

SPIS TREŚCI

NUMERU 4 (124)

O kryształach węgla, czyli graficie i diamencie <i>dr Andrzej Hennel</i>	str. 2
O anaglifach <i>prof. dr Edward Otto</i>	str. 3
O twierdzeniu Freudenthala — van der Waerdena <i>mgr Adam Gajda</i>	str. 6
Białka <i>dr Maciej Geller</i>	str. 8
Zasada Cavalieriego	str. 10
Zadania	str. 11
„Krzywe” powierzchni z prostych	str. 12
Patrz w niebo	str. 14
Mizar MSE (8)	str. 15
Klub 44	str. 16

W następnym numerze:

Nobliści

Bardzo dziękujemy Pani Danucie Markiewicz z CIECH-u za zdobycie dla *Delty* folii, z której zostały zrobione okulary.

Okulary zostały wykonane w zakładzie introligatorskim Genowefy Jankowskiej, Warszawa, ul. Woronicza 4.

Serdecznie dziękujemy.

„Delta”

matematyczno-fizyczno-astrofizyczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego wydawany przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny

dr Jerzy Brojan
dr Maciej Bryński
dr Bogdan Cichocki
dr Alicja Derkowska
dr hab. Jan A. Gaj
doc. dr Bolesław Gleichgewicht
doc. dr Tadeusz Jarzębowski
doc. dr Marcin Kubiak
mgr Andrzej Mąkowski
dr Zbigniew Plochocki — v-przewodniczący
dr Jan Rempała
prof. dr Konrad Rudnicki
prof. dr Grzegorz Sitarski
prof. dr Józef I. Smak
doc. dr Kazimierz Stępień
prof. dr Mieczysław Subotowicz
dr Michał Szurek
doc. dr Andrzej Szymacha
doc. dr Aniela Wojska

doc. dr Andrzej Woszczyk
prof. dr Wojciech Żakowski — przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
mgr inż. Krzysztof Biesaga
dr Tomasz Chlebowski
mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.
dr Marek Kordos — red. nac.
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.
mgr Andrzej Majhofer
dr inż. arch. Jacek Mazur
mgr Anna Rudnik
dr Jerzy Ryll

Adres Redakcji
ul. Koszykowa 6a
00-564 Warszawa

Krajowe Wydawnictwo Czasopism
RSW „Prasa—Książka—Ruch”
ul. Noakowskiego 14
00-666 Warszawa
Nakład 35 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.; 2,50 ark. druk;
papier offsetowy V kl. 70 g.
Wydrukowano w drukarni im. Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 5336/83 T-70

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
- dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
— osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
— osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
- Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleciiodawców indywidualnych i o 100% dla zleciiodawców instytucji i zakładów pracy.
Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:
— do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,
— do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego,

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

- w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,
- w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,
- w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,
- w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,
— Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 20,—

nr indeksu 35723/35550

W tym miesiącu poświęcamy numer *Delty* anaglifom — rysunkom, które oglądane przez dwukolorowe okulary dają obraz naprawdę trójwymiarowy. Dzięki nim przekonacie się naocznie, że z prostych można zbudować nie tylko płaszczyznę, ale również powierzchnie zakrzywione, zobaczcie ciekawe wielościanny, rozmieszczenie atomów w sieciach krystalicznych i skomplikowanych cząsteczkach białek. Wystarczy, że popatrzyacie na ilustracje przez okulary dołączone do każdego egzemplarza *Delty* — szkielek zielony powinno być z lewej strony. Może się zdarzyć, że początkowo nie zobaczycie naszych rysunków trójwymiarowo — zmieniajcie wówczas odległość oczu od kartki i kąt, pod jakim patrzycie, a po kilku próbach na pewno Wam się uda.

Uprzedzamy jednak, że są w tym numerze również rysunki „płaskie”. Jeśli oglądanie anaglifów spodoba się Wam, możecie sami spróbować je rysować. Pomoże Wam w tym artykuł prof. Otto podający opis konstrukcji prowadzącej do powstania anaglifów — postarajcie się zrozumieć, dlaczego można w ten sposób odtworzyć obraz, jaki widzimy każdym z naszych oczu, kiedy patrzymy na przedmiot trójwymiarowy. Zamieszczony obok anaglif powstał z dwóch zdjęć tego samego obiektu wykonanych z dwu różnych punktów w odległości zbliżonej do odległości między oczami człowieka. W tym przypadku obiektyw aparatu „wykonuje” odpowiednie rzutowanie na płaszczyznę rysunku. Reprodukowane w tym numerze anaglify są „negatywowe” — tło to suma dwóch kolorów, sam zaś rysunek to brak jednego z nich. Nie dysponując maszyną, kładącą bardzo równo farbę, łatwiej wykonywać anaglify „pozytywowe” — rysować kolorową kreskę na białym tle. W tym jednak przypadku właściwy efekt osiągnąć jest trudniej. Nie można na przykład użyć koloru niebieskiego, tylko odpowiedni zielony. Czerwony kolor też musi być odpowiednio dobrany. Oba kolory powinny być jak najintensywniejsze, takie jednak, aby nie były widoczne przez szkielek tego samego koloru. Zwykle trudniej jest dopasować kolor zielony — my używaliśmy czeskiej kredki „Toison d’Or Polycolor nr 11”.



Przyślijcie Wasze anaglify, ciekawsze z nich wydrukujemy, możecie nam również przesyłać propozycje tego, co chcielibyście zobaczyć trójwymiarowo. W następnych numerach będziemy zamieszczali anaglify na przedostatniej stronie i jeśli chcecie nadal uczestniczyć w zabawie, powinniście zachować okulary przynajmniej do końca tego roku, a gdyby okazało się, że ta forma ilustracji Wam odpowiada, będziemy kontynuować nasz cykl anaglifowy również w roku przyszłym.

Redakcja

ANAGLIFY

O kryształach węgla, czyli diamencie i graficie

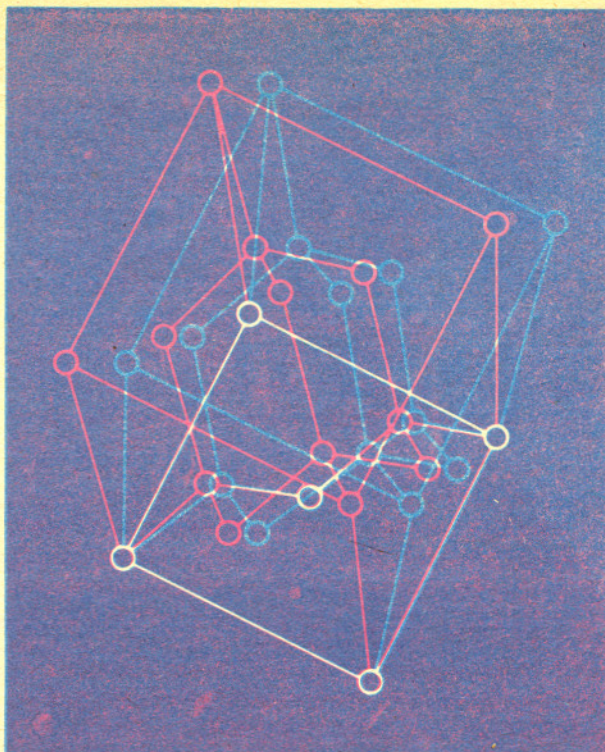
Dr Andrzej HENNEL

Nikogo chyba specjalnie nie dziwi, gdy dowiaduje się po raz pierwszy, iż grafit jest krystaliczną postacią węgla. Niewątpliwie zaskakująca jest natomiast informacja o tym, że drugą strukturą krystaliczną tworzoną przez węgiel jest diament. Dowiódł tego dopiero Lavoisier pod koniec XVIII wieku, gdy po spaleniu diamentu otrzymał dwutlenek węgla. Narzuca się w tym miejscu pytanie, dlaczego ta sama substancja, z punktu widzenia własności chemicznych, może mieć tak istotnie różne własności fizyczne. Otóż czarny i miękki grafit (od greckiego „graphen” — rysować) oraz przezroczysty i niezwykle twardy diament (od greckiego „adamas” — niezwyciężony) mają zasadniczo różne struktury krystaliczne.

W regularnej sieci diamentu każdy atom węgla znajduje się w środku czworościanu foremnego, którego wierzchołki wyznaczają cztery sąsiednie atomy węgla odległe o 1,54 Å od atomu centralnego. Łatwo wyobrazić sobie, iż tak skonstruowana sieć jest bardzo wytrzymała, co przejawia się w skali makroskopowej dużą twardością diamentu. Z kolei grafit zbudowany jest z warstw sześciokątów foremnych (podobnych do plastra miodu), jest to tzw. sieć heksagonalna.

Odległość między atomami w warstwie wynosi 1,42 Å, natomiast między warstwami aż 3,35 Å; w efekcie grafit jest luźniej upakowany niż diament (gęstość grafitu wynosi 2,2 g/cm³, a diamentu 3,5 g/cm³).

Warstwowa sieć grafitu jest o wiele słabsza mechanicznie niż sieć diamentu, gdyż słabo związane warstwy mogą się łatwo po sobie ślizgać. Dzięki temu właśnie możemy grafitu używać do pisania.



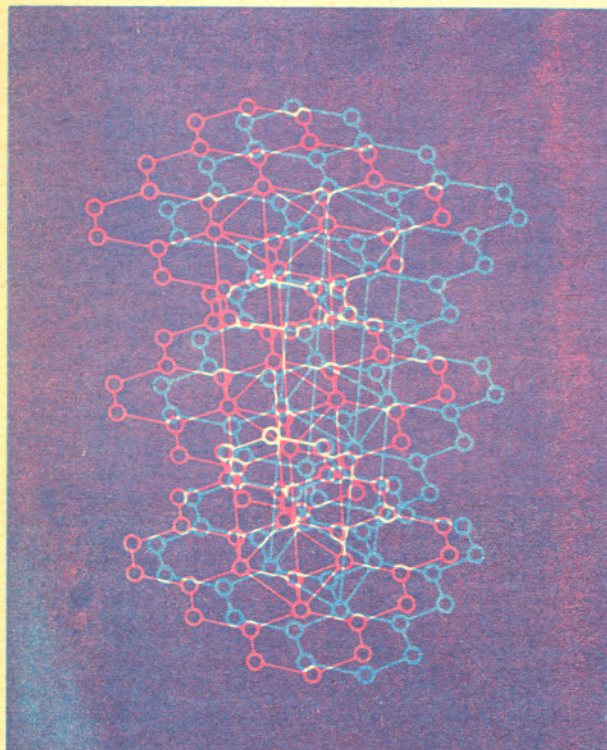
Struktura diamentu

Zrozumienie optycznych i elektrycznych własności diamentu i grafitu wymaga głębszego wniknięcia w naturę wiązań chemicznych tych kryształów.

W diamencie są to wiązania czysto atomowe (kowalencyjne) i w efekcie diament jest półprzewodnikiem takim jak german czy krzem. Mając jednak bardzo dużą przerwę energetyczną jest przezroczysty dla światła widzialnego, a przewodnictwo elektryczne wykazuje jedynie w wysokich temperaturach. Z kolei grafit ma w ramach jednej warstwy własności metaliczne i w efekcie wartość jego przewodnictwa elektrycznego wzdłuż warstwy jest około stukrotnie większa, niż gdy przepuszczamy prąd elektryczny prostopadle do warstw.

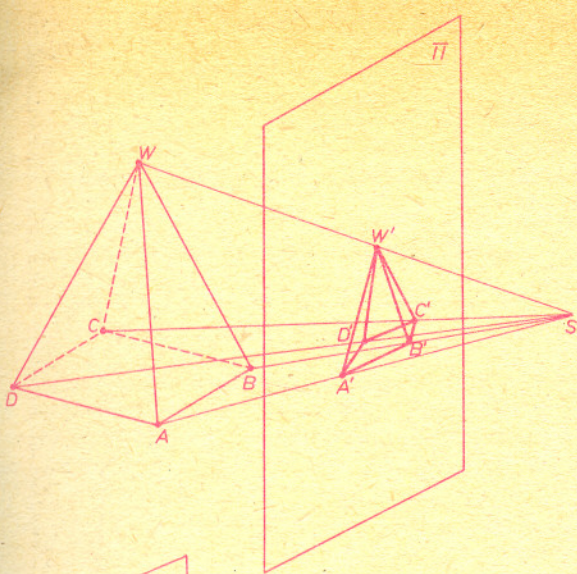
Warto też zdawać sobie sprawę z faktu, iż diament w warunkach normalnych jest strukturą metatrwałą, to znaczy energetycznie korzystniej jest dla kryształu przebudować się do struktury grafitu. Posiadacze pięknych brylantów, czyli szlifowanych diamentów, nie muszą w tym momencie wpadać w panikę, ale powinni wiedzieć, że w temperaturze 2000°C ich diamenty zmienią się w grafit w ciągu kwadransa. Naturalnymi warunkami istnienia diamentów są, jak łatwo się domyślić, wysokie ciśnienia i temperatury. Tak właśnie wykonała liczne diamenty Natura i tak usiłuje to już od ponad 30 lat robić człowiek.

Pierwszą syntezę diamentu przeprowadzono bowiem w 1953 roku pod ciśnieniem 70 000 atmosfer, w temperaturze 3000°C. Od tego czasu syntetyczne diamenty produkuje się już przemysłowo, jednakże ich rozmiary są rzędu kilku milimetrów. Dla porównania można wspomnieć, iż największy diament wszystkich czasów to znaleziony w 1906 roku w Afryce południowej Kullinan o długości 10 cm i wadze 621 g. Diament ten został pocięty na 105 brylantów, z których największy — Gwiazda Afryki (530 karatów) zdbi obecnie berło królów angielskich.

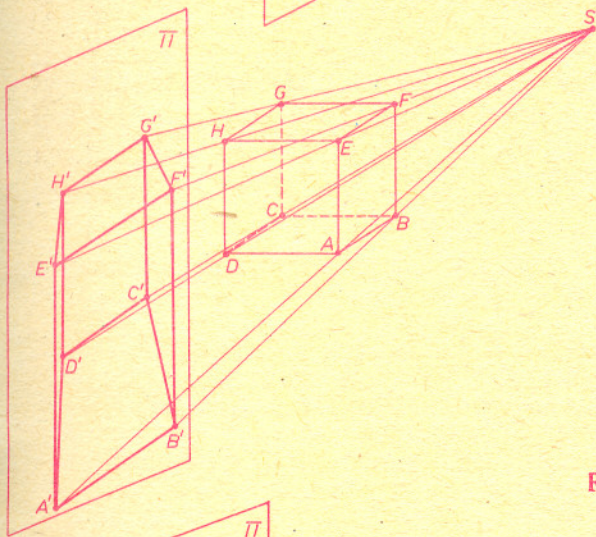


Struktura grafitu

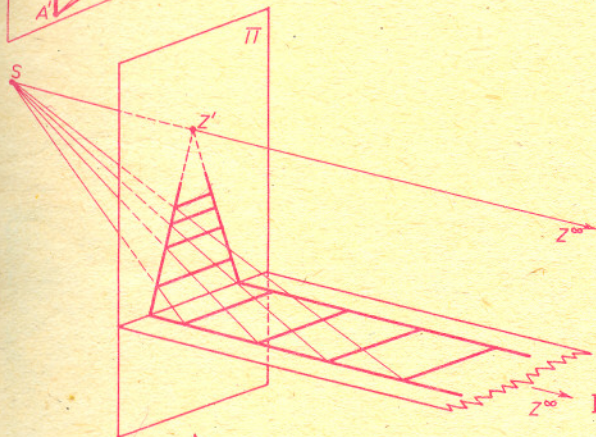
Prof. dr Edward OTTO



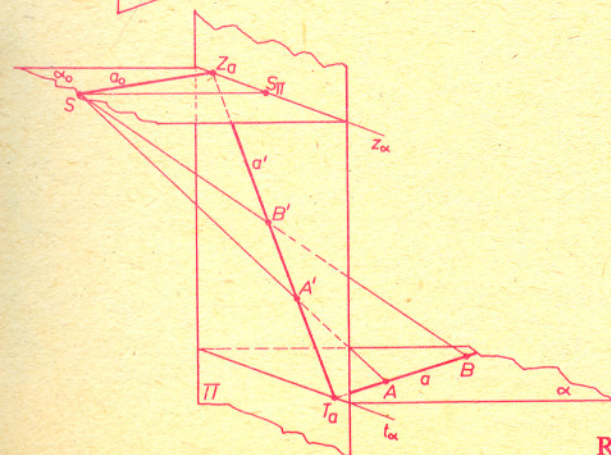
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Anaglify są to pary obrazów tego samego przedmiotu wykonane z dwóch stanowisk, których odległość jest równa odległości pary oczu (około 70 mm); jeden z nich nazywać będziemy obrazem prawym, a drugi obrazem lewym. Jeżeli tak będziemy patrzeć, że lewy obraz będziemy widzieli tylko lewym okiem, a prawy tylko prawym, to wrażenie będzie takie, jak gdybyśmy patrzyli bezpośrednio na przedmiot.

Najczęściej te dwa obrazy wykonujemy na jednym papierze, lewy tuszem czerwonym, a prawy tuszem zielonym i oglądamy przez okulary, które mają z lewej strony szkło zielone, a z prawej czerwone. Wtedy lewym okiem będziemy widzieli tylko lewy obraz, a prawym tylko prawy — oba jako czarne; czynić to będzie wrażenie bezpośredniego oglądania przedmiotu. Jak to można osiągnąć?

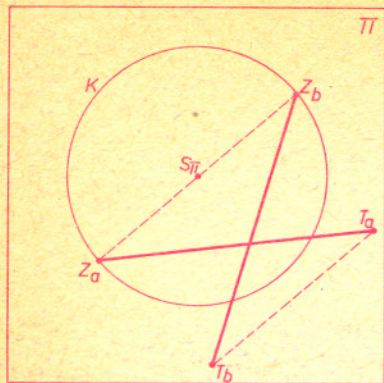
Obrazy, o których była mowa, są to obrazy perspektywiczne. Aby więc rzecz wyjaśnić, należy powiedzieć, jak powstaje perspektywa (oczywiście jedna).

Oznaczmy przez π płaszczyznę obrazu (np. szybę), a przez S nie leżący na niej tzw. środek rzutu perspektywicznego. Promień światła wychodzący z punktu W i zdążający do punktu S przebija płaszczyznę π w punkcie W' , który nazywamy rzutem albo obrazem perspektywicznym punktu W . Podobnie powstaje obraz perspektywiczny A' punktu A ; widać, że obrazem (rys. 1) perspektywicznym prostej WA jest prosta $W'A'$ (jako przecięcie płaszczyzny π płaszczyzną AWS). Tak powstał obraz perspektywiczny ostrosłupa $ABCDW$; jeżeli figura F znajduje się między nieprzezroczystą płaszczyzną π a punktem S , to obrazem perspektywicznym F' będzie cień F przy oświetleniu skupionym w punkcie S (rys. 2).

Na ogół para prostych równoległych w obrazie perspektywicznym przedstawia się jako para prostych przecinających się, jak to widać na rysunku 3 przedstawiającym prostoliniowy odcinek toru kolejowego. Wyjątek stanowią takie proste równoległe, które są równoległe do płaszczyzny π (np. progi linii kolejowej na rys. 3).

Celem tego krótkiego artykułu jest opis niezbędnych czynności potrzebnych do rysowania anaglifów. W tym celu podamy pewne reguły i konstrukcje rzutu perspektywicznego nieskomplikowanych figur geometrycznych.

Na rzucie a' prostej a wyróżnić można (rys. 4) dwa punkty: punkt T_a zwany śladem tłowym, w którym prosta przebija płaszczyznę obrazu, oraz punkt Z_a , w którym prosta a_0 przechodząca przez środek rzutu S i równoległa do a przebija płaszczyznę obrazu π ; nazywamy go śladem zbiegu prostej a , ponieważ obrazem ciągu punktów prostej a rozbieżnego do nieskończoności jest ciąg punktów zbieżny do Z_a . Oczywiście, dwie proste równoległe mają wspólny ślad zbiegu.



Rys. 5

Weźmy pod uwagę płaszczyznę α ; jej przecięcie z płaszczyzną obrazu π nazywamy śladem tłowym t_α płaszczyzny α . Oznaczmy przez z_α przecięcie płaszczyzny obrazu π i płaszczyzny α_0 przechodzącej przez S równoległe do α ; z_α nazywamy śladem zbiegu płaszczyzny α . Oczywiście $z_\alpha \parallel t_\alpha$. Z definicji śladów wynika, że

$$(a \subset \alpha) \Leftrightarrow [(T_a \in t_\alpha) \wedge (Z_a \in z_\alpha)]$$

oraz $(a \parallel \alpha) \Rightarrow (Z_a \in z_\alpha)$;

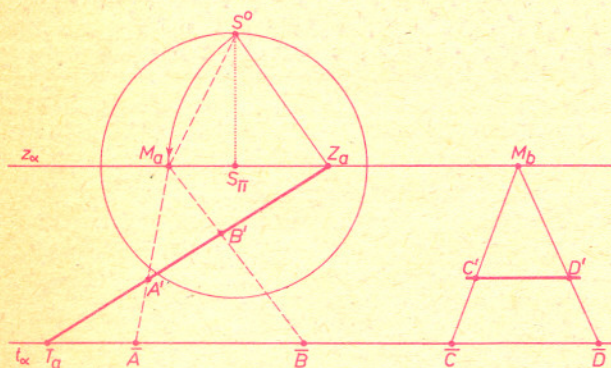
jest też $[(a \neq b) \wedge (a \cap b \neq \emptyset)] \Leftrightarrow [Z_a Z_b \parallel T_a T_b]$.

Przystępując do wykonania perspektywicznego obrazu przedmiotu trzeba najpierw określić położenie środka rzutów S względem płaszczyzny obrazu. Osiągamy to rysując rzut prostokątny S_π punktu S na π (rys. 5) oraz kreśląc okrąg K o środku S_π i o promieniu $r = SS_\pi$; K nazywamy okręgiem głębokości.

Z określenia śladu zbiegu Z_a prostej a wynika, że kąt między prostą a i płaszczyzną π wtedy i tylko wtedy wynosi $\frac{\pi}{4}$, gdy ślad zbiegu Z_a leży na okręgu K ; jest też widoczne, że

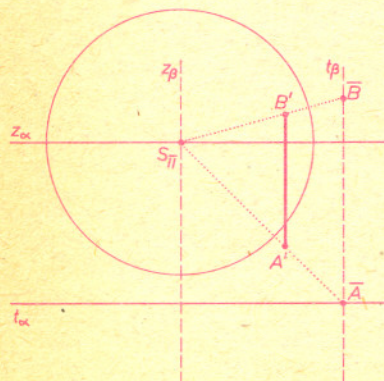
$$(l \perp \pi) \Leftrightarrow (Z_l = S_\pi).$$

Jeżeli Z_a i Z_b są końcami średnicy okręgu K , to $a \perp b$.



Rys. 6

Narysujmy rzut prostej a łącząc jej ślad zbiegu Z_a ze śladem tłowym T_a (rys. 6) i obierzmy na nim rzut $A'B'$ odcinka. Prawdziwą jego długość można otrzymać w następujący sposób: rysujemy ślady płaszczyzny α prostopadłej do π i zawierającej prostą a ; ślad zbiegu $z_\alpha = Z_a S_\pi$ oraz ślad tłowu $t_\alpha \parallel z_\alpha$ i przechodzący przez T_a . Następnie rysujemy trójkąt prostokątny $Z_a S_\pi S^0$ przystający do trójkąta $Z_a S_\pi S$, zaznaczamy na śladzie zbiegu płaszczyzny α taki punkt M_a , że $Z_a M_a = Z_a S^0 (= Z_a S)$, punkt M_a' łączymy z punktami A' i B' zaznaczając na śladzie tłowym t_α punkty $\bar{A} = t_\alpha \cap M_a A'$ i $\bar{B} = t_\alpha \cap M_a B'$. Odcinek $\bar{A}\bar{B}$ jest równy odcinkowi AB prostej a . (Aby to udowodnić, wystarczy zauważyć, że rzeczywisty trójkąt $T_a \bar{B} B$ jest podobny do trójkąta $Z_a M_a S^0$, gdzie $Z_a M_a = Z_a S^0$, wobec czego $T_a B = T_a \bar{B}$ i analogicznie dla punktu A). Punkt M_a nazywamy punktem mierzenia dla prostej a . Jeżeli zamiast prostej ukośnej a weźmiemy na płaszczyźnie α prostą b równoległą do π (tzn. do t_α), to rolę punktu mierzenia gra każdy punkt M_b prostej z_α , ponieważ czworokąt $C'D'DC$ jest rzutem równoległoboku. Zostało to wykorzystane na rys. 7 przy odmierzeniu odcinka $AB = \bar{A}\bar{B}$ na prostej b prostopadłej do danej płaszczyzny α .



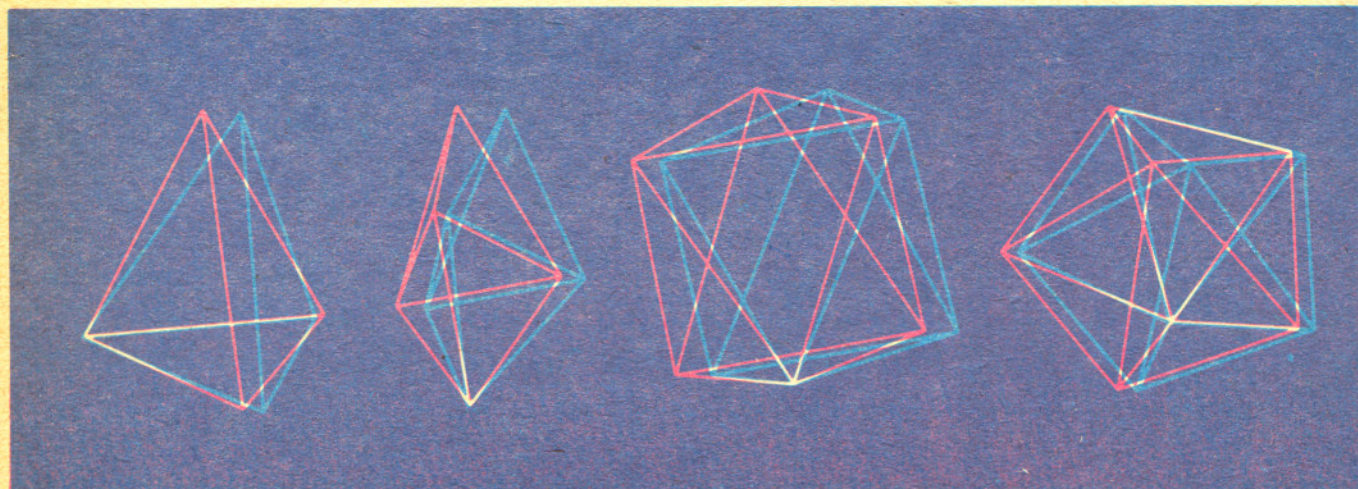
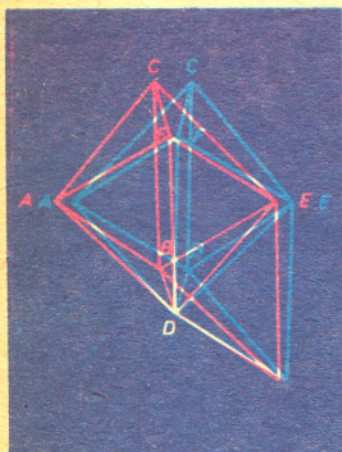
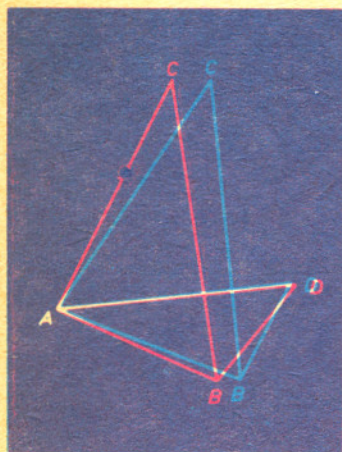
Rys. 7

Wykorzystując powyższą konstrukcję narysujemy perspektywę sześcianu stojącego jedną ścianą na poziomej płaszczyźnie α . Dla ułatwienia krawędzie podstawy niech będą ustawione pod kątem $\pi/4$ do płaszczyzny obrazu. Jeżeli punkt A' został obrany dowolnie, to rzuty krawędzi otrzymamy łącząc A' z Z_a i Z_b , które są punktami przecięcia śladu zbiegu z_α i okręgu głębokości K . Odcinek m równy krawędzi sześcianu odmierzymy od punktu A na prostych a , b i c korzystając z punktów mierzenia M_a , M_b i $M_c = S_\pi$.

O twierdzeniu Freudenthala — van der Waerdena

Mgr Adam GAJDA

Porównaj *Delta* 12/1975.



Mówić będziemy o wielościanach wypukłych, których ściany są trójkątami równobocznymi. Oznaczać będziemy dalej takie wielościany *RT*. Rozważymy pytanie, ile jest (z dokładnością do podobieństwa) wielościanów *RT*.

Nietrudno oszacować z góry ich liczbę. Jak łatwo zauważyć, w wierzchołkach wielościanu *RT* może się zbiegać 3, 4 bądź 5 ścian — oznaczmy liczbę takich wierzchołków odpowiednio przez w_3 , w_4 i w_5 . Przypomnijmy teraz wzór Eulera

$$w - k + s = 2,$$

gdzie w to liczba wierzchołków, k — krawędzi, s — ścian wielościanu wypukłego. Ponieważ ściany są trójkątami, więc

$$2k = 3s,$$

liczba wierzchołków wynosi

$$w = w_3 + w_4 + w_5,$$

a ponieważ każda krawędź łączy dwa wierzchołki, mamy

$$2k = 3w_3 + 4w_4 + 5w_5.$$

Wzór Eulera po podstawieniu tych zależności przybierze postać

$$6(w_3 + w_4 + w_5) - 3(3w_3 + 4w_4 + 5w_5) + 2(3w_3 + 4w_4 + 5w_5) = 12,$$

czyli

$$3w_3 + 2w_4 + w_5 = 12,$$

które to równanie ma 19 rozwiązań w liczbach całkowitych nieujemnych:

(4, 0, 0), (3, 1, 1), (3, 0, 3), (2, 3, 0), (2, 2, 2), (2, 1, 4), (2, 0, 6), (1, 4, 1), (1, 3, 3), (1, 2, 5), (1, 1, 7), (1, 0, 9), (0, 6, 0), (0, 5, 2), (0, 4, 4), (0, 3, 6), (0, 2, 8), (0, 1, 10), (0, 0, 12).

Otrzymane oszacowanie nie jest jednak dobre. Zaledwie ośmiu rozwiązaniom wyróżnionym grubszą czcionką odpowiadają wielościany *RT*. Udowodnili to Freudenthal i van der Waerden.

Poniżej podajemy dowód twierdzenia Freudenthala — van der Waerdena nie sprowadzający się, jak dotychczas publikowane, do eliminacji poszczególnych „złych” rozwiązań.

Zacniemy od dwóch lematów.

Lemat 1. *Wielościan RT o dwóch sąsiednich narożach trójściennych jest czworościanem.*

Dowód. Niech A i B będą trójściennymi wierzchołkami wielościanu W , a C i D różnymi wierzchołkami sąsiednimi względem A i B . Wobec trójścienności A i B punkt D jest sąsiednim wierzchołkiem względem A i C oraz względem B i C . Krawędź DC domyka zatem wielościan W , który wobec tego jest czworościanem $ABCD$.

Lemat 2. *Wielościan RT o trzech narożach czterościannych przy jednej ścianie jest ośmiościanem.*

Dowód. Niech ABC będzie ścianą wielościanu W mającą we wszystkich wierzchołkach naroża czterościenne, a D wierzchołkiem sąsiednim względem A i B , E — względem B i C , F — względem A i C . Wobec czterościenności naroża A , B i C trójkąty ADB , DBE , BEC , ECF , CFA i FAD są ścianami W . Zatem $ABCDEF$ jest ośmiościanem. Przypuśćmy, że W nie jest tym ośmiościanem i rozetniemy W płaszczyzną DEF na ten ośmiościan i wielościan RT , który oznaczymy W' . Wielościan W' nie może być czworościanem, gdyż wtedy W nie byłby RT jako mający trzy ściany będące rombami. Ale, gdyby naroża D , E , F wielościanu W' były więcej niż trójścienne, wielościan W nie byłby wypukły. Przypuszczenie nasze okazało się więc fałszywe.

Za pomocą udowodnionych lematów wyeliminujemy teraz 10 „złych” rozwiązań:

Twierdzenie 1. *Jeśli wielościan RT ma (co najmniej) jedno naroże trójścienne, to jest czworościanem lub sześciścianem (złączeniem dwóch czworościanów o jednej ścianie wspólnej).*

Dowód. Niech O będzie trójściennym narożem wielościanu W , zaś ABO , BCO i ACO jego ścianami. Jeśli W nie jest czworościanem, to płaszczyzna ABC rozcina go na czworościan $ABCO$ i wielościan RT , który oznaczymy przez W' . Wobec wypukłości W wielościan W' jest zawarty we wnętrzu naroża O . Przypuśćmy, że W' nie jest czworościanem. Naroża A , B , C wielościanu W' są co najwyżej czworościenne, gdyż w przeciwnym razie wielościan W miałby naroża co najmniej sześciścienne. Z drugiej strony (wobec lematu 1) co najmniej dwa z nich są czterościenne. Wszystkie trzy jednak czworościenne być nie mogą, gdyż (wobec lematu 2) wówczas W' byłby ośmiościanem i nie mieściłby się we wnętrzu naroża O . Rozpatrzmy wobec tego przypadek, gdy jedno z nich, powiedzmy A , jest trójścienne, a B i C — czterościenne. Oznaczmy przez D (wspólny) sąsiedni wierzchołek A i B oraz A i C . Odcinając od W' płaszczyzną BCD czworościan $ABCD$ otrzymujemy wielościan RT o dwóch sąsiednich narożach (B i C) trójściennych, a więc (wobec lematu 1) czworościan. Oznaczmy przez E jego czwarty wierzchołek. Wówczas E nie leży wewnątrz naroża O , a więc W nie jest RT . Zatem przypuszczenie nasze okazało się fałszywe.

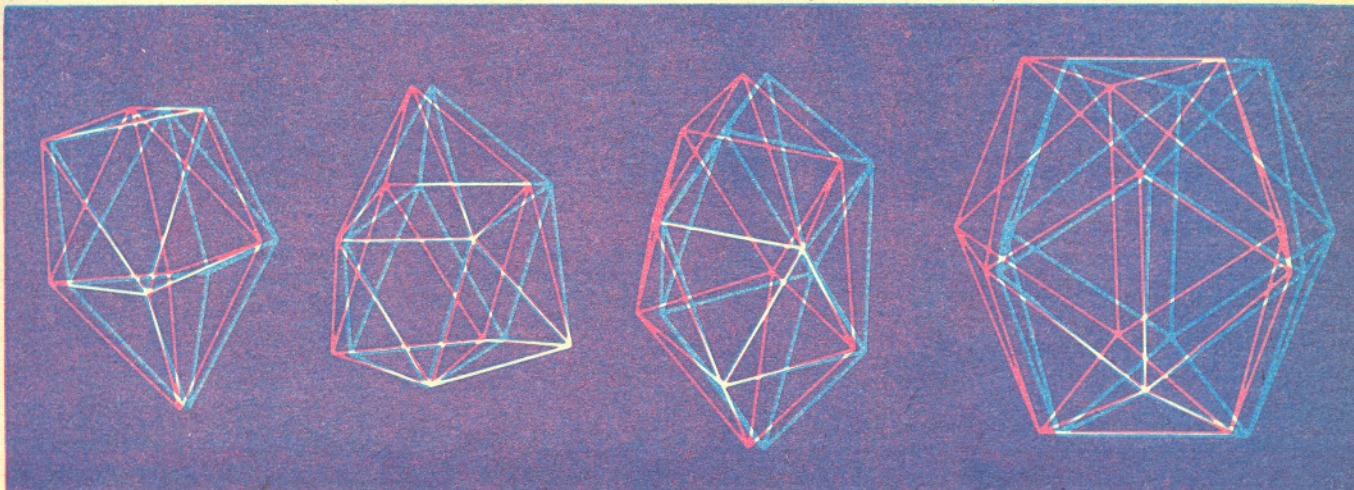
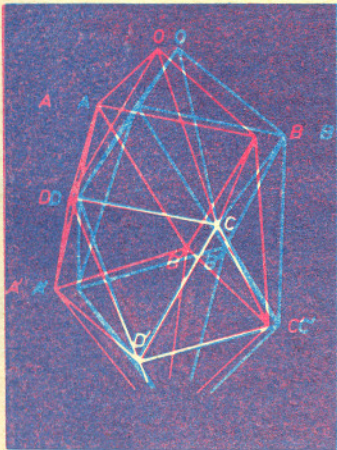
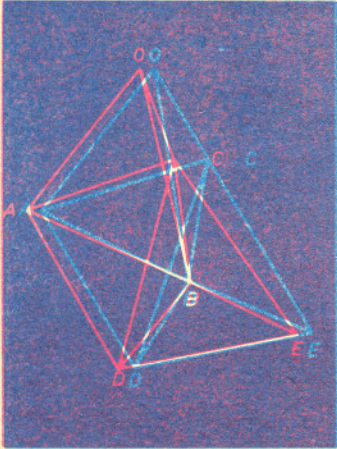
Pozostaje do wyeliminowania „złe” rozwiązanie (0, 1, 10).

Twierdzenie 2. *Nie ma wielościanu RT o dokładnie jednym narożu czterościennym.*

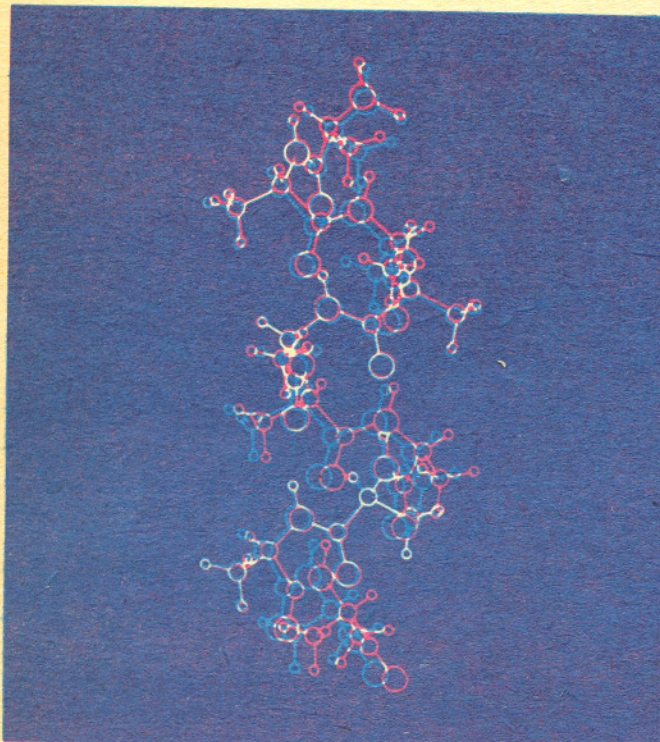
Dowód. Wobec twierdzenia 1 wystarczy wykazać, że nie ma takiego wielościanu bez naroży trójściennych. Weźmy pod uwagę wielościan RT bez naroży trójściennych o czterościennym narożu O . Oznaczmy sąsiadujące z nim wierzchołki przez A , B , C , D . Przypuśćmy teraz, że wielościan nie ma innych naroży czterościennych. Naroża A , B , C , D są zatem pięćścienne. W każdym z nich zbiegają się więc po trzy ściany nie należące do naroża O . Zbiegają się one po trzy w narożach A' , B' , C' , D' , które też muszą być pięćścienne. Wobec tego w każdym z punktów A' , B' , C' , D' zbiegają się po dwie ściany nie przechodzące przez żaden z wierzchołków A , B , C , D . Mają one zatem wspólny wierzchołek, który wbrew naszemu przypuszczeniu okazuje się czterościenny.

W ten sposób dowód twierdzenia Freudenthala — van der Waerdena został zakończony.

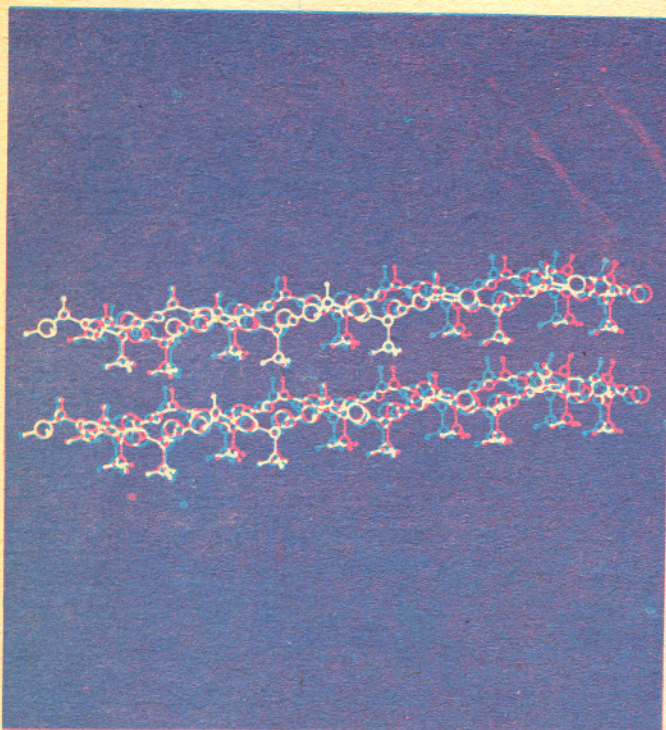
Czyli $w_3 \neq 0 \wedge w_3 \neq 4 \rightarrow$
 $w_3 = 2 \wedge w_4 = 3.$



Dr Maciej GELLER



Rys. 3. Struktura α łańcucha polipeptydowego.



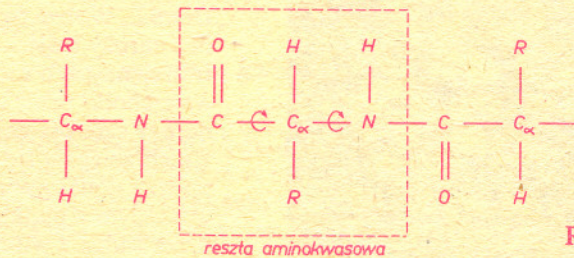
Rys. 4. Typowa struktura β naturalnego jedwabiu.

W drugiej połowie naszego stulecia dokonuje się niebywały postęp w poznawaniu fizykochemicznych podstaw działania żywej komórki. Dzięki rozwojowi technik badawczych zidentyfikowano wiele tysięcy cząsteczek, poznano wiele ich właściwości oraz zasadnicze cechy szeregu podstawowych procesów składających się na to, co nazywamy zjawiskiem życia. Do najważniejszej klasy cząsteczek należą białka, a najciekawsze ich właściwości związane są z ich strukturą przestrzenną, gdyż właśnie dzięki odpowiedniemu kształtowi mogą one spełniać swoją rolę biologiczną.

Białka są zasadniczo zbudowane z mieszanych liniowych polimerów, to znaczy cząsteczek przypominających swoją budową łańcuch, którego poszczególne ogniwa (mery), chociaż podobne, nie muszą być identyczne. Prostsze białka to właśnie takie pojedyncze łańcuchy (nazywane polipeptydami), inne to kompleksy utworzone z kilku takich łańcuchów. Pozostałe białka zawierają dodatkowo znacznie mniejsze niebiałkowe składniki niezbędne jednak do ich poprawnego działania.

Przypomnijmy, że kolejność poszczególnych merów w tych łańcuchach jest zakodowana w strukturze polimerów biologicznych należących do innej, bardzo ważnej klasy — kwasów nukleinowych (DNA). Wykorzystanie tej informacji do budowy odpowiednich łańcuchów polipeptydowych określane jest mianem procesu biosyntezy białka.

Białka pełnią różnorodną rolę w życiu organizmu. Mogą być materiałem konstrukcyjnym, kurczliwym (mięśnie), środkiem transportującym inne ważne substancje. Najważniejszą rolą białek jest jednak regulacja prędkości prawie wszystkich procesów biochemicznych, czyli funkcja enzymatyczna.



Rys. 1

Na rys. 1 przedstawiony jest schemat budowy chemicznej łańcucha polipeptydowego. Pojedynczy mer nazywany jest resztą aminokwasową, natomiast różnice dotyczą tzw. grupy bocznej oznaczonej symbolem R. Dzięki właściwościom struktury elektronicznej tych cząsteczek w łańcuchu takim istnieje pewna swoboda rotacji wokół wiązań chemicznych łączących atomy węgla oznaczone symbolem C z resztą łańcucha. Powoduje to, że łańcuch taki może przybierać różne struktury przestrzenne stabilizowane dodatkowo kilkoma innymi czynnikami fizycznymi. Jednym z nich jest możliwość utworzenia tzw. wiązań wodorowych. Tworzą się one, w omawianym przypadku, w razie współliniowego ustawienia grup C=O i N—H.



Rys. 2

Sytuacja taka przedstawiona jest na rys. 2. Mimo że wiązania wodorowe są znacznie słabsze niż typowe wiązania chemiczne, mogą istotnie wpływać na kształt przestrzenny białek.

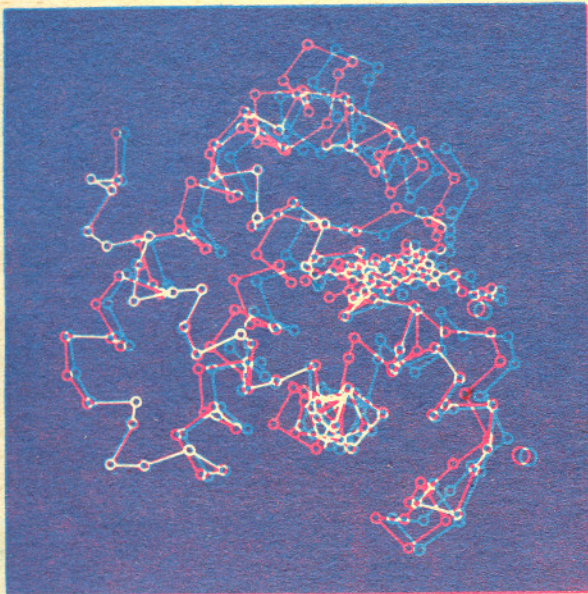
Badania struktury przestrzennej białek, wykorzystujące głównie zjawisko ugięcia promieniowania rentgenowskiego na uwodnionych kryształach białkowych, doprowadziły do stwierdzenia, że odcinki łańcucha polimerowego mogą przybierać postać dwóch struktur przestrzennych oznaczanych symbolami α i β . Struktura α przedstawiona jest na rys. 3. Łańcuch polimerowy jest w niej jakby nawinięty spiralnie na boczną powierzchnię walca. Wiązania wodorowe stabilizują tę strukturę w kierunku równoległym do osi walca.

Rys. 4 przedstawia strukturę naturalnego jedwabiu, którego włókienkowa budowa jest typowym przykładem struktury β . Duża liczba ułożonych blisko siebie łańcuchów, połączonych wiązaniami wodorowymi przypomina wyglądem pofałdowaną kartkę. Warto zwrócić uwagę na wzajemne dopasowanie przestrzenne grup bocznych, które jest dodatkowym czynnikiem stabilizującym tę strukturę. Tym samym włókna jedwabiu wykazują różne właściwości fizyczne względem trzech wzajemnie prostopadłych kierunków. Wzdłuż pierwszego, zgodnie z kierunkiem wiązań chemicznych, włókna te mają dużą wytrzymałość mechaniczną, warunkowaną silnymi wiązaniami chemicznymi. Drugi kierunek, wyznaczony przez prostopadły do pierwszego układ wiązań wodorowych, nadaje sporą spistość takim włóknom. Wreszcie trzeci, prostopadły do dwóch poprzednich, to kierunek najsłabszych oddziaływań przyciągających warunkowany wspomnianym dopasowaniem przestrzennym grup bocznych. Powodują one tworzenie się warstw jedwabiu, które można jednakże stosunkowo łatwo rozdzielić.

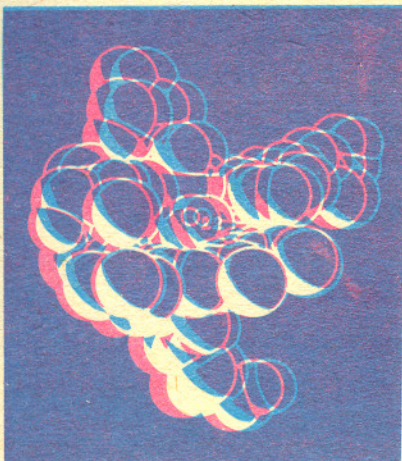
Na rys. 5 przedstawiono strukturę przestrzenną mioglobiny — białka, które pełni rolę magazynu tlenu we włóknach mięśniowych ssaków. Dla większej przejrzystości rysunku oznaczono na nim jedynie pozycje węgla C łańcucha polipeptydowego. Jak widać, struktura ta ma postać globuły utworzonej przez kilka odcinków o strukturze α . Dodatkowo widać także niebiałkową część mioglobiny, zwaną hemem, która bezpośrednio wiąże tlen (rys. 6). Warto zwrócić uwagę, że hem nie jest połączony żadnymi wiązaniami chemicznymi z częścią białkową. Można zatem stwierdzić, że ewolucyjnie wykształcona cząsteczka tego białka zapewnia jedynie odpowiednie otoczenie, bez którego hem nie mógłby pełnić swej roli biologicznej.

Hemoglobina, białko transportujące tlen w układzie krwionośnym jest to kompleks zbudowany z czterech podjednostek, z których każda przypomina strukturę mioglobiny. Okazało się, że dzięki takiej budowie hemoglobina może wydajniej wiązać tlen niż cztery pojedyncze podjednostki.

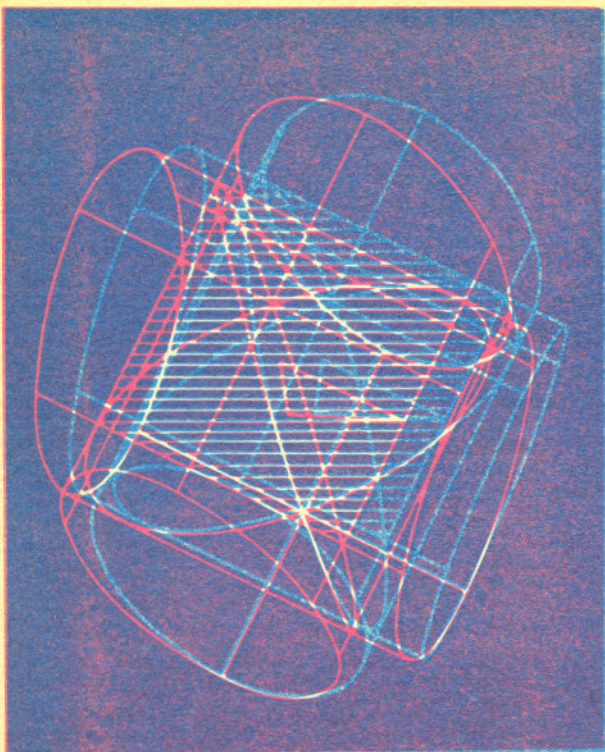
Na zakończenie należy stwierdzić, że do pełnego poznania funkcji, jakie pełnią białka w żywym organizmie, niezbędne są badania zmian struktury przestrzennej w trakcie procesów, w których biorą one udział. Toteż jesteśmy przekonani, że w niezbyt odległej przyszłości właściwym środkiem pokazującym, czym są i jaką rolę pełnią białka (a także inne cząsteczki biologiczne), będą obrazy filmowe wykonywane techniką trójwymiarową.



Rys. 5. Struktura przestrzenna mioglobiny.



Rys. 6. Tlen związany w hemie.



Rys. 1

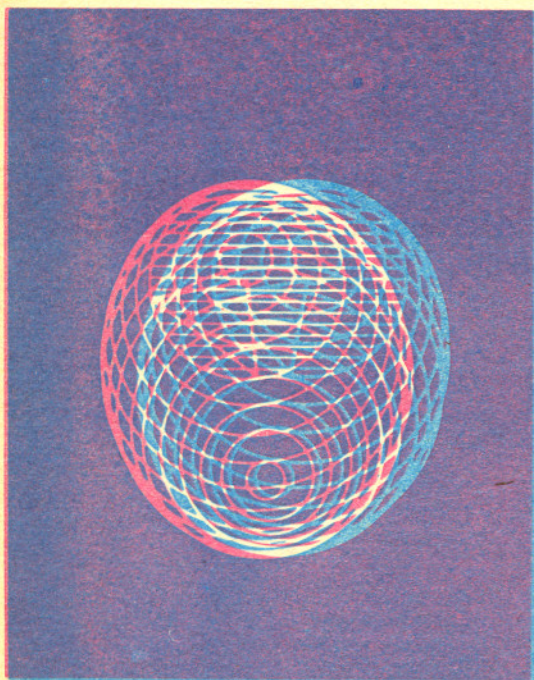
Zasada Cavalieriego

Jak obliczyć objętość bryły powstałej z przecięcia dwóch walców o równych promieniach, których osie przecinają się pod kątem prostym (rys. 1)? Pomoże nam w tym zasada Cavalieriego.

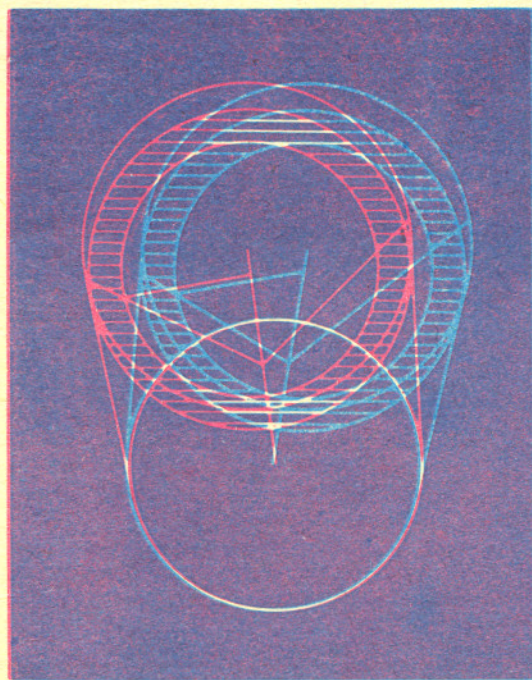
Jeśli przecięcie dwóch brył z każdą płaszczyzną poziomą daje dwie figury o równych polach, to bryły te mają równą objętość.

Ilustracją tej zasady bywa wyprowadzenie wzoru na objętość kuli (o promieniu R). Drugą bryłą jest wtedy walec o wysokości $2R$ i promieniu podstawy R , z którego wycięto dwa stożki o podstawach pokrywających się z podstawami walca i wspólnym wierzchołku w połowie osi walca (rys. 3) (oś walca jest pionowa). Przecinając tę bryłę płaszczyzną poziomą odległą o r ($r \leq R$) od wierzchołka stożka otrzymujemy pierścień o polu $\pi R^2 - \pi r^2$. Przecinając kulę płaszczyzną odległą o r od środka kuli otrzymujemy koło o promieniu $\sqrt{R^2 - r^2}$, a więc o polu równym poprzedniemu przekrojowi. Objętość kuli równa jest więc różnicy objętości walca i objętości stożków, czyli

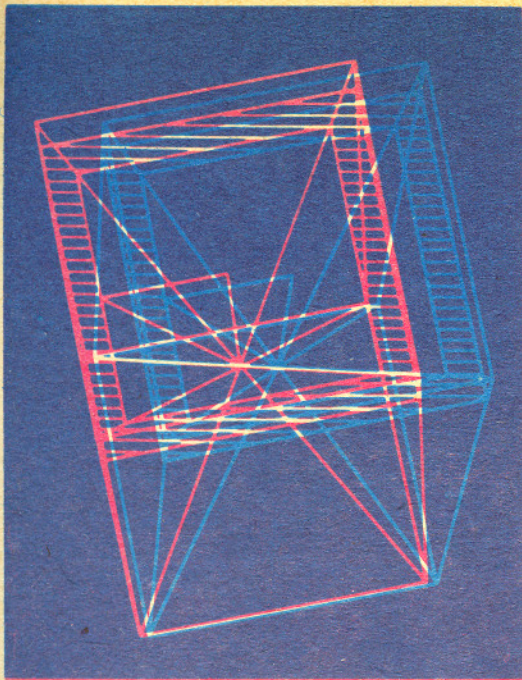
$$V_k = \pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Wracamy do pierwotnego zadania. Niech R będzie teraz promieniem podstawy walców (ich osie są poziome). Jako drugiej bryły użyjemy sześcianu o boku $2R$ z wyciętymi dwoma ostrosłupami o podstawach pokrywających się z górną i dolną ścianą sześcianu i wierzchołkach w środku sześcianu (rys. 4). Przecinając tę bryłę płaszczyzną poziomą odległą o r ($r \leq R$) od środka sześcianu otrzymamy figurę o polu $4R^2 - 4r^2$. Natomiast przecinając poprzednią bryłę otrzymujemy kwadrat o boku $2\sqrt{R^2 - r^2}$. A więc znów z cytowanej zasady

$$V = 8R^3 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4R^2 \cdot R = \frac{16}{3} R^3.$$

Ciekawe: mimo iż bryła powstała z brył obrotowych i jest wyraźnie zaokrąglona, we wzorze na objętość nie występuje π .

J. R.

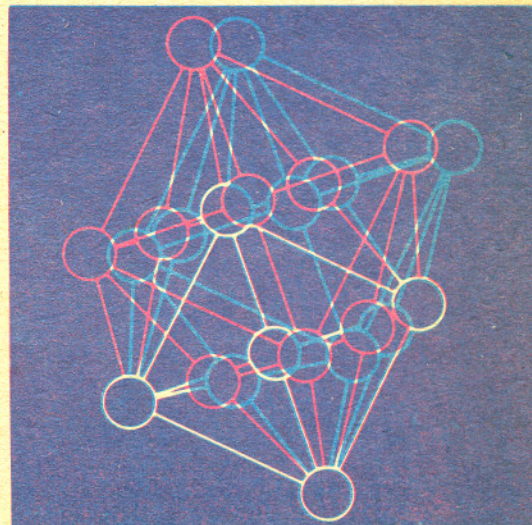
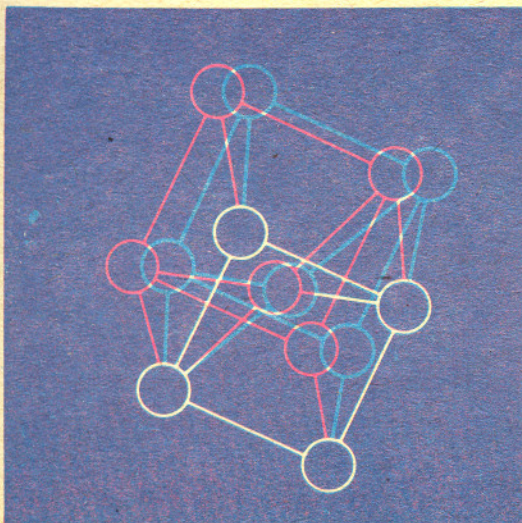


Zadania

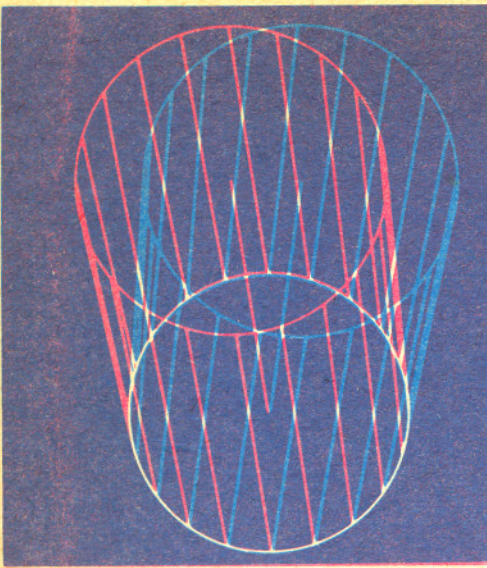
Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 151. Przy stygnięciu drutu żelaznego rozgrzanego do wysokiej temperatury obserwuje się następujące zjawisko: długość drutu początkowo jednostajnie maleje, ale przy temperaturze 910°C następuje gwałtowne jego wydłużenie. Jednocześnie drut ponownie rozżarza się. Przyczyną wydłużenia jest zmiana struktury krystalicznej żelaza (patrz rysunek) ze struktury najgęstszej upakowania (β) do struktury kubicznej objętościowo centrowanej (α) i związane z tym zmniejszenie gęstości. A co jest przyczyną ponownego rozżarzania?

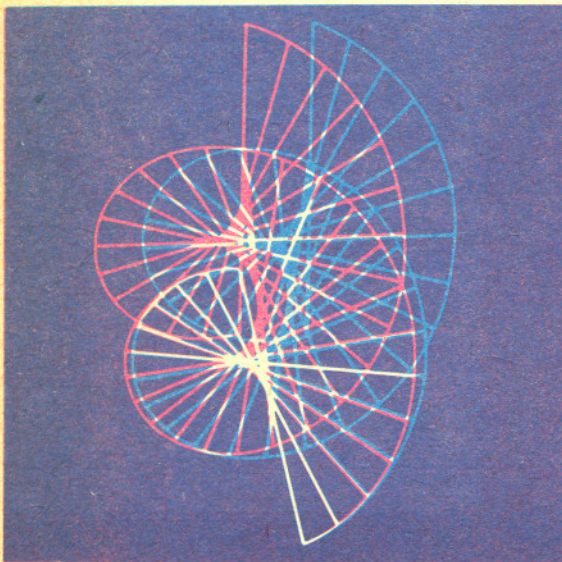
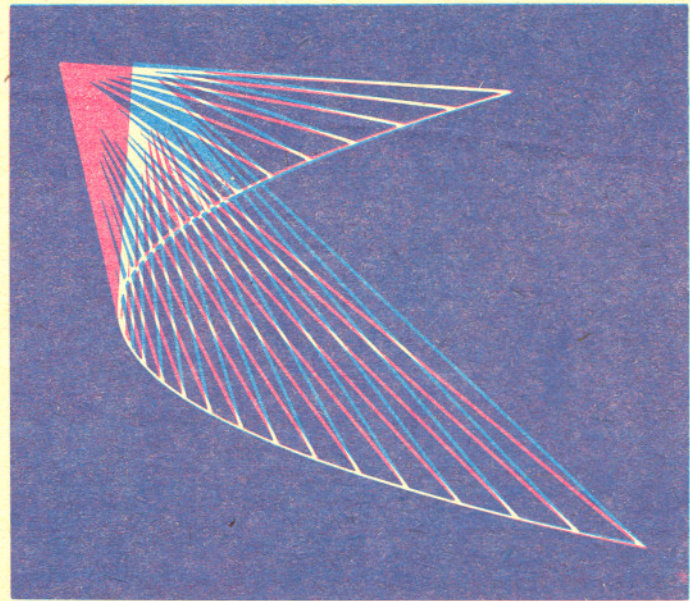
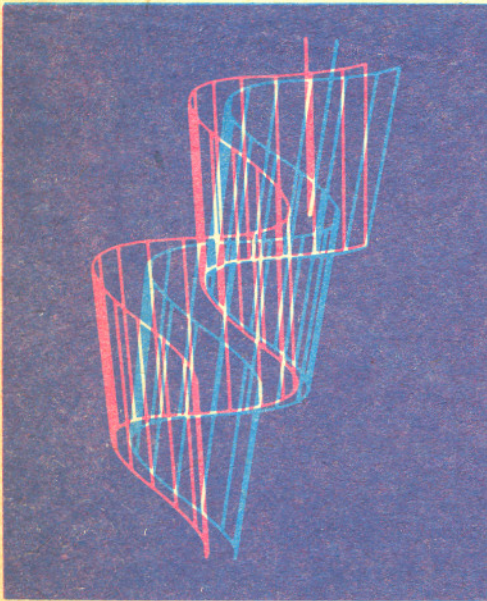
Rozwiązanie na str. 14



„Krzywe” powierzchnie z prostych



Najprostszym przykładem powierzchni utworzonej z prostych jest płaszczyzna. Jako przepis na jej otrzymanie można użyć zdania: „weźmy sumę prostych równoległych, prostopadłych do danej prostej”. Spróbujmy teraz coś w tym przepisie zmienić. Np. „do danej prostej” zastąpmy przez „do danego okręgu” — oczywiście, otrzymamy walec obrotowy. Zastępując inaczej (np. „do danej paraboli”, „do danej sinusoidy” czy „do danej krzywej płaskiej”) otrzymamy rozmaite inne walce (paraboliczny, sinusoidalny i jakiś jeszcze). Łatwo też zauważyć, że warunek prostopadłości może być na ogół zastąpiony przecinaniem (Czytelniku, kiedy nie można go opuścić?). Czasami można też zrezygnować z wymagania, by krzywa była płaska (kiedy?). Wszystkie walce są jednak „mało krzywe” w tym sensie, że po dokonaniu ewentualnie rozcięć dają się rozłożyć na fragmenty płaszczyzny (bądź całą płaszczyznę) — są, jak to się mówi, rozwijalne.



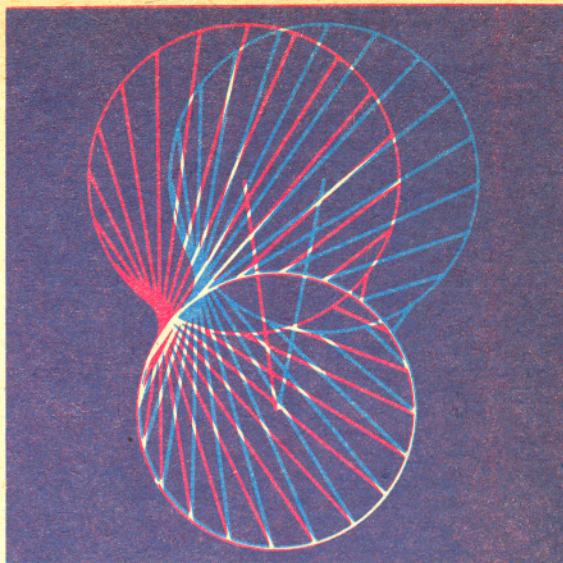
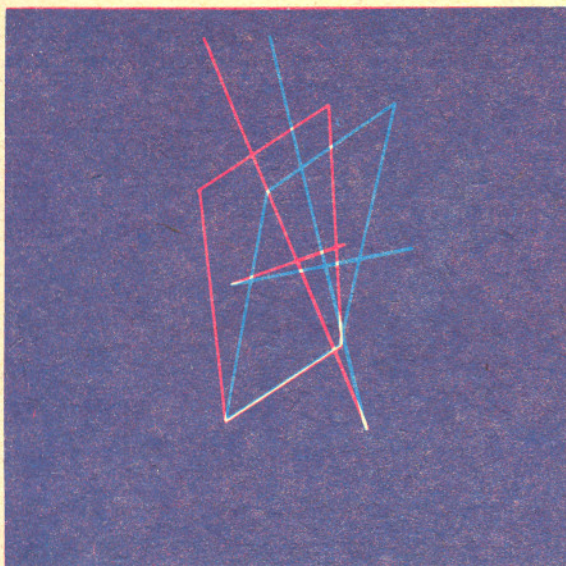
Czy istnieją nierozwijalne powierzchnie prostokątne (tak nazywa się powierzchnie będące sumą pewnej rodziny prostych)?

Łatwo zauważyć, że stożki (sumy prostych przecinających daną krzywą płaską i przechodzących przez dany punkt nie leżący w płaszczyźnie tej krzywej) są, niestety, również rozwijalne.

Wystarczy jednak w naszym przepisie na płaszczyznę zamiast równoległości zażądać, aby proste przecinały linię śrubową o osi na danej prostej, by otrzymać nierozwijalną helikoidę (Czytelniku, jak uzasadnić, że helikoida jest nierozwijalna?).

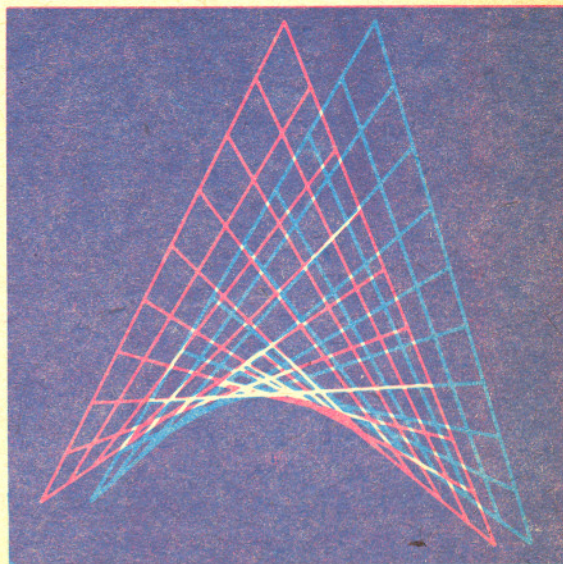
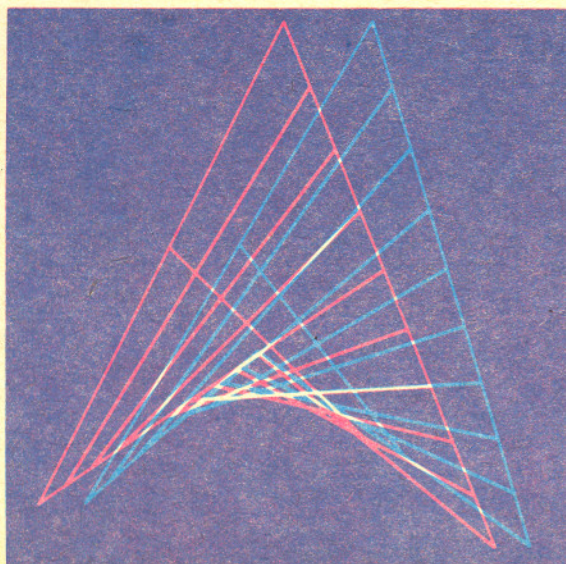
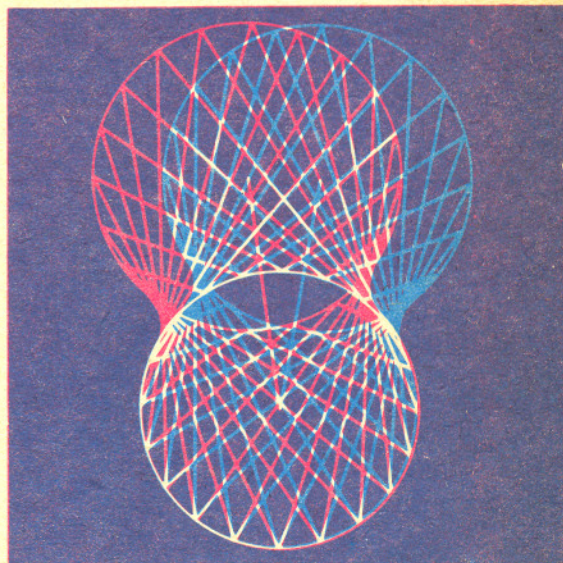
Zachęceni tym sukcesem możemy zwiększyć wymagania. Zažadajmy, aby prostokątna powierzchnia była nie tylko nierozwijalna, lecz również, by przez każdy jej punkt przechodziły dwie różne proste leżące w całości na powierzchni. I to da się zrobić. Zsumujmy wszystkie proste, które otrzymamy obracając prostą wokół danej prostej do niej skośnej (łatwo zrobić sobie model mechaniczny — prawda?). Otrzymana, wcięta w tali powierzchnia,

nazywa się hiperboloidą jednopowłokową. Jak jednak przekonać się, że przez każdy jej punkt przechodzi jeszcze jedna prosta (różna od tej z obracania)? Oto przepis: weźmy tworzącą (tak nazywają się proste, z których zsumowania powstaje powierzchnia) przechodzącą przez dany punkt i płaszczyznę wyznaczoną przez ten punkt i oś obrotu — obraz symetryczny tworzącej względem płaszczyzny jest prostą leżącą na powierzchni (Czytelniku, udowodnij to).



Innym przykładem może być powierzchnia utworzona z prostych ślizgających się po trzech danych prostych równoległych do pewnej płaszczyzny i parami skośnych. Nazywa się ona paraboloidą hiperboliczną i jest po prostu siodłem do konnej jazdy. Zostawiamy Czytelnikowi wykazanie, że przez każdy punkt tej powierzchni przechodzą dwie leżące na niej proste. Podobnie jak pytanie, czy są nierozwijalne powierzchnie, przez których każdy punkt przechodzą trzy różne proste.

M. K.



Rozwiązanie zadania F 151.

W strukturze kubicznej objętościowo centrowanej każdy (zjonizowany) atom ma 8 najbliższych sąsiadów, a w strukturze najgęstszego upakowania — 12. Średnia odległość między jonami jest więc w przypadku najgęstszego upakowania mniejsza, a co za tym idzie, energia odpychania elektrostatycznego jest w tym przypadku większa. Zmniejszenie się zatem energii elektrostatycznej jest rekompensowane wzrostem energii cieplnej, który powoduje ponowne rozżarzenie drutu.

30 maja mieszkańcy Meksyku, Stanów Zjednoczonych i północnej Afryki będą mogli obserwować rzadkie, pierścieniowe zaćmienie Słońca. Zaćmienie takie występuje wtedy, gdy położenie Księżyca spełnia dodatkowy warunek: gdy znajduje się w okolicach apogeum. Średnica kątowa Księżyca jest wtedy zbyt mała, aby zasłonić całą tarczę Słońca. W najlepszej sytuacji będą mieszkańcy Nowego Orleanu i Atlanty. Wiadomo już, między jakimi ulicami tych miast przejdzie zaćmienie w maksymalnej fazie. W Atlancie będzie to pas o szerokości jedynie 6 kilometrów.

W Polsce obserwować będziemy wtedy (jeśli pogoda dopisze) jedynie zaćmienie częściowe i to ledwo widoczne: Księżyc zasłoni tylko skrawek Słońca. Jednak będzie ono o tyle ciekawe, że nastąpi krótko przed zachodem. Stwarza to bardzo dogodne warunki do prób eksperymentów z fotografowaniem tego zjawiska: bardzo gorąco Was do tego namawiam. Jeśli uda się Wam zrobić ładne zdjęcie — przyslijcie nam — umieścimy je na okładce naszego pisma.

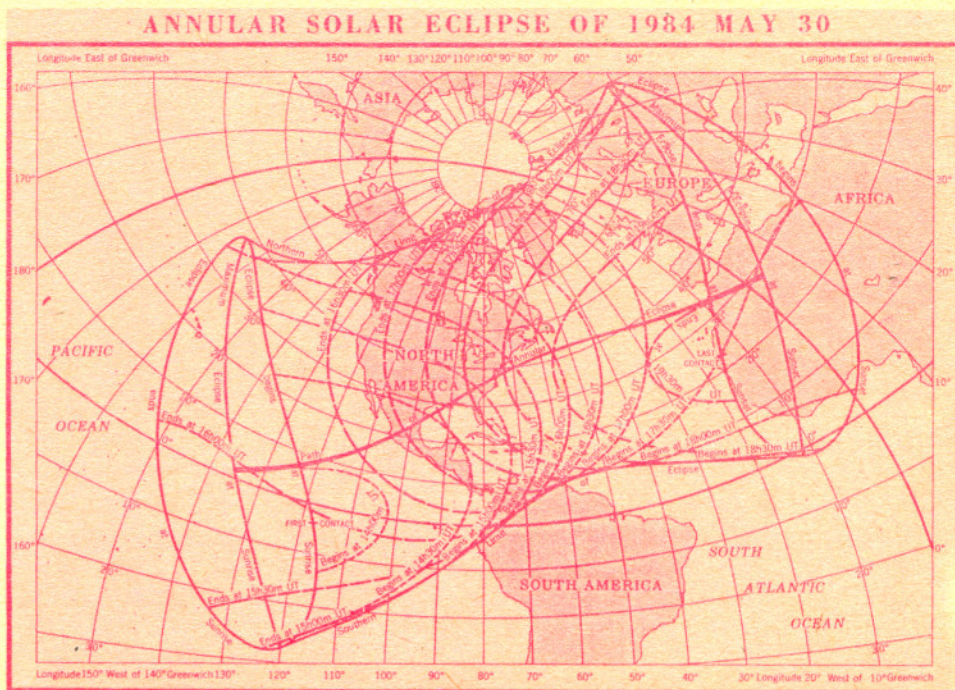
Zaćmienie rozpocznie się ok. godz. 19¹⁵ czasu letniego, zakończy się prawie równocześnie z zachodem Słońca ok. 20⁴⁰ (momenty te są różne dla różnych miejscowości w Polsce). Słońce zajdzie w punkcie odległym o 52° od kierunku północnego.

Jak zabrać się do fotografowania zaćmienia? Po pierwsze trzeba mieć aparat fotograficzny i (niestety) jak najdłuższy teleobiektyw. Najlepiej ustawić się wcześniej ze statywem w takim miejscu, żeby jedyne obiekty (domki, drzewa) widoczne w wizjerze znajdowały się na horyzoncie w kierunku spodziewanego zachodu.

Wielkość tarczy Słońca na kliszy można obliczyć z prostego wzoru $d = \alpha \cdot f$ (α — średnica Słońca — oczywiście w radianach — wynosi 0,0092), czyli będzie w przybliżeniu 100 razy mniejsza niż długość ogniskowej f . Jeśli więc $f = 135$ mm, to obraz Słońca będzie miał ok. 1,5 mm, czyli 1/20 wielkości klatki filmu. Istotny jest również dobór filmu, powinien on być stosunkowo mało czuły, im mniejsza czułość, tym mniejsza wielkość ziarna kliszy. Dobre filmy mają ziarno wielkości ok. 5 μ m. Z takiego zdjęcia można więc zrobić nawet 50-krotne powiększenie (czyli uzyskać obraz Słońca wielkości 7 cm).

Życzę powodzenia

dr Tomasz CHLEBOWSKI



Standardowa mapa przedstawiająca przebieg zaćmienia Słońca.

Opisując dowody w odcinku 3 i 4 (*Delta* 12/1983, 1/1984) pokazaliśmy, że ich struktura w Mizarze MSE jest praktycznie wyznaczona przez postać dowodzonej tezy. Dowodzący ma jednak pewną dowolność w ustalaniu szczegółów tej struktury, jak również on decyduje, czy będzie dowodził wprost czy nie. Przypominamy, że kroki stanowiące strukturę dowodu to: założenia (**assume** ..., **let** ... **such that** ..., **given** ...), deklaracje zmiennych (**let**... **be** ...) oraz konkluzje (**thus** ..., **hence** ...). Biorąc pod uwagę jedynie te elementy dowodu jesteśmy w stanie ustalić, czy dany dowód może być dowodem danej tezy. To, czy jest dowodem poprawnym, zależy jeszcze od tego, czy wszystkie uzasadnienia zawarte w nim (tak konkluzji, jak i kroków pomocniczych) są akceptowane przez moduł sprawdzający (checker).

Możemy zatem postawić pytanie: czy widząc jedynie dowód jesteśmy w stanie stwierdzić, jaka teza była dowodzona? Odpowiedź jest pozytywna pod warunkiem, że w tym dowodzie nie posługiwano się symbolem **thesis**, gdyż wtedy zdanie kryjące się za **thesis** zależy od dowodzonej tezy, a tej przecież nie znamy.

W Mizarze istnieje możliwość napisania ciągu kroków dowodowych, lecz bez jawnego napisania, jakiej tezy dowodzimy. Konstrukcja taka nazywa się rozumowaniem i rozpoczyna się od słówka **now** (co znaczy „a teraz”), a kończy się jak dowód słowem **end**. To, co może wystąpić między tymi dwoma symbolami, jest dokładnie tym samym, co może znaleźć się w dowodzie.

A co ta konstrukcja znaczy? Otóż, gdybyśmy spojrzeli na nią jak na dowód, to jej znaczeniem jest właśnie zdanie, które byłoby tezą takiego dowodu. Przed **now** możemy postawić etykietę i powołując się na nią w istocie powołujemy się na to zdanie. Weźmy dobrze nam znany przykład, że zwrotność wynika ze spójności.

```
A: FOR X HOLDS NMCX,XJ
PROOF
LET X' BE ULAMEK7
THUS NMCX',X'J BY SPOJNOSC
ENDF
```

A oto równoważne temu dowodowi rozumowanie:

```
A': NOW
LET X BE ULAMEK7
THUS NMCX,XJ BY SPOJNOSC
ENDF
```

W dalszym ciągu tekstu w Mizarze nie ma różnicy, czy powołamy się na *A*, czy na *A'*. Obie te etykiety oznaczają takie samo zdanie, a konstrukcja z **now** jest wyraźnie krótsza.

Ktoś spyta: po co zatem dowody? Po prostu czasami dla czytelności warto napisać dowodzoną tezę w sposób jawny.

Po drugie w rozumowaniu (**now**) nie możemy używać **thesis** w takim sensie jak w dowodzie, co przecież tak skraca zapis. Jeśli **thesis** występuje wewnątrz konstrukcji **now** ... **end**, to jest to **thesis** dowodu, który tę konstrukcję (bezpośrednio) zawiera. A jeśli takiego dowodu nie ma? Wtedy mamy błąd (maszyna to skrzętnie komunikuje), gdyż poza dowodem znaczenie **thesis** nie jest określone.

Konstrukcja rozumowania jest bardzo przydatna dla formułowania „lematów”, czyli tych kroków

w dowodzie, które wymagają wewnętrznych dowodów. Spójrzmy na przykłady z poprzedniego odcinka, ale zapisane przy użyciu **now**.

```
FOR X,Y EX Z ST NMCX,ZJ & NMCY,ZJ
PROOF
LET X',Y' BE ULAMEK7
A: NOW
ASSUME NMCX',Y'J
THEN NMCX',Y'J & NMCY',Y'J BY ZWROTNOSC
HENCE THESIS
ENDF
NOW
ASSUME NMCY',X'J
THEN NMCY',X'J & NMCX',X'J BY ZWROTNOSC
HENCE THESIS
ENDF
HENCE THESIS BY A,SPOJNOSC
ENDF
```

Słowkiem **thesis** posłużyliśmy się trzykrotnie. Za każdym razem oznaczało ono zdanie, które pozostało do udowodnienia w dowodzie głównym. Oczywiście, konkluzje wewnątrz rozumowań nie wpływały na zmianę znaczenia tego **thesis**. Powołaliśmy się również na efekt rozumowania (tj. na pewne zdanie) za pomocą zahaczenia przez **hence** przy dokonywaniu ostatecznej konkluzji w dowodzie. Takie niejawne zdanie otrzymywane jako efekt rozumowania nie może występować nigdzie tam, gdzie mogą występować zdania sformułowane *explicite*. W szczególności nie jest dozwolone napisanie przed **now** symboli: **then**, **thus**, **hence**.

Ostatni dowód z poprzedniego odcinka skraca się znacznie, jeśli zamiast dowodów wewnętrznych użyjemy rozumowań. Zwróćmy uwagę na wystąpienie rozumowania wewnątrz innego rozumowania.

```
FOR X,Y HOLDS
(EX Z ST NMCX,ZJ & NMCY,ZJ & X<Z & Z<Y) IFF (X<Y & NMCX,YJ)
PROOF LET X,Y BE ULAMEK7
== PRAWDZIWOSC PIERWSZEJ IMPLIKACJI UZYSKAMY PRZEZ RUMOWANIE.
== TAK PISZEMY NIEFORMALNY, POZAHIZAROWY KOMENTARZ.
NOW
GIVEN Z SUCH THAT
A': NMCX,ZJ AND B': NMCY,ZJ AND C': X<Z AND Z<Y
NOW ASSUME X=Y THEN Z=X BY A',B',ANTYSYMETRIA
HENCE CONTRADICTION BY C'
ENDF
HENCE X<Y
THUS NMCX,YJ BY A',B',PRZECZNIOSC
ENDF
HENCE THESIS BY GESTOSC
ENDF
```

Zwróćmy uwagę, że **thesis** w tym dowodzie oznacza koniunkcję obu implikacji potrzebnych do wykazania równoważności. Pierwsza z nich jest gwarantowana przez dopiero co zakończone rozumowanie (stąd **hence**), a druga wynika bezpośrednio z gęstości. Zauważmy, że najbardziej wewnętrzne rozumowanie było oparte na sprowadzeniu do sprzeczności. Jakie było zatem zdanie odpowiadające temu rozumowaniu? Było ono po prostu zaprzeczeniem przyjętego w tym rozumowaniu założenia.

Zadania:

(przypominamy o wprowadzonym pojęciu leżenia między)

```
T23: FOR X,Y,Z,X',Y' ST HMCX,X',YJ & HMCY',Y',ZJ
HOLDS HMCX',Y',ZJ & HMCX',Y',Y'J
T24: FOR X,Y,Z ST HMCX',Y',ZJ OR HMCX',Z',YJ
HOLDS NMCX',YJ & NMCX',ZJ
T25: FOR X,Y EX Z ST NOT NMCX,ZJ & NOT NMCY,ZJ
```

Przypominamy

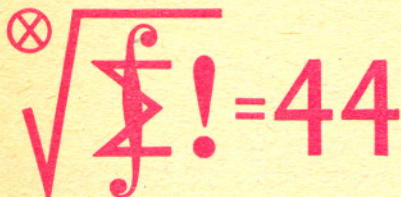
Każdy, kto nadeśle pod adresem redakcji rozwiązanie (wraz z zaadresowaną do siebie kopertą — większą — z naklejonym znaczkiem), otrzyma wydruk z komputera z komentarzem do tego rozwiązania.

dr Krzysztof PRAŻMOWSKI, dr Piotr RUDNICKI

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr. $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce). Można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4 - 3 \cdot \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do pónownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 1/1984.



Klub 44

Zadania nr 82, 83, 84

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 1984

82. Po krawędziach sześcianu pełza żuk. Na przejście jednej krawędzi zużywa minutę. Znalazłszy się w wierzchołku, wchodzi na jedną z trzech krawędzi wychodzących z tego wierzchołku, z równym prawdopodobieństwem wyboru (1/3). Niech A i Z będą przeciwległymi wierzchołkami sześcianu. W chwili $t = 0$ żuk znajduje się w wierzchołku A . Czas, po którym żuk po raz pierwszy znajdzie się w wierzchołku Z , jest zmienną losową. Obliczyć jej wartość oczekiwaną.

[Użyteczny może być wzór: $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = (1-x)^{-2}$ dla $|x| < 1$].

83. Każdy z wierzchołków równoległoboku o danym polu S połączono odcinkami ze środkami boków wychodzących z przeciwległego wierzchołku. W środku równoległoboku odcinki te tworzą ośmiokąt. Obliczyć jego pole.

84. Czy istnieje liczba naturalna, której każda wielokrotność ma albo wszystkie cyfry parzyste, albo wszystkie cyfry nieparzyste?

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Zadanie 84 przysłał pan Jerzy Janowicz z Bolesławca.

Rozwiązania zadań z numeru 12/1983

Przypominamy treść zadań:

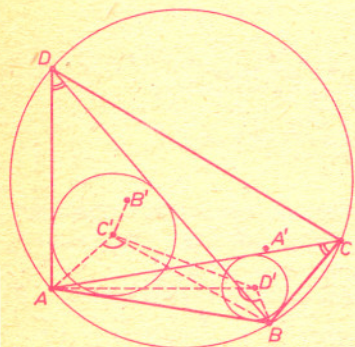
70. Dane są trzy ciągi skończone liczb rzeczywistych (a_i) , (b_i) , (c_i) , $i = 1, \dots, n$, takie, że $a_1 < \dots < a_n$, $b_1 < \dots < b_n$, a ciąg (c_i) jest nieidentycznościową permutacją ciągu (b_i) . Dowieść, że $\sum a_i b_i > \sum a_i c_i$.

71. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w koło. Udowodnić, że środki kół wpisanych w trójkąty ABC , BCD , CDA , DAB są wierzchołkami prostokąta.

72. Dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 3$ znaleźć rozkład liczby 1 na sumę n odwrotności różnych liczb naturalnych.

70. Niech (d_i) będzie optymalną permutacją ciągu (b_i) , czyli tą, dla której wartość wyrażenia $\sum a_i d_i$ jest maksymalna. Jeśli istnieją numery k, l takie, że $k < l$, $d_k > d_l$, to z nierówności $a_k < a_l$ otrzymujemy $a_k d_k + a_l d_l < a_k d_l + a_l d_k$, a więc, pisząc $d'_k = d_l$, $d'_l = d_k$, $d'_i = d_i$ dla $i \neq k, l$, widzimy, że $\sum a_i d'_i > \sum a_i d_i$, wbrew maksymalności prawej strony. Zatem $d_1 < \dots < d_n$, czyli jedyną permutacją optymalną jest permutacja identycznościowa. Stąd teza.

71. Oznaczmy środki wymienionych kół kolejno przez D' , A' , B' , C' . Wówczas (patrz rysunek): $\sphericalangle AC'B = \pi - (\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABD)/2 = \pi - (\pi - \sphericalangle ADB)/2 = (\pi + \sphericalangle ADB)/2$ i podobnie $\sphericalangle AD'B = (\pi + \sphericalangle ACB)/2$. Zatem z równości $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$ wynika równość $\sphericalangle AC'B = \sphericalangle AD'B$ oznaczająca, że na czworokącie $ABD'C'$ można opisać okrąg. Wobec tego $\sphericalangle AC'D' = \pi - \sphericalangle ABD' = \pi - \sphericalangle ABC/2$. Analogicznie $\sphericalangle AC'B' = \pi - \sphericalangle ADC/2$. Dodając otrzymane równości stronami stwierdzamy, że wklęsły kąt $B'C'D'$ równa się $2\pi - (\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC)/2 = 3\pi/2$. W ten sposób dowodzimy, że wszystkie kąty czworokąta $A'B'C'D'$ są proste.



72. Przykładowy rozkład: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-3}} + \frac{1}{6 \cdot 2^{n-3}}$.

Inna metoda: jeśli (r_n) jest ciągiem określonym wzorami $r_1 = 1$, $r_{n+1} = r_n(r_n + 1)$, to wówczas $1 = (r_1 + 1)^{-1} + \dots + (r_{n-1} + 1)^{-1} + r_n^{-1}$ (łatwy dowód indukcyjny).

