla ono zadowalająco rzeczywistości. Na usprawiedliwienie tego przypominamy, że w myśl zasady korespondencji dla $n \rightarrow \infty$ prawa kwantowe przechodzą w klasyczne i wobec tego w przypadku znacznych n przybliżenie torów klasycznych może być pożyteczne. Warto pamiętać także, że średnie położenie elektronu według nowej teorii kwantów odpowiada właśnie torom klasycznym. Okazało się, że stosowanie przybliżenia torów klasycznych i kwantowego opisu ruchu daje dobrą zgodność z doświadczeniem, pozwalając ocenić rozmiary rdzenia i rozmieszczenie ładunku. Warto dodać, że obliczenia dla wielkich n są niezwykle uciążliwe nawet przy użyciu komputerów.

Atom rydbergowski tym odporniejszy na zderzenia, im bardziej wzbudzony — im większy

Ten fakt doświadczalny, zdawałoby się paradoksalny, świadczy o zawodności intuicji mówiącej: im dalej elektron od rdzenia, im słabiej związany, tym łatwiejsze zaburzenie jego ruchu przez środowisko. Rzecz wyjaśni się, jeżeli uprzytomnimy sobie, że atom zaburzający (najczęściej atom w stanie podstawowym) jest znacznie mniejszy od atomu rydbergowskiego, a przy tym zasięg sił jego oddziaływania jest także znacznie mniejszy od rozmiarów atomu rydbergowskiego, wobec czego nie obejmuje on tym oddziaływaniem atomu rydbergowskiego jako całości. Zderzenie będzie skuteczne, jeżeli mały atom zaburzający trafi bezpośrednio na elektron lub rdzeń, ale prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest małe. Ponadto rdzeń atomu metalu alkalicznego ma strukturę atomu gazu szlachetnego, jest więc bardzo odporny na wszelkie zaburzenia. Zatem atom zaburzający najczęściej będzie przelatywał pomiędzy rdzeniem a elektronem nie jonizując atomu. Tak więc ze wzrostem wielkości atomu rydbergowskiego będzie rosła jego „przezroczystość”, a maleć podatność na zaburzenia.

Atom rydbergowski detektorem promieniowań długofalowych i wzmacniaczem efektów najsłabszych

Jak widzieliśmy, linie serii widmowych ze wzrostem n zagęszczają się, podobnie jak poziomy energetyczne. Na przykład dla $n = 60$ odległość sąsiednich poziomów odpowiada, przy przeskoku elektronu pomiędzy nimi, promieniowaniu o długości fali około 3 cm, tzn. mikrofalom. Mniejszym n odpowiada daleka podczerwień (fale milimetrowe i submilimetrowe). Jest interesujące, że prawdopodobieństwo absorpcji takich fal przez atom rydbergowski jest znacznie większe od prawdopodobieństwa absorpcji światła z poziomu najniższego do tych wysokich. Wynika z tego niezwykła czułość atomów rydbergowskich na działanie promieniowania długofalowego, a w szczególności nadzwyczaj słabego promieniowania cieplnego przenikającego stałe nasze otoczenie, a więc odpowiadającego temperaturze około 20°C. Wiąże się z tym nadzieje na zbudowanie detektora takich promieniowań o znacznie większej czułości niż obecnie istniejące.

Wyjątkowa podatność atomów rydbergowskich na działanie promieniowań elektromagnetycznych przyczynia się do znacznego spotęgowania nawet najsłabszych efektów tego oddziaływania, takich jak absorpcja wielofotonowa, przesunięcie poziomów, generacja promieniowania w maserach. Te ostatnie mają wielkie znaczenie np. w radioastronomii i jako wzorce częstości.

Inną ciekawą cechą atomów rydbergowskich jest bardzo długi czas pozostawania w stanie wzbudzonym (czas życia), nim wypromieniują energię wzbudzenia, którą tracą wobec tego raczej w zderzeniach. Przykładowo dla $n = 60$ czas życia wynosi około 1/4 ms w porównaniu z 10^{-6} ms dla niskich poziomów (np. $n = 2$ w wodorze). Wiąże się to, zgodnie z zasadą nieoznaczoności, z wielką ostrością poziomów energetycznych (mała nieoznaczoność energii), czyli równocześnie z małym rozmyciem długości fali pochłanianego promieniowania. Oznacza to z kolei wielką przydatność atomów rydbergowskich do pomiarów o wysokiej dokładności, np. stałej Rydberga, czy budowy wzorców częstości (zegarów atomowych).

Niektóre symbole używane w Mizarze są skrótami pewnych angielskich zwrotów. Po polsku można czytać je tak:

not	nieprawda, że
or	lub
iff	wtedy i tylko wtedy
implies	jeśli..., to
for	dla każdego
being	będący
holds	zachodzi
st	spełniający (albo: taki, że)
ex	istnieje
environ	otoczenie (wstęp)

Mizar — MSE (1)

Dr A. Trybulec w *Delcie* (7/1983) obiecał Czytelnikom krótki kurs Mizara. Oto pierwszy z dziesięciu odcinków spełniających tę obietnicę.

Co to jest Mizar? Pewną odpowiedź daje na to wspomniany wyżej artykuł. Ogólnie chodzi o to, by komputer sprawdzał dowody matematyczne przygotowane przez człowieka. Podstawa systemu, który do tego służy, jest pewien (formalny) język, w którym zapisujemy takie dowody.

W projekcie Mizar opracowano wiele różnych języków, w których można zapisywać dowody matematyczne. Ten, który będziemy omawiać, nazywa się Mizar-MSE, jest mniej skomplikowany od pozostałych i pomyślany został właśnie dla początkujących.

Mizar-MSE obejmuje sobą klasyczny rachunek predykatów z równością. Tym, którzy nie wiedzą, co znaczy poprzednie zdanie, możemy polecić lekturę znakomitej książki A. Grzegorzcyka „Zarys logiki matematycznej”, ale i bez znajomości książek o logice można będzie zapoznać się z Mizarem bez kłopotu, co najwyżej z pewnym wysiłkiem.

W dalszym ciągu tego kursu będziemy powoływali się na różne elementarne teorie matematyczne, na ogół dobrze wszystkim znane. Czytelnicy będą mogli (jeśli zechcą) rozwiązywać zadania, a Ci, którzy nadesłali rozwiązania, otrzymają wydruk z komputera, będący wynikiem sprawdzenia ich rozwiązania przez maszynę. Jeśli w rozwiązaniu będą błędy lub maszyna przyzna, że sprawdzenie tekstu przekracza jej możliwości, to oczywiście zaznaczy to w pewien sposób. Ale do tego jeszcze wielokrotnie wrócimy.

Zacniemy od budowy zdań w Mizarze-MSE. Najprostszymi zdaniami są zdania atomowe. I tutaj mamy do czynienia z pewnym ubóstwem. Zasadniczo jedyną postacią takich zdań jest: symbol predykatu [argument₁, argument₂, ..., argument_k]. Nie możemy zatem napisać $1 < 2$, ale możemy to samo w naszym języku wyrazić przez: *mniejszy* [1, 2]. Albo np. *LT* [1, 2] (*LT* od angielskiego *Less Than*). 1 i 2 to argumenty predykatu. Predykat może mieć dowolnie dużo argumentów, w praktyce nie spotyka się więcej niż, powiedzmy, dziesięć (na ogół mniej). Predykat może mieć jeden argument, np: *dotatnie* [4]. Przy zgodnej z intuicją interpretacji znaczenia predykatu *dotatnie*, powyższe zdanie atomowe jest prawdziwe, rzeczywiście 4 jest liczbą dodatnią, ale np.: *dotatnie* [0] nie jest zdaniem prawdziwym. Dozwolone są również predykaty bez argumentów, ale wtedy chodzi o sytuację w pewnym sensie wyjątkową.

W Mizarze można wyrazić fakt, że dwa obiekty są równe, np.: $2 = 2$ i takie zdania zapisujemy zwyczajnie. Jest to też zdanie atomowe, symbolem predykatu jest $=$, ale umieszczamy go między argumentami. Podobnie z nierównością, z tym że symbolem predykatu jest $<$, np.: $3 < 7$. Możemy oczywiście napisać $2 < 2$, ale jest to zdanie fałszywe.

Wyjątkowo w tym pierwszym odcinku podamy na marginesie sens (a nie tłumaczenie wyraz za wyrazem) zapisanych w Mizarze zdań.

Wiedząc jak buduje się zdania atomowe, możemy przejść do zdań złożonych, które budujemy ze zdań atomowych za pomocą spójników zdaniowych. W Mizarze możemy używać następujących spójników:

— negacja, zapisywana jako **not** przed negowanym zdaniem np.:

NOT LTC3,21; NOT 2=3
3 nie jest mniejsze od 2, 2 nie jest równe 3.

— koniunkcja, zapisywana znakiem **&** między zdaniami, np.:

DODATNIE11 & LTE0,11
1 jest dodatnie i 0 jest mniejsze od 1.

— alternatywa, zapisywana przez **or** między zdaniami, np:

LTE0,11 OR LTE1,01
0 jest mniejsze od 1 lub 1 jest mniejsze od 0.

— implikacja, zapisywana **implies** między poprzednikiem i następnikiem, np:

LTE0,71 IMPLIES DODATNIE71
Jeśli 0 jest mniejsze od 7, to 7 jest dodatnie.

— równoważność, zapisywana przez **iff**, np.:

LTE0,71 IFF DODATNIE71; NOT 2=3 IFF 2<3
0 jest mniejsze od 7 wtedy i tylko wtedy, gdy 7 jest dodatnie.

Możemy (a czasami musimy) używać okrągłych nawiasów przy budowaniu zdań bardziej złożonych. Ciąg zdań atomowych albo dowolnych zdań w nawiasach możemy napisać bez dodatkowych nawiasów. Np:

LTE1,21 & LTE2,31 & LTE3,41 & LTE4,51
LTE6,71 OR LTE7,81 OR (LTE8,91 IMPLIES NOT LTE9,81)
1 jest mniejsze od 2 i 2 jest mniejsze od 3 i 3 jest mniejsze od 4 i 4 jest mniejsze od 5, 6 jest mniejsze od 7 lub 7 jest mniejsze od 8 lub też jeśli 8 jest mniejsze od 9, to 9 nie jest mniejsze od 8 — w drugim zdaniu widać, że w Mizarowym zapisie lepiej widać o co chodzi.

Koniunkcja jest najmocniej wiążącym spójnikiem. Następujące zdanie:

LTE1,21 & LTE2,31 OR LTC3,21 & LTE2,11

naależy rozumieć:

(LTE1,21 & LTE2,31) OR (LTC3,21 & LTE2,11)

Implikacja i równoważność są spójnikami wiążącymi dokładnie dwa zdania, z których każde może być zdaniem atomowym, ciągiem koniunkcji lub też dowolnym zdaniem ujętym w nawiasy. Niepoprawne jest zatem zdanie:

LTE5,61 IFF DODATNIE61 IMPLIES DODATNIE51

i musimy wstawić nawiasy, by wskazać, co jest argumentem którego spójnika.

W Mizarze możemy używać obu kwantyfikatorów: ogólnego i szczegółowego. Najprostszą postacią kwantyfikatora ogólnego wygląda tak np.:

FOR X BEING LICZBA
HOLDS LTCX,01 OR DODATNIECX OR X=0

Dowolna liczba x jest mniejsza od 0, dodatnia lub równa 0.

To co występuje po **holds** jest zdaniem i nazywa się zasięgiem kwantyfikatora. Wprowadzona zmienna związana (oznaczona x) jest określonego typu, mianowicie jest liczbą. Kwantyfikator może wiązać więcej zmiennych, które mogą być różnych typów np.:

```
FOR X,Y BEING LICZBA, Z BEING ZBIORLICZB
HOLDS X=Y & JESTWCX,ZJ IMPLIES JESTWCY,ZJ
```

Dla dowolnych liczb x i y oraz dla dowolnego zbioru liczb z jeśli $x = y$ i x jest elementem z , to y też jest elementem z .

Ostatnie zdanie możemy zapisać w postaci kwantyfikatora ograniczonego:

```
FOR X,Y BEING LICZBA, Z BEING ZBIORLICZB
ST X=Y & JESTWCX,ZJ HOLDS JESTWCY,ZJ
```

Dla dowolnych równych liczb x i y i dowolnego zbioru z , którego x jest elementem, zachodzi $y \in z$.

Zdanie występujące po **st** jest ograniczeniem obowiązywania kwantyfikatora. Takie ograniczenie może być wyeliminowane przez przeniesienie go do zasięgu kwantyfikatora jako poprzednika implikacji (por. dwa ostatnie zdania z kwantyfikatorami).

A oto przykład. iak zapisujemy kwantyfikator szczegółowy:

```
EX X BEING LICZBA ST DODATNIEEXJ
```

Istnieje liczba dodatnia x .

Zdanie występujące po **st** stanowi zasięg tego kwantyfikatora. Również kwantyfikator szczegółowy może wiązać więcej zmiennych.

Np.:

```
EX X,Y BEING LICZBA ST LTCX,YJ
```

Istnieją takie liczby x i y , że $x < y$.

W przypadku, gdy zasięgiem kwantyfikatora ogólnego jest zdanie rozpoczynające się kwantyfikatorem (dowolnym), to symbol **holds** możemy opuścić, np.:

```
FOR X,Y BEING PROSTA
EX Z BEING PUNKT ST NACZ,XJ & NACZ,YJ
```

Dowolne dwie proste mają punkt wspólny.

Wróćmy teraz do konstruktorów zdań atomowych, czyli do predykatów. W Mizarze-MSE nie przewiduje się konieczności oddzielnego wprowadzenia predykatów przez np.

zapowiadanie, jakich predykatów będziemy używać. Dwa używane predykaty są różne, jeśli zachodzi co najmniej jeden z poniższych warunków:

- mają różny symbol predykatu,
- różnią się liczbą argumentów,
- co najmniej dwa odpowiadające sobie według kolejności argumenty są różnych typów, np.: jeden jest liczbą, a drugi punktem.

Dla rozwiania wątpliwości podamy przykład.

Predykat użyty w zdaniu:

```
FOR X,Y BEING LICZBA HOLDS RCX,YJ
```

jest różny od predykatu użytego w poniższym zdaniu:

```
FOR X BEING LICZBA, Y BEING PROSTA HOLDS RCX,YJ
```

Pisząc jakikolwiek tekst matematyczny (np. artykuł) na ogół przyjmujemy w punkcie wyjścia pewne fakty za ustalone (aksjomaty lub twierdzenia już znane w pewnej dziedzinie) i na ich podstawie prowadzimy nasz wywód. W Mizarze przewidziano tę sytuację. Założenia do tekstu piszemy we wstępie po słowie **environ**. Założenia te nie są sprawdzane pod względem zasadności, a jedynie pod względem zgodności z regułami budowy zdań. Kolejne założenia we wstępie oddzielamy znakiem „;” i nadajemy im nazwy. Podamy przykład takiego wstępu dla geometrii Euklidesa na płaszczyźnie.

Wstęp rozpoczęty przez **environ** kończy się słowem **begin**, które z kolei rozpoczyna tekst zasadniczy. W jaki sposób piszemy ten tekst, podamy w następnych dziewięciu odcinkach. W nim bowiem zapisujemy nasze rozumowanie, dowody etc.

ENVIRON

```
AKSJOMAT1:
FOR L BEING PROSTA
EX A,B BEING PUNKT ST A(>)B & NACA,LJ & NACB,LJ
```

```
AKSJOMAT2:
FOR A,B BEING PUNKT
EX L BEING PROSTA ST NACA,LJ & NACB,LJ
```

```
AKSJOMAT3:
FOR A,B BEING PUNKT ST A(>)B
EX L BEING PROSTA
ST NACA,LJ & NACB,LJ &
(FOR L1 BEING PROSTA ST NACA,L1J & NACB,L1J
HOLDS L=L1)
```

```
AKSJOMAT4:
EX A,B,C BEING PUNKT
ST NOT (EX L BEING PROSTA ST NACA,LJ & NACB,LJ & NACC,LJ)
```

```
AKSJOMAT5:
FOR L BEING PROSTA, A BEING PUNKT ST NOT NACA,LJ
EX L1 BEING PROSTA
ST NACA,L1J &
NOT (EX B BEING PUNKT ST NACB,LJ & NACB,L1J) &
(FOR L2 BEING PROSTA
ST NACA,L2J &
NOT (EX C BEING PUNKT ST NACC,L2J & NACC,LJ)
HOLDS L2=L1)
```

aksjomat 1: Na każdej prostej leżą (co najmniej) dwa punkty.

aksjomat 2: Przez każde dwa punkty przechodzi prosta.

aksjomat 3: Przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta.

aksjomat 4: Istnieją trzy niewspółliniowe punkty.

aksjomat 5: Przez punkt poza prostą przechodzi dokładnie jedna prosta z nią rozłączna.

A teraz ZADANIA:

Podać zapisane w Mizarze-MSE wstępy do następujących teorii:

1. Teoria liniowego porządku dla ułamków.

Relacją porządkującą niech będzie relacja niewiększości opisywana przez dwuargumentowy predykat. Zapisać, że relacja ta jest zwrotna, przechodnia, antysymetryczna oraz spójna.

2. Teoria środka na prostej.

Jako podstawowy można przyjąć trójargumentowy predykat opisujący bycie środkiem. Zapisać, że

1. Dla każdego odcinka (tzn. dla dowolnych dwu punktów) istnieje jego środek.
2. Dla każdych dwu punktów a i b istnieje punkt c taki, że b jest środkiem odcinka $\langle a, c \rangle$.
3. Dla każdych pięciu punktów a, b, c, d, e takich, że b jest środkiem $\langle a, c \rangle$, d jest środkiem $\langle c, e \rangle$, c jest środkiem $\langle a, e \rangle$ zachodzi, że c jest środkiem $\langle b, d \rangle$.
4. Dowolny odcinek ma tylko jeden środek.

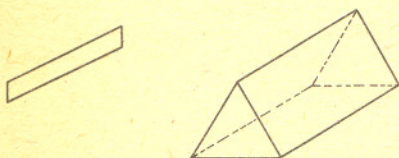
Rozwiązanie zadania 2 podajemy w numerze. Jeśli Czytelnicy zechcą przysłać nam swe rozwiązania zadania 1, to otrzymają od nas, w postaci wydruku z komputera, wynik sprawdzenia, czy ich zdania są zgodne z regułami Mizara.

Rozwiązania tego zadania (i zadań z następnych numerów) należy przysyłać pod adresem redakcji „Delt” z napisem na kopercie MIZAR. Do koperty z rozwiązaniem należy włożyć również zaadresowaną do siebie kopertę z naklejonym znaczkiem za 5 lub 6 zł (lepiej, jeśli koperty będą większego formatu, bo do małej koperty wydruk może się nie zmieścić). Tylko przy spełnieniu tych warunków Czytelnik otrzyma obiecany wydruk. Jeśli Czytelnicy będą chcieli podzielić się z nami swoimi uwagami czy wątpliwościami — prosimy o pisanie ich na innej kartce, niż rozwiązanie (gdy będzie więcej zadań, rozwiązanie każdego powinno być też na oddzielnej kartce).

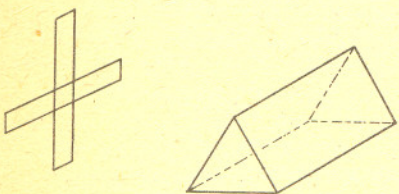
Analiza i synteza światła białego — jak to zrobić samemu?

Dr Zbigniew PŁOCHOCKI

Dobrym materiałem na pryzmat jest pleksyglas (szkło organiczne), który daje się łatwo ciąć piłką do metalu. W miejscach przecięcia powierzchnia pleksyglasu jest matowa i aby stała się przezroczysta, należy ją najpierw szlifować pilnikiem i papierem ściernym o różnych gradacjach, a następnie polerować, np. pastą czyszczącą.



Rys. 1



Rys. 2

Barwy to światło. Nie ma światła, nie ma barw; w ciemności nawet rude koty są czarne. A dlaczego światło białe potrafi wydobyć tyle barw w otaczającym nas świetle? Może samo wszystkie je zawiera?

Aby znaleźć odpowiedź na te pytania, wystarczy nam stosunkowo prosty przyrząd — pryzmat. Popatrzmy przez pryzmat na świat. Wszystko ujrzymy w tęczyowych obwódkach, a ponadto — w innym kierunku niż wtedy, gdy patrzymy bezpośrednio. Skąd ta pozorna zmiana kierunku? Sądzę, że Czytelnik sam potrafi na podstawie tej obserwacji odtworzyć bieg promieni świetlnych przez pryzmat.

A skąd tęczyowe obwódki? Zbadajmy rzecz dokładnie. Popatrzmy przez pryzmat na jasno oświetlony wąski pasek białego papieru usytuowany względem pryzmatu tak, jak to przedstawia rysunek 1. Zobaczymy tęczę. Znow spróbujmy na tej podstawie odtworzyć bieg promieni świetlnych przez pryzmat. Istnienia owej tęczy nie można wyjaśnić bez założenia, że podczas załamania na ścianach pryzmatu światło białe ulega rozszczepieniu na barwy składowe, z których każda załamuje się nieco inaczej.

Przekonawszy się o tym mamy prawo twierdzić, że dokonaliśmy analizy (rozkładu) światła białego na elementarne barwne składniki. Czy rzeczywiście — elementarne? Najpierw: w jakim sensie — elementarne? Skoro mowa o rozkładzie, wobec tego przez składnik elementarny należy rozumieć coś, czego już dalej rozłożyć nie można. Jak to wykazać? Ten problem chciałbym zostawić pomysłowości Czytelnika.

Dla całości obrazu należałoby jeszcze dowiedzieć, że te elementarne barwne składniki, na które za pomocą pryzmatu rozłożyliśmy światło białe, można na powrót złożyć. A to jak zrobić?

Na przykład można tak: patrzymy przez pryzmat na dwa cienkie i jasno oświetlone skrzyżowane (pod kątem prostym) paski papieru usytuowane względem pryzmatu tak, jak to przedstawia rysunek 2. Jeden pasek zobaczymy jako rozmyty w tęczyową wstęgę. Drugi zaś pozostanie... biały. Dlaczego? Odpowiedź na to pytanie pozwoli nam stwierdzić, że w tym doświadczeniu dokonaliśmy... syntezy światła białego.

Wskazówka: dlaczego górna i dolna krawędź paska, który widzimy jako biały, jest tęczyowa?

Po uporaniu się z tymi problemami wszystko powinno już być jasne i zrozumiałe. Wszystko? Dlaczego wobec tego wyraźnie niebieski płomień palnika kuchenki gazowej widzimy przez pryzmat jako tęczyowy? Dlaczego zdecydowanie żółty płomień świecy pryzmat ukazuje nam także jako wielobarwny? Dlaczego lampy reklamowe (neony) widzimy w pryzmacie również w tęczyowych kolorach? Dlaczego... i tak dalej. To już są jednak nieco inne zagadnienia związane z problemem barw prostych i złożonych.

Analiza i synteza światła białego — jak to zrobili inni?

Skąd się biorą barwy? To pytanie zadawali sobie już starożytni Grecy. Z pierwszą hipotezą na ten temat wystąpił Arystoteles w IV wieku p.n.e., modyfikując wcześniejszą koncepcję eteru kosmicznego, stworzoną przez Pitagorejczyków. Odmawiając wszelkim zjawiskom prawa zachodzenia w próżni Pitagorejczycy założyli istnienie niewyczuwalnego za pomocą zmysłów, idealnie przezroczystego, zimnego i wszechobecnego ośrodka, który miał pełnić rolę środowiska umożliwiającego światłu ciał niebieskich dotarcie do Ziemi. Ten hipotetyczny ośrodek nazwali eterem.

Otóż Arystoteles uważał, że światło polega na rozprzestrzenianiu się bliżej nieokreślonych procesów w eterze kosmicznym. Własności eteru miały więc decydować o własnościach światła. I tak, eter mógł być w dwóch podstawowych stanach: przezroczystości (jasności) lub nieprzenikliwości (ciemności). Realizacja tych dwóch zasadniczych stanów odpowiada właśnie światłu białemu (eter przezroczysty) lub czarnemu (eter nieprzezroczysty). Różne wrażenia barwne to wynik częściowej realizacji każdej z tych dwu podstawowych możliwości. Innymi słowy, każde światło barwne miało być mieszaniną światła białego i czarnego w odpowiednich proporcjach.

Ta spekulatywna koncepcja znacznie wyprzedzała możliwości sprawdzenia jej w doświadczeniach. A i później nie należała też do centralnych zagadnień fizyki. Przetrwiała więc prawie dwa tysiąclecia, bo aż do XVII wieku. Pierwsze, niezbyt konsekwentne próby doświadczalnej analizy

Podzielimy wielomian $W(x) = x(x+a)$ przez jednomian $(x+b)$. Zgodnie z twierdzeniem Bezout otrzymamy

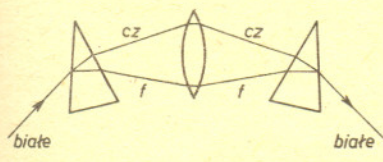
$$W(x) = W_1(x)(x+b) + W(-b).$$

Reszta z dzielenia jest, jak widać, $W(-b)$, czyli w naszym przykładzie $-5(-5+3) = 10$. Tak też dla rozpatrzonych k (57, 100, 222) było. Jednak nie zawsze reszta jest równa $b(b-a)$. Mamy np.

$$1(1+3) = 0(1+5) \text{ reszta } 4,$$

$$3(3+3) = 2(3+5) \text{ reszta } 2.$$

Czyżby więc nasz dowód był zły? I znów odpowiedź można znaleźć w numerze.



Rys. 3

problemu podjął J. M. Martius opisując je w swym dziele wydanym w 1648 r. Na drodze światła przechodzącego przez mały otwór ustawił on pryzmat i na ekranie znajdującym się za otworem zaobserwował wielobarwny, tęczyowy obraz oświetlonego przedmiotu. Obserwacje doprowadziły go do wniosku, że światło różnej barwy powinno załamywać się w szkle pod różnym kątem, a promień jednobarwny powinien zachowywać swą barwę podczas załamania. Wnioski te były w jawnej sprzeczności z przyjętą wówczas teorią barw Arystotelesa. Martius nie zdobył się jednak na jej zakwestionowanie i może właśnie dlatego nie doprowadził swych badań do końca.

Dzieło Martiusa podjął Isaac Newton traktując opisane zjawisko jako klucz do zrozumienia natury światła i nie żywiąc żadnego respektu przed wielkim filozofem starożytnym zaczął od powtórzenia doświadczenia Martiusa, ale w udoskonalonej wersji. Wąską smugę światła słonecznego skierował Newton na pryzmat i na ścianie pokoju ujrzał autentyczną tęczę. Wynik tego doświadczenia przywiódł go do wniosku, że światło białe jest mieszaniną elementarnych jednobarwnych składników różniących się barwą. W celu sprawdzenia tego wniosku Newton wykonał jeszcze dwa inne doświadczenia.

W pierwszym postanowił poddać analizie elementarność jednobarwnych składników światła. W tym celu skonstruował pierwszy w historii monochromator, czyli urządzenie, które służy do wyodrębniania promieni monochromatycznych z wiązki światła białego. Następnie za pomocą swego monochromatora zbadał doświadczalnie własności promieni jednobarwnych. Eksperymenty wykazały całkowitą słuszność domysłów Martiusa. Rzeczywiście, promienie jednobarwne nie ulegały już rozszczepieniu i każdej barwie odpowiadała inna wartość współczynnika załamania. Elementarność monochromatycznych składników światła białego została więc udowodniona. Na tej podstawie Newton uznał barwę za podstawową cechę charakterystyczną każdego elementarnego składnika światła.

No dobrze, ale jeśli uda nam się rozłożyć jakąś mieszaninę na jej elementarne składniki, to mieszając te składniki razem powinniśmy ponownie otrzymać tę samą mieszaninę. Jeśli więc światło białe jest mieszaniną promieni monochromatycznych, to składając takie promienie uzyskane z rozłożenia światła słonecznego na składniki powinniśmy w wyniku otrzymać znowu światło słoneczne. Aby to wykazać, Newton przeprowadził przedstawione na rysunku 3 doświadczenie.

Opisane badania Newtona definitywnie rozstrzygnęły problem analizy i syntezy widmowej światła białego. Nie rozstrzygnęły natomiast wszystkich problemów związanych z barwami. Oto na przykład światło czerwone uzyskane w wyniku przepuszczenia światła białego przez filtr (czerwony) nie jest tożsame ze światłem tejże barwy uzyskanym w rezultacie rozszczepienia światła białego w pryzmacie. Więcej, nie jest ono też elementarne w tym sensie, że rozszczepione w pryzmacie tworzy bogate, acz nieco zubożone widmo wielobarwne. Tak więc rozwiązanie tytułowego zagadnienia stanowiło jedynie pierwszy krok ku zrozumieniu fizycznej natury wrażeń barwnych.



Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 340. Żadne trzy z siedmiu danych punktów płaszczyzny nie są współliniowe. Wykazać, że można wśród nich znaleźć trzy wierzchołki trójkąta, którego jeden z kątów jest większy niż $2\pi/3$.

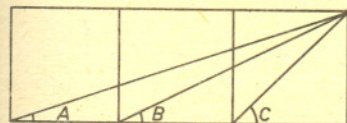
Rozwiązanie na str. 14

M 341. Znaleźć wszystkie liczby całkowite, których kwadraty mają w zapisie dziesiętnym równe dwie ostatnie cyfry.

Rozwiązanie na str. 15

M 342. Wykazać, że $\sphericalangle A + \sphericalangle B = \sphericalangle C$ (patrz rysunek).

Rozwiązanie na str. 12



Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

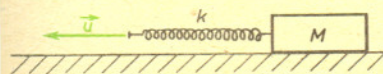
F 139. Na poziomej płaszczyźnie spoczywa klocek o masie M przytwierdzony do nieważkiej sprężyny o współczynniku sprężystości k . W pewnej chwili swobodny koniec sprężyny uzyskuje stałą prędkość u (patrz rysunek). Jaki ruch będzie wykonywał klocek, jeżeli

a) współczynniki tarcia: statycznego i kinetycznego są równe,

b) współczynnik tarcia statycznego jest większy niż kinetycznego?

Należy pominąć opór ośrodka i tarcie wewnętrzne w materiale sprężyny, tarcie kinetyczne uznać za niezależne od prędkości.

Rozwiązanie na str. 13



Redukcjonizm w biologii, czyli o drogach poznania życia

Prof. dr Władysław J. H. KUNICKI-GOLDFINGER, członek korespondent PAN

Redukcjonizm (od łac. *reductio* — sprowadzenie) to pogląd głoszący, że zjawiska i procesy bardziej złożone dają się w pełni wyjaśnić przez sprowadzenie ich do zjawisk i procesów prostszych i praw nimi rządzących (np. psychologia — do biologii, biologia — do chemii, ta zaś z kolei — do fizyki), a różnice między nimi mają wyłącznie ilościowy charakter. Innymi słowy, prawa danej nauki „wyższego” poziomu są całkowicie sprowadzalne do praw nauk poziomów „niższych”; nie istniałyby więc, w gruncie rzeczy, żadne prawa specyficzne dla danego poziomu.

Natomiast postawa przeciwna, antyredukcjonizmu mianowicie, implikuje — tak w sensie ontologicznym, jak teoriiopoznawczym — „nieciągłość” otaczającego nas świata (tj. głębokie różnice jakościowe dzielące jego poszczególne poziomy).

W praktyce oczywiście oba te kierunki wyznaczać można bądź w sposób rygorystyczny, bądź umiarkowany. Na ile poglądy te mogą być zasadne w odniesieniu do biologii, jak głęboka jest przepaść pomiędzy zjawiskami życia a ich strukturalnym podłożem i czy warto w nią skakać — dowiedzieć się można z zamieszczonego tu artykułu.

Zacząć ten artykuł wypada od wyjaśnienia. Wyjaśnić bowiem trzeba Czytelnikowi o czym mówić będziemy i dlaczego uważamy, że mówić o tym warto. Biologia jest nauką zajmującą się badaniem zjawisk życia i wyjaśnianiem mechanizmów tych zjawisk. Zjawiska życia zachodzą w żywych organizmach, a więc w ciałach fizycznych o określonej i już jako tako znanej budowie chemicznej. Zjawiska te przebiegają zatem zgodnie z prawami fizyki i chemii. I do tego momentu rozumowania wszyscy są właściwie zgodni. Już dawno przestano szukać jakiejś „siły życiowej”, jakiegoś swoistego materialnego czy niematerialnego czynnika, właściwego jedynie dla istot żywych i określającego ich odrębność. Żywe organizmy są ciałami fizycznymi, zbudowanymi z określonych związków chemicznych, ich działanie posłuszne jest prawom fizyki i chemii i nie wymaga, dla swego wyjaśnienia, postulowania czegoś poza te prawa wykraczającego. I to jest oczywiste.

Problem kryje się jednak nie w tym, lecz w pytaniu, czy znajomość praw fizyki i chemii wystarcza, by wyjaśnić wszystkie zjawiska życia oraz, czy można pokusić się o przewidywanie na podstawie tych praw przebiegu tych zjawisk i ich przyszłych dróg. Pytanie dotyczy zatem problemu, jak można i należy badać procesy życiowe. A ponieważ od odpowiedzi na to pytanie zależy nie tylko lepsze poznanie zjawisk życia, ale także wiele praktycznych zastosowań biologii, jak medycyna, rolnictwo, przechowalnictwo żywności i jej przerób, i wiele innych gałęzi naszego życia, przeto zastanowić się nad tym warto. Wiemy już więc, o czym chcemy mówić i dlaczego warto to czynić. Przejdźmy wobec tego do właściwego tematu.

Postępy fizjologii, genetyki, biochemii, biologii molekularnej pozwoliły obecnie na stworzenie o wiele pełniejszego i dokładniejszego obrazu życia. Znamy budowę białek, które jako enzymy lub inne biologicznie czynne makrocząsteczki białkowe przeprowadzają tysiące reakcji chemicznych w organizmie, składających się na to, co nazywamy przemianą materii i energii — na procesy oddychania, odżywiania, wzrostu, pomnażania, reagowania, ruchu itd. Znamy mechanizmy syntezy tych białek oraz wiemy, że budowa, struktura tych białek, u każdego organizmu odmienna, zależy od tzw. informacji genetycznej zapisanej w strukturze kwasów nukleinowych, też już zresztą poznanej. Najprostsze organizmy, np. niektóre bakterie, znamy już bardzo dokładnie i z ufnością możemy przewidywać, że w przyszłości (może już nie tak dalekiej), poznamy cały zestaw białek tych organizmów i strukturę całej informacji genetycznej zapisanej w ich kwasie nukleinowym. Budowa składowych związków organicznych jest zależna od właściwości atomów te związki budujących i od praw fizyko-chemicznych, również już częściowo rozpoznanych. A jeśli tak, słuszne wydaje się pytanie, czy znając wszystkie składowe podstawowe elementy oraz reguły ich działania nie możemy już na tej podstawie wyjaśnić bez reszty zasad budowy i działania żywego organizmu. Pytanie niewątpliwie zasadne, ale odpowiedź nie jest tak oczywista. Zanim jej udzielimy, zróbmy małą dygresję.

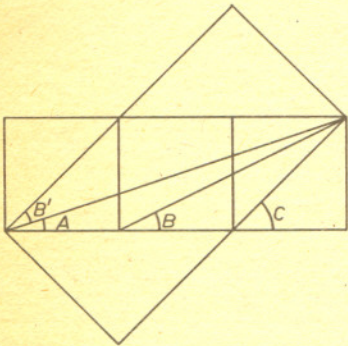
Pomówmy o zegarze, zwykłym mechanicznym zegarze z wieloma zębatymi kółkami i sprężyną lub wagami. Mechanizm może być wykonany z dowolnego materiału, byleby był dostatecznie twardy. Można wykonać dokładną analizę tego przedmiotu, poznać jego skład oraz wszystkie prawa rządzące zachowaniem atomów i związków chemicznych — i nadal nie mieć pojęcia, jakie funkcje wypełnia ów mechanizm i na jakiej zasadzie działa. Aby się tego dowiedzieć, należy zainteresować się nie jego molekularną budową, lecz konstrukcją — tzn. rozpoznać elementy składowe mechanizmu oraz zrozumieć ich wzajemne relacje i współdziałanie. Do zrozumienia tego wiadomości o strukturze molekularnej nie byłyby już konieczne, bo ani układ atomów, ani struktura cząsteczek nie dostarczyłyby tu potrzebnych informacji. Zegar bowiem, poza tym, że jest ciałem składającym się z jakichś określonych atomów i cząsteczek, jest też układem, systemem zaprogramowanym do spełniania jakiejś funkcji.

Otóż żywy organizm jest też systemem, układem zaprogramowanym. Program jego powstał w drodze ewolucji. Program ten określa zasadniczą funkcję organizmu — samopomnażanie się oraz funkcje pomocnicze do tego niezbędne, jak oddychanie, odżywianie, wzrost itd. Program ten jest zapisany w strukturze kwasów nukleinowych, którą już nieźle poznaliśmy, a poznamy lepiej w przyszłości. Ale sposób zapisu tego programu i jego treść nie są określane przez fizyko-chemiczne właściwości kwasów nukleinowych — są jedynie przez nie warunkowane. Program określa bowiem elementy składowe organizmu i ich wzajemne funkcjonalne powiązania. Z punktu widzenia fizyko-chemii pod względem termodynamicznym kwasy nukleinowe człowieka i świni nie różnią się niczym. Człowiek jednak od świni w zasadzie różni się, a nawet są ludzie, którzy nie są świniami.

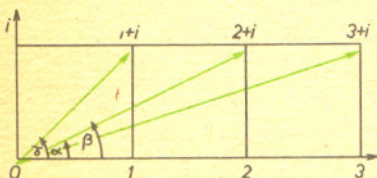
Poznanie molekularnej struktury organizmu żywego jest zatem konieczne, ale nie wystarczające dla wyjaśnienia działania organizmu i jego rozwoju.



Rozwiązanie zadania M 342. $\star B = \star B'$



Można także rozwiązać to zadanie używając liczb zespolonych. Wprowadzając układ współrzędnych na płaszczyźnie C widzimy,



że „górne” wierzchołki kwadratów odpowiadają liczbom $1+i$, $2+i$, $3+i$. Iloczyn $(1+i)(2+i)(3+i)$ wynosi $10i$. Ze wzoru de Moivre'a wynika jednak, że $\alpha + \beta + \gamma = \text{Arg } 10i = \pi/2$.

Niezbędne jest też poznanie budowy systemu i funkcjonowania jego zgodnie z posiadanym programem genetycznym.

Widzimy więc, że budowy i działania żywego organizmu nie możemy wyjaśnić na podstawie samej jego znajomości na poziomie molekularnym; konieczne jest badanie go na poziomie systemowym (organizmalnym, a faktycznie i ponadorganizmalnym — populacyjnym i ekologicznym). Konieczność ta wynika nie tylko z systemowej natury żywych organizmów, ale także i z tej ich właściwości, że są one twórcami ewolucji i mają historię. Krysztal np. możemy poznać bez reszty nie znając jego historii. Żywego organizmu poznać i wyjaśnić bez reszty nie można bez odwołania się do jego historii. W tym historycznym rozpatrywaniu żywych istot biologia molekularna jest nam pomocna, a nawet niezbędna, ale historia życia, przebieg ewolucji są modelowane przez mechanizmy ewolucji, czynne na poziomie genetycznym i międzyosobniczym — i bez uciekania się do badań na tych poziomach pozostaną dla nas niewyjaśnialne.

Zadaliśmy pytanie i uznaliśmy je za ważne. Doszliśmy teraz do odpowiedzi: badanie fizykochemiczne, molekularne zjawisk życia jest absolutnie konieczne i tak samo absolutnie nie wystarczające. Musi być nie tylko uzupełniane, ale musi też szukać problemów i wyjaśnień w badaniach na poziomie organizmu jako całości, na poziomie współdziałań między organizmami.



Rozwiązanie zadania F 139. W układzie odniesienia związanym ze swobodnym końcem sprężyny (układ inercjalny) podłoże i klocek poruszają się początkowo z identycznymi prędkościami — u . Sprężyna wydłuża się, wzrasta siła sprężystości i równoważąca ją siła tarcia statycznego. Po przekroczeniu maksymalnej wartości tarcia statycznego rozpoczyna się poślizg. Ruch klocka opisuje wtedy równanie:

$$Ma_x = fMg - kx;$$

gdzie f — współczynnik tarcia kinetycznego (początek układu odpowiada położeniu klocka przy nieodkształconej sprężynie). Jest to równanie oscylatora harmonicznego o częstości $\omega^2 = \frac{k}{M}$ i położeniu równowagi $x_0 = \frac{fMg}{k}$. Od chwili zerwania więzi z podłożem klocek wykonuje więc drgania harmoniczne:

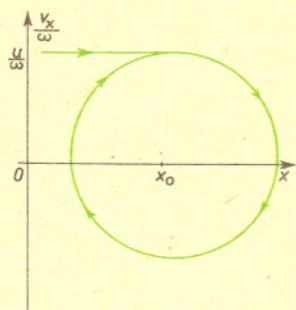
$$x = x_0 + A \sin \omega t,$$

$$v_x = A \omega \cos \omega t.$$

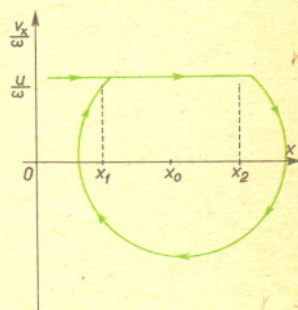
Z warunku początkowego $v_x(t=0) = u$ wynika wartość amplitudy tych drgań $A = u/\omega$. Analogicznie zachowuje się wprawiony w drgania obciążnik zawieszony na sprężynie i umieszczony w polu siły ciężkości.

Przedstawmy ruch klocka na wykresie fazowym (patrz rozwiązanie zadania F 136). Punktowi a) odpowiada wykres z rysunku 1. Gdy współczynnik tarcia kinetycznego f jest mniejszy niż statycznego — μ (punkt b), poślizg rozpoczyna się przy $x_1 = \frac{\mu M g}{k}$. W trakcie poślizgu klocek, podobnie jak poprzednio, drga

harmonicznie z częstością ω względem położenia równowagi x_0 — z tym że przy $x_2 = 2x_0 - x_1$ prędkość względna spada do zera i na odcinku od x_2 do x_1 jest on „ciągnięty” przez podłoże ze stałą prędkością. Odpowiedni wykres fazowy —



Rys. 1



Rys. 2

jest przedstawiony na rysunku 2.

W realnych sytuacjach nie można pominąć wpływu tłumienia. Gdy tłumienie praktycznie nie zmienia częstości (słabe tłumienie), wykres fazowy dla punktu a) będzie związającą się do x_0 spiralą. Drgania klocka ustają i porusza się on wraz ze sprężyną z prędkością u . W przypadku b) drgania mogą ustać lub nie, zależnie od stosunku współczynników tarcia, prędkości u oraz intensywności tłumienia.

Opisany przykład pozwala zrozumieć, w jaki sposób smyczek pobudza do drgań strunę. Smyczek odgrywa podobną rolę jak podłoże; pociąga za sobą strunę, a ta po zerwaniu z nim więzi zaczyna drgać harmonicznie. Tarcie jest w tym przypadku funkcją prędkości względnej i „skokowa” idealizacja z punktu b) daje tylko jakościowy opis zjawiska.

Jeszcze jeden paradoks ekonomiczny

Wyobraź sobie Czytelniku, że mieszkasz na Wyspie Rajskiej, gdzie utrzymanie nic Cię nie kosztuje, a cały zarobek odkładasz na wymarzony samochód lub mieszkanie. Przypuśćmy, że w obecnym roku zarobiłeś 120 000 goldów (gold — jednostka monetarna na Wyspie Rajskiej); samochód kosztuje 750 000 goldów, a mieszkanie 1 500 000 goldów. Cały zarobek wpłacasz na konto w banku, w którym stopa procentowa jest równa 15%. Inflacja na Wyspie Rajskiej wynosi 25%, przy czym zapewniona jest pełna rekompensata, tj. Twoje zarobki wzrastają też o 25% rocznie. Dla uproszczenia założmy jeszcze, że cały wzrost cen następuje 31 grudnia, a całą pensję otrzymujesz 1 stycznia i natychmiast wpłacasz do banku.

Po ilu latach będziesz mógł kupić mieszkanie? Dla ułatwienia dodajmy, że na samochód będzie Cię stać po ośmiu latach. Odpowiedź jest zaskakująca. Nigdy nie kupisz mieszkania. A oto kalkulacja:

Wprowadźmy oznaczenia: inflacja — 100 $i\%$, stopa procentowa banku 100 $b\%$, cena produktu w roku zerowym — c goldów, Twoja pensja w tymże roku — z goldów.

Obliczmy stan Twojego konta w roku n . Twoja pensja w roku k wyniesie $(1+i)^k \cdot z$ goldów, a więc złożona w banku po $n-k$

latach będzie równa $(1+b)^{n-k} \cdot (1+i)^k \cdot z$ goldów (razem z procentami). Będziesz miał w banku po n latach:

$$(1+b)^n \cdot z + (1+b)^{n-1} \cdot (1+i)z + \dots + (1+i)^n z =$$

$$= z(1+b)^n \frac{\left(\frac{1+i}{1+b}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1+i}{1+b} - 1} = z \frac{(1+i)^{n+1} - (1+b)^{n+1}}{i-b}$$

Oczywiście, cena produktu w roku n wyniesie $c \cdot (1+i)^n$, a więc będziesz mógł go kupić, jeśli spełniona jest nierówność

$$c \leq z \cdot \frac{1+i - \left(\frac{1+b}{1+i}\right)^n (1+b)}{i-b},$$

ale prawa strona nierówności jest zawsze mniejsza, niż

$$c_{\min} = z \cdot \frac{1+i}{i-b}.$$

Tak więc produktu o cenie początkowej c_{\min} lub większej nigdy nie kupisz. W konkretnym przypadku:

$$c_{\min} = 120\,000 \cdot \frac{1+0,25}{0,25-0,15} = 120\,000 \cdot \frac{125}{10} = 1\,500\,000.$$

Doc. dr Michał ŚWIĘCKI

Wszechwładnie panująca w fizyce mechanika kwantowa jest teorią wyjątkowo trudną pojęciowo. Chociaż obowiązujące w niej reguły gry, czyli jej postulaty, są stosunkowo łatwe do wyuczenia i stosowania, to jednak kryjąca się za nimi rzeczywistość jest co najmniej niejasna. Mechanika kwantowa bowiem żadnego określonego obrazu świata nie proponuje, a być może nawet żadnego nie dopuszcza. Nic więc dziwnego, że ogromne jej sukcesy, czyli tak zwana zgodność z doświadczeniem, wciąż wzbudzają różnego rodzaju kontrowersje filozoficzne. Sam Werner Heisenberg głosił w związku z tym pogląd o granicach ludzkiego poznania, w którym, po przekroczeniu progu mikroświata, bardziej istotny staje się proces obserwacji czy pomiaru niż obiektywne własności obserwacyjne rzeczywistości. Pogląd nie podzielany na szczęście przez większość fizyków. Słowa „na szczęście” brzmią tu optymistycznie i znacznie na wyrost, gdyż nikomu dotychczas nie udało się zbudować zwartego systemu filozoficznego zgodnego z postulatami mechaniki kwantowej.

Wydaje się, że są dwa tego powody.

Pierwszy obciąża Isaaca Newtona i polega na nieprzewidywanej dotychczas, dość automatycznej, tendencji wyobrażania sobie wszystkiego na sposób mechanistyczny. A także falowy, ale fale przecież wzięły się również z czysto mechanicznej teorii rozchodzenia się np. dźwięku. Mikroświat jednak nie jest na pewno ani czysto falowy, ani cząstkowy (mechaniczny). A ponieważ mamy naturalną tendencję, aby obserwować go na te dwa sposoby, więc widzimy coś dwójakiego, falowo-korpuskularnego. Prowadzone przez Einsteina próby włączenia do tego schematu trzeciej siły, a mianowicie własności samej przestrzeni, nie przyniosły, poza teorią grawitacji, żadnych znaczących sukcesów.

Zupełnie innym powodem trudności pojęciowych występujących w mechanice kwantowej jest wyróżniona rola, jaką gra w niej przyrząd pomiarowy. Z jednej strony spełnia on, podobnie jak w całej fizyce, funkcję swoistego zewnętrznego i obiektywnego informatora przekazującego nam wieści o Przyrodzie. Z drugiej jednak strony sam przyrząd jest tej Przyrody częścią i to z pewnością nie najmniej ważną, gdy badamy za jego pomocą rzecz tak znikomą, jak na przykład elektron. Bez wątpliwości przyrządy nasze zakłócają naturalne własności obserwowanych cząstek. Rzecz w tym, czy tych zakłóceń nie można by jakoś kontrolować. Mechanika kwantowa stoi tu na stanowisku przyrządu czysto klasycznego, nie kwantowego, którego drastyczny i niekontrolowany wpływ polega wyłącznie na ustaleniu wartości zaprogramowanych konstrukcyjnie wielkości pomiarowych. Nie ulega wątpliwości, że tak stworzony system może być i jest niezwykle skuteczny w przewidywaniu wyników różnorodnych doświadczeń i w budowaniu zadziwiających nieraz i bardzo nam przydatnych urządzeń. Nie ulega jednak również wątpliwości, że przyrząd pomiarowy może zmieniać w jakiś inny, bardzo określony sposób, warunki doświadczenia, na przykład samą przestrzeń, na której rozgrywa się historia świata cząstek. I to zmieniać zależnie od tego, co i jak jest mierzone. Taki ewentualny wpływ przyrządu pomiarowego nie został dotychczas zbadany. Choć, jak się okazuje, są już po temu możliwości. Wysiłkom czynionym w tym kierunku będzie poświęcona reszta artykułu.

Wyobraźmy sobie wiązkę światła przechodzącą przez pryzmat polaryzacyjny Nicola. W pryzmacie tym światło ulega rozszczepieniu na dwie składowe: jedną spolaryzowaną liniowo w pewnym kierunku (określonym przez orientację osi głównych kryształu) i drugą spolaryzowaną w kierunku prostopadłym do poprzedniego. Jeżeli na drodze jednej z tych składowych ustawimy drugi pryzmat, nieco względem pierwszego obrócony, to spolaryzowane już liniowo światło znów rozszczepi się na nowe dwie składowe o kierunkach polaryzacji określonych przez osie główne drugiego pryzmatu. Nie ma w tym wszystkim nic nadzwyczajnego. Specyfika mechaniki kwantowej pojawia się dopiero, gdy uświadomimy sobie, że światło monochromatyczne (a o takim będziemy dalej mówić) składa się z dobrze określonych kwantów, fotonów o niepodzielnej energii $E = h\nu$. Co dzieje się więc z pojedynczym fotonem przechodzącym przez układ obu pryzmatów? Z pierwszego pryzmatu wyjdzie on spolaryzowany w jednym z dwóch możliwych kierunków. Nic innego zrobić nie może. Przejście tego spolaryzowanego już fotonu przez pryzmat drugi też nie może doprowadzić do rozszczepienia fotonu i podziału jego energii.

Światło przecież nie zmienia przy takim przejściu swojej barwy. Tak więc spolaryzowany liniowo foton przejdzie na drodze jednej albo drugiej składowej i odpowiednio zmieni swoją polaryzację. Droga, którą wybierze foton i w konsekwencji jego końcowa polaryzacja nie mogą być przewidziane. Jedyna rzecz, którą możemy z pewnością powiedzieć, sprowadza się do określenia stosunku prawdopodobieństwa przejścia po obu drogach. Stosunek ten musi być oczywiście równy stosunkowi natężeń odpowiednich składowych światła — zbiorowiska wielu



Rozwiązanie zadania M 340. Zauważmy, że

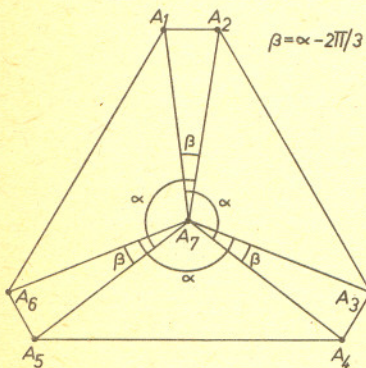
1. W dowolnym trójkącie ABC istnieje najwyżej jeden punkt, z którego wszystkie boki tego trójkąta widać pod kątami nie przekraczającymi $2\pi/3$;

2. Jeżeli trójkąty ABC i $A'BC$ zawierają punkt D , z którego wszystkie ich boki widać pod kątem $2\pi/3$, to punkty A, A', D są współliniowe (bo $\sphericalangle ADB = \sphericalangle A'DB$).

Przypuśćmy teraz, że $A_1 \dots A_7$ nie jest siedmiokątem wypukłym. Wynika stąd, że albo

1. najmniejszy wielokąt wypukły zawierający te punkty jest trójkątem np. $A_1 A_2 A_3$ i wtedy z jednego spośród punktów A_4, \dots, A_7 pewien bok tego trójkąta widać pod kątem większym od $2\pi/3$, albo

2. punkt A_7 leży wewnątrz pewnego czworokąta wypukłego (np. $A_1 A_2 A_3 A_4$). W takim przypadku prowadząc przekątne tego czworokąta zauważymy, że A_7 leży w dwóch trójkątach o wspólnej podstawie i teza zadania wynika z uwagi 2.



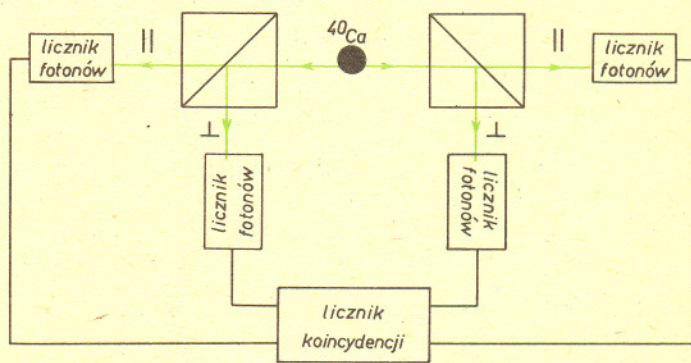
Jeżeli teraz $A_1 \dots A_7$ jest siedmiokątem wypukłym, to ponieważ suma kątów wewnętrznych siedmiokąta wynosi 5π , jeden z tych kątów musi być większy od $2\pi/3$. Uwaga: Podanego w zadaniu oszacowania nie można ulepszyć. Jeżeli bowiem $\alpha > 2\pi/3$, to w konfiguracji przedstawionej na rysunku żaden z kątów $A_1 A_j A_k$ nie jest większy niż α .



fotonów. W wyniku przejścia przez drugi pryzmat stan polaryzacyjny fotonu, określony jedynie statystycznie (choć z punktu widzenia pryzmatu pierwszego zupełnie określony) zmienia się w stan całkowicie jednoznaczny.

Przejdziemy teraz do doświadczenia nieco bardziej złożonego. Pierwotna jego idea pochodzi jeszcze z 1935 roku i jest autorstwa Einsteina, Podolsky'ego i Rosena. Doświadczenie to opiszemy w wersji wykonanej dwa lata temu. Kawałek wapnia (^{40}Ca) jest wzbudzany dwiema monochromatycznymi wiązkami laserowymi (długości fal 422,7 nm oraz 551,3 nm) na swój drugi poziom wzbudzony o spinie $J = 0$. Następnie wapń rozpada się kaskadowo: najpierw na pierwszy poziom wzbudzony ($J = 1$) wysyłając światło o długości fali 551,3 nm, a następnie na poziom podstawowy ($J = 0$) z emisją światła o długości fali 422,7 nm. Można pokazać (choć nie będziemy tego robić), że takiemu przejściu pojedynczego atomu bez zmiany momentu pędu (od $J = 0$ do $J = 0$) musi towarzyszyć emisja światła o bardzo określonej polaryzacji liniowej. Polaryzacja obu wysyłanych w kaskadzie fotonów musi być taka sama, choć poza tym zupełnie dowolna. Wymaga tego ogólnie obowiązująca zasada zachowania momentu pędu (a także parzystości, która nie budzi wątpliwości w oddziaływaniach typowo elektromagnetycznych). Wobec tego, jeśli będziemy rejestrować pojedyncze fotony (to jest możliwe) pochodzące z rozpadów kaskadowych pojedynczych atomów (to również jest możliwe), to zaobserwujemy wyłącznie pary o takiej samej polaryzacji.

Wyobraźmy sobie, że po obu stronach próbki wzbudzonego wapnia ustawiliśmy dwa tak samo zorientowane pryzmaty Nicola, za nimi zaś liczniki fotonów (patrz rysunek). Zaobserwujemy wtedy, że zawsze oba fotony przejdą w obu pryzmatach po tych samych drogach, z tą samą polaryzacją. Z drugiej strony jednak wybór jednej z dwóch możliwych dróg jest całkowicie przypadkowy. Podobnie, jak poprzednio, w przypadku jednofotonowym, tak i teraz stan polaryzacyjny układu dwóch fotonów jest zupełnie nieokreślony, choć tym razem polaryzacja względna jest jednoznaczna. Jeśli więc zmierzmy jakąkolwiek wartość polaryzacji jednego z fotonów, polaryzacja drugiego staje się nagle całkowicie określona. I to nawet w przypadku, gdy oba fotony znajdują się w chwili pomiaru w odległości wykluczającej jakikolwiek kontakt między nimi (w przeprowadzonym doświadczeniu czas trwania pojedynczej rejestracji obu fotonów wynosił 20 ns, zaś odległość pomiędzy pryzmatami 13 m, dwa razy za duża, jak na ewentualny kontakt świetlny).



Trudność wydaje się pozorna. Wszak powiedzieliśmy, że takiego wyniku doświadczenia wymaga zasada zachowania momentu pędu. Jednak nie wszystko jest do końca jasne. Kontynuując na pojedynczym fotonie serię pomiarów polaryzacyjnych z różnie obróconymi pryzmatami otrzymalibyśmy różne pośrednie kierunki polaryzacji. Wtedy drugi foton znajdujący się już bardzo daleko powinien bez żadnego oddziaływania i bez żadnego pomiaru wciąż zmieniać swoją polaryzację. Mechanika kwantowa zapobiega temu postulując, że już pierwszy pomiar określił jednoznacznie stan drugiego fotonu i bez przeprowadzonego na nim pomiaru stan ten nie może być zmieniony. Pomiary przeprowadzane na fotonie pierwszym przestają mieć od tej chwili jakiegokolwiek znaczenie. Pozostaje tu jednak jakaś niejasność i aż się prosi, żeby wprowadzić dodatkowy ukryty (nie podlegający pomiarowi) parametr, który uzależniałby w odpowiedni sposób stany polaryzacyjne obu fotonów.

Można zresztą pójść dalej i spróbować stworzyć teorię z dowolną liczbą parametrów ukrytych, umykających jakiegokolwiek kontroli doświadczalnej. Pojawiająca się w ten sposób statystyczna nieokreśloność mogłaby mieć wtedy twardy, choć niemierzalny, jednoznaczny grunt. Teoria taka powinna oczywiście być albo tożsama z mechaniką kwantową, albo powinien istnieć eksperyment dokonujący wyboru. Otóż taki kluczowy eksperyment wykluczający prawie wszystkie możliwe teorie z parametrami ukrytymi został ostatnio wykonany.



Rozwiązanie zadania M 341. Ponieważ $(2n)^2 = 4n^2$, a $(2n+1)^2 = 4(n^2+n)+1$ i ponieważ ostatnią cyfrą kwadratu liczby naturalnej może być 0, 1, 4, 5, 6, 9, kwadraty liczb spełniających warunki zadania mogą się kończyć cyframi 44 lub 00 (liczby kończące się 11, 55, 66, 99 dają przy dzieleniu przez 4 reszty 2 lub 3). Gdy teraz $N^2 = 100s+44$, mamy $N = 2n$ i $n^2 = 25s+11$, czyli $n^2 - 36 = 25(s-1)$, a więc $25 \mid (n-6)(n+6)$, co jest możliwe tylko wtedy, gdy $n = 25k-6$ lub $n = 25k+6$. Mamy więc trzy serie rozwiązań: $N = 10k$, $N = 50k+12$, $N = 50k+38$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Aby dzielenie wielomianów pokrywało się z dzieleniem liczb, reszta musi być mniejsza od dzielnika, czyli w naszym przypadku

$$(x+b) > W(-b) = b(b-a),$$

czyli

$$x > b(b-a-1).$$

W naszym przykładzie reszta będzie więc równa 10, gdy k będzie większe od $5 = 5(5-3-1)$. Dla rozpatrzonych poprzednio przykładów, wobec

$$W_1(x) = x + (a-b) \text{ mamy}$$

$$x(x+a) = (x+(a-b))(x+b) + b(b-a)$$

i dla $x = 1$ mamy

$$1(1+3) = (1+3-5)(1+5) + 10,$$

czyli

$$4 = -6 + 10$$

i

$$3(3+3) = (3+3-5)(3+5) + 10.$$

czyli

$$18 = 8 + 10,$$

co jest prawdą, tyle że nie ma związku z naszym zadaniem. Widać więc, że dzielenie liczb i wielomianów to różne dzielenia, choć często można z dzielenia wielomianów przy dzieleniu liczb korzystać. Tylko ostrożnie.

Gdyby ktoś chciał mieć wynik początkowego zadania dany „jednym wzorem”, to można to już teraz zrealizować. Wynikiem jest

$$b(b-a) \bmod (k+b)$$

i wobec tego, począwszy od momentu, gdy $k+b > b(b-a)$, nie zależy on od k .

Okazuje się bowiem, że ogromna klasa takich realistycznych teorii nie może być tożsama doświadczalnie z mechaniką kwantową. Są to tzw. teorie lokalne. W celu zdefiniowania ich wróćmy do naszego doświadczenia z kaskadowym rozpadem wapnia. Wyobraźmy sobie, że stan dwu fotonów jest dodatkowo określony przez pewien zbiór parametrów ukrytych λ . Dopuszczymy możliwość dowolnego ustawienia obu pryzmatów — w kierunku, powiedzmy, a i b . Warunek lokalności oznacza wtedy, że prawdopodobieństwo uzyskania każdego wyniku polaryzacyjnego w pryzmacie a (b) zależy tylko od ustawienia tego pryzmatu i od wartości λ (po której uśredniamy), a nie zależy od ustawienia drugiego pryzmatu b (a). Bez żadnych w zasadzie dodatkowych założeń można wtedy wyprowadzić nierówność, zwaną nierównością Bella, wiążącą średnią wartość polaryzacji obu fotonów $E(a, b)$ dla czterech różnych konfiguracji ustawienia (a i b) obu pryzmatów:

$$|E(a, b) - E(a, b') + E(a', b) + E(a', b')| \leq 2.$$

Mechanika kwantowa dopuszcza przekroczenie tej dwójki.

Dla kątów między kierunkami

(a, b) , (b, a') , (a', b') równych $\pi/8$ oraz między $(a, b') - 3\pi/8$,

kwantowomechaniczna wartość powyższego wyrażenia wynosi $2\sqrt{2}$.

Doświadczenie przeprowadzone według poprzednio zamieszczonego schematu dało, dla tych właśnie kątów, wartość $2,697 \pm 0,015$. Należy jeszcze dodać, że w realnych warunkach tego doświadczenia wartość przewidywana przez mechanikę kwantową zmniejsza się z $2\sqrt{2}$ do $2,70 \pm 0,05$. Zgodność jest doskonała, a kłeska jakiegokolwiek rozsądnego modelu świata wydaje się całkowita.

Powiedzieliśmy poprzednio, że szybkość rejestracji pary fotonów jest na tyle duża, iż wyklucza możliwość jakiegokolwiek wolniejszego od światła kontaktu między nimi. Pryzmaty są jednak ustawiane na dłuższy czas i mogą w zasadzie zarówno wpływać na siebie, jak i na całą przestrzeń otaczającą doświadczenie. Nie wiadomo, jak mogłoby się to odbywać, ale możliwość taka, naruszająca lokalność pozostaje. Jeśli przyszłe doświadczenia wykluczą i tę ewentualność, przyjdzie nam chyba pogodzić się z faktem, że obserwowane w naszych doświadczeniach własności mikroświata nie dadzą się pogodzić z żadnym rozsądnym i lokalnym realistycznym modelem świata. Rezygnacja z lokalności byłaby z pewnością przewrotem w fizyce (ruch szybszy niż światło). Rezygnacja z realności byłaby jej kłeską.

Patrz w niebo

Czarne dziury były wielokrotnie opisywane w *Delcie*. Jednak rozmawiając ze znajomymi, którzy nie są astronomami, odnoszę wrażenie, że traktują oni te obiekty podobnie jak dziurę, do której wpadła Alicja w swej niezamierzonej podróży do Krainy Czarów.

Odczuwam więc ogromną potrzebę wyraźnego powiedzenia: *czarne dziury po prostu istnieją w przyrodzie*. Liczba źródeł promieniowania rentgenowskiego, które uważane są za czarne dziury, stale rośnie, a liczba „Don Kichotów”, którzy muszą wymyślać coraz bardziej egzotyczne hipotezy, aby wytłumaczyć obserwowane własności badanych obiektów nie uciekając się do przyjęcia istnienia czarnej dziury, szybko maleje. W chwili obecnej hipotezy te *muszą* być oparte na alternatywnych do teorii względności modelach grawitacji, w które prawie nikt nie wierzy.

Pierwszym, już klasycznym kandydatem na czarną dziurę było najjaśniejsze źródło rentgenowskie w gwiazdozbiornie Łabędzia, o nazwie Cyg X-1. W latach siedemdziesiątych dyskutowano nad innymi obiektami i możliwością interpretacji ich własności przy założeniu identyfikacji ich z czarnymi dziurami. Należą do nich takie układy jak Cir X-1 i GX 339-4. Ostatnio (w 1983 r.) polski astronom Bohdan Paczyński wykazał, że najlepszym kandydatem na czarną dziurę jest rentgenowskie źródło w bliskiej galaktyce, Wielkim Obłoku Magellana (LMC), o nazwie LMC X-3.

W nazwach wszystkich tych obiektów powtarza się litera X. Oznacza to, że są one jasnymi źródłami rentgenowskimi. Jest to związane z faktem, że są znacznie łatwiej odkryć czarną dziurę w układzie podwójnym, gdy obiega normalną, najczęściej gorącą i jasną gwiazdę. W systemie takim następuje przepływ masy z gwiazdy normalnej do czarnej dziury (opisując podobne zjawisko w podobnych układach zawierających jednak białe karły zamiast czarnych dziur, amerykański astronom Joe Patterson zatytułował swój artykuł: „Kanibalizm wśród degeneratów”). Przepływająca materia, mając znaczny moment pędu, tworzy dysk wokół czarnej dziury będący źródłem promieni Roentgena.

Jak jednak stwierdzić, czy dany obiekt jest czarną dziurą? Potrzebne jest spełnienie jednocześnie dwóch warunków: 1) bardzo małe rozmiary; 2) bardzo duża masa. Istnieje wiele metod wyznaczania obu tych parametrów. Górne ograniczenie na rozmiary można np. uzyskać przez analizę zmienności czasowej jasności obiektu. Jeśli zmienia on znacznie jasność w czasie, powiedzmy, jednej stutysięcznej sekundy, to można stwierdzić, że jego rozmiary są mniejsze niż kilka kilometrów (dlaczego?). Masy można wyznaczyć z badania orbity widocznego towarzysza.

A więc czarna dziura w układzie LMC X-3 ma masę równą co najmniej dziesięciu masom Słońca i promień około 30 km.

mgr Tomasz CHLEBOWSKI

Skrót regulaminu

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań z numeru 3/1983

Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	47,22pkt
Jacek Uryga	- Bytom	41,83pkt
Mariusz Fiszer	- Duszniki Zd.	40,86pkt
Artur Smolczyk	- Tarnów Op.	36,51pkt
Tomasz Biegański	- Lublin	32,06pkt
Marian Roman	- Ełk	30,16pkt
Ryszard Pagacz	- Zawadzkie	28,07pkt

Współczynniki trudności zadań 49, 50, 51:
3,20 1,56 2,86

Tym razem Klub 44 nie wzbogacił się o
nowe nazwisko: Pan Janowicz przekroczył
próg 44 już po raz DRUGI i zbiera
zasłużone gratulacje!

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr. $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4 - 3 \cdot \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr. 9/1981.

Klub 44

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Zadania nr 61, 62, 63

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 1983

61. Czy równanie $x^3 + y^3 + z^3 = 13579^2$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych?

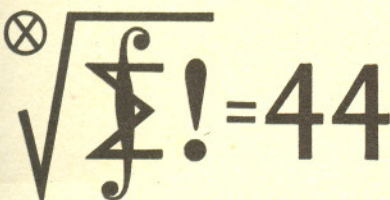
62. Wykazać, że w dowolnym trójkącie znak wyrażenia $2R + r - p$ zależy tylko od tego, czy trójkąt jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny. Znaczenie symboli zwykle: R , r — promienie kół opisanego i wpisanego, p — połowa obwodu.

63. Podana obok łamigłówka typu „litera-cyfra” ma kilka rozwiązań. Znaleźć rozwiązanie:

- a) w którym DWA jest liczbą możliwie największą;
- b) w którym możliwie najwięcej razy występuje cyfra wyrażająca wiek ligi zadaniowej w „Deltie”.

Zadanie 61 przysłał nasz Czytelnik, pan Andrzej Pawłowski z Zabrze.

DWA
LATA
TRWA
+LIGA
DELTY



Skrót treści zadań z nr. 5/1983

55. Ile pierwiastków rzeczywistych ma równanie $a^x + b^x = c^x$ (a, b, c dodatnie)?

56. „Jeśli zbiór wierzchołków wielokąta ma oś (odp. środek) symetrii, to wielokąt ma oś (odp. środek) symetrii”. Czy powyższe stwierdzenia są prawdziwe? Jak (ewentualnie) wzmocnić założenia, by stwierdzenia stały się prawdziwe?

57. Obliczamy iloczyn cyfr liczby naturalnej, z wynikiem postępujemy tak samo, aż otrzymamy liczbę jednocyfrową. Od jakiej liczby naturalnej trzeba zacząć, by otrzymać 1?

Rozwiązania zadań z numeru 5/1983

55. Niech I oznacza przedział $\langle a, b \rangle$ lub $\langle b, a \rangle$ (w zależności od tego, która z liczb a, b jest większa). Dane w zadaniu równanie przepisujemy w postaci: $(a/c)^x + (b/c)^x = 1$. Gdy $c \in I$, równanie nie ma rozwiązań, bo dla każdej wartości $x \in \mathbb{R}$ jeden ze składników lewej strony jest ≥ 1 , a drugi jest > 0 . Gdy $c \notin I$, równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie, bo wówczas składniki lewej strony są funkcjami wykładniczymi o podstawach jednocześnie większych lub mniejszych od 1, więc ich suma jest ściśle monotoniczną funkcją ciągłą, odwzorowującą zbiór \mathbb{R} na przedział $(0, \infty)$.

56. Oba podane stwierdzenia są nieprawdziwe. Za kontrprzykład służyć może pięciokąt $ABCDE$, gdzie $ABCD$ jest rombem (ale nie kwadratem), a E jest jego środkiem. Zbiór skończony $\{A, B, C, D, E\}$ ma osie symetrii i środek symetrii, a pięciokąt $ABCDE$ — nie ma.

Oba zdania stają się prawdziwe przy dodatkowym założeniu wypukłości wielokąta.

Dowód: Oznaczmy przez W dany wielokąt wypukły, przez Z — zbiór jego wierzchołków i niech \mathcal{S} będzie symetrią płaszczyzny (osiową w przypadku a, środkową w przypadku b) taką, że

$\mathcal{S}(Z) = Z$. Zbiór $\mathcal{S}(W)$ jest też wielokątem wypukłym, a $\mathcal{S}(Z)$ jest zbiorem jego wierzchołków. Wielokąt wypukły W jest wyznaczony przez zbiór Z jednoznacznie, jest bowiem częścią wspólną wszystkich zbiorów wypukłych zawierających Z . Analogiczny związek zachodzi między zbiorami $\mathcal{S}(W)$ i $\mathcal{S}(Z)$. Ponieważ zbiory Z i $\mathcal{S}(Z)$ są identyczne, więc także W i $\mathcal{S}(W)$ są identyczne.

57. Otrzymana w wyniku jedynka może być poprzedzona tylko przez liczbę postaci $111\dots 11$. Pokażemy, że liczba takiej postaci nie może być już poprzedzona przez nic. Załóżmy, wbrew naszej tezie, że $x = 111\dots 11$ jest iloczynem liczb jednocyfrowych. Wówczas rozkład x na czynniki pierwsze składa się wyłącznie z trójek i siódemek: $x = 3^k 7^m$. Jeśli $k > 0$, to x dzieli się przez 3; zatem liczba jedynek, z których składa się x , także dzieli się przez 3; wobec tego x jest podzielne przez 111 i ma czynnik pierwszy 37 — sprzeczność. Jeśli zaś $k = 0$, czyli $x = 7^m$, to sprzeczność wyniknie stąd, że $7^2 \equiv 49, 7^3 \equiv 43, 7^4 \equiv 1 \pmod{100}$; co za tym idzie, dowolna potęga siódemki kończy się grupą cyfr 01 lub 07 lub 49 lub 43 (a więc nie 11).

Poszukiwanymi w zadaniu liczbami są zatem tylko te, których zapis dziesiętny składa się z samych jedynek.

Rozwiązanie zadania 2 (Mizar):

Fakt, że punkt b jest środkiem odcinka $\langle a, c \rangle$ będziemy zapisywać $M[a, b, c]$.

ENVIRON

AX1: FOR A,B BEING PUNKT EX C BEING PUNKT ST MCA,C,BJF

AX2: FOR A,B BEING PUNKT EX C BEING PUNKT ST MCA,B,CJF

AX3: FOR A,B,C,D,E BEING PUNKT
ST MCA,B,CJ & MCB,D,EJ & MCA,C,EJ
HOLDS MCB,C,DJF

AX4: FOR A,B1,B2,C BEING PUNKT
ST MCA,B1,CJ & MCA,B2,CJ HOLDS B1=B2