

Dnia 10 XII 1983 roku

zmarł

prof. dr Stefan Straszewicz

Matematyk i Nauczyciel

SPIS TREŚCI

NUMERU 2 (122)

Co udowodnił Gerd Faltings <i>doc. dr Jerzy Browkin</i>	str. 1
Supermagnes <i>dr Krzysztof Pastor</i>	str. 3
O kryształach helu <i>dr Andrzej Hennel</i>	str. 4
Soczewka wielka jak niebo <i>dr Zbigniew Płochocki</i>	str. 6
Wyznaczanie mas gwiazd <i>mgr Joanna Filipowicz</i>	str. 8
Paradoks czasu czekania <i>prof. dr Bolesław Kopociński</i>	str. 10
Zadania	str. 11
Mizar	str. 12
Patrz w niebo	str. 13
O równaniach kwadratowych <i>doc. dr Adam Wachulka</i>	str. 14
Klub 44	str. 16
W sprawie „paradoksu” ekonomicznego	str. 17

W następnym numerze:

Ułamki łańcuchowe

„Delta”
matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny

Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny
dr Jerzy Brojan
dr Maciej Bryński
dr Bogdan Cichoński
dr Alicja Derkowska
dr hab. Jan A. Gaj
doc. dr Bolesław Gleichgewicht
doc. dr Tadeusz Jarzębowski
doc. dr Marcin Kubiak
mgr Andrzej Mąkowski
dr Zbigniew Płochocki — v-przewodniczący
dr Jan Rempala
prof. dr Konrad Rudnicki
prof. dr Grzegorz Sitarski
prof. dr Józef I. Smak
doc. dr Kazimierz Stepien
prof. dr Mieczysław Subotowicz
dr Michał Szurek
doc. dr Andrzej Szymacha
doc. dr Aniela Wolska

doc. dr Andrzej Woszczyk
prof. dr Wojciech Zakowski —
przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
mgr inż. Krzysztof Biesaga
dr Tomasz Chlebowski
mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.
dr Marek Kordos — red. nac.
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.
mgr Andrzej Majhofer
dr inż. arch. Jacek Mazur
mgr Anna Rudnik
dr Jerzy Ryll

Adres Redakcji
ul. Koszykowa 6a
00-564 Warszawa

Krajowe Wydawnictwo Czasopism
RSW „Prasa—Książka—Ruch”
ul. Noakowskiego 14
00-666 Warszawa
Nakład 35 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;
2,50 ark. druk;
papier offsetowy V kl. 70 g.
Wydrukowano w drukarni
im. Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 5197/83 T-73

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
 - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
 - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
- dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
 - osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
 - osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawców-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
- Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:
 - do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,
 - do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego,

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

- w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,
- w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,
- w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,
- w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with

- Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,
- Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,
- Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 20,—

nr indeksu 35723/35550



Co udowodnił Gerd Faltings?

Doc. dr Jerzy BROWKIN

Będziemy się zajmowali równaniami postaci $f(x, y) = 0$, gdzie f jest wielomianem o współczynnikach całkowitych, a więc na przykład równaniami:

- | | |
|-----|----------------------|
| (1) | $3x - y + 1 = 0,$ |
| (2) | $x^2 + y^2 - 1 = 0,$ |
| (3) | $y^2 - x^3 - 3 = 0,$ |
| (4) | $x^4 + y^4 - 2 = 0.$ |

Pytamy, czy każde takie równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach wymiernych. To znaczy, czy istnieje nieskończenie wiele takich różnych par liczb wymiernych a, b , że $f(a, b) = 0$.

Każde takie równanie opisuje pewną krzywą na płaszczyźnie. Na przykład równanie (1) opisuje linię prostą, równanie (2) — okrąg, równanie (3) pewną inną krzywą (zwaną krzywą eliptyczną — rys. 1), równanie (4) — krzywą podaną na rys. 2. Nasze pytanie można więc sformułować tak: Czy na każdej krzywej opisanej wielomianem o współczynnikach całkowitych leży nieskończenie wiele punktów o współrzędnych wymiernych?

Spróbujmy znaleźć odpowiedź na to pytanie w przypadku krzywych opisanych równaniami (1) — (4).

Oczywiście na linii prostej (1) leży nieskończenie wiele punktów o współrzędnych wymiernych. Wystarczy mianowicie przyjąć za x dowolną liczbę wymierną a , zaś jako y wziąć liczbę $3a + 1$. Para liczb $x = a, y = 3a + 1$ spełnia to równanie i obie te liczby są wymierne. Ponieważ liczbę a możemy obierać na nieskończenie wiele sposobów, więc otrzymujemy w ten sposób nieskończenie wiele rozwiązań równania (1) w liczbach wymiernych.

Również równanie (2) ma nieskończenie wiele takich rozwiązań. Weźmy mianowicie dowolną liczbę wymierną a i przyjmijmy

$$x = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}, \quad y = \frac{2a}{a^2 + 1}.$$

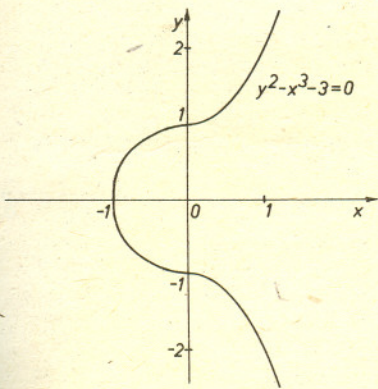
Nietrudno sprawdzić (a sumienny Czytelnik powinien to zrobić!), że te liczby x i y spełniają równanie (2) i obie są wymierne.

W przypadku równania (3) sytuacja jest bardziej skomplikowana. Dla równań (1) i (2) wskazaliśmy wzory zależne od dowolnej liczby wymiernej a opisujące pewne rozwiązania tych równań. Taką liczbę a nazywamy parametrem, a otrzymane rozwiązania — rozwiązaniami opisanymi parametrycznie.

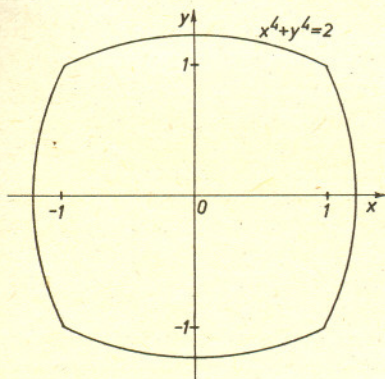
Otóż można udowodnić, że równanie (3) nie ma rozwiązań, które dałyby się opisać parametrycznie. Niemniej również to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach wymiernych! Uzyskuje się je jednak na innej drodze.

Mianowicie, zauważmy najpierw, że liczby $x_1 = 1, y_1 = 2$ spełniają równanie (3). Następnie weźmy liczby

$$x_2 = \frac{9x_1^4 - 8x_1y_1^2}{4y_1^2} = -\frac{23}{16}, \quad y_2 = \frac{27x_1^6 - 36x_1^3y_1^2 + 8y_1^4}{8y_1^3} = \frac{11}{64}.$$



Rys. 1



Rys. 2



Rozwiązanie zadania F 148. Sytuacja jest wręcz odwrotna. W punkcie a) strumień obejmowany przez obwód z galwanometrem wzrasta, lecz mimo to nie płynie w nim prąd, brak jest bowiem jakiegokolwiek siły zdolnej do „napędzania” nośników ładunku, w pozostałych punktach strumień magnetyczny przenikający obwody nie ulega zmianie — mimo to płyną w nich prądy, w układzie odniesienia związanym z polem magnetycznym nośniki ładunku poruszają się wraz z przewodnikami w polu magnetycznym i składowa magnetyczna siły Lorentza jest czynnikiem zapewniającym przepływy prądu. Prawo indukcji elektromagnetycznej nie jest więc prawem uniwersalnym i przytoczone przykłady dobrane właśnie ze względu na ich wyjątkowość. Prawo to jest dogodnym narzędziem ułatwiającym rachunki, lecz nie wyjawia mechanizmu powstawania siły elektromotorycznej indukcji. W przypadkach wątpliwych należy rozpatrzyć siły będące przyczyną uporządkowanego ruchu nośników (siła Lorentza).



Rozwiązanie zadania M 356. Niech ad będzie środkową trójkąta abc . Mamy dla odpowiednich wektorów

$$|ad|^2 = \left| \frac{1}{2}(ab+ac) \right|^2 = \frac{1}{4}(|ab|^2 + |ac|^2 + 2\langle ab, ac \rangle)$$

i ponieważ

$$|bc|^2 = |ac-ab|^2 = |ab|^2 + |ac|^2 - 2\langle ab, ac \rangle$$

$$\text{jest } |ad|^2 = \frac{1}{4}(2|ab|^2 + 2|ac|^2 - |bc|^2).$$

Niech teraz $a, b, c, d \in A$, $d(a,b) = d(c,d) = D(A)$ i niech x będzie środkiem ab , y — środkiem cd . Z trójkąta axy mamy

$$|xy|^2 = \frac{1}{4}(2|ay|^2 + 2|by|^2 - |ab|^2),$$

a z trójkątów acd i bcd mamy:

$$|ay|^2 = \frac{1}{4}(2|ac|^2 + 2|ad|^2 - |cd|^2) \text{ i}$$

$$|by|^2 = \frac{1}{4}(2|bc|^2 + 2|bd|^2 - |cd|^2).$$

Ponieważ jednak $|ac|, |ad|, |bc|, |bd|$ są nie większe niż $D(A)$, natomiast $|ab| = |cd| = D(A)$, mamy:

$$|ay|^2 \leq \frac{3}{4}(D(A))^2, \quad |by|^2 \leq \frac{3}{4}(D(A))^2$$

i wreszcie

$$|xy|^2 \leq \frac{1}{4} \cdot (3(D(A))^2 - (D(A))^2) = \frac{1}{2}(D(A))^2,$$

a więc $d(x, y) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} D(A)$.

Wynika stąd, wobec dowolności w wyborze a, b, c, d , że

$$D(S(A)) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} D(A) \quad \text{c.n.d.}$$

Gdy teraz A jest czworobokiem foremnym o krawędzi 1, zbiór $S(A)$ jest, jak łatwo sprawdzić, zbiorem środków krawędzi A

$$\text{i } D(S(A)) = \frac{\sqrt{2}}{2} D(A).$$

Po dość uciążliwych rachunkach przekonujemy się, że również liczby x_2 i y_2 (które są wymierne!) spełniają równanie (3). Ogólnie, jeżeli liczby x_k, y_k spełniają (3), to również liczby x_{k+1} i y_{k+1} określone wzorami

$$x_{k+1} = \frac{9x_k^4 - 8x_k y_k^2}{4y_k^2}, \quad y_{k+1} = \frac{27x_k^6 - 36x_k^3 y_k^2 + 8y_k^4}{8y_k^3}$$

spełniają to równanie (Czytelnik zechce to sprawdzić). Można też pokazać, że wszystkie tak otrzymane pary (x_k, y_k) są różne. W ten sposób wychodząc z rozwiązania $x_1 = 1, y_1 = 2$ otrzymujemy nieskończenie wiele rozwiązań równania (3) w liczbach wymiernych.

Każde z rozpatrzonych przez nas dotychczas równań miało nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach wymiernych. Jednak już równanie (4) nie ma tej własności. Można udowodnić, że ma ono tylko skończoną liczbę rozwiązań w liczbach wymiernych, mianowicie $(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)$.

Jakiej więc można oczekiwać odpowiedzi na pytanie postawione na początku artykułu?

Już w latach dwudziestych bieżącego stulecia matematyk angielski L. J. Mordell (1888—1972) sformułował przypuszczalną odpowiedź na to pytanie.

Mianowicie, znana jest ... (Ostrzeżenie: Od tego miejsca sformułowania w tym artykule są już mniej precyzyjne, a czasem wręcz nieścisłe!) ... bardzo ogólna klasyfikacja krzywych polegająca na tym, że każdej krzywej przypisuje się pewną liczbę całkowitą nieujemną zwaną jej rodzajem. Tak więc są krzywe rodzaju 0, krzywe rodzaju 1, krzywe rodzaju 2 itd. W tym artykule nie podamy definicji rodzaju krzywej (wymaga ona nieco rozleglejszej wiedzy niż zakładamy u Czytelnika), lecz można powiedzieć, że im krzywa ma większy rodzaj, tym jest „bardziej skomplikowana”. Krzywe rodzaju 0 — to są krzywe, których punkty można opisać parametrycznie, krzywe rodzaju 1 — to są tzw. krzywe eliptyczne, ...

Otóż Mordell przypuszczał, że na każdej krzywej rodzaju większego od 1 jest tylko skończona liczba punktów o współrzędnych wymiernych.

Ta słynna hipoteza Mordella przez ponad 50 lat opierała się wysiłkom matematyków próbujących ją udowodnić. Chociaż uzyskano różne wyniki częściowe na jej temat, sama hipoteza pozostawała nieudowodniona.

Dopiero wiosną 1983 roku prof. Gerd Faltings z RFN hipotezę tę udowodnił i od tego czasu hipoteza Mordella nosi nazwę twierdzenia Faltingsa.

Omówimy pewien wniosek wynikający z twierdzenia Faltingsa. Istnieje przypuszczenie, że dla każdej liczby naturalnej n większej od 2 równanie $x^n + y^n = z^n$, zwane równaniem Fermata, nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych x, y, z różnych od zera. Możemy przy tym bez zmniejszenia ogólności rozważań ograniczyć się do takich rozwiązań, że liczby x, y, z są

względnie pierwsze. Dzieliąc to równanie stronami przez z^n i przyjmując $X = \frac{x}{z}, Y = \frac{y}{z}$ możemy powyższe przypuszczenie sformułować w sposób równoważny, jak następuje:

Dla każdej liczby naturalnej n większej od 2 równanie

$$(5) \quad X^n + Y^n = 1$$

nie ma rozwiązań w liczbach wymiernych X, Y różnych od zera, to znaczy jedynymi jego rozwiązaniami w liczbach wymiernych mogą być $X = 0, Y = \pm 1$ oraz $X = \pm 1, Y = 0$ — ma więc ono co najwyżej cztery rozwiązania.

Wiadomo, że krzywa opisana równaniem (5) ma rodzaj równy $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Liczba ta jest

większa od 1 dla n większego od 3. Zatem z twierdzenia Faltingsa wynika, że dla $n \geq 4$ równanie (5) ma tylko skończoną liczbę rozwiązań w liczbach wymiernych.

Tak więc nadal nie znamy wszystkich rozwiązań równania Fermata w liczbach całkowitych x, y, z różnych od zera i względnie pierwszych. Wiemy jednak, że przy ustalonym n , jeżeli takie rozwiązania istnieją, to ich liczba jest skończona.

Jeszcze na zakończenie kilka uwag. Twierdzenie Faltingsa można inaczej sformułować tak: Jeżeli krzywa ma nieskończenie wiele punktów o współrzędnych wymiernych, to jest krzywą rodzaju 0 lub 1. Należy jednak ostrzec Czytelnika, że twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. To znaczy, nie każda krzywa rodzaju 0 lub 1 ma nieskończenie wiele punktów o współrzędnych wymiernych.

Na przykład krzywa o równaniu $x^2 + y^2 = 3$ ma rodzaj 0, lecz nie leży na niej żaden punkt o współrzędnych wymiernych. Ten ostatni fakt może Czytelnik udowodnić samodzielnie — jest to nietrudne ćwiczenie.

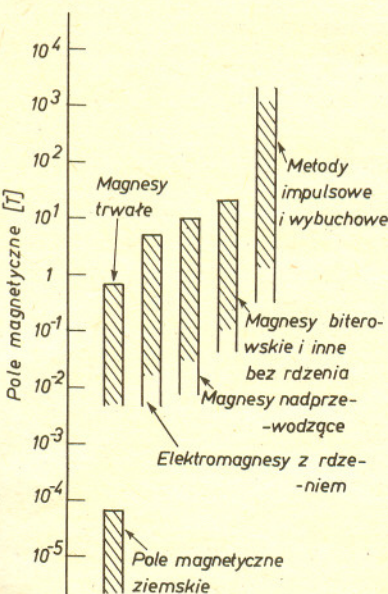
Wielokrotnie w eksperymentach fizycznych zachodzi potrzeba wykonania badań w możliwie silnych stałych polach magnetycznych. Projektowaniem i konstrukcją odpowiednich magnesów zajmuje się wiele firm i laboratoriów. Na pozór sprawa wydaje się prosta. Wiemy, że w środku cewki z prądem powstaje pole magnetyczne

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2r},$$

gdzie N jest liczbą zwojów, I natężeniem prądu, r promieniem cewki, μ_0 przenikalnością magnetyczną próżni.

Trzeba zatem skonstruować elektromagnes z dużą liczbą zwojów i przepuszczać odpowiednio duży prąd. Niestety, nie da się łatwo spełnić obu tych warunków jednocześnie. Wiele zwojów oznacza albo cienki drut, albo wielką cewkę. Cienki drut uniemożliwia przepływ dużego prądu, zaś duża cewka nie daje silnego pola nawet przy dużym prądzie, gdyż pole od daleko położonych zwojów nie jest istotne.

Chcąc nie chcąc trzeba budować magnesy z niewielką liczbą zwojów i oczywiście trzeba przepuszczać przez nie bardzo duży prąd. Naturalnie, w cewce wydziela się ciepło Joule'a-Lenza; wymaga to niesłychanie wydajnego chłodzenia uzwojenia. Ktoś powie: zaraz, zaraz, przecież wykorzystując zjawisko nadprzewodnictwa pozbywamy się oporu cewki, a zatem nie wydziela się w niej ciepło. To prawda, ale w magnesach nadprzewodzących trudno przekroczyć granicę 10 T (pole magnetyczne niszczy nadprzewodnictwo), a ponadto są one kłopotliwe w użyciu (kąpiel w ciekłym helu). Narzucający się pomysł wykonania uzwojenia z rurek (w środku płynnie woda chłodząca) nie jest najlepszy ze względu na duże opory przepływu cieczy. Optymalną konstrukcją jest chyba elektromagnes biterowski (Francis Bitter — fizyk amerykański) pozwalający uzyskać stacjonarne pole magnetyczne 20—30 T. We wszystkich większych ośrodkach naukowych na świecie, gdzie bada się własności materii w silnych polach magnetycznych, stosuje się właśnie takie magnesy. Magnes biterowski (patrz rysunek) składa się z dysków miedzianych o grubości 1—2 mm (specjalna ultratwarda miedź elektrolityczna) o średnicy 20—40 cm, z otworem w środku, przeciętych wzdłuż promienia. Kilkaset (zwykle ok. 200) takich dysków złożonych wraz z izolującymi przekładkami tworzy elektromagnes.

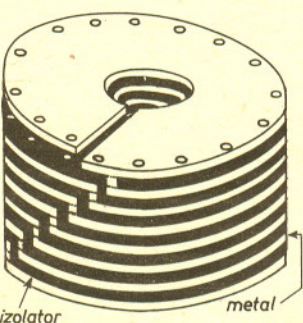


Przekładką izolacyjną jest specjalna folia w kształcie koła o średnicy równej średnicy dysku z usuniętym niewielkim wycinkiem (również z otworem w środku). Odpowiednie złożenie dysków i przekładek powoduje powstanie cewki; każdy dysk jest jej pojedynczym zwojem. Cewkę tę, która jest praktycznie miedzianym walcem, chłodzi się w ten sposób, że przepuszcza się wodę przez kilka tysięcy małych (średnica 1—2 mm) otworów wywierconych wzdłuż wysokości walca, czyli równoległe do pola magnetycznego. Dla uniknięcia zwarć używa się specjalnie dejonizowanej wody o oporze właściwym rzędu kilku $M\Omega m$.

O wymaganej precyzji wykonania takiego magnesu świadczy fakt, że otwory chłodzące wycina się w dyskach i przekładkach przed złożeniem magnesu, a powstałe po złożeniu kanaliki muszą mieć jednakowy przekrój wzdłuż całej grubości cewki z dokładnością do 0,05 mm.

Na świecie pracuje zaledwie kilkadziesiąt cewek tego typu w kilkunastu ośrodkach naukowych. W Europie największym takim laboratorium jest „Service National des Champs Intenses” w Grenoble (Francja). Ze względu na dość wysokie koszty budowy i eksploatacji laboratorium to użytkowane jest wspólnie przez Centre National de la Recherche Scientifique i Max Planck-Gesellschaft i otwarte jest dla naukowców z całej Europy (miesięcznie przyjeżdża tam ok. 20 osób). W Grenoble zainstalowanych jest 8 magnesów biterowskich dających pola do 25 T. Magnesy zasilane są przez 4 generatory 2,5 MW każdy, które można łączyć równoległe. Największa cewka wymaga 10 MW mocy ($U = 335 \text{ V}$, $I = 30 \text{ kA}$). Do chłodzenia jej wysokowydajne pompy tłoczą wodę (w obiegu zamkniętym) z szybkością 400 m^3/godz . przy ciśnieniu roboczym 27 atm, powoduje to wzrost temperatury wody o ok. 40°C, powoduje to również wzrost temperatury wody w rzece, która jest ostatecznym odbiornikiem ciepła, o 2—3°C (tylko podczas pracy największej cewki przy maksymalnym polu). Dla zabezpieczenia cewek komputer trzy razy w ciągu sekundy mierzy temperaturę wody, prąd i napięcie cewki i w razie jakichkolwiek nieprawidłowości „ogłasza” alarm i wyłącza generatory. Czas życia cewek mimo to nie przekracza zwykle 1000 godzin, po tym czasie trzeba cewkę rozebrać i wymienić wypalone dyski.

Wysiłki konstruktorów zmierzające do uzyskania jeszcze silniejszych pól magnetycznych nie ustają. Również w Grenoble jest obecnie budowany przez uczonych francuskich i niemieckich magnes hybrydowy: tzn. cewka biterowska umieszczona w polu magnetycznym dużego magnesu nadprzewodzącego. Oczekuje się pola magnetycznego ponad 30 T, będzie to „rekord świata” w stacjonarnych polach magnetycznych.



O kryształach helu w temperaturze pokojowej, czyli o wielkich możliwościach wysokich ciśnień

Dr Andrzej HENNEL

Wyobraźmy sobie, iż nawiązany został kontakt radiowy z odległą o wiele lat świetlnych cywilizacją kosmiczną. Po uwzględnieniu całkowicie jednoznacznego sposobu przekazywania informacji (symbole, jednostki itd.) zaczynamy sobie nawzajem przysyłać podstawowe informacje o naszych światach. W jednej z pierwszych otrzymanych i rozszyfrowanych depesz pojawia się następujący fragment — ... H₂O, kryształ o gęstości 1,5 g/cm³, temperatura topnienia 192°C ... Budzi to oczywiście wielkie zdumienie, czyżby „u nich” obowiązywały inne prawa fizyki? Wkrótce jednak sprawa wyjaśnia się, otóż na planecie naszych kosmicznych pobratymców panuje ciśnienie około 40000 atmosfer. W rezultacie mają oni do czynienia z zupełnie inną niż my strukturą krystaliczną lodu (jest to tzw. lód VII albo lód gorący) znacznie gęściej upakowaną, co przejawia się we wzroście gęstości. Na Ziemi, oczywiście, można otrzymać w laboratoriach wszystkie kolejne rodzaje lodu od I do VII stosując odpowiednie ciśnienia i temperatury.

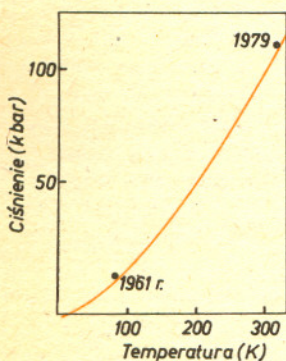
Możliwość zmieniania fazy stałej czy, jak kto woli, struktury krystalicznej danego pierwiastka czy związku chemicznego pod wysokim ciśnieniem nie jest oczywiście niczym nowym. Produkuje się przemysłowo z węgla syntetyczne diamenty, które na dodatek mają tę miłą własność, iż są metatrwałe, tzn. pozostają diamentami po obniżeniu ciśnienia. Znane są różne postacie krystaliczne siarki czy fosforu ...

Nowością ostatnich lat w laboratoriach fizyków jest natomiast możliwość uzyskiwania kontrolowanych ciśnień hydrostatycznych rzędu miliona atmosfer za pomocą tzw. kowadełek diamentowych. Jednym z najbardziej efektywnych eksperymentów była krystalizacja helu w temperaturze pokojowej pod ciśnieniem 115 kilobarów przeprowadzona w 1979 roku przez J. M. Bessona i J. P. Pinceaux na Uniwersytecie imienia Piotra i Marii Curie w Paryżu.

Jak wiadomo (patrz np. artykuł Ł. Turskiego, *Delta* 12/1983), pod ciśnieniem normalnym hel pozostaje cieczą nawet w temperaturze absolutnego zera, dopiero pod ciśnieniem 25 barów następuje jego krystalizacja. Nic więc dziwnego w fakcie, iż krystalizacja helu w wyższych temperaturach wymaga wysokich ciśnień i jest stosunkowo trudna do przeprowadzenia.

W 1961 roku udało się zestalić hel w temperaturze wrzenia azotu (77 K) pod ciśnieniem 14 kbar, a dalszy postęp umożliwiły dopiero kowadełka diamentowe, które teraz omówimy dokładniej.

1 bar = 10⁵ N/m² = 10⁵ paskali =
0,9869 atmosfery = 1,0197 kG/cm²

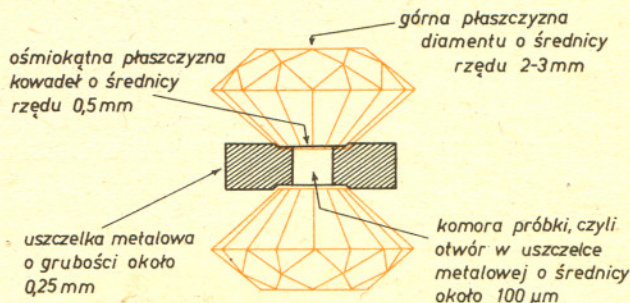
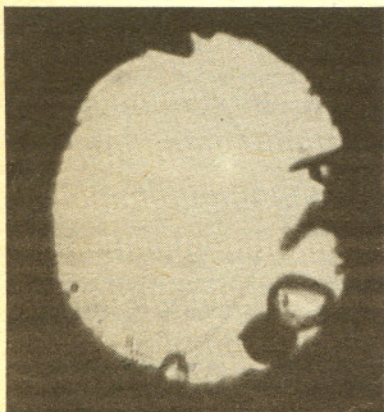


Krzywa krystalizacji helu. Krzywa ta opisana jest tzw. równaniem Simona^o

$$P = 16,235[(T/0,992)^{1,5554} - 1],$$

gdzie P jest ciśnieniem w barach, a T temperaturą w kelwinach. Równanie to obowiązuje również w obszarze niskich temperatur i małych ciśnień rzędu 1 kbar. Fakt ten oznacza, że struktura krystaliczna helu, która pod niewielkim ciśnieniem jest strukturą kubiczną płasko centrowaną, pozostaje nie zmieniona aż do 115 kbar.

Ciśnienie na dnie Rowu Mariańskiego (11 km) — 1 kbar, rekordowe ciśnienie w kowadłach diamentowych — 1,7 Mbar, ciśnienie w środku Ziemi — 3,6 Mbar.



Schemat kowadełek diamentowych

Jest to zestaw dwóch odpowiednio zeszlifowanych diamentów, pomiędzy którymi umieszczona jest folia metalowa z małym otworkiem (rysunek). Diamenty ściskane są z zewnątrz prasą o regulowanej sile nacisku. Konstrukcja kowadełek oraz ogromna twardość diamentów pozwalają na osiągnięcie w małej objętości pomiędzy diamentami i uszczelką metalową kolosalnych ciśnień rzędu megabarów. Dotychczasowy rekord uzyskany w 1982 roku wynosi 1,7 Mbar. Badany obiekt, tzn. gaz, ciecz czy też okruch kryształu umieszcza się więc w tej mikroskopijnej komorze ciśnieniowej i następnie obserwuje się cały eksperyment pod mikroskopem korzystając z przezroczystości samych diamentów. W przypadku badania kryształów w komorze próbki umieszcza się kroplę mieszaniny metanolu z etanolem, która zapewnia hydrostatyczny rozkład ciśnień do około 200 kbar. Ponadto w komorze próbki umieszcza się okruchy rubinu, co pozwala na pomiar wartości otrzymanego ciśnienia. Rubin mianowicie pod wpływem oświetlenia wysyła bardzo silne promieniowanie czerwone o długości fali 693 nm pod ciśnieniem atmosferycznym. Pod wpływem ciśnienia wytworzonego w kowadłach następuje liniowa zmiana długości fali wysyłanego przez rubin promieniowania (około 30 nm na 1 Mbar), co pozwala na bardzo precyzyjne wyskalowanie otrzymanych ciśnień.

W eksperymencie Bessona i Pinceaux dodatkowym problemem było wypełnienie komory próbki helem. Dokonano tego umieszczając kowadła w wypełnionej helem stalowej komorze ciśnieniowej, pod ciśnieniem 2000 barów. W ten sposób w komorze próbki znalazło się około 0,5 μg helu.



Rozwiązanie zadania M 357. Oznaczając przez $[y]$ część całkowitą y , tzn. takie największe całkowite m , że $m \leq y$, rozpatrzmy liczby

$a_0, a_1, \dots, a_{1000}$, gdzie $a_k = k \cdot x - [kx]$.

Niech L_k będzie odcinkiem $\left[\frac{k}{1000}, \frac{k+1}{1000} \right]$

dla $k = 0, 1, \dots, 999$. Ponieważ $0 \leq a_k < 1$, pewne dwie spośród 1001 liczb a_k muszą znaleźć się w tym samym przedziale L_k , a więc dla pewnych p, q , $p > q$ jest

$$|a_p - a_q| < \frac{1}{1000}.$$

Oznaczając $P \equiv [px]$, $Q \equiv [qx]$

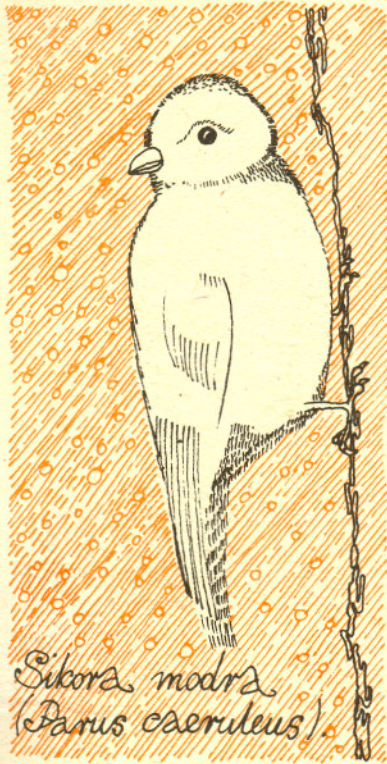
mamy $|(p-q)x - (P-Q)| = |a_p - a_q| < \frac{1}{1000}$,

$$\text{skąd } \left| \frac{P-Q}{p-q} - x \right| < \frac{1}{1000(p-q)} \text{ i } \frac{P-Q}{p-q}$$

jest szukanym ułamkiem.

Następnie stopniowo zwiększano ciśnienie obserwując uważnie komorę próbki. Przy ciśnieniu 115 kbar, w temperaturze 24°C zaobserwowano krystalizację helu. Ponieważ różnica współczynników załamania światła dla kryształów helu i ciekłego helu jest bardzo niewielka, dosyć trudno jest zaobserwować granicę faz. Na fotografii widać powiększoną około 500 razy komorę próbki. Górną i środkową część komory wypełnia eliptyczny w kształcie kryształ helu. Na dole w cieczy znajdują się okruchy rubinu służące do określania ciśnienia. Gęstość widocznego na zdjęciu kryształu wynosi około 1 g/cm³.

Na zakończenie warto wspomnieć, iż niezwykle interesujące mogą być badania kryształów wodoru w kowadłach diamentowych. Wodór pod ciśnieniem 57 kbar tworzy w temperaturze pokojowej kryształy molekularne, jednakże po przekroczeniu 2 lub 3 Mbar powinien przejść do fazy metalicznej (patrz artykuł A. Holasa, *Delta* 10/1981). Nie ma w tym nic dziwnego, każde ciało stałe pod ciśnieniem w końcu musi stać się metalem, tzn. zbliżenie atomów doprowadza do „uwspólnienia” zewnętrznych elektronów. Na przykład kryształy jodu przechodzą w fazę metaliczną pod ciśnieniem 300 kbar. Jednakże metaliczny wodór powinien mieć, według przewidywań teorii, dwie niezwykle ważne cechy. Po pierwsze ma on być metatrawny, tzn. pozostawać metalem po obniżeniu ciśnienia; po wtóre ma być nadprzewodnikiem do stosunkowo wysokich temperatur rzędu -100°C — 0°C. Łatwo wyobrazić sobie, jak kapitalne znaczenie dla elektrotechniki i energetyki miałaby możliwość użycia bardzo lekkiego drutu, którego opór jest równy zeru. Próby utrzymania metalicznego wodoru są prowadzone w wielu laboratoriach na świecie i jeżeli nadejdą nowe informacje, na pewno poinformujemy o nich Czytelników *Delty*.



Długi dowód

Przez $pg(K, R, T)$ będziemy oznaczać częściową geometrię (partial geometry) o parametrach K, R, T . Bardziej dokładną definicję podajemy niżej, choć dla meritum sprawy nie ma ona znaczenia. Poszukiwanie rozmaitych częściowych geometrii jest trudną sztuką, choć w ostatnich latach zrobiono tu duże postępy. Z referatu J.H. van Linta wygłoszonego na Kongresie ICM 82 (Warszawa, 16–24 VIII 83) dowiedzieliśmy się, że autor odkrył m.in. metodę rozstrzygnięcia czy istnieje $pg(l, 2l-3, l-2)$. Na przykład istnieje $pg(5, 7, 3)$, ale nie istnieje $pg(6, 9, 4)$. Ten ostatni fakt van Lint odkrył wiosną 1983 r. za pomocą komputera VAX 11/780. Obliczenia zajęły (uwaga) 183 dni!

M. SZ.

Częściowa geometria $pg(K, R, T)$ to zbiór \mathcal{P} obiektów zwanych punktami, zbiór obiektów \mathcal{B} zwanych prostymi, przy czym

- 1) każda prosta ma K punktów,
- 2) każdy punkt leży na R prostych,
- 3) gdy punkt x nie leży na prostej L , to istnieje dokładnie T punktów $y \in L$ takich, że x i y leżą na jednej prostej.

Gdyby każdy obywatel Polski otrzymywał co pierwszego średnio 12 tys. złotych (łącznie z niemowlętami i starcami), byłoby to więcej niż obecnie. A przecież tak łatwo to osiągnąć! Obliczajcie razem z nami:

Rocznie jest to 144 tys. (średnio na głowę).

Wobec kursu dolara (średnio w październiku w bramie), 650 zł, daje to ok. 221,53846 (średnio na głowę w ciągu roku) dolarów.

Dla całej Polski wyniesie to rocznie mniej więcej 7975,3845 mln dolarów, no — nie oszczędzajmy — 8 mld dolarów.

Gdyby więc minister finansów wyskrobał 61,5 mld dolarów i złożył to w jakimś banku (choćby w NBP) na 13% rocznie, mielibyśmy zapewniony względny dostatek przy zerodniowym tygodniu pracy. Prawda?

A przecież za to, co mamy, dano by nam więcej. Może więc się opłaci?

Dowcipy używane

Po wielogodzinnym locie w chmurach balon wynurzył się nad bezkresną równiną, na której przez czas dłuższy nie można było znaleźć żadnego punktu orientacyjnego, mogącego poinformować aeronautów gdzie się znajdują. Nagle dostrzegli w dole idącego człowieka. Gdy zbliżyli się na odległość głosu, zakrzyknęli:

— Panie, gdzie my jesteśmy?

Zapytany, po namyśle, odrzyknął:

— W balonie!

I wiatr uniósł balon dalej.

— Wiele się nie dowiedzieliśmy.

— Bo co za pech, żeby trafić akurat na matematyka!

— A to był matematyk? Skąd wiesz?

— Przecież udzielił odpowiedzi przemysłanej, prawdziwej i bezużytecznej.

To co wyżej, ma być propozycją dla Czytelników nadsyłania nam złośliwych, w miarę możliwości również śmiesznych, dowcipów o matematykach, fizykach i astronomach. Nie będziemy ich drukować, jeśli nas nie rozśmieszą, ale w przeciwnym razie — na pewno.

O balonie opowiadał nam L. W. Szczerba (Warszawa)

Trzeci paradoks ekonomiczny



Soczewka wielka jak niebo

Dr Zbigniew PŁOCHOCKI

Ile gwiazd na idealnie czystym niebie można nocą zobaczyć z Ziemi nieuzbrojonym okiem?

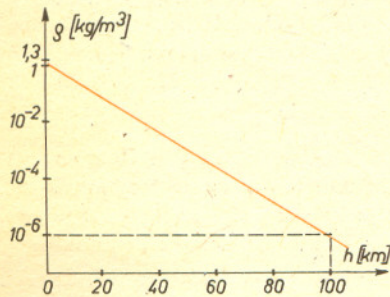
Nie męcz się, Czytelniku, z liczeniem, bowiem ścisła odpowiedź brzmi: ani jednej. Rzecz w tym, że z Ziemi żaden człowiek nie może patrzeć na gwiazdy bez przyrządu. Obserwuje on bowiem gwiazdy przez naturalną soczewkę, która zasłania mu całe niebo. A stanowi ją nasza, ziemna atmosfera.

Aby to sobie uzmysłwić, warto odpowiedzieć na dwa pytania: 1° jak atmosfera ziemská działa na przechodzące przez nią światło ciał niebieskich? oraz 2° czy to jej działanie da się sprowadzić do działania soczewki (i jakiej)?

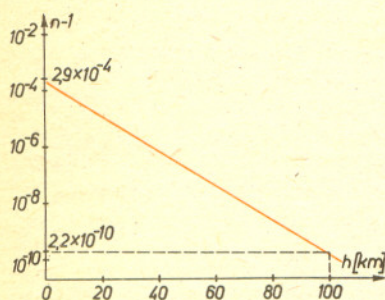
Atmosfera ziemská to kulista warstwa powietrza otaczająca Ziemię. Jej gęstość przy powierzchni Ziemi wynosi średnio około $1,3 \text{ kg/m}^3$ i szybko maleje wraz z wysokością nad poziomem morza (rys. 1). Znikome resztki atmosfery można wprawdzie stwierdzić nawet na wysokości do 3000 km, ale prawie cała masa atmosfery (99%) zawarta jest w najniższej powłoce o grubości ok. 35 km.

Współczynnik załamania gazów (względem próżni) jest rosnącą funkcją gęstości. Dla powietrza atmosferycznego można tę funkcję wystarczająco dokładnie przybliżyć funkcją liniową postaci: $n = 1 + A\rho$, gdzie n — współczynnik załamania powietrza, ρ — jego gęstość, $A \approx 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{kg}$. Z optycznego punktu widzenia atmosfera ziemská jest więc warstwą ośrodka o bardzo niewielkim współczynniku załamania światła, malejącym wraz z wysokością (rys. 2). Jak taka niejednorodna warstwa działa na przechodzące przez nią światło?

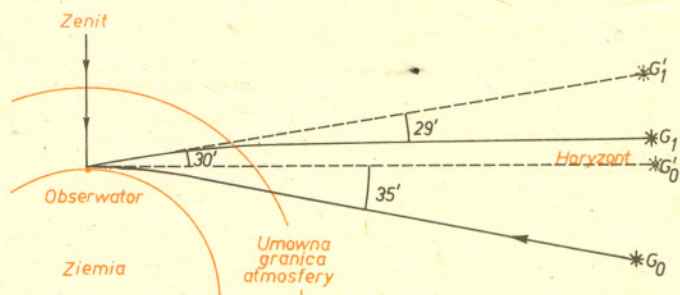
Kiedy promień świetlny przechodzi przez granicę między dwoma jednorodnymi ośrodkami o różnym współczynniku załamania (rys. 3a), wówczas skokowo zmienia swój kierunek. Kiedy promień świetlny przechodzi przez kilka warstw jednorodnych o innym współczynniku załamania każda (rys. 3b), wówczas zmienia swój kierunek na każdej granicy między warstwami. Kiedy promień świetlny biegnie przez niejednorodny ośrodek o płynnie zmieniającym się współczynniku załamania (rys. 3c), wówczas zakrzywia się także w sposób płynny. Zjawisko to nosi nazwę refrakcji.



Rys. 1. Zależność gęstości ρ atmosfery ziemskiej od wysokości h nad poziomem morza (w skali jak na rysunku zależność tę można z dobrym przybliżeniem traktować jako liniową).

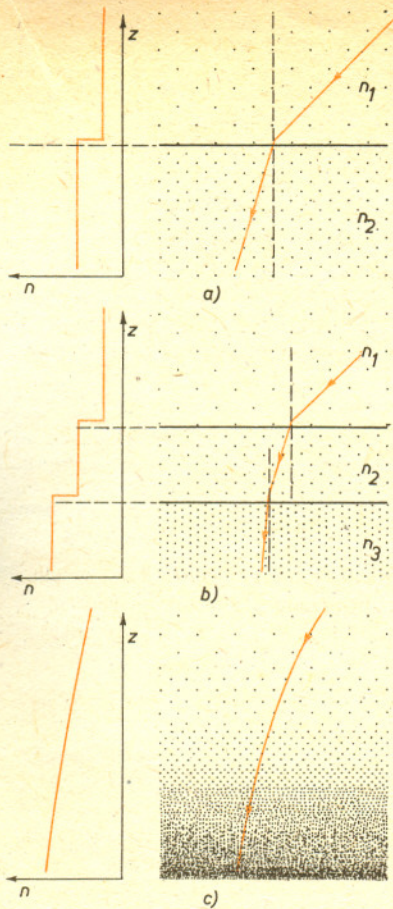


Rys. 2. Zależność bezwzględnej współczynnika załamania światła n atmosfery ziemskiej od wysokości h nad poziomem morza (w skali jak na rysunku zależność tę dobrze przybliża linia prosta).



Rys. 4. Refrakcja światła w atmosferze ziemskiej (w przesadzie i bez zachowania skali), powodująca, że obserwator na Ziemi widzi gwiazdy na niebie wyżej niż w rzeczywistości.

Podobnie zakrzywia swój tor światło biegnące przez atmosferę ziemską (rys. 4). Kąt między promieniem docierającym do obserwatora na powierzchni Ziemi a promieniem docierającym do atmosfery nosi nazwę kąta refrakcji. Kąt refrakcji jest tym większy, im dłuższą drogę przebywa promień świetlny w atmosferze. Dla promienia docierającego do obserwatora (na powierzchni Ziemi) w płaszczyźnie horyzontu kąt refrakcji wynosi $35'$. Dla promieni docierających do obserwatora pod coraz większym kątem do płaszczyzny horyzontu kąt refrakcji maleje.



Rys. 3. Załamanie światła na granicy dwóch ośrodków jednorodnych optycznie (a) przy przejściu przez kilka warstw takich ośrodków (b) i przy przejściu przez ośrodek optycznie niejednorodny (o płynnie zmieniającym się współczynniku załamania) (c). Pionowe wykresy po lewej stronie każdego rysunku obrazują zależność współczynnika załamania n od miejsca w ośrodku.

Promieniowi, który z płaszczyzną horyzontu tworzy w punkcie, gdzie znajduje się obserwator, kąt $30'$ (tyle mniej więcej wynosi widoczna z Ziemi średnica kątowa Słońca), odpowiada kąt refrakcji wynoszący około $29'$; promień docierający do obserwatora z zenitu refrakcji już nie ulega wcale.

Istotnie, wskutek refrakcji w atmosferze nie możemy z Ziemi patrzeć na niebo nieuzbrojonym okiem. Oko nasze jest bowiem zawsze „uzbrojone w atmosferę ziemską”, którą jakościowo możemy traktować jako specyficzną soczewkę płasko-wypukłą (czy ilościowo też? — ten niewątpliwie interesujący problem pozostawiam dociekliwemu Czytelnikowi). Jej specyfika polega — po pierwsze — na tym, że nie ma ona ostro określonej powierzchni wypukłej; po drugie, jest „wykonana” z materiału optycznie niejednorodnego (rys. 2); po trzecie wreszcie, na niebo patrzymy nie przez tę soczewkę, ale z jej wnętrza. Dodać by jeszcze należało, że wszystkie dane, które podaliśmy wyżej, mają charakter danych średnich. Aktualne własności naszej soczewki w znacznej mierze mogą zależeć od stanu atmosfery nad naszymi głowami.

Czy soczewka atmosferyczna ma istotne znaczenie dla obserwacji zjawisk na niebie z Ziemi? Oto trzy przykłady różnych zagadnień, których analiza pozwoli, mam nadzieję, uzasadnić odpowiedź twierdzącą na to pytanie.

Wróćmy najpierw do pytania z początku naszych rozważań. Wyobraźmy sobie, że ten sam fragment nieba obserwujemy z Księżyca (gdzie nie ma atmosfery) i z Ziemi. Obserwator na Księżycu policzył gwiazdy na niebie, po czym przenosi się na Ziemię i znowu liczy gwiazdy (niebo nad nim jest idealnie czyste). Czy zobaczy więcej, czy mniej gwiazd niż z Księżyca? Wskutek refrakcji w atmosferze ziemskiej widzimy z Ziemi gwiazdy, które dla obserwatora księżycowego są pod horyzontem (rys. 4), czyli z Ziemi możemy zobaczyć gwiazd więcej. Czy trochę więcej, czy też — znacznie więcej? Sądzę, że Czytelnik, posługując się podanymi uprzednio informacjami, sam już dojdzie do wniosku, że wpływ soczewki atmosferycznej na wynik liczenia gwiazd na niebie jest znikomo mały.

Czy można go jednak pominąć, gdy wyznaczamy kątowe odległości między gwiazdami, zwłaszcza takimi, które możemy obserwować jedynie nisko nad horyzontem?

Negatywną odpowiedź znajdzie Czytelnik z łatwością rozwiązując następujące zadanie: obserwator na powierzchni Ziemi widzi dwie gwiazdy, z których jedna znajduje się w płaszczyźnie horyzontu, druga zaś — $30'$ nad horyzontem. Ile wynosi faktyczna odległość kątowa między tymi gwiazdami (zakładamy, że odległość do gwiazd jest nieskończenie wielka w porównaniu z rozmiarami Ziemi i jej atmosfery)?

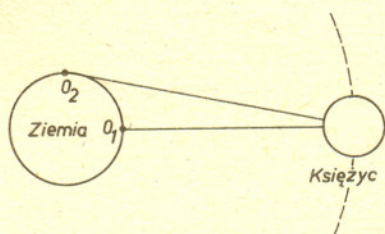
Trzeciego przykładu dostarcza nam wschodzące lub zachodzące Słońce lub Księżyc. Otóż ich tarcza jest wyraźnie spłaszczona w stosunku do sytuacji, kiedy są wysoko nad horyzontem. To także wynik refrakcji światła słonecznego w atmosferze. Czytelnik, który rozwiązał proponowane wyżej zadanie z parą gwiazd, nie powinien mieć kłopotów z rozwiązaniem następującego: o ile zmniejsza się pionowa średnica kątowa widzianego z Ziemi Słońca, którego tarcza dotyka właśnie swym dolnym punktem granicy horyzontu, w porównaniu ze Słońcem w zenicie (kiedy to kątowa średnica Słońca wynosi około $30'$)?

Tu jednak Czytelnik może mieć wątpliwości. Bowiem wschodzące lub zachodzące Słońce i Księżyc są nie tylko spłaszczone, ale też wyraźnie większe niż wysoko nad horyzontem. W tym miejscu chciałbym zaproponować Czytelnikowi, by wątpliwości te spróbował rozstrzygnąć samodzielnie, a następnie podzielił się wynikami swych dociekań z innymi za pośrednictwem naszego pisma.

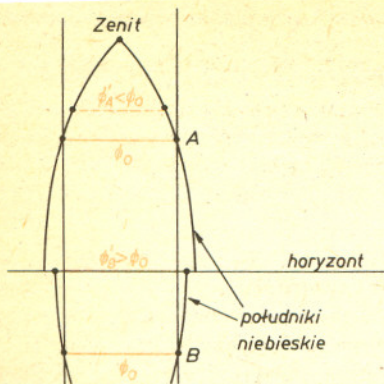
Osobiście zadanie podzieliłbym na dwie części: doświadczalną i teoretyczną. W części doświadczalnej starałbym się przede wszystkim odpowiedzieć na pytanie: czy obserwowane przez nas zwiększenie tarczy Słońca (czy Księżyca) jest obiektywnym faktem, czy tylko złudzeniem? W tym celu oko należałoby zastąpić jakimś przyrządem, który nie ulega złudzeniom optycznym — na przykład aparatem fotograficznym. Sekwencja zdjęć Słońca (lub Księżyca) podczas wschodu i po nim (lub przed i podczas zachodu) powinna stanowić wystarczająco wymowny materiał doświadczalny, pozwalający odpowiedzieć na powyższe pytanie.

Część teoretyczną można generalnie zatytułować „Dlaczego?” Innymi słowy, chodziłoby w niej o sporządzenie listy wszelkich możliwych mechanizmów, które warunkują obserwowane zmiany rozmiarów kątowych tarczy słonecznej, a następnie — o ocenę ich roli. Oto przykładowe pozycje takiej listy, które przytaczam nie tyle jako podpowiedzi, ile jako *advocatus diaboli*:

1° gdyby Księżyc obiegał środek Ziemi po okręgu, to w chwilach wschodu i zachodu znajdowałby się dalej od obserwatora na Ziemi niż w chwili przechodzenia przez zenit, przez co obserwator widziałby wschodzący i zachodzący Księżyc mniejszy niż wysoko na niebie (rys. 5); czy ma znaczenie fakt, że ciała niebieskie poruszają się po orbitach eliptycznych? czy istotne jest, że jedno obiega nie drugie, ale — ich wspólny środek masy? czy efekty te są istotne w przypadku Słońca widzianego z Ziemi?



Rys. 5. Księżyc jest bliżej ziemskiego obserwatora widzącego go w zenicie (O_1), niż obserwatora widzącego go podczas wschodu lub zachodu (O_2) (na rysunku nie zachowano skali).



Rys. 6. Refrakcja w atmosferze sprawia, że średnicę kątową Φ_0 obiektu niebieskiego obserwator ziemski zobaczy bądź jako mniejszą (Φ_A), bądź jako większą (Φ_B) — zależnie od tego, czy obiekt w rzeczywistości jest nad (A), czy pod horyzontem (B) (rysunek mocno przesadzony).

2° ze względu na symetrię soczewki atmosferycznej (osią symetrii jest prosta przechodząca przez zenit) refrakcja światła w atmosferze powoduje pozorne podniesienie ciał niebieskich jedynie wzdłuż południków niebieskich (kół wielkich na niebie przecinających się w zenicie — rys. 6), skutkiem czego Słońce znajdujące się faktycznie (tzn. bez uwzględnienia refrakcji) nad horyzontem musi obserwator ziemski widzieć jako mniejsze (dokładniej: węższe), a jako szersze widzi je tylko w tym krótkim okresie, który upływa od chwili jego faktycznego przejścia przez płaszczyznę horyzontu do momentu widzianego z Ziemi zachodu (podobnie przy wschodzie); czy to ma istotne znaczenie?

3° wschodzące lub zachodzące Słońce i Księżyc świecą słabiej i mają inną barwę (to zasługa rozpraszania światła słonecznego i księżycowego w atmosferze); czy ma tu miejsce (a jeśli tak, to czy jest istotne) złudzenie optyczne polegające na pozornej zmianie rozmiarów źródła światła przy zmianie jego barwy lub (i) jasności? czy ważna może tu być zmiana jasności nieba?

Jak wynika z powyższych przykładów, nie wszystkie czynniki na naszej liście dadzą się zanalizować ściśle (ilościowo). Dlatego racjonalizm warto w takich przypadkach wesprzeć stosownymi doświadczeniami. Nie należy więc lekceważyć części doświadczalnej naszego zadania.

No, ale dość już przestróg i morałów. Życząc sukcesów zostawiam Was sam na sam z problemem: dlaczego wschodzące i zachodzące Słońce i Księżyc widzimy z Ziemi większe niż wysoko nad horyzontem? A redakcja *Delty* czeka na Wasze listy.

Czytelnicy proponują

W artykule „Atraktor i koza” (*Delta* 7/1982) Irena Kozłowska obliczała długość sznurka, na którym ma być uwiązana koza. Drugi koniec sznurka jest zamocowany na brzegu kołowego pastwiska, a dokładnie połowa pastwiska ma być w zasięgu kozy. Wynik (przy promieniu koła 1) jest granicą ciągu x_n , gdzie $x_1 = 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$, a

$$f(x) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4} \arccos \frac{x}{2} \right).$$

Autorka oblicza tę granicę za pomocą kalkulatora „najlepiej programowanego”. Ciąg jest bowiem zbieżny wolno i dopiero siedemdziesiąty piąty wyraz daje nam osiem cyfr znaczących.

Czytelnik z Jeleniej Góry p. Adolf Łuczycycki proponuje inną metodę znalezienia wyniku. Po pewnych modyfikacjach wygląda ona tak. Obliczamy, jaka część pastwiska jest w zasięgu kozy (w zależności od długości sznurka)

$$p(s) = \frac{1}{\pi} \left(2 \arccos \frac{s}{2} - s \sqrt{1 - \frac{s^2}{4}} - s^2 \arccos \frac{s}{2} \right).$$

Oczywiście p jest funkcją rosnącą. Oznaczmy $s_1 = 1$, $s_2 = \sqrt{2}$, $p_1 = p(s_1)$; $p_2 = p(s_2)$. Oczywiście $p_1 < \frac{1}{2} < p_2$.

Określamy teraz $s_3 = \frac{s_2 - s_1}{p_2 - p_1} \left(\frac{1}{2} - p_1 \right) + s_1$ (zwykła interpolacja liniowa) i $p_3 = p(s_3)$.

Wstawiamy teraz s_3 i p_3 na miejsce s_1 i p_1 , jeśli $p_1 < \frac{1}{2}$ i na

miejsce s_2 i p_2 , jeśli $p_2 \geq \frac{1}{2}$ i powtarzamy powyższą procedurę.

Okazuje się, że już szósty wyraz ciągu daje osiem cyfr znaczących. (Pozostawiamy Czytelnikom udowodnienie, że ciąg s_n jest zbieżny do szukanej długości sznurka).

Kalkulatorem programowanym wygodniej jest liczyć pierwszą metodą (znacznie krótszy program), mimo że czas pracy kalkulatora jest około dziesięć razy dłuższy. Natomiast dla zwykłego kalkulatora przewaga drugiej metody jest wyraźna — dziesięciokrotnie mniej naciśnięć klawiszy.

J.R.



Rozwiązanie zadania M 355. Zauważmy wprost, że dla każdego n mamy: $a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_{n+2} - 1$.

Istotnie: $a_1 = 1 = 2 - 1 = a_3 - 1$, a przy założeniu, że równość nasza jest prawdziwa dla pewnego n mamy:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} &= \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + a_{n+1} = \\ &= a_{n+2} - 1 + a_{n+1} = a_{n+3} - 1, \end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny.

Mamy teraz:

$$\begin{aligned} a_{n+1} + \dots + a_{n+k-2} + a_{n+k-1} + a_{n+k} &= \\ &= a_{n+1} + \dots + a_{n+k-2} + a_{n+k-1} > a_{n+k+1} \end{aligned}$$

(bo $k > 2$),

równocześnie

$$\begin{aligned} a_{n+1} + \dots + a_{n+k} &\leq \\ &\leq a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+k} = a_{n+k+2} - 1, \end{aligned}$$

a więc

$$a_{n+k+1} < S_{n,k} < a_{n+k+2},$$

ponieważ ciąg Fibonacciego jest monotoniczny, $S_{n,k}$ nie może być jego wyrazem c.n.d.

Wyznaczanie mas gwiazd na podstawie grawitacyjnego przesunięcia ku czerwieni

Mgr Joanna FILIPOWICZ

Albert Einstein w książce „O szczególnej i ogólnej teorii względności” wydanej w roku 1917 napisał: „Częstość drgań promieniowania atomu znajdującego się na powierzchni ciała niebieskiego będzie nieco mniejsza od częstości drgań promieniowania atomu tego samego pierwiastka znajdującego się w swobodnej przestrzeni (lub na powierzchni mniejszego ciała niebieskiego)”.

Zastanówmy się nad możliwością wyznaczenia mas gwiazd przy wykorzystaniu tego efektu. Niech kwant promieniowania elektromagnetycznego wylatuje z izolowanego ciała niebieskiego o potencjale grawitacyjnym na powierzchni $\Phi = GM/R$, który znika w nieskończoności. Kwant taki porusza się z prędkością światła c i w układzie związanym z drgającym atomem ma częstość ν_0 . Zgodnie z relacją $E = mc^2 = h\nu_0$ wiążącą energię całkowitą E z masą m kwantowi takiemu można przypisać pewną wielkość $m = E/c^2$. Pole grawitacyjne opisane potencjałem Φ będzie oddziaływać na tę „masę”. Aby więc wydosłać się z potencjału Φ , kwant musi wykonać pracę równą różnicy energii potencjalnej na powierzchni ciała o masie M i energii potencjalnej

Temperatura efektywna T_{ef} — jest to taka temperatura, jaką miałoby ciało doskonale czarne tych samych rozmiarów i wypromieniowujące w jednostce czasu tę samą energię, co gwiazda. Całkowite natężenie promieniowania we wszystkich długościach fali E w jednostce czasu można wyrazić przez temperaturę efektywną: prawo Stefana-Boltzmann

$$E = \sigma T_{ef}^4 \quad (\sigma — stała Stefana-Boltzmann).$$

Związek pomiędzy jasnością L i temperaturą efektywną T_{ef} jest postaci: $L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4$, gdzie R jest promieniem gwiazdy. Temperaturę efektywną i przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni gwiazdy wyznacza się badając jej widmo ciągłe. Również różnorodność widm liniowych spowodowana jest nie tyle różnorodnością składu chemicznego, ile odmiennymi warunkami powstawania widma (różnice temperatury i gęstości).

Zmiana poziomów energii atomu spowodowana wpływem jednorodnego, zewnętrznego pola elektrycznego o natężeniu E nosi nazwę zjawiska Starka. Zjawisko Starka zależy silnie od ciśnienia — im większe ciśnienie, tym linie silniej poszerzone, co w przypadku białych karłów ma istotne znaczenie.

Występowanie zjawiska Zeemana wywołane jest energią oddziaływania momentów magnetycznych z zewnętrznym polem magnetycznym. Istnienie tych momentów wiąże się po pierwsze z ruchem orbitalnym naładowanych elektronów. Poruszające się ładunki są równoważne prądem elektrycznym, z których każdy wytwarza moment magnetyczny proporcjonalny do momentu pędu odpowiedniego ruchu orbitalnego. Po wtóre elektrony mają moment magnetyczny związany z ich własnym momentem pędu (spinem elektronu), same przypominają pod tym względem małe magnesy.

W 1974 roku Gatewood wyznaczył masy każdego ze składników Syriusza korzystając z faktu, że jest to układ podwójny. Uzyskał on wyniki: $M_A = 2,03 \pm 0,11 M_\odot$, $M_B = 1,01 \pm 0,06 M_\odot$. Dla naszych rozważań szczególnie interesująca jest masa M_B — składnika będącego białym karłem. Jak widać z przytoczonych danych dokładność tej metody jest rzędu kilku procent, a więc znacznie większa niż przy wykorzystaniu efektu grawitacyjnego przesunięcia ku czerwieni.

w nieskończoności (równej 0). W efekcie zmniejsza on swą częstość do wartości ν . Kwant utraci energię $\Phi \cdot \frac{h\nu_0}{c^2} = \frac{GmM}{R} = h(\nu_0 - \nu)$ i dlatego obserwowana przez nas na Ziemi częstość

będzie równa $\nu = \nu_0(1 - \Phi/c^2)$. Efekt ten nazwano grawitacyjnym przesunięciem ku czerwieni, gdyż zmniejszeniu częstości drgań odpowiada zwiększenie długości fali, a więc przesunięcie widma ku czerwieni. Wyrażając wielkość tego przesunięcia w jednostkach długości fali

$$\text{otrzymujemy: } \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{GM}{Rc^2} = z.$$

W przypadku ziemskiego pola grawitacyjnego efekt ten został potwierdzony przez doświadczenie, przy czym stwierdzono zgodność z przytoczonymi tu wzorami przewidującymi wielkość przesunięcia ku czerwieni z dokładnością do 10%. Dla źródła promieniowania elektromagnetycznego znajdującego się na powierzchni Słońca względne przesunięcie ku czerwieni z wynosi: $2,115 \cdot 10^{-6}$. Dla dowolnego ciała niebieskiego, którego masa jest wyznaczana w jednostkach masy Słońca (M_\odot) i promień w jednostkach promienia Słońca (R_\odot),

$$\text{mamy więc: } z = 2,115 \cdot 10^{-6} \frac{M/M_\odot}{R/R_\odot}$$

Powyższe rachunki zostały przeprowadzone bez uwzględnienia potencjału grawitacyjnego Ziemi, w którym to potencjale kwant przybywający z przestrzeni kosmicznej uzyskuje pewną energię. Łatwo jednak obliczyć, że wpływ ziemskiego pola grawitacyjnego jest bardzo mały, bowiem daje względne przesunięcie ku fioletowi równe: $z = 6,9 \cdot 10^{-10}$, co w zestawieniu z wielkością przesunięcia już choćby na powierzchni Słońca daje wkład zaniedbywalny.

Oczywiście, jak widać z przytoczonych wzorów, efekt przesunięcia ku czerwieni jest tym większy, im większy stosunek M/R , a więc im silniejsze pole grawitacyjne obiektu. Szczególnie dla białych karłów, dla których $\frac{M/M_\odot}{R/R_\odot}$ jest rzędu kilkudziesięciu, możliwe jest wyznaczenie

grawitacyjnego przesunięcia ku czerwieni z zadowalającą dokładnością. Przesunięcie to wyznacza się porównując widmo gwiazdy z widmem laboratoryjnym, tj. takim, w którym długości fali odpowiadają promieniowaniu w układzie związanym z drgającym atomem. Widmo laboratoryjne dla danego pierwiastka jest więc widmem porównania o dokładnie zdefiniowanych długościach fali odpowiadających liniom i względem niego wyznacza się przesunięcia z .

W przypadku białych karłów bada się zwykle linie serii Balmera H_β , H_γ , H_δ , H_ϵ w celu wyznaczenia ich przesunięcia ku czerwieni, a ze znajomości z określa się M/R . Mając dodatkowo niezależną informację o promieniu gwiazdy np. ze znajomości jasności i temperatury efektywnej T_{ef} lub niezależne oszacowanie przyspieszenia grawitacyjnego na powierzchni gwiazdy można wyznaczyć jej masę M .

Wyznaczenie stosunku $\Delta\lambda/\lambda$ jest problemem trudnym i to z wielu powodów. Przede wszystkim linie widmowe mogą być poszerzone i zniekształcone przez szereg efektów, jak rotacja ewentualnie pulsacja gwiazdy, występowanie pól elektrycznych i magnetycznych w jej wnętrzu (efekt Starka i Zeemana), czy wreszcie poszerzenie ciśnieniowe. Dla linii poszerzonych i zniekształconych często trudno wyznaczyć długość fali. Ponadto ruch gwiazdy w przestrzeni może dawać niezaniebnywalny wkład do przesunięcia linii. W badaniach eliminuje się więc ruch Słońca i ruch Galaktyki, a prędkości radialne gwiazd (tylko składowa radialna prędkości ma wpływ na wygląd widma) wyznacza się metodami statystycznymi.

W 1954 r. Popper badał białego karła 40EriB. Wyznaczył on przesunięcie w kierunku czerwieni $z = 0,7 \cdot 10^{-4}$, co odpowiada $\frac{M/M_\odot}{R/R_\odot} = 33,1$. Promień tej gwiazdy jest równy $R = 0,0132 R_\odot$,

a więc jej masa $M = 0,44 M_\odot$. Wynik ten został potwierdzony w 1971 r. przez Shipmana, który wyznaczył przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni oraz wartość przesunięcia ku czerwieni. Obliczona przez niego masa 40EriB jest równa $M = 0,45 \pm 0,13 M_\odot$. Ponadto wykonano szereg pomiarów dla obiektów, dla których prędkości radialne można było wyznaczyć statystycznie — np. dla otwartych gromad gwiazd, jak Hiady czy Plejady. W takich przypadkach wyznacza się średnie dopplerowskie przesunięcia ku czerwieni dla całej gromady gwiazd, a następnie dla znanych wartości promieni określa się masy poszczególnych składników.

Opisana metoda jest jedynym obserwacyjnym sposobem wyznaczania mas gwiazd nie będących składnikami układów podwójnych i oczywiście mających odpowiednio silne pole grawitacyjne na powierzchni. Szereg badań przeprowadzono jednak dla obiektów, dla których masy można było wyznaczyć w inny sposób. Okazuje się, że masy wyznaczone na podstawie grawitacyjnego przesunięcia ku czerwieni są, w granicach błędów tej metody, zgodne z masami otrzymywanymi przy wykorzystaniu innych metod. Jako przykład posłużyć może Syriusz — najjaśniejsza gwiazda nieba północnego. Jest to układ podwójny, dla którego korzystając z praw mechaniki Newtona można z dużą dokładnością wyznaczyć masy każdego ze składników. Jednocześnie gwiazda słabsza — Syriusz B jest białym karłem i dla niego wyznaczono niezależnie masę korzystając z efektu grawitacyjnego przesunięcia ku czerwieni. Masa wyznaczona ze znajomości z jest obciążona znacznie większym błędem (kilkadziesiąt procent), ale w granicach tego błędu otrzymuje się zgodne wyniki, tj. $M = 1 M_\odot$.

Paradoks czasu czekania

Prof. dr Bolesław KOPOCIŃSKI

Weźmy na wstępie pod uwagę model zajezdni autobusowej. Nie popelnimy znaczących niedokładności przyjmując, że autobusy podjeżdżają na przystanek w całkowitych minutach. Powszechnie ceni się deterministyczne rozkłady jazdy, dla nas takie modele nie są interesujące. Zajmiemy się rozkładami jazdy zależnymi od przypadku, a wśród nich modelem czysto losowym, wcale nie najgorszym.

W dalszym ciągu przyjazd autobusu nazywamy sygnałem. Chwile sygnałów kładziemy na osi czasu tworząc tym samym strumień sygnałów. Rozważać będziemy odstępy czasu między sygnałami i czas czekania na sygnał począwszy od określonej chwili.

Model czysto losowy. Przypuśćmy, że sygnał pojawia się w chwili $i = 0$, natomiast chwilami pojawienia się dalszych sygnałów rządzi pewien ciąg prób Bernoulliego. Ciąg ten stanowią próby niezależne, w których możliwe są tylko dwa wyniki i ich prawdopodobieństwa pozostają te same przez cały czas prób. Dla ustalenia uwagi możemy przy tym myśleć o serii rzutów asymetryczną monetą, o prawdopodobieństwie orła (sukces) równym p i prawdopodobieństwie reszki (porażka) równym $q = 1 - p$. Mówimy, że w strumieniu sygnałów w danej chwili pojawia się sygnał, jeśli w odpowiednim miejscu w ciągu prób Bernoulliego zdarza się sukces, nie ma sygnału w przeciwnym razie.

Weźmy pod uwagę zmienną losową X określoną jako odstęp czasu między kolejnymi sygnałami. Ma ona rozkład prawdopodobieństwa zwany rozkładem geometrycznym

$$p_k = Pr(X = k) = q^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \dots$$

Średnia długość odstępu, zdefiniowana wzorem $\mu = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots$ jest równa $1/p$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^{k+n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(q^n \sum_{k=0}^{\infty} q^k \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)^2 = \frac{1}{(1-q)^2}$$

a więc $\sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$

Niech i będzie ustaloną chwilą oraz Y_i będzie czasem czekania na pierwszy sygnał po chwili i . Tym samym przyjmujemy, że pasażer nie może odjechać bez czekania, nawet jeżeli przyjdzie na przystanek i odjazd autobusu następują w tej samej chwili. Zmienną losową Y_i nazwiemy czasem resztowym. Z opisu ciągu prób Bernoulliego wynika, że czas resztowy nie zależy od czasu, jaki upłynął do chwili i od chwili poprzedniego sygnału i ma taki sam rozkład jak zmienna losowa X czasu od sygnału do sygnału.

Model można rozważać nieco inaczej, a wniosek będzie dalej idący. Aby uwolnić się od zakłócenia wywołanego początkiem czasu, rozważmy ciąg prób Bernoulliego ponumerowanych liczbami całkowitymi, a więc rozważmy ciąg sygnałów rozciągniętych na wszystkie liczby całkowite nie wyróżniając sygnałem chwili $i = 0$. Niech Z_i oznacza czas, jaki upłynął do chwili i od chwili poprzedniego sygnału ($Z_i = 0$, jeśli w chwili i zdarzył się sygnał). Teraz łatwo zauważyć, że zmienna losowa Z_i ma rozkład prawdopodobieństwa $Pr(Z_i = k) = q^k p$, $k = 0, 1, \dots$, z wartością oczekiwaną $(1/p) - 1$, oraz zmienne losowe Z_i i Y_i są niezależne.

Paradoksalny jest fakt, że jakkolwiek wszystkie odstępy między kolejnymi sygnałami mają ten sam rozkład prawdopodobieństwa z wartością średnią $1/p$, to chwila i wybrana dowolnie znajduje się w odstępie o rozkładzie prawdopodobieństwa z wartością średnią $(2/p) - 1$.

Model ogólny. Rozważmy teraz model łączący cechy modelu deterministycznego i losowego. Przyjmijmy, że odstęp między n -tym i $n+1$ -szym sygnałem jest zmienną losową X_n o pewnym rozkładzie prawdopodobieństwa $p_k = Pr(X_n = k)$, $k = 1, 2, \dots$, niezależnym od n . Ponadto założmy, że wszystkie zmienne losowe X_1, X_2, \dots są niezależne. Wartość średnia odstępu zdefiniowana jak poprzednio niech będzie skończona.

Niech u_i oznacza prawdopodobieństwo sygnału w chwili i . Prawdopodobieństwa u_i , $i = 0, 1, \dots$, spełniają równanie rekurencyjne

$$(1) \quad \begin{aligned} u_0 &= 1, \\ u_i &= u_0 p_i + u_1 p_{i-1} + \dots + u_{i-1} p_1, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Przy dowodzie tych zależności wystarczy zauważyć, że ostatni sygnał przed chwilą i może się zdarzyć w chwili $0, 1, \dots, i-1$, skorzystać z wzoru na prawdopodobieństwo całkowite i założeń dotyczących odstępow między sygnałami.

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y_i , zdefiniowanej jak poprzednio, możemy przedstawić następująco

$$(2) \quad Pr(Y_i = k) = p_{i+k} + u_1 p_{i-1+k} + u_2 p_{i-2+k} + \dots + u_i p_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Równanie (1) nazywa się równaniem odnowy i ma znaczenie w teorii odnowy i teorii niezawodności. Tamże X_n interpretuje się jako czas pracy pewnego elementu, a chwile sygnałów są chwilami elementów kończących pracę. W przypadku geometrycznego rozkładu czasu pracy elementu mamy $u_i = 1/\mu$ dla $i = 1, 2, \dots$, w innych przypadkach obserwuje się charakterystyczne zanikające oscylacje ciągu.

Interesująca jest asymptotyka u_i przy $i \rightarrow \infty$. Otóż, jeżeli dla pewnego N mamy $u_i > 0$ dla $i > N$, to istnieje granica $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i = 1/\mu$. Ten fakt może być wykorzystany do

znalezienia rozkładu granicznego czasu resztowego. Oczywiście prawdopodobieństwo p_{k+i} dąży do zera przy $i \rightarrow \infty$, znalezienie granicy pozostałych w (2) wyrazów nie jest natychmiastowe, bo rośnie liczba wyrazów tej sumy. Można pokazać elementarnie, że $u_i p_k + \dots + u_1 p_{i-1+k} \rightarrow r_k/\mu$ gdy $i \rightarrow \infty$, gdzie $r_k = p_k + p_{k+1} + \dots$, $k = 1, 2, \dots$

Rozkład prawdopodobieństwa $p_k^* = r_k/\mu$, $k = 1, 2, \dots$ nazywa się granicznym rozkładem resztowym. Formalnie można go obliczyć dla każdego rozkładu o skończonej średniej.

W przypadku rozkładu geometrycznego rozkład resztowy jest taki sam. Rozkład deterministyczny $p_k = 1$ dla $k = m$ i $p_k = 0$ dla $k \neq m$ został wykluczony z rozważań na wstępie, nie jest także dopuszczalny do rozważań asymptotycznych teorii odnowy. Formalnie możemy jednak obliczyć: $p_k^* = 1/m$, $k = 1, 2, \dots, m$, $p_k^* = 0$, $k = m+1, m+2, \dots$

Wartość średnia w rozkładzie deterministycznym jest równa m , natomiast w odpowiadającym mu rozkładzie resztowym jest mniejsza i wynosi $(m+1)/2$.

Graniczny resztowy rozkład prawdopodobieństwa ma ciekawe własności. Dla sformułowania jednej z nich potrzebne jest pojęcie wariancji. Wariancją zmiennej losowej X o rozkładzie p_k , $k = 1, 2, \dots$, nazywamy liczbę

$$\delta^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k - \mu^2.$$

Teraz obliczymy średnią w rozkładzie p_k^* , $k = 1, 2, \dots$

$$(3) \mu^* = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k^* = \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{i=k}^{\infty} p_i = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^i k \right) p_i =$$

$$= \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i(i+1)}{2} p_i = \frac{1}{2\mu} (\delta^2 + \mu + \mu^2).$$

Paradoks. Można zapytać, czy istnieją rozkłady odstępów między sygnałami, dla których czasy resztowe są średnio większe. Odpowiedź wynika natychmiast ze wzoru (3), wszystko zależy od wariancji. Dla rozkładów prawdopodobieństwa

bliskich deterministycznego (δ^2 małe) paradoks nie jest spodziewany. Istnieją jednakże rozkłady prawdopodobieństwa, dla których, przy danej średniej, wariancja jest dowolnie duża albo nieskończona. Wówczas odpowiedź na nasze pytanie jest twierdząca.

Najczęściej przy losowych rozkładach jazdy autobusów odpowiednie δ^2 jest duże. Wówczas nie ma racji osoba, która z zalem powiada, że uciekł jej autobus w chwili, gdy przyszła na przystanek. Jej średni czas czekania jest krótszy, aniżeli średni czas czekania osoby przychodzącej na przystanek w wybranym na chybił trafił momencie czasu.

(Intuicyjne wyjaśnienie paradoksu znajduje się w numerze.)



Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 355. Przypomnijmy, że ciągiem Fibonacciego nazywamy ciąg określony rekurencyjnie:

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2.$$

Wykazać, że dla $k \geq 3$ suma $S_{n,k} = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}$ nie może być liczbą Fibonacciego. Rozwiązanie na str. 8

M 356. Średnicą D zbioru A nazywamy liczbę $D(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$, gdzie $d(x,y)$ jest odległością x od y .

Punktem środkowym zbioru leżącego w przestrzeni euklidesowej nazywamy środek odcinka o końcach należących do A i długości $D(A)$.

Wykazać, że dla zbioru $S(A)$ wszystkich punktów środkowych zbioru A prawdziwa jest nierówność

$$D(S(A)) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} D(A)$$

i że oszacowania tego nie można poprawić.

Rozwiązanie na str. 2

M 357. Niech x będzie dowolną liczbą niewymierną. Wykazać, że istnieje takie $n < 1000$, że wśród ułamków o mianowniku n znajduje się ułamek przybliżający x z dokładnością $\frac{1}{1000n}$.

Rozwiązanie na str. 5

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 148. a) W przewodzącym walcu W skupione jest pole magnetyczne (rys. a). Giętkie przewody łączą galvanometr G ze stykającymi się na powierzchni walca kontaktami ślizgowymi K_1 i K_2 , które następnie przesuwiają się po powierzchni bocznej walca aż do ponownego zetknięcia w położeniu K'_1 i K'_2 .

b) Walec miedziany wiruje w polu magnetycznym.

Do jego osi i powierzchni bocznej podłączony jest za pomocą szczotek czuły miernik (rys. b).

c) Metalowa ramka $ABCD$ wiruje wokół przewodzącego magnesu walcowego i poprzez ślizgacze A i D tworzy obwód zamknięty.

Prawo indukcji elektromagnetycznej mówi, że siła elektromotoryczna indukcji w obwodzie

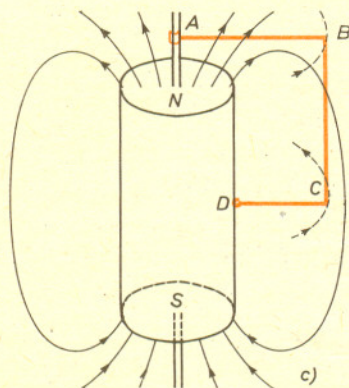
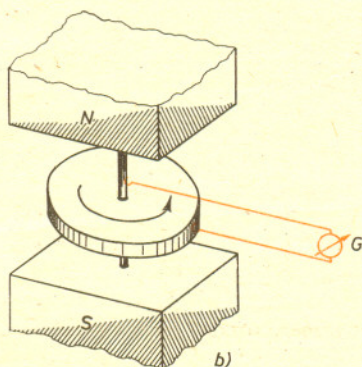
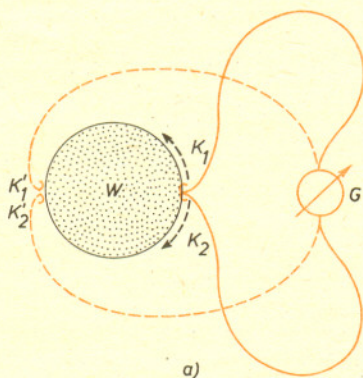
$$\varepsilon = -k \frac{d\Phi}{dt}$$

jest proporcjonalna do szybkości zmian strumienia magnetycznego $\frac{d\Phi}{dt}$ obejmowanego przez obwód (k — współczynnik proporcjonalności zależny od układu jednostek).

Zgodnie z tym prawem galvanometr w punkcie a) powinien zarejestrować przepływ prądu, a w obwodach z punktów b) i c) prądy nie powinny płynąć.

Czyżby tak było istotnie?

Rozwiązanie na str. 2



Przypominamy

Każdy, kto nadesłże pod adresem redakcji rozwiązanie (wraz z zaadresowaną do siebie kopertą — większą — z naklejonym znaczkiem), otrzyma wydruk z komputera z komentarzem do tego rozwiązania

Mizar MSE (6)

Podaliśmy już ważniejsze rodzaje konstrukcji służących do budowy poprawnych i akceptowanych przez Mizar dowodów. Spróbujmy z podanej poprzednio aksjomatyki liniowego porządku dla ułamków wywieść takie zdanie:

```
FOR X EX Y ST NOT NWCX,YJ
```

Nie da się. Nic dziwnego — po prostu z tej aksjomatyki ono wcale nie wynika. Uzupełnijmy więc wstęp (environ) o następujące aksjomaty.

```
NIEOGRANICZONOSC: FOR X HOLDS (EX Y ST X(<)Y & NWCX,YJ) &
(EX Z ST X(>Z & NWCZ,XJ) &
```

```
PESTOSC: FOR X,Y ST X(<)Y & NWCX,YJ
EX Z ST NWCX,ZJ & NWCZ,YJ & X(<)Z & Z(<)Y
```

Zacznijmy dowód z nadzieją, że nowe aksjomaty nam pomogą. Teza zaczyna się od ogólnego kwantyfikatora, więc:

```
PROOF
LET X' BE ULAMEK;
```

No i co dalej? Mamy teraz udowodnić, że $ex\ y\ st\ not\ NW[x', y]$. Naturalną drogą dowodzenia (wprost) takiego zdania jest wskazanie przykładu — obiektu, który zadośćczyni wymaganemu warunkowi. Ale skąd taki obiekt wziąć? Wprowadzone świeżo aksjomaty gwarantują nam istnienie pewnych obiektów o pewnych własnościach. Być może któryś z nich ma też takie własności, jakich poszukujemy dla wskazania przykładu. Spróbujmy:

```
A: EX Y ST X'(<)Y & NWCY,X'J BY NIEOGRANICZONOSC;
```

No dobrze, ale jak skorzystać z takiego faktu. Skoro mamy już gwarancję istnienia obiektów o pewnej własności, to możemy wybrać jeden z nich, jeden konkretny, i dla wygody nazwać go.

Mając taki obiekt już „w ręku” możemy posługiwać się nim w dalszym rozumowaniu jak stałą, o której już coś wiemy. Taki wybór zapisujemy w Mizarze

```
CONSIDER Y' SUCH THAT B: X'(<)Y' & NWCY',X'J BY A;
```

No, a teraz mamy już pewną stałą i jak się okazuje tę, która była nam potrzebna.

```
NOT NWCX',Y'J BY B,ANTYSYMETRIA;
HENCE EX Y ST NOT NWCX',YJ
END;
```

Konstrukcja zaczynająca się od słowa *consider* (po polsku znaczy ono „rozważmy”, „weźmy pod uwagę” lub nieco luźniej „wybierzmy”) oznacza wybór i ustalenie do dalszych rozważań obiektu (stałej), który ma pewne własności, a fakt istnienia obiektów o takich własnościach przyjęto lub wykazano wcześniej. Zatem taki wybór obiektu przez *consider* wymaga uzasadnienia i może być nim jedynie powołanie się na przesłanki. (Uwaga. Po *consider* użycie *then* lub *hence* jest niedozwolone).

W następującym dowodzie zakładamy zdanie egzystencjalne (tzn. z kwantyfikatorem szczegółowym) i zaraz potem z niego korzystamy.

```
FOR X,Y ST (EX Z ST NWCX,ZJ & NWCZ,YJ) HOLDS NWCX,YJ
[PROOF
LET X',Y' BE ULAMEK;
ASSUME EX Z ST NWCX',ZJ & NWCZ,Y'J;
THEN CONSIDER Z' SUCH THAT A: NWCX',Z'J & NWCZ',Y'J;
THUS NWCX',Y'J BY A,PRZECZODNIOSC
END;
```

To same możemy zrobić krócej:

```
FOR X,Y ST EX Z ST NWCX,ZJ & NWCZ,YJ HOLDS NWCX,YJ
PROOF
LET X',Y' BE ULAMEK;
GIVEN Z' SUCH THAT A: NWCX',Z'J & NWCZ',Y'J;
THUS THESIS BY A,PRZECZODNIOSC
END;
```

Konstrukcja z *given* zastępuje założenie o istnieniu pewnych obiektów (*assume ex ...*) i następujący po nim wybór jednego z tych obiektów (*consider ...*) uzasadnionego przez to założenie (*then*). Zwrot *given ... such that ...* po polsku wyrażamy tak: dany jest ... taki, że ... Używanie *then* i *hence* po konstrukcji *given* jest niedozwolone. Zwróćmy uwagę: właśnie poznaliśmy jeszcze jeden sposób robienia założeń w dowodzie.

A teraz wróćmy do dowodzenia nie wprost zdań ogólnych, z którymi to dowodami w czwartym spotkaniu nie bardzo umieliśmy sobie poradzić. Teraz już umiemy skorzystać z negacji takiego zdania. Bo czymże ono jest? Jeszcze raz pokażemy, że spójność daje zwrotność; tym razem nie wprost.

```
FOR X HOLDS NWCX,XJ
PROOF
ASSUME NOT (FOR X HOLDS NWCX,XJ);
THEN EX X ST NOT NWCX,XJ;
THEN CONSIDER Y SUCH THAT A: NOT NWCY,YJ;
NWCY,YJ BY SPOJNOSC;
HENCE CONTRADICTION BY A
END;
```

Powyższy dowód można zapisać znacznie krócej:

```
FOR X HOLDS NWCX,XJ
PROOF
GIVEN X SUCH THAT A: NOT NWCX,XJ;
THUS CONTRADICTION BY A,SPOJNOSC
END;
```

Zadania:

(Jak zwykle o naszych ułamkach).

```
T17: (EX X,Y,Z ST X(<)Y & Y(<)Z) IMPLIES (EX X,Y ST X(<)Y)
T18: (EX X ST FOR Y HOLDS NWCX,YJ) IMPLIES (FOR X EX Y ST NWCY,XJ)
T19: FOR X,Y ST X(<)Y & NWCX,YJ
EX X',Y' ST NOT NWCX',XJ & NOT NWCY',X'J & NOT NWCY',Y'J
```

dr Krzysztof PRAŻMOWSKI, dr Piotr RUDNICKI

OPIS CHECKERA W DELCIE 10 JEST BARDZO POCIECZYNY I ZAPEWNE CZYTELNICZY ZAUWAZYL, ZE POSTEPUJAC ZGODNIE Z OPISEM, NIEKTORYCH ZADAN ROZWIĄZAC NIE MOZNA. PAN DARIUSZ DUHA UPROST NAPISAL, ZE PODEJRZEWANA, IZ CHECKER WYKORZYSTUJE JAKIES DODATKOWE AKSJOMATY. ISTOTNIE TAK JEST.

ROWNOSC NIE PRZYPADKIEM OZNACZONA JEST INACZAJ NIZ POZOSTALE PREDYKATY I JEST ONA INACZEJ TRAKTOWANA. CHECKER SPRAWDZAJAC POPRWNOSC KROKOW WNIOSKOWANIA SAM UWZGLEDNIA, JAKO DODATKOWE PRZESLANKI: ZWROTNOSC, SYMETRYCZNOSC I PRZECZODNIOSC ROWNOSCII, A TAKZE PRAWA EKSTENSJONALNOSC DLA NIEZ: JEZELI JAKIES ZDANIE, W KTORYM WYSTEUJE A, JEST PRAWDZINE, A A=B, TO PO ZASTAPIENIU A PRZEZ B, ZDANIE NADAL BEDZIE PRAWDZINE.

OTO JAK DZIAŁA CHECKER (UZASADNIENIE TEZY T6 Z DELTY 10):
PO PIERWSZE: DOLACZA ZAPRZECZENIE WNIOSKU DO PRZESLANEK (CZYLI W TYM WYPADKU C=E - DO ZDAN Z5:NOT NWCX,EJ I Z2:NWCX,CJ I PROBUJE Z TEGO UDOWODNIC SPRZECZNOSE. SPRAWDZA WIEC, CZY WSROD ZDAN NOT NWCX,EJ, NWCX,CJ, C=E

SA ZDANIA SPRZECZNE.
PO DRUGIE: WYKORZYSTUJAC, ZE C=E WYMIENIA WSZEDZIE C NA E,TO ZNACZY OTRZYMUJE:

```
NOT NWCX,EJ, NWCX,EJ.
WIDAC, ZE DWA OSTATNIE ZDANIA SA SPRZECZNE (JEDNO JEST NEGACJA DRUGIEGO).
A ZATEM DOLACZENIE ZAPRZECZENIA WNIOSKU ( CZYLI E=C ) DO PRZESLANEK
PROWADZI DO SPRZECZNOCI. WNIOSEK Z TEGO, ZE C NIE MOZE BYC ROWNE E,
A ZATEM WNIOSEK OSTATECZNY: NOT C=E.
```

WAZNA UWAGA: STRUKTURA DOWODU W MIZARZE WYMAGA, ABY KOLEJNOSC ARGUMENTOW W KONKLUZJI BYLA TAKA SAMA JAK W DOWODZONYM TWIERDZENIU.

OTO POPRAWNY DOWOD TEZY T10, O PODANIE KTOREGO PROSILO KILKU CZYTELNIKOW:

```
T10:FOR X,Y,Z BEING ULAMEK ST NOT NWCX,ZJ & NWCY,ZJ
HOLDS NOT NWCX,YJ
```

```
PROOF
LET X',Y,Z BE ULAMEK SUCH THAT A:NOT NWCX,ZJ AND
B:NWCY,ZJ;
C:X(<)Y BY B,A;
D:NWCZ,XJ BY A,SPOJNOSC;
E:NWCY,XJ BY B,D,PRZECZODNIOSC;
THUS NOT NWCX,YJ BY C,E,ANTYSYMETRIA
END;
```

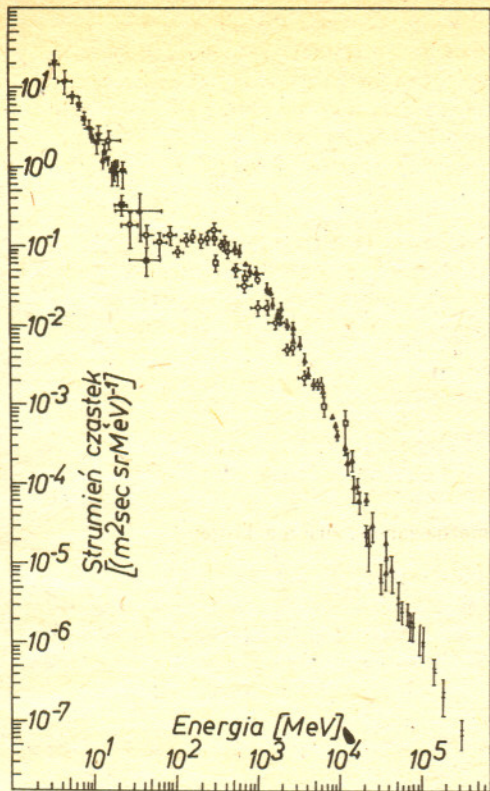
ORAZ TEZY T13:

```
T13: FOR X,Y BEING ULAMEK ST NWCX,YJ HOLDS
FOR Z BEING ULAMEK HOLDS
NWCX,ZJ OR NWCZ,YJ
PROOF
LET X',Y BE ULAMEK SUCH THAT 1: NWCX,YJ;
LET Z BE ULAMEK;
ASSUME THAT 11: NOT NWCX,ZJ AND 111: NOT NWCZ,YJ;
2: NWCZ,XJ BY 11,SPOJNOSC;
22: NWCZ,YJ BY 1,2,PRZECZODNIOSC;
THUS CONTRADICTION BY 22,111;
END;
```

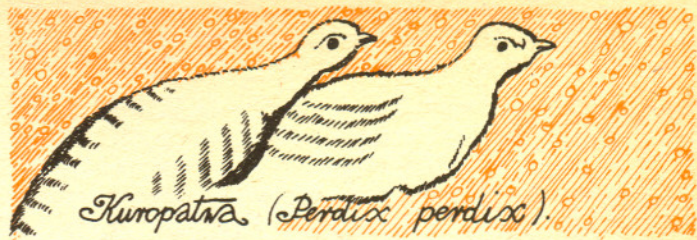
TRUDNO NIE PRACUJAC BEZPOSREDNIO Z KOMPUTEREM, NAPISAC CALKOWICIE POPRAWNY DOWOD I DLATEGO TEZ CZYTELNICZY, KTORYZ PO OTRZYMANIU WYDRUKU Z BLEDNYM ROZWIĄZANIEM PRZYSLA POPRAWIONY TEKST, OTRZYMAJĄ NOWY WYDRUK.

BLEDY WYNIKAJACE Z ZAGAPIENIA SIE STARAMY SIE POPRAWIAC SAHI. PRZY INNYCH, POWAZNIEJSZYCH BLEDACH PISZEMY KOMENTARZ ZACZYNAJACY SIE OD "==".

ZINAIDA TRYBULEC



Rys. 1. Rozkład energii (widmo) promieniowania kosmicznego.



Patrz w niebo

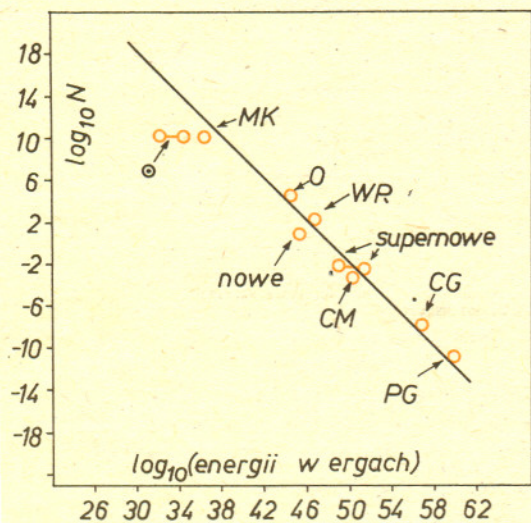
Patrząc nocą w niebo rejestrujemy fotony emitowane przez gwiazdy. Ale przecież nie są to jedyne cząstki docierające do Ziemi z Kosmosu. Co najmniej tyle samo energii co fotony z gwiazd niesie tzw. promieniowanie kosmiczne, któremu chcemy poświęcić dzisiejszy artykuł. W wyniku oddziaływania tego promieniowania z atmosferą Ziemi jej powierzchnia bombardowana jest wtórnym strumieniem cząstek; w ciągu każdej sekundy Twoja, Czytelniku, głowa przeszywana jest przez ok. 5 mionów powstających przez oddziaływanie cząstek przychodzących z Kosmosu z atomami naszej atmosfery.

Promienie kosmiczne odkryto ponad 70 lat temu (Hess, 1912). Napisano na ich temat wiele opasłych tomów, jednak do dzisiaj nie umiemy z dostateczną dozą pewności odpowiedzieć na podstawowe pytanie: skąd te „promienie” się biorą?

W ciągu ostatnich kilkadziesiąt lat przedstawiono kilkadziesiąt różnych hipotez dotyczących źródła tych tajemniczych cząstek, od hipotez lokalnych (np. Słońce) po kosmologiczne (pozostałość po wczesnych fazach ewolucji Wszechświata).

Początkowo uważano, że gros promieni kosmicznych to wysokoenergetyczne fotony γ (stąd nazwa: „promieniowanie”); z biegiem czasu okazało się jednak, że dla wysokich energii (ponad 1 GeV \approx 0,002 erga) jedynie jedna cząstka na milion jest fotonem, pozostałe to protony, elektrony (również antyprotony i pozytony), jądra helu i cięższych pierwiastków itd.

Rozkład energii tych cząstek przedstawiony jest na rysunku obok.



Rys. 2. Energia mechaniczna różnych klas obiektów, która może być wykorzystana do tworzenia promieni kosmicznych. Ukośna prosta przedstawia wymaganą przez obserwacje tych promieni ilość energii. Na osi poziomej odłożone są energie wytwarzane przez poszczególne obiekty, jednokrotnie lub na rok, w zależności od rodzaju źródeł. Na osi pionowej zaznaczona jest liczba obiektów danej klasy występujących rocznie w Galaktyce. Symbol \odot oznacza gwiazdy typu Słońca, MK — odpowiada wybuchającym zimnym kartom (flare stars), O i WR reprezentują gorące gwiazdy typu O i Wolfa-Rayeta, CM to chmury molekularne, CG odpowiada hipotetycznemu wybuchowi jądra naszej Galaktyki zdarzającemu się raz na ok. 10 milionów lat, a PG to zespół efektów towarzyszących powstaniu Galaktyki.

Jednym z ważniejszych wyników obserwacyjnych uzyskanych w ostatnich latach jest zauważenie, że cząstki promieniowania kosmicznego częściej przychodzą z płaszczyzny i okolic centrum naszej Galaktyki. Rezultat ten nie musi koniecznie świadczyć o galaktycznym pochodzeniu promieni kosmicznych, ponieważ tory jonów są niewątpliwie zakrzywiane przez wszechistniejące w Galaktyce pola magnetyczne. Dla zwolenników hipotez globalnych nie jest to z pewnością argument rozstrzygający. Coraz większą popularność zdobywa jednak lokalna interpretacja pochodzenia promieniowania kosmicznego.

Na rysunku 2 przedstawiono różne klasy obiektów dostatecznie aktywnych, aby móc być źródłem tajemniczych cząstek. Wydaje się obecnie, że cząstki o energiach poniżej 100 GeV pochodzą od wielu typów najbardziej energetycznych obiektów w Galaktyce: tzw. gwiazd Wolfa-Rayeta, gorących gwiazd typu O, nowych i supernowych, żaden z tych typów nie jest jednak dominujący.

Znacznie większe kontrowersje budzą cząstki o wyższych energiach (a rejestrujemy „rekordzistki” o energiach miliardy razy większych, do 10^{20} eV — jedna taka cząstka mogłaby podgrzać 1 g wody o kilka stopni). Wydaje się prawdopodobne, że promienie te są pochodzenia pozagalaktycznego, możliwym ich źródłem są centralne części supergromady galaktyk w Pannie. Są to już jednak raczej spekulacje i na rozstrzygnięcie tego problemu musimy poczekać jeszcze parę lat.

dr Tomasz CHLEBOWSKI

Kilka uwag historycznych o równaniach kwadratowych

Doc. dr Adam WACHUŁKA

„Najpierw było koniecznym i pożytecznym stworzyć środki pomocnicze dla naszej skłonności do czystego myślenia; dla tego geometryści szukali tej pomocy w figurach, arytmetycy w liczbach, inni jeszcze w innych środkach”.

Erazm Bartholin w wstępie do *Geometrii* Kartezjusza (1659 r.)

Człowiek od samego zarania myśli stykał się z koniecznością liczenia i jego wynikiem — liczbą. Była to oczywiście, jak dziś mówimy, liczba całkowita, dodatnia. Pierwszą w kolejności liczbą była jedynka, przed nią nie było „nic”. Nie będę tu wchodził w to, jak te liczby oznaczano, nazywano i jak nimi operowano, choć są to niewątpliwie ciekawe zagadnienia.

Więcej uwagi liczbom i ich własnościom poświęcono w Szkole Pitagorejskiej około VI w.p.n.e. Spośród różnych własności liczb znanych Pitagorejczykom chcielibyśmy tu zwrócić uwagę na liczby kwadratowe, nazywać je będziemy krótko kwadratami. Były to takie liczby, że gdybyśmy jednostkę przedstawili w postaci małego kółka, ilość jednostek takiej liczby wypełniłaby pewien kwadrat (rys. 1).

Ponadto wyróżniali oni dla każdego kwadratu figurę „gnomon”, składającą się z jednostkowego kwadratu i dwóch równych prostokątów (rys. 2).

Dla liczby kwadratowej 1 gnomon wynosił $2 \cdot 1 + 1 = 3$.

Dla liczby kwadratowej 4 gnomon wynosił $2 \cdot 2 + 1 = 5$.

Dla liczby kwadratowej 9 gnomon wynosił $2 \cdot 3 + 1 = 7$ itd.

Gnomon dołączony do odpowiedniej liczby kwadratowej dawał z nią razem następną liczbę kwadratową. Można to tak zapisać za pomocą oznaczeń literowych, których Grecy nie stosowali,

$$n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Z biegiem czasu okazało się, że warto wprowadzić uogólniony gnomon, składający się z dowolnego kwadratu i dwóch odpowiednich, przystających prostokątów (rys. 3). Niech będzie dany kwadrat o boku a . Wyznaczamy na przedłużeniu boku a odcinek o długości b ; z jego końca prowadzimy prostopadłą doń do przecięcia z przekątną kwadratu o boku a i uzupełniamy rysunek do kwadratu. Powstały tu gnomon da się zapisać w postaci $2ab + b^2$. Za pomocą oznaczeń literowych możemy rysunek 3 opisać w taki sposób:

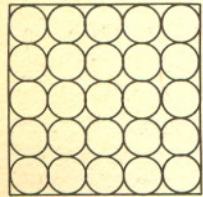
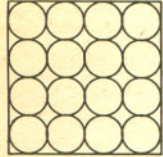
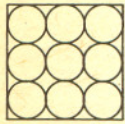
$$a^2 + (2ab + b^2) = (a + b)^2.$$

Jest to dobrze nam znany wzór, który w szkole wyprowadzaliśmy mnożąc przez siebie sumę i redukując wyrazy podobne.

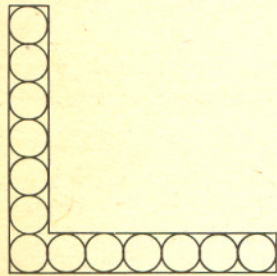
Prostokąty na rys. 3 dają się podzielić przekątnymi na dwa przystające trójkąty prostokątne. Pitagoras miał te trójkąty ułożyć w taki sposób, że wierzchołki kątów prostych pokryły się z wierzchołkami kwadratu, a przyprostokątne pokrywały boki kwadratu (rys. 4). W ten sposób powstał wewnątrz pierwszego kwadratu drugi kwadrat, którego bokiem jest przekątna prostokąta, czyli przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego, którą oznaczmy literą c . Kwadraty o boku $a + b$ na rys. 3 i 4 są równe. Cztery trójkąty na rys. 4 są równe dwóm prostokątom na rys. 3. Stąd wynika, że kwadrat zbudowany na przeciwprostokątnej jest równy sumie obu kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych. Jeżeli zachowamy wprowadzone przez nas oznaczenia literowe, zapiszemy otrzymany związek w postaci

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

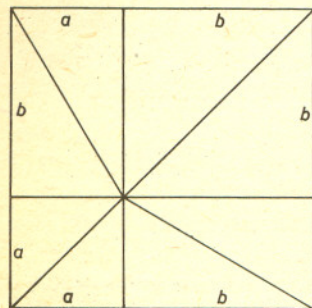
Jest to twierdzenie znane pod nazwą twierdzenia Pitagorasa. Stanowiło ono wiekopomne odkrycie. Wydawało się niezwykle proste, a zarazem pełne treści, ale zawierało wiele ukrytych problemów, które niepokoiły Pitagorejczyków, a także wszystkich ich następców przez wiele stuleci. Mianowicie już dla trójkąta prostokątnego równoramiennego o przyprostokątnych długości 1 stwierdzono, że liczba kwadratów na przeciwprostokątnej wynosi 2, a ta liczba nie występuje wśród liczb kwadratowych. Nie ma więc liczby całkowitej, której odpowiadałaby liczba kwadratowa 2. Okazało się też, że gdy jednostkę podzielić na pewną liczbę równych części, przeciwprostokątna nie da się wyrazić w całkowitej liczbie tych części. Nie usunęło powstałych wątpliwości nawet i to, że Pitagoras wyprowadził pewne wyrażenia na boki



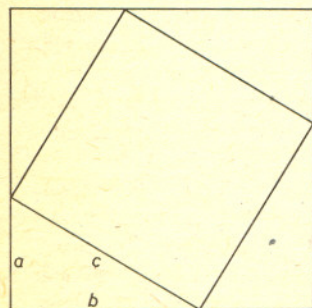
Rys. 1. Liczby kwadratowe



Rys. 2. Gnomon

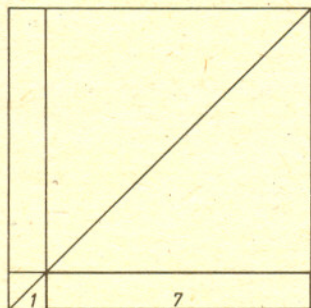


Rys. 3

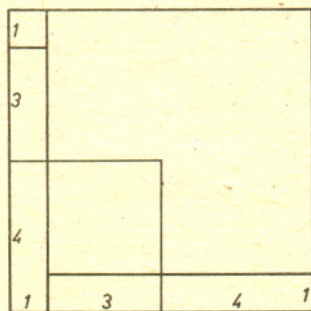


Rys. 4

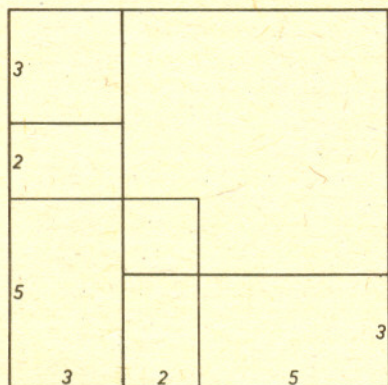
Paradoks, jak zwykle w matematyce, traci na ostrości przy dokładniejszym poznaniu zjawiska. Los konstruując strumień sygnałów czepie odstępów z typowego zestawu (według zadanego rozkładu prawdopodobieństwa) i odkłada na osi czasu ęz względu na ich długość. Gdy wariancja jest duża, losowane są odstępów różnicowane, małe i duże. Wejdźmy teraz w położenie osoby przychodzącej w chwili wybranej na chybił trafił na przystanek. Osoba ta inaczej losuje dla siebie odstęp między sygnałami, niestety, wpada raczej na odstęp dłuższe.



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

trójkąta prostokątnego, które w naszej symbolice dałyby się zapisać w taki sposób: najmniejsza przyprostokątna wynosi $2a+1$, druga $2a^2+2a$, przeciwprostokątna zaś $2a^2+2a+1$. Jeżeli w miejsce a będziemy podstawiać liczby całkowite, wyniki też będą liczbami całkowitymi.

Bardzo długo trwały dalsze badania, chyba aż do czasów George'a Cantora (1845—1918) i Richarda Dedekinda (1831—1916), którzy podali właściwe wyjaśnienie powstałej trudności, ale było to w 25 stuleci później. Może warto sobie to należycie uświadomić, aby zrozumieć, jakimi trudnościami jest najeżona droga prowadząca do matematycznego poznania.

Jednak przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego o bokach jednostkowych istnieje jako odcinek i to jest niewątpliwe. Geometria grecka poprzestała więc na badaniu figur geometrycznych i operowaniu odcinkami, a realizowała to tak umiejętnie, że jej wyniki są przedmiotem zainteresowań dziś jeszcze i to nie tylko pod względem faktograficznym.

Morris Kline w artykule „Geometria” (por. „Matematyka w świecie współczesnym”, Bibl. Problemów, PWN, Warszawa 1966) mówi tak: „Na przykład równanie algebraiczne drugiego stopnia o jednej niewiadomej (jak $x^2-8x+7=0$) rozwiązywano geometrycznie i rozwiązanie, które podał Euklides, nie było liczbą, lecz odcinkiem prostej. Zatem geometria euklidesowa obejmowała ówczesnie znaną algebrę”. Zbadamy bliżej to sformułowanie i spróbujemy odtworzyć rozumowanie prowadzące do rozwiązania.

Przed wszystkim Euklides nie znał symboliki algebraicznej. Równanie w postaci $x^2-8x+7=0$ nie występuje w jego tekście. Mogło natomiast u niego występować takie zagadnienie: „Do jakiego kwadratu należy dodać prostokąt o bokach 7 i 1, aby powstał prostokąt o bokach równych 8 i bokowi szukanego kwadratu?”. W naszej symbolice powstałoby równanie $x^2+7 \cdot 1=8x$. Na rysunku 3 kwadrat o boku $a+b$ składa się właściwie z dwóch prostokątów, a każdy prostokąt znowu składa się z kwadratu i prostokąta. W oznaczeniach literowych, których, jak jeszcze raz podkreślamy, Grecy nie stosowali, można zapisać to w taki sposób:

$$(a^2+ab)+(b^2+ab)=(a+b)^2$$

lub

$$a \cdot (a+b)+b \cdot (a+b)=(a+b)^2.$$

Nie znając wyrażeń algebraicznych nie mogli Grecy ich porównywać, tak jak zrobilibyśmy dziś. Wobec tego pozostało skonstruować podobnie jak na rys. 3 kwadrat z uwzględnieniem danych zadania (rys. 5).

Budujemy prostokąt o bokach 7 i 1. Dołączamy do niego kwadrat o boku 1, prowadzimy jego przekątną itd., podobnie jak postępowaliśmy przy konstrukcji rysunku 3: Lewy prostokąt składa się z kwadratu 1×1 oraz z prostokąta 7×1 i ma boki równe odpowiednio 1 i 8, spełnia więc warunki zadania. Prawy prostokąt o bokach 7 i 8 składa się również z kwadratu 7×7 i z prostokąta 7×1 , spełnia więc również warunki zadania. Otrzymaliśmy dwa rozwiązania. Można jednak rozwiązać to zadanie w nieco inny sposób. Liczba 7 da się napisać jako $2 \cdot 3+1$, a więc jest to gnomon liczby kwadratowej 9 odpowiadającej liczbie 3. Następna liczba kwadratowa odpowiada liczbie 4, a więc połowie boku wymaganego prostokąta. Łatwo sprawdzić, że $4-3=1$, $4+3=7$, co stanowi rozwiązanie postawionego zadania (rys. 6). Ten drugi sposób zbliża nas już do reguł, którymi się dziś posługujemy, choć nie jest jeszcze tak ogólny.

Jeszcze bardziej do naszego rozwiązania, choć też bez symboliki algebraicznej, zbliżył się matematyk arabski Muhammed ibn Musa Al'Chwarizmi, około r. 825, a więc w 11 stuleci po Euklidesie, w dziele pt: „Al-gebr w al mukabala”. Dotarło ono do Europy później i około XII stulecia zostało przetłumaczone na język łaciński. Autor rozwiązuje tu w naszej symbolice równanie $x^2+21=10x$, zaś w terminologii geometrycznej zagadnienie: „Do jakiego kwadratu należy dodać prostokąt o polu 21, aby otrzymać prostokąt o bokach równych 10 i bokowi szukanego kwadratu”.

Stosowanie tu gnomonu $21=2 \cdot 10+1$ nie prowadzi do wyniku. Wyznamy wobec tego gnomon uogólniony dla kwadratu nie przewyższającego kwadratu 5^2 odpowiadającego połowie boku zadanego prostokąta. Uogólnionym gnomonem jest tu $21=2 \cdot 2 \cdot 3+3^2$, a więc gnomon odpowiadający liczbie kwadratowej 2^2 . Wykonując działania jak w poprzednim przykładzie $5-2=3$ oraz $5+2=7$ otrzymujemy rozwiązanie. Autor formułuje regułę tę wyraźnie w takich słowach: „Podziel krotkość szukanego boku na połowy, otrzymasz 5. Pomnóż to przez siebie $5 \cdot 5=25$. Odejmij od tego wyraz wolny 21, otrzymasz $4=2 \cdot 2$. Odejmij $5-2=3$, dodaj $5+2=7$. To są boki szukanego kwadratu. ... Pamiętaj, że gdy w zadaniu kwadrat połowy krotkości jest mniejszy od wyrazu wolnego, rozwiązanie jest niemożliwe. Gdy zaś ten kwadrat jest równy wyrazowi wolnemu, wówczas rozwiązanie jest równe połowie krotkości nieznanego boku”. Na zastosowanie tej reguły podaje autor jeszcze inne przykłady. Regułę swoją uzasadnia na drodze geometrycznej (rys. 7). Algebra słowna matematyków Wschodu była więc, podobnie jak u Greków i niewątpliwie pod pewnym ich wpływem, uzasadniana geometrycznie.

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań z numeru 9/1983

Marian Roman	- Ełk	47,88pkt
Andrzej Pawłowski	- Zabrze	47,34pkt
Paweł Kamiński	- Warszawa	45,11pkt
Marek Gażecki	- Milanówek	44,73pkt
Tomasz Biegarski	- Lublin	43,51pkt
Małgorzata Czerniakowska-Gdańsk		39,71pkt
Marek Prauza	- Poraj	39,48pkt
Artur Smolczyk	- Tarnów Op.	38,68pkt

Współczynniki trudności zadań:

61 - 2,55	62 - 2,86	63 - 1,84
-----------	-----------	-----------

Owocna okazała się ostatnia kolejka ligowa. Aż czterech uczestników konkursu efektywnym rzutem na taśmę przekroczyło limit 44: panowie Roman i Pawłowski po raz pierwszy, panowie Kamiński i Gażecki już po raz drugi.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4 - 3 \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 1/1984.

Zadania nr 76, 77, 78

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 1984

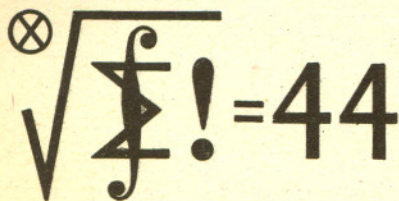
76. Na płaszczyźnie dany jest kwadrat o boku a . Poprowadzić dwie proste równoległe tak, by odległość między nimi była równa zadanej liczbie $d \leq a$ oraz by część kwadratu, zawarta między tymi prostymi, miała możliwie największe pole. Obliczyć to maksymalne pole.

77. Jaka jest największa liczba części, na które 20 okręgów może podzielić sferę?

78. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{1 \cdot (n-1)} + \frac{1}{2 \cdot (n-2)} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot 1} = \frac{2}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} \right).$$

Zadanie 78 przysłał nasz Czytelnik, pan Krzysztof Trautman z Warszawy.



Rozwiązania zadań z numeru 10/1983

Przypominamy treść zadań:

64. Przedstawić liczbę 10^6 w postaci sumy skończenie wielu liczb dodatnich tak, by ich iloczyn był możliwie największy.

65. Czy można podzielić sześcian na skończoną liczbę sześcianów różnej wielkości?

66. Wyznaczyć największą liczbę naturalną, która ma wszystkie cyfry różne i która dzieli się przez każdą ze swych cyfr.

64. Dla ustalonej wartości $n \in \mathbb{N}$ rozkład liczby $a > 0$ na sumę n składników ($a = x_1 + \dots + x_n$, $x_i > 0$) jest optymalny ($\prod x_i = \max$), gdy wszystkie x_i są równe ($x_i = a/n$); wynika to z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną. Iloczyn $\prod x_i$ równa się wtedy $(a/n)^n$. Należy teraz zmaksymalizować tę wielkość przy zmiennym n . Badając znak pochodnej funkcji $f(t) = (a/t)^t = \exp(t \ln(a/t))$ w przedziale $1 \leq t < \infty$ stwierdzamy, że funkcja ta rośnie w przedziale $1 \leq t \leq a/e$, a maleje w przedziale $a/e \leq t < \infty$. Nas interesuje maksimum $f(n)$ po $n \in \mathbb{N}$. Może ono być osiągnięte tylko dla n równego jednej z dwóch liczb naturalnych sąsiadujących z a/e . Dla $a = 10^6$ są to liczby $m = 367879$ i $m+1$. Pozostaje stwierdzić, co jest większe: $f(m)$ czy $f(m+1)$. Przy użyciu zwykłych czterocyfrowych tablic logarytmów nie jesteśmy w stanie rozróżnić tych liczb. Dysponując znacznie dokładniejszymi tablicami lub maszyną cyfrową można problem rozstrzygnąć bez trudu. Pokażemy jednak, jak to można zrobić bez „sztucznych ułatwień”. Skorzystamy z nierówności

$$e^x > 1+x \quad \text{dla } x \neq 0, \quad \ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2} \quad \text{dla } x > 0.$$

(Wynikają one natychmiast z rozwinięć funkcji wykładniczej i logarymicznej w szeregi potęgowe; można też je łatwo udowodnić badając znak pochodnej różnicy lewej i prawej

strony). Obliczamy:

$$\begin{aligned} \frac{f(m)}{f(m+1)} &= \left(\frac{a}{m}\right)^m : \left(\frac{a}{m+1}\right)^{m+1} = \frac{m+1}{a} \left(\frac{m+1}{m}\right)^m = \\ &= \frac{m+1}{a} \exp\left(m \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right) > \frac{m+1}{a} \exp\left(m\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2m^2}\right)\right) = \\ &= \frac{m+1}{a} \cdot e \cdot e^{-1/2m} > \frac{e}{a} (m+1) \left(1 - \frac{1}{2m}\right) > \\ &> \frac{e}{a} \left(m + \frac{1}{2}\right) = 10^{-6} \cdot e \cdot 367879,5 > \\ &> 0,3678795 \cdot 2,7182818 = 1,0000001494431 > 1. \end{aligned}$$

A zatem optymalny jest rozkład liczby $a = 10^6$ na $m = 367879$ równych składników.

65. Lemat. Przy dowolnym podziale kwadratu na skończoną liczbę kwadratów różnej wielkości najmniejszy z nich zawiera się wraz z brzegiem we wnętrzu dużego kwadratu. (Łatwy dowód lematu pomijamy).

Przypuśćmy, że istnieje podział sześcianu K na sześciany różnej wielkości. Wybierzmy jedną ze ścian K , nazwijmy ją ścianą dolną; stojące na niej sześciany dzielą ją na kwadraty. Z lematu wynika, że najmniejszy z tych sześcianów — nazwijmy go K_1 — jest ze wszystkich bocznych stron otoczony przez sześciany większe. Zatem sześciany stojące na górnej ścianie sześcianu K_1 dzielą ją na kwadraty. Najmniejszy z tych sześcianików — nazwijmy go K_2 — znów musi być z czterech bocznych stron otoczony przez sześciany większe od niego. Rozumowanie to można powtórzyć nieskończenie wiele razy, wbrew temu, że wszystkich sześcianów jest skończenie wiele. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że rozważany podział nie istnieje.

66. Każda nieparzysta liczba o omawianej własności składa się z samych cyfr nieparzystych — jest więc co najwyżej

pięciocyfrowa. Zatem jeśli istnieje większa taka liczba, to musi być parzysta; wśród jej cyfr nie wystąpi 0 (to oczywiste) ani 5 (piątka musiałaby być na końcu — wbrew parzystości). Liczba utworzona ze wszystkich pozostałych ośmiu cyfr nie dzieli się przez 3 (suma cyfr 40). Stąd wniosek, że poszukiwana liczba jest co najwyżej siedmiocyfrowa; a jeśli jest siedmiocyfrowa, to musi składać się z cyfr 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9 (tylko ten zestaw daje podzielność przez 3, 6 i 9). Ponieważ szukamy liczby możliwie

największej, sprawdzamy, czy liczba postaci $987abcd$, której czterocyfrowa końcówka jest permutacją układu cyfr 1236, może czynić zadość warunkowi zadania. Tylko cztery takie końcówki dają podzielność przez 8; przy żadnej z nich nie uzyskuje się podzielności przez 7. Przeprowadzamy kolejną próbę, z trzema początkowymi cyframi 986: z cyfr 1, 2, 3, 7 można utworzyć dwie czterocyfrowe końcówki podzielne przez 8, a to 3712 i 7312. Liczba 9867312 dzieli się przy tym przez 7 — jest więc liczbą szukaną.

W sprawie „paradoksu” ekonomicznego

W *Delcie* 6/1983 dr Andrzej Pelc opisał sytuację, gdzie zwiększenie ceny produktu wywołuje ... zwiększony nań popyt. Przykład jest ładny — lecz sztuczny (tylko dwa produkty, wybrane funkcje celu, tylko dwie cechy produktów) — ale nie o to chodzi; gdyby przykład nie był sztuczny, nie byłoby paradoksu.

(Gdyby sytuacje takie zdarzały się w rzeczywistości, byłibyśmy do nich przyzwyczajeni — i nie nazywalibyśmy ich paradoksem. Gdyby w geometrii pola dwóch części powierzchni nie sumowały się do pola całości, paradoksalnym nazwalibyśmy taki podział sfery, w którym pola obu części dają w sumie akurat pole sfery!)

Przykład jest elegancki — ale statyczny. Ja natomiast zajmuję się cybernetyką, gdzie nie są ważne liczby, lecz kierunek i wzajemna współzależność zmian. W słynnym przykładzie lisów i zajęcy nie jest ważne, ile jest jednych i drugich. Ważne, że wymieranie lisów powoduje rozradzanie się zajęcy, od czego rozradzają się lisy itd. Jeśli proces jest oscylacyjny i nie rozbieżny, cybernetyk odchodzi uspokojony, liczenie zajęcy pozostawiając Księciu-Panu z Jičina.

Pomyślmy teraz o jajach i mleku. Niech istotnie — jak w przykładzie dra Pelca — podniesienie ceny mleka (gdzie kaloria jest tania) spowoduje ograniczenie spożycia droższych jaj, a wzmoczone popijanie mleka. Co się stanie?

Wzmoczony popyt na mleko spowoduje dalsze podnoszenie się jego ceny — a zatem tym większe jego spożycie — a zatem tym wyższą cenę ... Jest to typowe sprzężenie zwrotne dodatnie. Układ taki jest niestabilny — i trwać nie może.

Jak ten proces się zakończy? Wyrównaniem cen kalorii w mleku i w jajku i wówczas paradoks przestanie działać. Nastąpi to bardzo szybko — tym szybciej, że jednocześnie spadać będą ceny nie kupowanych jaj! Po kilku dniach nawet w mleczno-jajecznym kraju byłoby po paradoksie. Dlatego właśnie reguła podaży i popytu jest *prawem* — a skonstruowana sytuacja *paradoksem*.

Jeśli nawet wystąpi, to w praktyce jej nie zauważymy. Powstaje pytanie: czy nie można utrzymać paradoksu ustalając podwyższoną cenę mleka — i nie dopuszczając do jej dalszej zwyżki? W statycznym przykładzie — tak, w życiu — nie! Za tańsze, niż określa to podaż i popyt, mleko, musimy też płacić.

Płacimy swoim czasem w kolejkach! W szalonym okresie 1978—1982, gdy rządziła obłądna pseudo-ekonomia, rynkowa cena szynki dochodziła do np. 500 zł — a w sklepach sprzedawano ją po 200 (ograniczając ilość na głowę). W warunkach wielkomijskich (otwarty „rynek” klientów) przeciętny czas czekania w kolejce razy średnia wartość godziny ludzkiego czasu równy był różnicy ceny rynkowej i oficjalnej razy dopuszczalna liczba kupowanych kilogramów. Gdy kierownik sklepu ograniczał tę liczbę np. dwukrotnie — kolejka też dwukrotnie malała! Jako pozytywne ćwiczenie domowe polecam analogiczne obliczenia dziś, gdyż — wbrew zapowiedziom prof. Zdzisława Krasińskiego — min. Zdzisław Krasiński nie wprowadził, jak dotąd, cen rynkowych. Mamy więc pole do badań naukowych!

mgr Janusz KORWIN-MIKKE

Autor powyższego listu przedstawia mechanizmy wolnorynkowe jako uniwersalny przyrząd do likwidowania paradoksów ekonomicznych. Odnosi się jednak wrażenie, że sam nie bardzo wierzy w praktyczną i teoretyczną przydatność tego przyrządu. Jak każdy, kto sprawie się przyjrzy bliżej, od ekonomii w stylu Smitha przechodzi on, w drugiej części listu, do ekonomii raczej z „Kapitału” i jako równoważny do pieniądza wprowadza czas. Idąc konsekwentnie tą drogą należy dalej wprowadzić siły społeczne i ich emanację — struktury ekonomiczne i państwowe. W efekcie daje to (w dotyczącym nas bezpośrednio przykładzie) ceny regulowane. Takich zresztą cen dotyczył nasz paradoks (co wyraźnie napisaliśmy).

I jeszcze dwie uwagi. Ceny rynkowe dałyby u nas, że zacytujemy, „po kilku dniach” usunięcie z rynku towarów przez dysponujących znacznymi zapasami środków płatniczych i biologiczną zagładę pozostałych. I druga uwaga. Paradoks to niezgodność ze stereotypem myślenia, a w naszym kraju stereotyp myślenia o ekonomii wcale nie bierze się z przyzwyczajenia. Bowiem w ogóle do ekonomii przyzwyczajeni nie jesteśmy.

Redakcja

$$T \cdot W = (C - c) \cdot m,$$

gdzie: T — średni czas dojazdu do lady z szynką (w godzinach),
 W — wartość (średnia)-czasu kupującego (w zł/godz.),
 C — cena szynki na rynku (w zł/kg),
 c — oficjalna taryfa pobierana w sklepie (w zł/kg),
 m — ilość szynki dopuszczana do jednorazowego nabycia (w kg).

