

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 5 (137)

Czy planeta może stać się gwiazdą? <i>mgr Marek J. Sarna</i>	str. 1
Teoria względności (4)	str. 3
Granica Roche'a i powierzchnia Roche'a <i>dr Tomasz Kwast</i>	str. 3
Zadania	str. 5
Co to jest elipsa?	str. 6
Mała Delta	str. 8
Czy można zobaczyć pojedynczy atom? <i>dr hab. Aleksandra Kopystyńska</i>	str. 10
Ciągi rekurencyjne a szeregi potęgowe <i>dr Jerzy Ryll</i>	str. 12
Klub 44	str. 14
Mapa nieba sprzed 2000 lat	str. 15
Komputery i liczby <i>mgr Teresa Przytycka</i>	str. 16
Patrz w niebo	str. 17

**W następnym numerze:**  
Gwiazdne wojny

„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny  
dr Jerzy Brojan  
dr Maciej Bryński  
dr Bogdan Cichoński  
dr Alicja Derkowska  
doc. dr Jan A. Gaj  
doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
doc. dr Tadeusz Jarzembowski  
doc. dr Marcin Kubiak  
mgr Andrzej Mąkowski  
dr Zbigniew Płochocki — v-przewodniczący  
dr Jan Rempała  
prof. dr Konrad Rudnicki  
prof. dr Grzegorz Sitarski  
prof. dr Józef I. Smak  
prof. dr Kazimierz Stępień  
prof. dr Mieczysław Subotowicz  
dr Michał Szurek  
doc. dr Andrzej Szymacha  
doc. dr Aniela Wolska  
prof. dr Andrzej Woszczyk  
prof. dr Wojciech Żakowski —  
przewodniczący

#### WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty rocznej zł 240,— cena prenumeraty półrocznej zł 120,—

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
    - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
    - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
  - dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
    - osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
    - osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
  - Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zlecających indywidualnie i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
- Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:  
— do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,  
— do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego,

#### Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:  
— w Księgarni Ośrodka Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa — Pałac Kultury,  
— w Głównej Księgarni Naukowej, Warszawa — ul. Krakowskie Przedmieście 7,  
— w Księgarni Ossolineum, Wrocław — Rynek 8,  
— w Księgarni Naukowej, Kraków — Podwale 6.

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland or with  
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland,  
— Earlcourt Publications Ltd., 130 Shepard Bush Centre, London W12, Great Britain,  
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze. Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 20,—

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga  
mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.  
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.  
dr Marek Kordos — red. nac.  
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.  
mgr Andrzej Majhofer  
mgr Anna Rudnik  
mgr Ewa Ryllowa  
dr Jerzy Ryll  
mgr Joanna Udalska  
mgr Jan Zalewski

Adres Redakcji  
ul. Koszykowa 6a  
00-564 Warszawa  
tel. 21-19-85

Krajowe Wydawnictwo Czasopism  
RSW „Prasa—Książka—Ruch”  
ul. Noakowskiego 14  
00-666 Warszawa

tel. centr. 25-72-91 do 93  
Biuro Reklam i Propagandy  
tel. 25-56-26  
Nakład 30 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;  
2,50 ark. druk;  
papier offsetowy V kl. 70 g.  
Wydrukowano w drukarni  
im. Rewolucji Październikowej  
Warszawa, ul. Mińska 65.  
Nr zam. 149/85. N-52

Mgr Marek J. SARNA

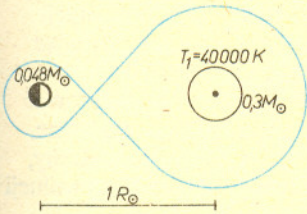
Wielu ludzi pasjonuje problem możliwości istnienia pozaziemskich cywilizacji: jedni kierują w przestrzeń wielkie czasy radioteleskopów, aby zarejestrować ich sygnały, inni poszukują śladów tu, na Ziemi, jeszcze inni marzą i fantazjują — astronomowie zaś, trzymający się twardo ziemi, poszukują w pobliżu gwiazd innych układów planetarnych. Do tej pory nie przyniosło to żadnych efektów, co może wynikać zarówno z tego, że do dziś dnia nie ma w pełni wiarygodnego modelu powstania naszej konfiguracji planetarnej, jak również i ze zbyt małej dokładności przyrządów pomiarowych mierzących małe zaburzenia w ruchu najbliższych gwiazd.

W związku z tym, że bezpośrednie poszukiwania i obserwacje nie dały pozytywnego rezultatu, zaczęto zastanawiać się nad dowodami pośrednimi. Jeden z takich pomysłów pochodzi od angielskiego astrofizyka P. Eggletona, który zauważył, że niektóre układy podwójne gwiazd o jednym składniku normalnym, a drugim o znikomej masie mogą wywodzić się od układów gwiazda-planet. Jako przykład można podać układ podwójny oznaczany *AA Doradus* (gwiazdozbiór Żłota Ryba). Układ ten składa się z dwóch gwiazd oddalonych od siebie o około 700 tys. km, to jest tyle, ile w przybliżeniu wynosi promień Słońca ( $1 R_{\odot} = 696$  tys. km). Gwiazda gorętsza, o temperaturze powierzchniowej 40000 K, jest białym karłem, druga zaś — chłodna ( $T < 4500$  K) — świeci głównie światłem odbitym i przypomina „gwiazdę”, która na skutek zbyt małej masy nigdy nie spalała wodoru w centrum (będziemy ją nazywać zdegenerowanym obiektem gwiazdopodobnym). Jeśli składnik gorętszy — oświetlający — ma masę równą  $0,3 M_{\odot}$  ( $1 M_{\odot} = 1,991 \cdot 10^{30}$  kg), to masa gwiazdy drugiej wynosiłaby około  $0,048 M_{\odot}$ , a więc byłaby dużo mniejsza od tej ( $0,085 M_{\odot}$ ), którą musi mieć gwiazda, aby spalać wodor w jądrze. Głównym źródłem energii wypromieniowywanej z wnętrza takiej „gwiazdy” byłaby więc energia kontrakcji grawitacyjnej. Chcąc uzyskać odpowiedź na pytanie, czy przodkiem małowymowej gwiazdy ( $0,048 M_{\odot}$ ) była planeta typu jowiszowego, trzeba wyjaśnić dwa problemy: — w jaki sposób planeta (masa Jowisza  $\approx 0,001 M_{\odot}$ ) zwiększyła swoją masę kilkadziesiąt razy, — jaki mechanizm spowodował, że planeta początkowo oddalona o kilkaset promieni słonecznych (odległość Jowisza od Słońca wynosi około  $1120 R_{\odot}$ ) znalazła się tak blisko gwiazdy centralnej tworząc ciasny układ podwójny.

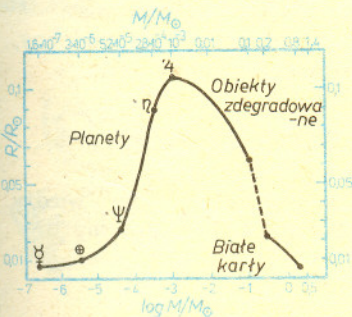
Wyjaśniając te ciekawe problemy podajemy na wstępie definicję planety. Tradycyjna definicja mówi, że planeta to ciało niebieskie o średnicy większej niż 1000 km, obiegające gwiazdę po orbicie zamkniętej i nie mające własnych źródeł energii promienistej. Dla lepszego uzmysłowienia sobie różnic między planetą a gwiazdą pokazana została zależność masy od promienia dla różnych ciał niebieskich o małych masach i promieniach. Analizując rysunek 2 widzimy, że wszystkie znane planety układają się na rosnącej gałęzi zależności  $R(M)$ , po lewej stronie maksimum, a gwiazdopodobne obiekty zdegenerowane (masa  $0,007 M_{\odot} < M < 0,085 M_{\odot}$ ) i białe karły — po prawej. Masa Jowisza wydaje się być bliska pewnej masie krytycznej, po przekroczeniu której ciała niebieskie zaczynają kurczyć się.

Sądzymy, że gdyby na Jowisza zaczęła spadać materia, to powinien on przesunąć się na wykresie w kierunku większych mas (kierunek ten zaznaczony jest na rys. 2 strzałką), co oznaczałoby kurczenie się, wzrost gęstości i temperatury w centrum. Obiekt taki stawałby się coraz bardziej podobny do gwiazdopodobnych obiektów zdegenerowanych. Jest oczywiste, że dostarczycielem materii opadającej na planetę musi być gwiazda centralna, a ponadto musi ona to robić efektywnie.

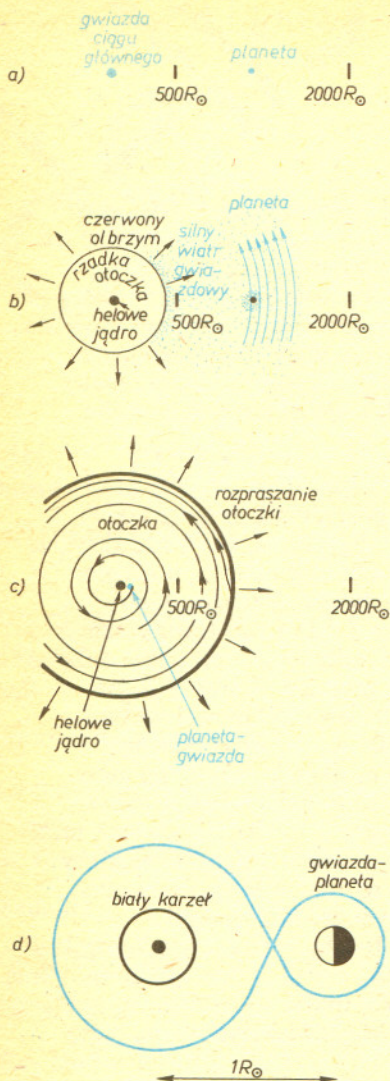
W czasie życia gwiazdy procesy utraty materii zachodzą z różną intensywnością. W początkowej fazie, gdy gwiazda powstaje, mamy do czynienia ze spadkiem (a nie wypływem!) materii (z obłoku materii międzygwiazdowej) na kurczącą się protogwiazdę. Gdy gwiazda spala wodor w centrum, czyli jest tzw. gwiazdą ciągu głównego, wypływ materii odbywa się w postaci wiatru — lecz jest raczej mało efektywny. Po wypaleniu wodoru powstałe w centrum jądro helowe kurczy się, a otoczka ekspanduje osiągając niebywałe rozmiary. Gwiazda taka zwana jest



Rys. 1. Układ *AA Dor* przy zachowaniu skali. Linia przerywaną zaznaczona jest powierzchnia Roche'a. Gwiazda mniej masywna jest ogrzana z jednej strony, co schematycznie zaznaczone jest kolorem białym.



Rys. 2. Zależność masy od promienia dla ciał niebieskich o małych promieniach i masach. Symbole oznaczają kolejno: Merkurego, Ziemię, Neptuna, Saturna i Jowisza. Obiekty zdegenerowane to obiekty gwiazdowe, które na skutek zbyt małej masy ( $0,001$  do  $0,08 M_{\odot}$ ) nigdy nie zapaliły wodoru w centrum i zmniejszały swój promień do momentu, gdy ciśnienie zdegenerowanych elektronów zahamowało kontrakcję. Białe karły zaznaczono dla mas  $0,2$  do  $1,4 M_{\odot}$ . W skali rysunku gwiazdy neutronowe znajdują się prawie na osi poziomej w okolicy białych karłów.



Rys. 3. Cztery kadry historii z przemiany planety w gwiazdę:  
 a) gwiazda centralna — gwiazdą ciągu głównego, planeta krąży po orbicie w odległości między 500 a 2000  $R_{\odot}$ .  
 b) gwiazda centralna staje się czerwonym olbrzymem, z którego zachodzi silny wypływ materii. Planeta zbliża się po spirali do powierzchni czerwonego olbrzyma,  
 c) gwiazda-planeta zanurzyła się w otoczkę czerwonego olbrzyma i zaczyna po torze spiralnym zbliżać się do helowego jądra,  
 d) układ podwójny w stanie obecnym po rozprężeniu otoczki czerwonego olbrzyma.  
 Skala 1000 razy większa niż na rys. a, b, c.

czerwonym olbrzymem. Stosunek gęstości jądra i otoczki jest w czerwonym olbrzymie taki sam, jak ołowiu i jonosfery (warstwy położonej 100 km nad Ziemią). W czerwonych olbrzymach prędkość ucieczki z powierzchni gwiazdy jest znikoma (w porównaniu z gwiazdami ciągu głównego), a więc wypływ materii jest bardzo silny — może unieść w sumie nawet kilkadziesiąt procent masy gwiazdy. Gwiazda mająca niezbyt dużą masę początkową na skutek wypływu może stracić całą otoczkę i po wypaleniu helu nie zapali następnego pierwiastka (węgla), a stanie się białym karłem (małą, bardzo gęstą gwiazdą). Po tym, co powiedziano wyżej, wnioskujemy, że odpowiednim dostarczycielem materii dla efektywnego zwiększania masy planety będzie czerwony olbrzym.

Pozostaje jeszcze jedna istotna sprawa: jak daleko od powierzchni gwiazdy ciągu głównego musi znajdować się planeta? Planeta położona w odległości większej niż 2000  $R_{\odot}$  zbiera zbyt mało materii z rzadkiego już wiatru gwiazdowego. W momencie, gdy znajdzie się w otoczce czerwonego olbrzyma, ma zbyt małą temperaturę i gęstość w centrum, aby przetrwać ten kataklizm. Położona zbyt blisko (odległość  $< 500 R_{\odot}$ ) ma za mało czasu, aby zwiększyć swoją masę kilkadziesiąt razy. Czas opadania materii jest tu ograniczony tempem ewolucji czerwonego olbrzyma, który bardzo szybko zwiększa swój promień, ogarniając i „rozpuszczając” w otoczce planetę. Przekładając to na język odległości w Układzie Słonecznym planeta — kandydat na gwiazdę — powinna znajdować się między pasem planetoid a orbitą Saturna. Wydaje się więc prawdopodobne, że jedynie Jowisz ma szansę stać się „gwiazdą” i utworzyć w przyszłości ciasny, małowymasywny układ podwójny z białym karłem powstałym jako rezultat ewolucji naszego Słońca. Wszystkie bliższe planety rozpląną się w otoczce Słońca — czerwonego olbrzyma. Niejakim pocieszeniem dla nas niech będzie fakt, że może się to stać dopiero za kilka miliardów lat.

Wyobraźmy sobie teraz konkretną sytuację, gdy planeta typu jowiszowego jest oddalona o około 900  $R_{\odot}$  od gwiazdy centralnej (rys. 3a). Gwiazda ta ewoluuje tak, jak to opisaliśmy wyżej i gdy staje się czerwonym olbrzymem, zaczyna się silny wypływ materii z jej powierzchni. Część tej materii opada na planetę, która zwiększając masę przybliża się (rys. 3b) do rozdymającej się coraz bardziej gwiazdy centralnej. Trwa to około miliona lat. W tym czasie planeta zmienia się w gwiazdopodobny obiekt zdegenerowany i wchodzi w otoczkę czerwonego olbrzyma (rys. 3c). Oddając swoją energię otoczce zaczyna spadać po spirali ku gęstemu helowemu jądro. Gdy energia całkowita układu złożonego z helowego jądra i zdegenerowanego obiektu gwiazdopodobnego staje się porównywalna z energią wewnętrzną otoczki gwiazdy — zewnętrzne warstwy ulegają rozproszeniu. Pojawia się ciasny, małowymasywny układ podwójny (rys. 3d) złożony z białego karła i gwiazdopodobnego obiektu zdegenerowanego.

Przedstawiony wyżej schemat ewolucyjny może tłumaczyć powstanie takiego układu jak *AA Dor*. Uczciwie trzeba jednak powiedzieć, że nie jest to jedyne możliwe wytłumaczenie. Inne, konkurencyjne różni się tylko tym, że zamiast planety rozważa się od samego początku małowymasywny obiekt gwiazdopodobny, który analogicznie spada po spirali w otoczce czerwonego olbrzyma dając w rezultacie układ podwójny podobny do *AA Dor*.

Czy udało nam się odpowiedzieć na tytułowe pytanie? Sądzę, że tak i jest to odpowiedź twierdząca. Trzeba jednak zaznaczyć, że są to jedynie hipotezy naukowe, które w miarę wzrostu ilości materiału obserwacyjnego i naszej wiedzy teoretycznej zostaną zmodyfikowane lub nawet zmienione. Dzisiaj możemy je traktować jako ciekawostki godne rozważenia.

#### Rozwiązanie do artykułu „Komputery i liczby”

Oznaczmy przez  $\oplus$  działanie wykonywane przez nowy sumator. Załóżmy, że dodawanie liczb  $x_1$  i  $x_2$  nie powoduje przepelnienia. Zauważmy, że dla  $x \leq 0$  mamy  $r_2(x) = 2^4 - 1 - |x|$  (gdź  $2^4 - 1 = 1111$  i  $|x|_B + |x|_B = 1111$ ).

$$1. \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$r_2(x_1) \oplus r_2(x_2) = r_2(x_1 + x_2),$$

$$2. \quad x_1 < 0, x_2 \geq 0$$

$$r_2(x_1) \oplus r_2(x_2) =$$

$$= 2^4 - 1 - |x_1| + 2^4 - 1 - |x_2| \stackrel{d_4}{=} = 2^5 - |x_1 + x_2| - 1 = r_2(x_1 + x_2).$$

(Zauważmy, że  $2^4 - |x_1 + x_2| - 1 \stackrel{d_4}{=} - |x_1 + x_2| - 1 = 2^4 + 2^4 - |x_1 + x_2| - 1$  mają ten sam zapis. Nie widzimy jedynki stojącej na miejscu 4, gdyż takiego miejsca nie ma.)  
 3.  $x_1 < 0, x_2 \geq 0, |x_1| \leq |x_2|$

$$r_2(x_1) \oplus r_2(x_2) = 2^4 - |x_1| - 1 + x_2 \stackrel{d_4}{=} = 2^4 + |x_2| - |x_1| = r_2(x_1 + x_2),$$

$$4. \quad x_1 < 0, x_2 \geq 0, |x_1| > |x_2|$$

$$r_2(x_1) \oplus r_2(x_2) = 2^4 - |x_1| - 1 + |x_2| = 2^4 - |x_1 + x_2| - 1 = r_2(x_1 + x_2).$$



Rozwiązanie zadania F 173. We wzorze  $Q = \frac{U^2}{R}$  wielkość  $U$  to spadek potencjału wzdłuż przewodów linii przesyłowej. Jest on znikomo mały w porównaniu z różnicą potencjałów na wtórnym uzwojeniu transformatora podwyższającego napięcie i maleje ze zmniejszaniem się natężenia prądu.

Dr Tomasz KWAST

Nazwisko francuskiego matematyka Edouarda Roche'a (1820—1883) wiąże się z dwoma zagadnieniami należącymi formalnie do dziedziny mechaniki nieba, a które swoimi konsekwencjami daleko wykraczają poza mechanikę.

Na początek (rys. 1) założmy, że po kole o promieniu  $A$  obiega planetę o masie  $M$  i promieniu  $R$  satelita o masie  $m$  i promieniu  $r$  synchroniczny (tzn. którego okres obrotu jest równy okresowi obiegu, jak w przypadku naszego Księżyca). Z założenia ruchu po kole wynika, że przyspieszenie odśrodkowe centrum satelity jest równe (co do wartości bezwzględnej) jego przyspieszeniu grawitacyjnemu ze strony planety, czyli

$$\omega^2 A = \frac{GM}{A^2},$$

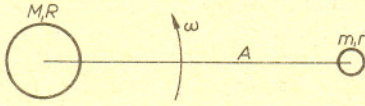
gdzie  $\omega$  oznacza prędkość kątową satelity, a  $G$  stałą grawitacji. Ściśle mówiąc, satelita krąży nie wokół środka planety, lecz wokół środka masy całego układu, czyli po kole o promieniu  $AM/(M+m)$ , jednak nieściśłość tę można zaniedbać, gdy satelita jest „mały” w stosunku do swojej planety. Tak czy inaczej wypadkowe przyspieszenie środka masy satelity jest równe zeru.

Obliczmy teraz różnicę tych samych przyspieszeń (odśrodkowego i grawitacyjnego) w najbardziej odległym od planety punkcie satelity — będzie to tzw. przyspieszenie przyływowe  $\Delta a$ . Punkt ten obiega planetę po kole o promieniu  $A+r$ , zatem

$$\begin{aligned} \Delta a &= \omega^2(A+r) - \frac{GM}{(A+r)^2} = \frac{GM}{A^3}(A+r) - \frac{GM}{\left[A\left(1+\frac{r}{A}\right)\right]^2} \approx \\ &\approx \frac{GM}{A^2} + \frac{GM}{A^2} \frac{r}{A} - \frac{GM}{A^2} + \frac{GM}{A^2} 2 \frac{r}{A} = 3 \frac{GM}{A^3} r. \end{aligned}$$

Skorzystaliśmy tu z liniowego przybliżenia  $\frac{1}{(1+x)^2} \approx 1-2x$ , gdzie  $x$  oznacza wielkość małą względem jedności. Analogiczny rachunek dla punktu satelity leżącego najbliżej planety dowodzi, że przyspieszenie przyływowe w nim wynosi  $-\Delta a$ . Satelita jest zatem rozciągany w kierunku prostej łączącej go z planetą, gdyby więc był ciekły, to nie mógłby zachować kształtu kulistego, w ogóle zaś może utrzymać się w całości, gdy  $\Delta a$  nie przekracza jego własnego przyspieszenia grawitacyjnego na powierzchni, czyli gdy

$$3 \frac{GM}{A^3} r < \frac{Gm}{r^2}, \quad \text{skąd } A^3 > 3 \frac{M}{m} r^3.$$



Rys. 1

## 4. Współrzędne czasoprzestrzenne



Wynik doświadczenia Michelsona i Morleya nie oznacza, że trzeba odrzucić ideę eteru. Proponowano kilka wyjaśnień, które „ratowały” eter. Jednak część z nich okazała się niezgodna z wynikami innych eksperymentów, a pozostałe wymagały przyjęcia wzajemnie sprzecznych własności eteru. Niezależnie od powodzenia tych prób warto zauważyć, że założenie istnienia eteru oznacza rezygnację z przeniesienia zasady względności na zjawiska elektromagnetyczne.

Wszystkie współczesne eksperymenty są zgodne z dwoma postulatami, na których opiera się szczególnie teoria względności:

1. Żaden z inercjalnych układów współrzędnych nie jest wyróżniony.
2. Światło niezależnie od kierunku, w którym się rozchodzi, ma (w próżni) względem dowolnego inercjalnego obserwatora tę samą prędkość.

Pierwszy postulat jest rozszerzeniem zasady względności Galileusza na wszystkie zjawiska fizyczne. Drugi natomiast nadaje wyjątkowe znaczenie prędkości światła. Prędkości wszystkich innych obiektów są względne, tj. zależą od prędkości i kierunku ruchu obserwatora. Prędkość światła jest dla każdego obserwatora taka sama.

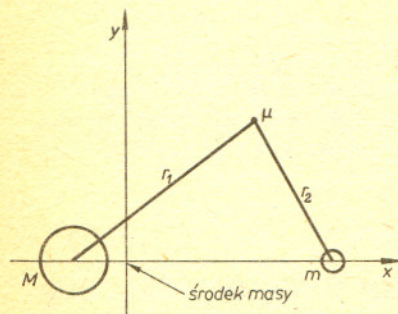
Do tej pory zakładaliśmy, że każdemu obserwatorowi inercjalnemu można przypisać pewien układ współrzędnych w czasoprzestrzeni. Trzeba jednak pamiętać, że obserwator powinien taki układ „zbudować”, tj. opracować metodę doświadczalnego wyznaczania czasu i miejsca dowolnego zdarzenia.

Założmy, że płaszczyzna kartki to nasza dwuwymiarowa czasoprzestrzeń, w której linie świata światła reprezentowane są przez proste nachylone pod kątem  $45^\circ$  do krawędzi kartki.

Przy równych gęstościach satelity i planety daje to warunek na istnienie satelity

$$A > \sqrt[3]{3} R.$$

Tak „odkryliśmy” istnienie najmniejszej odległości od planety, poniżej której satelita (ciekły!) musi zostać rozerwany przez siły przyływowe. Jest to tzw. granica Roche’a. Wynik nasz jest co prawda ilościowo zły, ale dokładniejsze obliczenia prowadzą tylko do innego współczynnika przy  $R$ , mianowicie równego 2,455. Najważniejszy wniosek jest ten sam — ciekły satelita może istnieć tylko poza granicą Roche’a. Naszemu Księżycowi (nawet gdyby był ciekły) nic nie grozi ze strony Ziemi — całe szczęście! Ale np. pierścienie Saturna leżą całkowicie poniżej granicy Roche’a dla Saturna. Nasuwa się więc możliwość, że może powstały one w wyniku rozerwania jakiegoś ciała, które za bardzo zbliżyło się do Saturna — niestety, nie mamy na razie pewności, czy było tak rzeczywiście.



Rys. 2

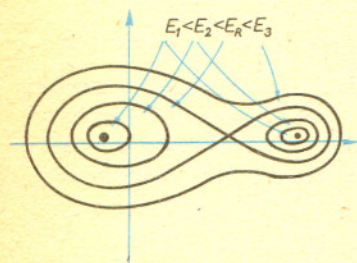
A teraz zupełnie inny problem. Niech nadal po kole obiegają się dwa ciała o masach  $M$  i  $m$ , a w ich wspólnym polu grawitacyjnym niech porusza się cząstka o znikomej masie  $\mu$ , tzn. nie zakłócająca ruchu dwóch ciał „ciężkich”. Ruch tej cząstki wygodnie jest przedstawiać w układzie współrzędnych wirującym wraz z masami ciężkimi, czyli np. tak, by masy te stałe leżały na osi  $x$  (rys. 2). Ruch cząstki może być bardzo skomplikowany, z góry jednak możemy przewidzieć, że jej całkowita energia cały czas musi być stała. Wyrażenie na energię w tym wirującym (a więc nieinercyjnym!) układzie współrzędnych ma postać

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{1}{2} \mu \omega^2 (x^2 + y^2) - \frac{GM}{r_1} - \frac{Gm}{r_2}.$$

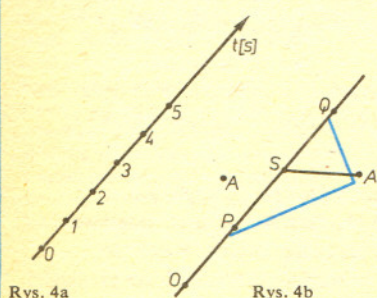
Pierwszy składnik jest energią kinetyczną, drugi uwzględnia, że układ współrzędnych wiruje (jest to potencjał przyspieszenia odśrodkowego), a dwa pozostałe to energie potencjalne względem obu mas. Skoro energia kinetyczna jest z natury rzeczy ograniczona od dołu wartością równą zero, to suma trzech pozostałych składników musi mieć (przy konkretnej energii całkowitej, lub inaczej — przy konkretnych warunkach początkowych ruchu) ograniczenie od góry. Oznacza to, że ruch cząstki może odbywać się tylko wewnątrz odpowiedniej powierzchni ekwipotencjalnej (zwanej też powierzchnią zerowej prędkości), czyli w obszarze, w którym

$$\frac{1}{2} \mu \omega^2 (x^2 + y^2) + \frac{GM}{r_1} + \frac{Gm}{r_2} > -E.$$

Gdy energia całkowita  $E$  ma dużą wartość ujemną, warunek ten może zostać spełniony albo dostatecznie daleko od całego układu (o czym dalej nie będziemy mówić, gdyż nie jest to istotne dla tytułowego zagadnienia), albo dostatecznie blisko którejś z mas (np. wewnątrz powierzchni oznaczonej  $E_1$  na rys. 3). Przy większej energii ( $E_2$ ) obszary dozwolone dla ruchu wokół mas są większe, wreszcie przy pewnej jej wartości ( $E_R$ ) łączą się w jednym punkcie tworząc tzw. powierzchnię Roche’a. Przy energii jeszcze większej ( $E_3$ ) powierzchnia zerowej prędkości ma już postać biskopata lub hantli.



Rys. 3



Rys. 4a

Rys. 4b

Rys. 4c

Narysujmy linię światła obserwatora w poruszającym się swobodnie statku kosmicznym i zdarzenie  $A$ , którego współrzędne czasoprzestrzenne chce wyznaczyć (rys. 4a). Linia światła kosmonauty jest jednocześnie osią czasu jego układu współrzędnych wyskalowaną przez wskazania jego zegara. Kosmonauta może wysyłać i odbierać sygnały świetlne. Niech zdarzenie  $A$  polega na odbiciu sygnału wysłanego w  $P$ . Odbity sygnał został odebrany w  $Q$  (rys. 4b). Jedyna dostępna obserwatorowi informacja to wskazania zegara w  $Q$  i  $P$ . Ponieważ prędkość światła nie zależy od ruchu obserwatora, jest ona w kierunku „tam” taka sama jak „z powrotem”. Czas ruchu impulsu do chwili odbicia jest równy połowie czasu,

jaki upłynął od  $P$  do  $Q$  (Czytelnikowi pozostawiamy szczegółowe uzasadnienie tego wniosku). Zdarzenie  $S$  dzielące odcinek  $PQ$  na połowy jest więc równoczesne — według kosmonauty — ze zdarzeniem  $A$ . Przypisze on zdarzeniu  $A$  wskazanie swojego zegara w punkcie  $S$ .

Odległość zdarzenia  $A$  od obserwatora jest równa drodze, którą przebędzie światło w czasie między zdarzeniami  $P$  i  $Q$ . Naturalnymi jednostkami odległości są tu sekundy świetlne. Prędkość w tych jednostkach jest wielkością bezwymiarową. Łatwo wykazać, że odległość (w sekundach świetlnych) zdarzenia  $A$  od obserwatora jest równa długości odcinka  $SA$ , a wszystkie zdarzenia równoczesne z  $S$  tworzą prostą, do której należą ten odcinek. Prosta ta może pełnić rolę osi odległości od obserwatora. Prześnijmy ją równoległe od punktu  $O$ , w którym zegar wskazuje czas zerowy. To, co otrzymaliśmy, jest poszukiwanym układem współrzędnych w czasoprzestrzeni (rys. 4c).

Czytelnikowi pozostawiamy do wykazania, że: 1) wszystkie zdarzenia, które obserwator uważa za równoodległe, leżą na prostej równoległej do osi czasu i 2) linia światła światła przechodząca przez  $O$  jest dwusieczną kąta między osią czasu i osią odległości. (cdn.)

Na konkurs napłynęło 30 odpowiedzi /w tym jedna jako wydruk z mikrokomputera/, większość prawidłowych. Zupełnie poprawnie stwierdziło co robią algorytmy 17 uczestników. Nagrody wylosowali:

Jerzy Chmiel z Głuchołaz,  
Tomasz Rawlik z Gliwic,  
Adam Olejnik z Wąbrzeźna.

Pierwszy z algorytmów podawał liczbę jedynek w dwójkowym rozwinięciu liczb od 1 do  $2^M - 1$ . Drugi wypisywał /w kolejności "alfabetycznej"/ podzbiory zbioru  $\{1, \dots, N\}$ . Trzeci obliczał wartość wielomianu  $a_0 + a_1 t + \dots + a_N t^N$  w punkcie  $x$ . Czwarty mnożył liczby  $M$  i  $N$ .

Najwięcej kłopotów sprawił Czytelnikom pierwszy algorytm.

Powierzchnią Roche'a jest więc taka powierzchnia zerowej prędkości, która przy możliwie najmniejszej energii cząstki dopuszcza jej przejście z sąsiedztwa jednej masy do sąsiedztwa drugiej masy. Ma to ogromne znaczenie przyrodnicze. Np. statek kosmiczny może (przynajmniej teoretycznie) dolecieć w pobliże Księżyca, okrążyć go i wrócić na Ziemię bez użycia silnika, jeżeli tylko obszar jego dozwolonego ruchu odpowiada jakiejś energii  $E_3$  nie mniejszej od  $E_R$ . To samo dotyczy niezwykle ważnego we współczesnej astronomii zagadnienia przepływu materii między składnikami podwójnego układu gwiazd. Formalnie w każdym układzie podwójnym (tzw. rozdzielonym) znajdują się cząstki (atomy wylatujące z powierzchni gwiazd) na tyle energetyczne, że obszar ich ruchu dozwolonego będzie większy niż wewnątrz powierzchni Roche'a. Zazwyczaj ich liczba jest tak znikomą, że o przepływie materii nie ma mowy. Liczba tych cząstek gwałtownie wzrasta, gdy jedna z gwiazd w trakcie ewolucji spęcznieje tak, że prawie wypełni swoją część powierzchni Roche'a. Wtedy bowiem cząstki startujące z powierzchni tak rozdętej gwiazdy mają od razu energię zbliżoną do  $E_R$ , jest ich bardzo dużo i znaczny ich procent ma energię większą od  $E_R$ . Z gwiazdy tej płynie wtedy w stronę jej towarzyszkę po prostu strumień materii. Przypomina to strumień powietrza wypływający z przekłutego balonika, widzimy jednak, że mechanizm powstawania tego strumienia jest zupełnie inny. Takie gwiazdy podwójne (są to tzw. układy półrozdzielone) są w Galaktyce bardzo liczne, a przykładem może być znany układ Algola. Wreszcie może się zdarzyć, że obie gwiazdy wypełniają powierzchnię Roche'a — każda swoją część. Tworzą one wtedy tzw. układ kontaktowy wytwarzający wspólną otoczkę o kształcie odpowiadającym energii  $E_3$  niewiele większej od  $E_R$ . Obiekt taki wygląda właściwie jak dziwaczna jedna gwiazda z przewężeniem.



## Zadania

Redaguje mgr Witold MARCISZEWSKI

**M 398.** Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  istnieje niepusty, skończony zbiór  $S$  punktów płaszczyzny, o tej własności, że dla każdego punktu  $A \in S$  dokładnie  $n$  punktów zbioru  $S$  jest odległych od  $A$  o 1.

Rozwiązanie na str. 10

**M 399.** Danych jest 100 liczb  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  spełniających warunki:

$$a_1 - 8a_2 + 7a_3 \geq 0$$

$$a_2 - 8a_3 + 7a_4 \geq 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{99} - 8a_{100} + 7a_1 \geq 0$$

$$a_{100} - 8a_1 + 7a_2 \geq 0.$$

Znaleźć  $a_2, a_3, \dots, a_{100}$ , jeśli wiadomo, że  $a_1 = 1$ .

Rozwiązanie na str. 10.

**M 400.** W rogach szachownicy  $3 \times 3$  stoją skoczki: w górnych rogach białe, w dolnych czarne. Jaka jest najmniejsza liczba ruchów potrzebnych do przestawienia białych skoczków w dolne rogi szachownicy, a czarnych w górne?

Rozwiązanie na str. 11

Redagują mgr Tomasz TRATKIEWICZ i mgr Włodzimierz ZIELICZ

**F 172.** Zgodnie z prawem Ohma natężenie pola elektrostatycznego w dowolnym punkcie wewnątrz przewodnika, w którym płynie prąd stały, jest proporcjonalne do gęstości prądu w tym punkcie. Źródłem pola są ładunki gromadzące się na powierzchni przewodnika po włączeniu prądu. Na przykład na powierzchni nieskończonego przewodzącego pręta gromadzi się ładunek, którego gęstość zmienia się proporcjonalnie do odległości od pewnego przekroju  $S_0$  (rysunek). Udowodnić, że przy takim rozkładzie ładunku pole elektrostatyczne wewnątrz pręta jest jednorodne.

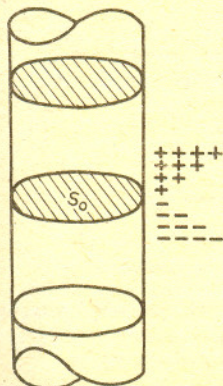
Rozwiązanie na str. 10

**F 173.** Przy przekazywaniu energii elektrycznej na duże odległości podwyższa się za pomocą transformatora napięcie tak, by przy tej samej przesyłanej mocy natężenie prądu zmalało. Zmniejsza się w ten sposób straty energii, ponieważ zgodnie z prawem Joule'a-Lenza ilość wydzielonego w jednostce czasu ciepła jest równa  $Q = I^2 R$ , gdzie  $I$  — natężenie prądu,

$R$  — oporność przewodów. Z drugiej strony jednak  $Q = \frac{U^2}{R}$ , tj. straty rosną ze wzrostem

napięcia  $U$ . Wyjaśnić, dlaczego buduje się wysokonapięciowe linie przesyłowe.

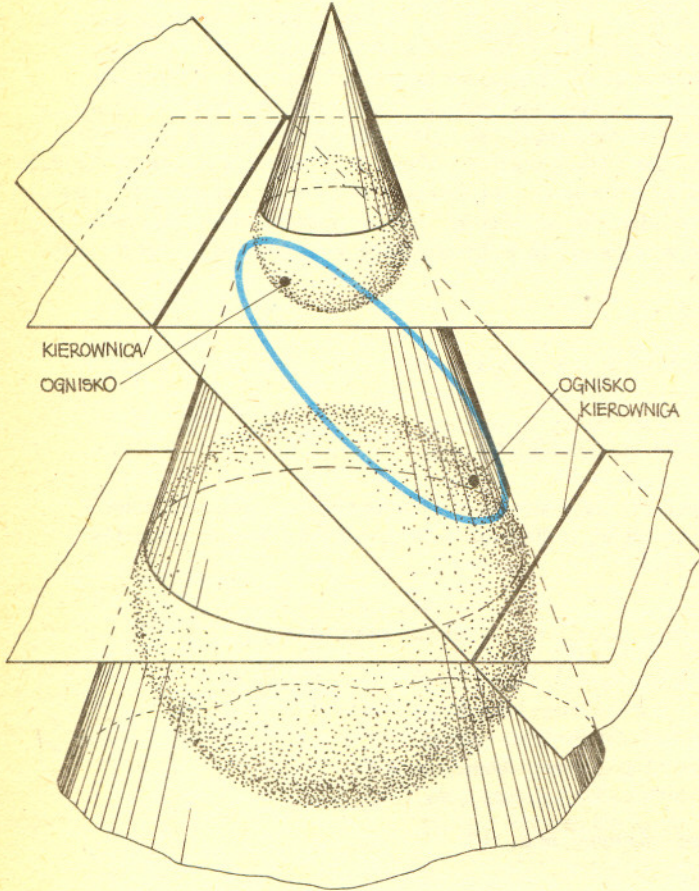
Rozwiązanie na str. 2



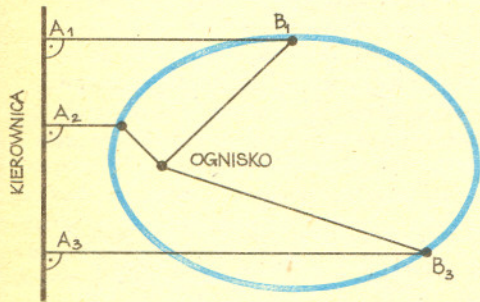
# Co to jest elipsa?

Na takie pytanie każdy matematyk z łatwością odpowie. Odpowiedzi mogą się jednak znacznie różnić. Mogą nawet być „w różnych językach”, to znaczy określać elipsę za pomocą różnych pojęć, pochodzących czasami z zupełnie różnych gałęzi matematyki. To, że każde z tych określeń definiuje elipsę, każe matematykom traktować ją jako obiektywnie istniejącą rzecz. Twierdzić, że elipsa obiektywnie istnieje, a może być opisywana różnymi sposobami, tak jak w różny sposób możemy opisywać zjawisko fizyczne. Filozofowie zaś mówią wtedy, że matematycy są wyznawcami filozofii Platona. Platon bowiem za przedmiot matematyki (i nie tylko matematyki) uważał obiekty idealne (istniejące jedynie w świecie ducha), które siłą intelektu poznajemy w ten sam sposób, jak obiekty materialne poznajemy zmysłami.

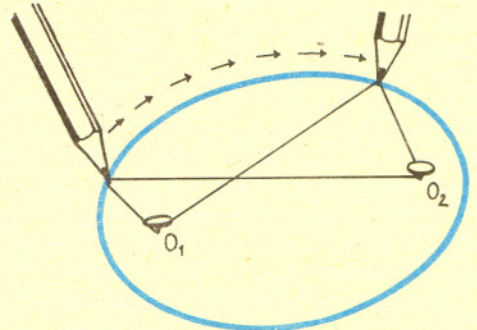
Oto dwanaście różnych określeń elipsy. Redakcji znane są jeszcze inne definicje elipsy, dlatego możemy z czystym sumieniem zaproponować Czytelnikom, by ich poszukali.



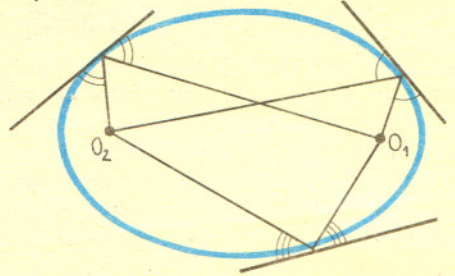
1. Przecinając stożek obrotowy płaszczyzną, która tworzy z osią symetrii stożka kąt większy od kąta między osią a tworzącymi stożka, otrzymamy elipsę. Jeżeli wpiszemy w stożek kule styczne do przecinającej go płaszczyzny (są dwie takie kule — ich powierzchnie nazywa się sferami Dandelina), to ich punkty styczności z płaszczyzną nazywa się ogniskami elipsy. Przecięcia płaszczyzny przecinającej stożek z płaszczyznami zawierającymi okręgi, wzdłuż których kule są styczne do stożka, są dwiema prostymi równoległymi, które nazywa się kierownicami elipsy.



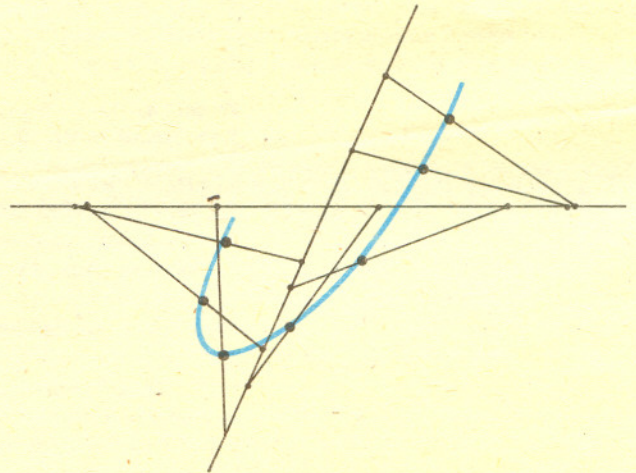
2. Zbiór punktów płaszczyzny, których odległość od ustalonej prostej (zwanej kierownicą) pomnożona przez stałą liczbę  $e$  (zwaną mimośrodem) jest równa ich odległości od ustalonego punktu (zwanego ogniskiem), jest elipsą, o ile tylko  $0 < e < 1$ . Mimośród jest przez elipsę wyznaczony jednoznacznie, natomiast każda elipsa ma dwie pary kierownica — ognisko. W tym określeniu nie mieszczą się okręgi.



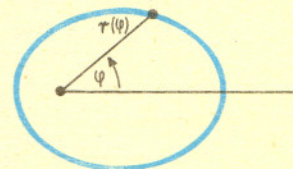
3. Zbiór punktów płaszczyzny, których suma odległości od dwóch ustalonych punktów (ognisk) jest stała, jest elipsą. Pozwala to rysować elipsy za pomocą nitki i dwóch pinezek.



4. Krzywa płaska mająca tę własność, że promienie świetlne wysłane w dowolnym kierunku z pewnego ustalonego punktu (ogniska) po odbiciu od krzywej skupią się wszystkie w jednym punkcie (drugie ognisko), jest elipsą.



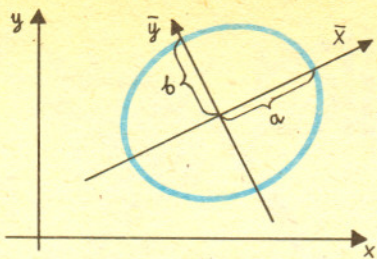
5. Odcinek o stałej długości ślizga się końcami po dwóch przecinających się prostych. Dowolnie ustalony punkt tego odcinka zakreśli podczas ślizgania elipsę.



6. Zakreślając wokół ustalonego punktu (ogniska) krzywą zmiennym promieniem

$$r(\varphi) = \frac{k}{1 + e \cos \varphi},$$

gdzie  $k > 0$  i  $0 \leq e < 1$ , otrzymamy elipsę.



7. Równanie  $x^2 + px + y^2 + qy + r = 0$  określa w kartezjańskim układzie współrzędnych na płaszczyźnie elipsę, o ile tylko

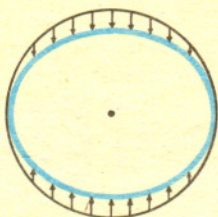
$$\begin{vmatrix} r & \frac{1}{2}r & \frac{1}{2}s \\ \frac{1}{2}r & 1 & \frac{1}{2}p \\ \frac{1}{2}s & \frac{1}{2}p & q \end{vmatrix} = r + \frac{1}{4}prs - \frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{4}p^2r - \frac{1}{4}r^2q < 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2}p \\ \frac{1}{2}p & q \end{vmatrix} = q - \frac{1}{4}p^2 > 0.$$

Warunki te są równoważne możliwości dokonania takiej zmiany układu współrzędnych, by równanie było postaci

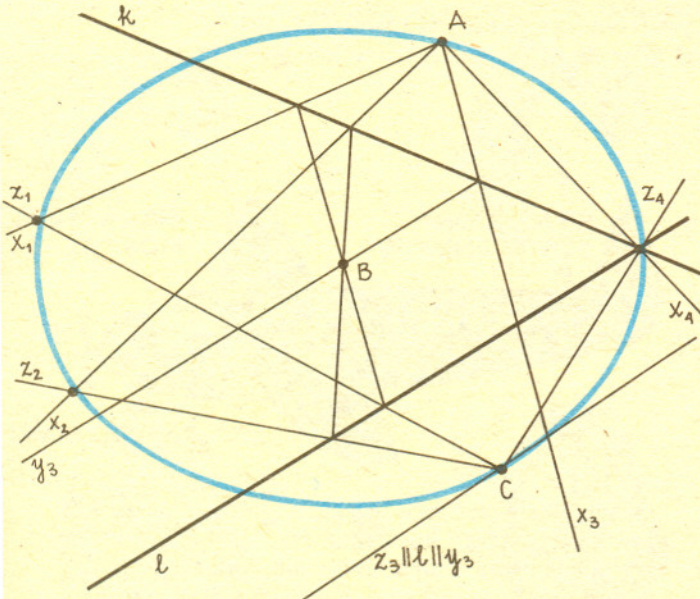
$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} - 1 = 0,$$

w którym  $a$  i  $b$  mają już sens geometryczny — są to połowy długości osi elipsy.

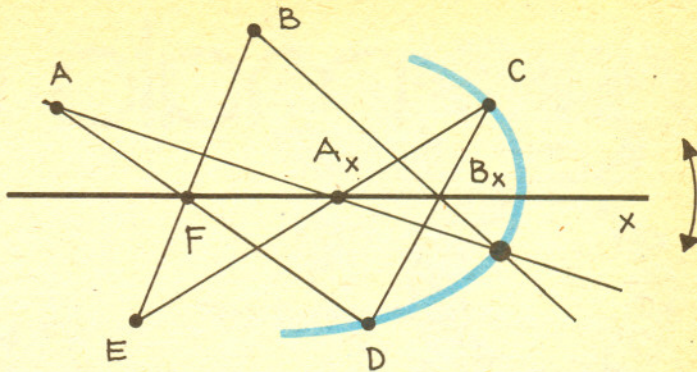


8. Przekształcenie afiniczne płaszczyzny to takie, które proste przeprowadza na proste. Są wśród przekształceń afinicznych izometrie i podobieństwa. Stosując inne od wymienionych przekształcenie afiniczne do okręgu otrzymamy elipsę (różną od okręgu).

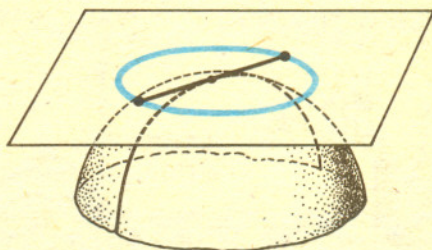
Najprostszym przykładem takiego przekształcenia jest powinowactwo prostokątne zmieniające odległość punktów od ustalonej prostej w stałym stosunku. Oczywiście bez ograniczenia przekształceń afinicznych otrzymujemy również okręgi.



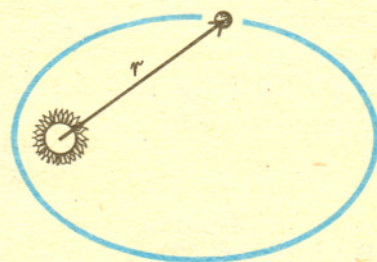
9. Weźmy na płaszczyźnie dwie proste  $k$  i  $l$  oraz trzy nie leżące na nich punkty  $A, B, C$ . Dowolnej prostej  $x$  przechodzącej przez  $A$  przyporządkowujemy prostą  $y$  przechodzącą przez  $B$  i przecinającą się z  $x$  na  $k$ . Z kolei prostej  $y$  przyporządkowujemy prostą  $z$  przechodzącą przez  $C$  i przecinającą się z  $y$  na  $l$ . Zbiór punktów przecięcia każdej z prostych  $x$  z odpowiadającą jej prostą  $z$  jest elipsą, o ile tylko proste  $k$  i  $l$  przecinają się po przeciwnych stronach odcinka  $AC$  niż punkt  $B$ ,  $k$  przecina odcinek  $AB$ , a  $l$  — odcinek  $BC$ .



10. Niech  $A, B, C, D, E$  będą kolejnymi wierzchołkami dowolnego pięciokąta wypukłego o przekątnych dłuższych od boków i niech  $F$  będzie punktem przecięcia  $AD$  i  $BE$ . Dla dowolnej prostej  $x$  przechodzącej przez  $F$  oznaczmy przez  $A_x$  jej przecięcie z  $CE$  i przez  $B_x$  — przecięcie z  $CD$ . Zbiór punktów przecięcia prostych  $AA_x$  i  $BB_x$  dla różnych prostych  $x$  jest elipsą (przechodzącą przez  $A, B, C, D$  i  $E$ ).



11. Weźmy na dowolnej gładkiej powierzchni „szczyt”, czyli taki punkt, z którego wszystkie drogi prowadzą na dół. Jeśli przetniemy powierzchnię przez „szczyt” płaszczyznami pionowymi, otrzymamy pewne krzywe (zwane normalnymi). Odkładając na stycznej do każdej krzywej (w obie strony od „szczytu”) odcinek długości równej pierwiastkowi z promienia jej krzywizny otrzymamy elipsę (zwaną indykatryszą Dupina „szczytu”). Promień krzywizny krzywej w punkcie to promień okręgu najlepiej przybliżającego tę krzywą w tym punkcie.



12. Wśród rozwiązań równania różniczkowego

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -a(r)r$$

są elipsy. Wiemy to na pewno, bo równanie tego typu opisuje zagadnienie dwóch ciał, a więc np. ruch Ziemi wokół Słońca. Aby stwierdzić dla jakiego  $a(r)$  i dla jakich warunków początkowych otrzymamy elipsę, odwołajmy się do fizyki. Ruch drobnego ciała względem środka dużego ciała o masie  $M$  opisany jest równaniem

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -G \frac{M}{r^3} r,$$

gdzie  $G$  jest stałą grawitacji. Elipsę otrzymamy, gdy energia układu będzie ujemna, co odpowiada warunkowi, by prędkość  $v_0$  (w chwili  $t = 0$ ) i położenie  $r_0$  spełniały warunek

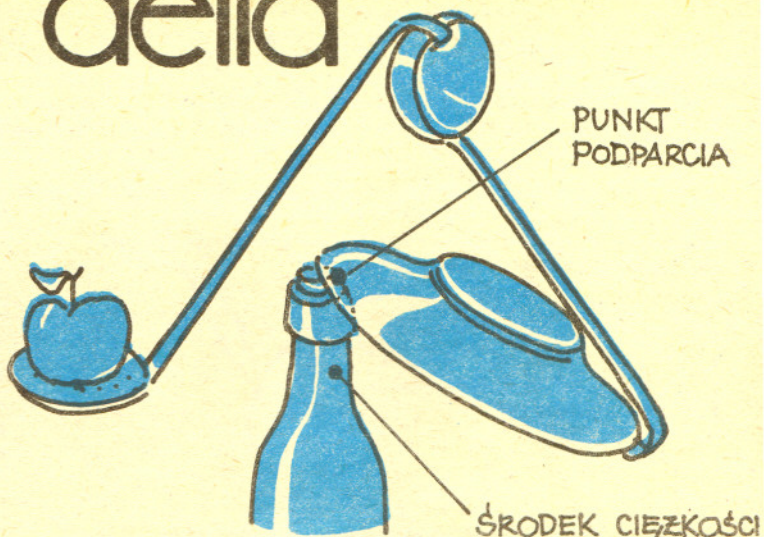
$$\frac{v_0^2}{2} - G \frac{M}{r_0} < 0.$$



# delta

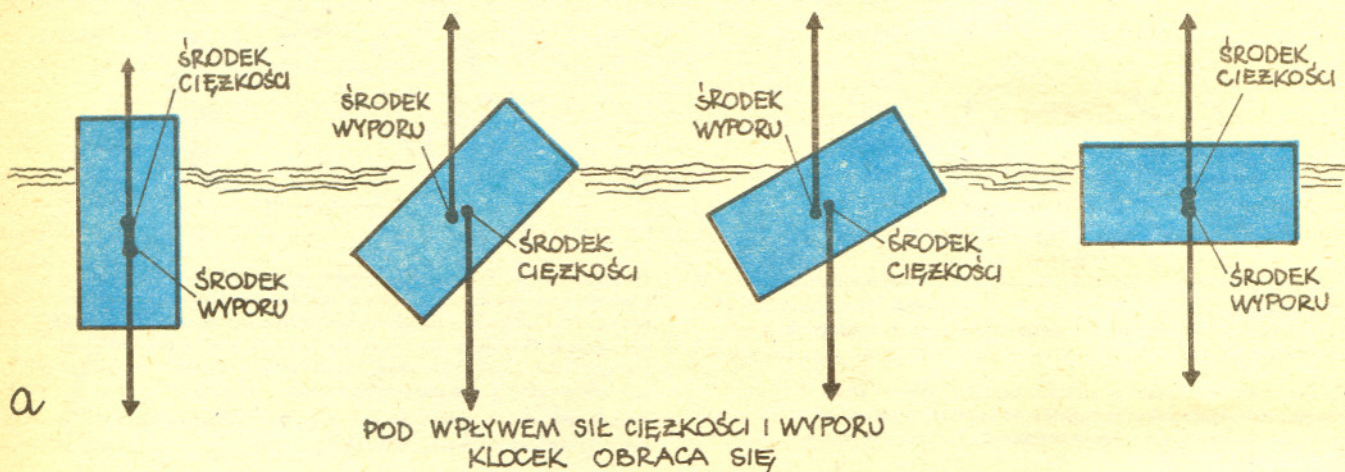
## Stabilność ruchu

Widoczna obok konstrukcja jest stabilna. Każdy może to sprawdzić. Jej równowaga zapewniona jest przez fakt, iż środek ciężkości znajduje się dokładnie pod punktem, w którym konstrukcja jest podparta.

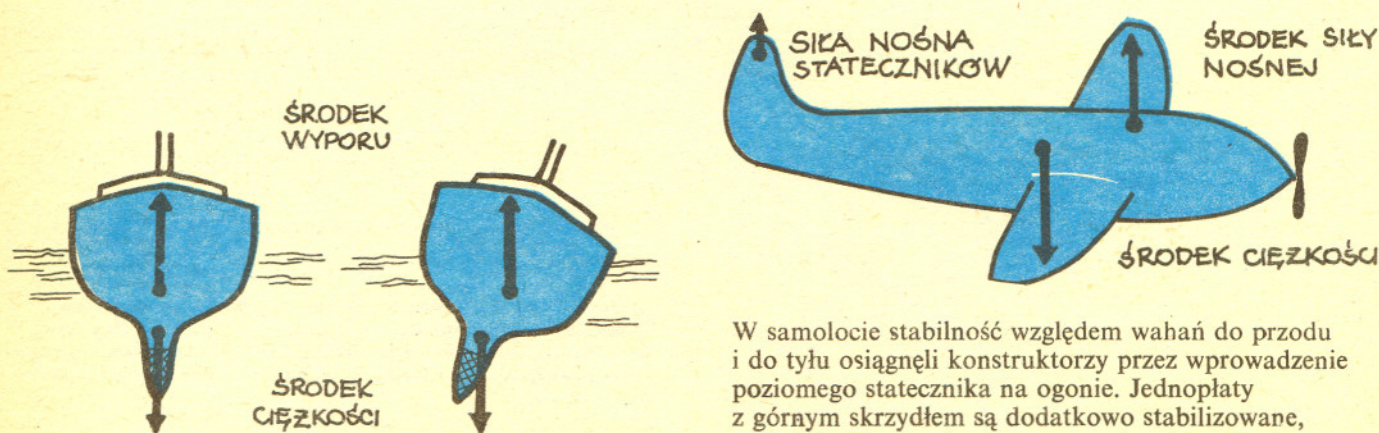


ŚRODEK CIĘŻKOŚCI JEST STAŁE W TYM SAMYM MIEJSCU

ŚRODEK WYPORU PRZEMIESZCZA SIĘ



W obu położeniach pływającej belki o przekroju prostokątnym (rysunek) ciężar jest równoważony przez siłę wyporu. Położenie a) jest jednak niestabilne. Nawet niewielkie zaburzenie powoduje obrót belki do stabilnego położenia b).



Obciążenie dolnej części kadłuba statku zapewnia stabilne położenie środka ciężkości względem środka wyporu, a rozszerzający się ku górze kształt kadłuba zapewnia, iż przy przechyle pojawia się szybko rosnące dążenie do przywrócenia stanu równowagi.

W samolocie stabilność względem wahań do przodu i do tyłu osiągnęli konstruktorzy przez wprowadzenie poziomego statecznika na ogonie. Jednopłaty z górnym skrzydłem są dodatkowo stabilizowane, podobnie jak statek, przez to, że środek ciężkości znajduje się w nich poniżej środka siły nośnej. Ta dodatkowa stabilizacja zwana w lotnictwie „efektem wahadłowym” nie zawsze jest lubiana przez pilotów, bo powoduje, że samolot wolniej reaguje na wychylenie sterów.



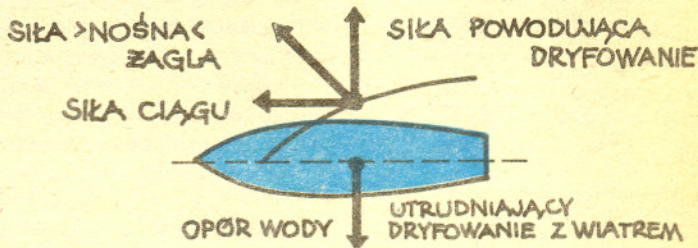
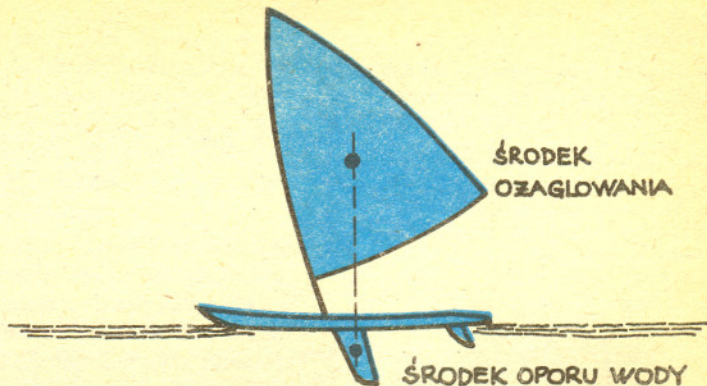
WOLNO



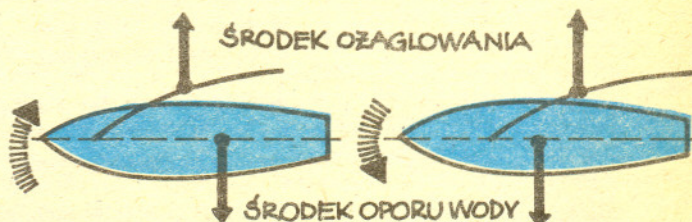
ŚREDNIO



SZYBKO

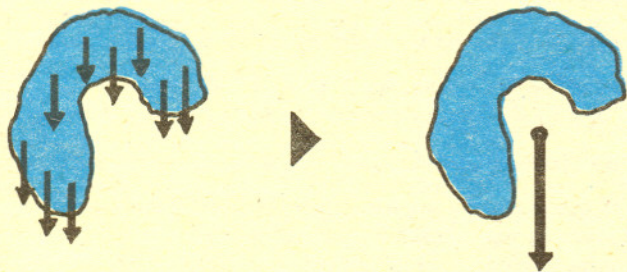


„Efekt wahadłowy” odgrywa decydującą rolę w stabilizacji lotu większości ptaków i nietoperzy, a także wielu owadów. Służy on także do sterowania lotem. Ptaki mogą bowiem przesuwając skrzydła do przodu lub do tyłu (na rysunku różne ułożenie skrzydeł papugi) zmieniając w ten sposób położenie środka siły nośnej. Po każdej takiej zmianie ptak obraca się, aż do chwili, gdy środek ciężkości znajdzie się znów pod środkiem siły nośnej.

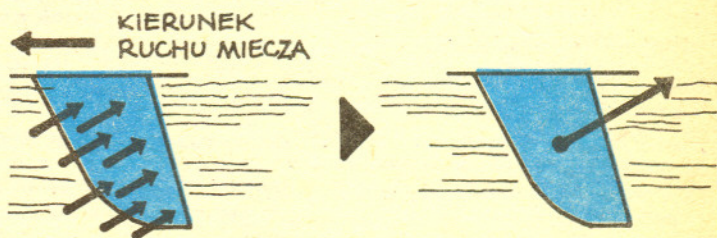


W podobny sposób steruje się deską z żaglem. Nie ma ona steru, a maszt zamocowany jest na przegubie. Jeśli chcemy płynąć ustalonym kursem, musimy ustawić środek ożaglowania dokładnie ponad środkiem oporu wody. Jest to sytuacja stabilna. Pochylenie żagla do przodu powoduje odpychanie dziobu od linii wiatru. Przy żaglu pochylonym do tyłu deska skręca w przeciwną stronę. Podobnie na dużych żaglowcach można wspomagać ster stawiając lub rzucając odpowiednie żagle.

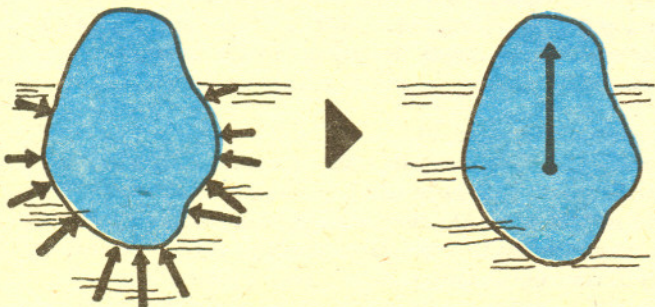
Kiedy siły działające na ciało są zbyt małe, by je zdeformować, możemy:



Siły ciężkości zastąpić ich sumą zaczepioną w środku ciężkości.



Siły oporu wody działające na przesuwający się miecz żaglowki zastąpić siłą bocznego oporu zaczepioną w środku bocznego oporu.



Siły związane z ciśnieniem wody na ciało zastąpić siłą wyporu zaczepioną w środku wyporu.



Siły związane z różnicą ciśnienia powietrza między górną i dolną powierzchnią skrzydła zastąpić siłą nośną zaczepioną w środku siły nośnej.

Małą Deltę przygotował Maciej JĘDRZEJCZAK

Dr hab. Aleksandra KOPYSTYŃSKA

**Rozwiązanie zadania M 398.** Dla  $n = 1$  teza zadania jest oczywista. Przypuśćmy teraz, że zbiór  $S = \{A_1, \dots, A_k\}$  jest żądanym zbiorem dla pewnego  $n$ . Weźmy taki wektor  $v$  o długości 1, że dla dowolnych  $i, j \leq k$ ,  $i \neq j$  odległość punktów  $A_i$  oraz  $A_j + v$  jest różna od 1 (dla ustalonej pary  $i, j$  są co najwyżej dwa takie wektory  $v$ , że  $A_i + v$  jest odległe od  $A_j$  o 1). Tak więc zbiory  $S$  i  $S' = \{A_1 + v, \dots, A_k + v\}$  są rozłączne oraz dla każdego  $i \leq k$  istnieje dokładnie jeden  $(A_i + v)$  punkt w zbiorze  $S'$  odległy od  $A_i$  o 1, a w zbiorze  $S$  dokładnie jeden  $(A_i)$  punkt odległy od  $A_i + v$  o 1. Tak więc zbiór  $S \cup S'$  jest żądanym zbiorem dla  $n + 1$ .

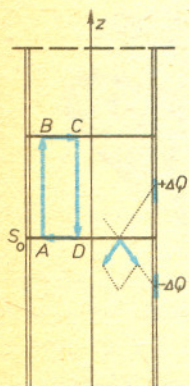
**Rozwiązanie zadania M 399.** Niech  $a_k$  będzie największą spośród liczb  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ . Mamy wówczas  $a_{k-1} - 8a_k + 7a_{k+1} \geq 0$ , czyli  $8a_k \leq a_{k-1} + 7a_{k+1}$  i wobec  $a_k \geq a_{k-1}$ ,  $a_k \geq a_{k+1}$  musi być  $a_k = a_{k-1} = a_{k+1}$ . Przez indukcję otrzymujemy  $a_1 = a_2 = \dots = a_k = \dots = a_{100} = 1$ .

**Rozwiązanie zadania F 172.** Z symetrii rozkładu ładunku wynika (patrz rysunek), że wewnątrz pręta w każdym punkcie przekroju  $S_0$  ( $x = 0$ ) wektor natężenia pola jest równoległy do osi pręta. Pole elektrostatyczne dla  $z = \text{const} \neq 0$  jest takie samo jak na  $S_0$ . Wynika to z następującego rozumowania. Korzystając z prawa Gaussa można łatwo wykazać, że we wnętrzu naładowanego ze stałą gęstością powierzchniową walca nie ma pola elektrostatycznego. Tak więc, jeśli na powierzchni pręta wprowadzimy dodatkowy, równomiernie rozłożony ładunek, to pole wewnątrz pręta nie ulegnie zmianie. Przenieś się natomiast miejsce o zerowej gęstości ładunku powierzchniowego. Ponieważ dodatkowy ładunek może mieć dowolną gęstość, pole elektrostatyczne wewnątrz pręta nie zależy od  $z$ .

Niezależność pola od odległości od osi pręta wynika z tego, że praca sił pola elektrostatycznego przy przesuwaniu ładunku po dowolnej zamkniętej drodze jest równa zeru. Dla konturu  $ABCD$

$$AW = qE_A \cdot AB + qE_D \cdot CD = 0,$$

a stąd  $E_A = E_D$ .



Marzenie fizyków przejawiające się w często wypowiedzianym zdaniu: „...wyobraźmy sobie pojedynczy, nieruchomy atom, na który pada promieniowanie...”, zostało zrealizowane dopiero w 1979 roku przez dwie niezależnie pracujące grupy naukowców w Heidelbergu (RFN) i w Boulder (USA). Nie był to co prawda atom, lecz jon, jednakże z punktu widzenia spektroskopii jon niczym nie różni się od obojętnego elektrycznie atomu. Nie należy sądzić, że realizacja tego marzenia była celem samym w sobie. Wszelkie dotychczas uzyskane doświadczalne informacje dotyczące struktury energetycznej pojedynczego atomu pochodzą z badania oddziaływania promieniowania ze zbiorem atomów znajdujących się w fazie gazowej. Ponieważ atomy w zbiorze poruszają się z dużymi prędkościami i ponadto zderzają się ze sobą i ze ścianami naczynia, w którym się znajdują, wyniki doświadczenia są obarczone znaczną niepewnością. W wielu przypadkach wynik pomiaru jest całkowicie zdominowany przez te szkodliwe efekty. Istnieją metody, które kompensują skutki lub nawet częściowo eliminują przyczyny zjawisk uniemożliwiających pomiary najsłabszych struktur poziomów energetycznych atomu. Dane na temat tych struktur są bardzo cenne, ponieważ mówią o rodzaju i sile oddziaływań występujących w atomie. Całkowita eliminacja zjawisk wynikających z ruchu atomów (jednym z nich jest dopplerowskie poszerzenie linii widmowej) czy ich zderzeń (zderzeniowe poszerzenie linii widmowej) możliwa jest dopiero w przypadku uwięzienia pojedynczego atomu. Oczywiście to samo dotyczy cząsteczek lub jonów. Jednakże jony, w przeciwieństwie do cząstek obojętnych, można stosunkowo łatwo zlokalizować stosując pola elektryczne i magnetyczne o odpowiedniej konfiguracji.

Spróbujemy wyjaśnić, dlaczego dopiero kilka lat temu udało się utrzymać pojedynczy jon w ściśle określonym miejscu przez 30 minut tak, że można go było swobodnie obejrzeć i sfotografować. Odpowiemy też na pytanie, co zrobić, żeby zobaczyć pojedynczy jon czy atom.

Wyobraźmy sobie, że atom ma kształt kulki o średnicy kilku angstromów ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ ). Nasze oko wyraźnie rozróżnia obiekty o rozmiarach nie mniejszych od milimetra. Czy nie wystarczyłoby więc zastosować powiększenie 10 milionów razy, żeby zobaczyć atom? Pomijając nawet kłopoty techniczne (nie ma mikroskopu o takim powiększeniu) nie zostałyby spełnione jeszcze inne warunki.

Atomy w fazie gazowej są swobodne i znajdują się w nieustannym ruchu. W  $1 \text{ cm}^3$  gazu w warunkach normalnych jest niewyobrażalnie duża liczba  $N = 2,69 \cdot 10^{19}$  atomów. W stanie równowagi termodynamicznej energie kinetyczne tych atomów są opisane funkcją rozkładu Maxwella. Średnia wartość energii kinetycznej w zbiorze atomów wynosi  $\bar{E}_k = \frac{3}{2} kT$ , gdzie  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$  jest stałą Boltzmana, a  $T$  oznacza temperaturę w skali Kelvina. Jak widać, średnia energia kinetyczna atomów jest wprost proporcjonalna do temperatury. Z drugiej strony, średnia energia kinetyczna jest określona wzorem  $\bar{E}_k = \frac{m\bar{v}^2}{2}$ , w którym  $m$  oznacza masę atomu, a  $\bar{v}^2$  jest średnią kwadratu prędkości atomów w gazie. Zmniejszenie prędkości atomów jest więc równoważne obniżeniu temperatury gazu. Rozkład prędkości atomów w gazie obliczamy z rozkładu energii korzystając z definicji energii kinetycznej. W temperaturze

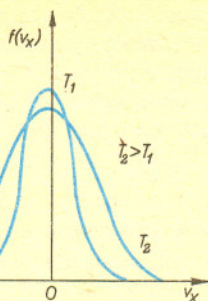
$$T = 300 \text{ K}$$

średnia prędkość atomów ( $|\bar{v}| = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ ) jest rzędu 1 km/s. Rozumiemy teraz

dlaczego zastosowanie mikroskopu o zdolności powiększającej 10 milionów razy nie wystarczy do zobaczenia pojedynczego atomu. Czy dostrzegliśmy obiekt, który z tak zawrotną prędkością przemknąłby przez nasze pole widzenia? Oczywiście, że nie. Musimy go więc zatrzymać i to w ściśle określonym miejscu, a następnie zmusić, by dał nam znać, że jest w pułapce. Jak to zrobić?

Zakładamy, że interesujące nas atomy są z grubsza zlokalizowane i obszar, w którym się znajdują, oświetlamy ukierunkowaną wiązką promieniowania laserowego o wąskim rozkładzie częstości. Atomy są cząstkami tak małymi, że zwykle, nierezonansowe rozpraszanie światła nie jest w stanie ich uwidocznić. Prawdopodobieństwo rozpraszania światła na atomach jest bardzo małe, lecz ogromnie wzrasta, gdy częstość tego światła jest w rezonansie z częstością  $\nu_0$  odpowiadającą przejściom między stanem podstawowym i pierwszym stanem wzbudzonym atomu. Czy jednak wszystkie atomy zbioru, mimo że są identyczne, mają tę samą częstość rezonansową? Nie, a przyczyną tego jest zjawisko Dopplera, które jest ściśle związane z ruchem

$$f(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{mv_x^2}{2kT}\right]$$



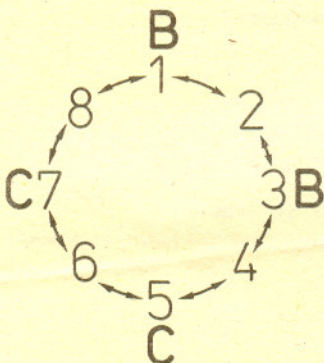
Rys. 1



Rozwiązanie zadania M 400. Ponumerujmy zewnętrzne pola szachownicy tak, jak na rysunku 1. Skoczek może poruszać się po szachownicy zgodnie z grafem z rysunku 2.

1	6	3
4		8
7	2	5

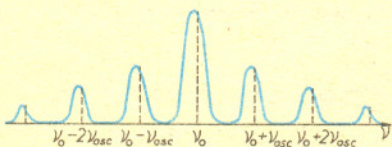
Rys. 1



Rys. 2

Zauważmy, że dla dokonania zamiany miejsc skoczków czarnych i białych każdy skoczek musi zmienić miejsce „po przekątnej”.

W przeciwnym przypadku skoczek następny na powyższym grafie (zgodnie z ruchem wskazówek zegara) w konfiguracji wyjściowej miałby inny kolor, niż skoczek następny w ustawieniu końcowym, a wykonanie dowolnego ruchu nie zmienia kolejności ustawienia skoczków w tym grafie. Dla zmiany miejsca „po przekątnej” potrzeba co najmniej 4 ruchów, a więc w sumie należy wykonać co najmniej  $4 \cdot 4 = 16$  ruchów. Przykładowa zamiana pozycji w 16 ruchach: 1—2, 3—4, 5—6, 7—8, 2—3, 4—5, 6—7, 8—1, 3—4, 5—6, 7—8, 1—2, 4—5, 6—7, 8—1, 2—3.



Rys. 2

atomów w gazie. Niech promieniowanie laserowe rozchodzi się w kierunku, który nazwiemy osią  $x$ . Rozkład  $v_x$  (składowej prędkości atomów w wyróżnionym w ten sposób kierunku) jest opisany funkcją Maxwella, pokazaną na rysunku 1. Takie same rozkłady występują w dwóch pozostałych prostopadłych kierunkach w przestrzeni. Funkcja rozkładu  $f(v_x)$  jest symetryczna względem punktu  $v_x = 0$ . Jak widać na rysunku 1, dla niższej temperatury rozkład jest węższy. Liczba atomów o prędkości  $v_x$  leżącej w przedziale  $(v_x, v_x + dv_x)$  wynosi  $dn(v_x) = N \cdot f(v_x) \cdot dv_x$ , gdzie  $N$  jest liczbą wszystkich atomów. Grupa atomów o prędkości  $v_x$ , oświetlanych wzdłuż osi  $x$ , ma częstość rezonansową wynoszącą

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{v_x}{c}\right),$$

gdzie  $c$  oznacza prędkość rozchodzenia się światła w próżni. Zatem dla zespołu atomów znajdujących się w określonym obszarze, np. wewnątrz zamkniętego naczynia, rozkład częstości rezonansowych jest identyczny z przedstawionym na rysunku 1 rozkładem Maxwella; jest to tak zwane dopplerowskie poszerzenie linii widmowej. Zjawisko to występuje zarówno przy absorpcji promieniowania przez zbiór atomów, jak i wtedy, gdy te atomy emitują promieniowanie. Środkowi linii odpowiada częstość  $\nu_0$ . Jest to częstość rezonansowa atomów, których składowa prędkości  $v_x = 0$ . Jeżeli rozkład widmowy promieniowania laserowego w całości lub częściowo pokrywa się z profilem dopplerowskim linii absorpcyjnej, wynikającym z maxwellowskiego rozkładu prędkości atomów w gazie, wówczas dzięki zjawisku rozpraszania rezonansowego atomy te stają się widoczne.

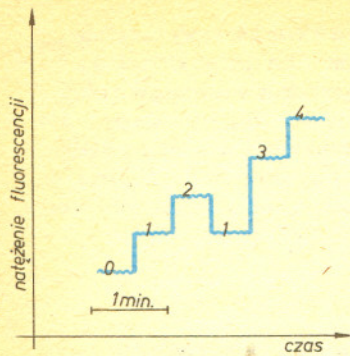
W roku 1975 po raz pierwszy zaproponowano metodę spowalniania atomów wskutek ciśnienia wywieranego przez spontanicznie rozpraszane promieniowanie rezonansowe. Rozpraszanie rezonansowe składa się z absorpcji i spontanicznej reemisji fotonu (fluorescencji). Foton ma pęd równy  $\hbar k$ , gdzie  $\hbar = h/2\pi$ ,  $h$  oznacza stałą Plancka,  $k$  jest wektorem falowym o wartości  $|k| = 2\pi/\lambda$ , a  $\lambda$  jest długością fali promieniowania. Zgodnie z zasadą zachowania pędu każdorazowa absorpcja fotonu powoduje odrzut atomu. Średni pęd przekazany atomowi po wielu aktach reemisji wynosi zero, ponieważ kierunek każdego spontanicznie wyemitowanego fotonu jest całkowicie przypadkowy. Jeżeli zatem atomy poruszają się w przeciwną stronę niż fotony, to odrzut zmniejsza ich prędkość i atomy oziębiają się. Oziębienia doznają więc tylko te atomy, które mają prędkość  $v_x < 0$  i tylko wtedy, gdy zachodzi rozpraszanie rezonansowe. Wniosek stąd jest następujący. Zastosowane do oziębiania atomów promieniowanie laserowe musi mieć rozkład widmowy znacznie węższy od dopplerowskiej szerokości linii absorpcyjnej i częstość dostrojona do wartości  $\nu < \nu_0$ . Taką możliwość stworzyły lasery barwnikowe, które pojawiły się dopiero na początku lat siedemdziesiątych.

Można oszacować, że pęd fotonu promieniowania leżącego w obszarze widzialnym wynosi  $10^{-22} \text{ g} \cdot \text{cm/s}$ , podczas gdy pęd lekkiego atomu (np. atomu sodu) w gazie o temperaturze  $T = 300 \text{ K}$  jest rzędu  $10^{-18} \text{ g} \cdot \text{cm/s}$ . W takim przypadku dopiero po 10000 rozpraszach fotonu na atomie można obniżyć temperaturę gazu do  $10^{-3} \text{ K}$ . Oczywiście gaz musi być oświetlany wzdłuż trzech wzajemnie prostopadłych osi i ponadto, np. wskutek odbicia, promieniowanie powinno rozchodzić się zarówno w dodatnim, jak i w ujemnym kierunku każdej z osi.

Znacznie łatwiej realizuje się chłodzenie, gdy mamy do czynienia z cząstkami już zlokalizowanymi, np. z jonami zmagazynowanymi w pułapce elektromagnetycznej. Jon uwięziony w pułapce porusza się np. wzdłuż osi  $x$  ruchem harmonicznym z prędkością  $v_x = v_0 \cos 2\pi\nu_{osc} t$ , gdzie  $\nu_{osc}$  oznacza częstość jego oscylacji. Rozkład częstości rezonansowych (częstości promieniowania, dla których jon w przypadku aktu absorpcji może ulec wzbudzeniu) dla oscylujących jonów nie jest ciągły, lecz składa się z szeregu pasm (zob. rysunek 2). Zmagazynowane w pułapce jony oświetlamy promieniowaniem laserowym o częstości  $\nu_L$  dostrojonej do częstości jednego z pasm bocznych,  $\nu_L = \nu_0 - l\nu_{osc}$ , gdzie  $l$  jest liczbą całkowitą. Jony, które pochłoną fotony, zostaną wzbudzone i będą następnie emitowały promieniowanie o średniej energii  $h\nu_0$ , czyli o takim widmie, jak pokazane na rysunku 2. Niedobór energii równy  $lh\nu_{osc}$ , powstający w każdym akcie rozpraszania, pokrywany jest kosztem energii oscylacji jonów i w konsekwencji zmniejsza się amplituda drgań. Stosując promieniowanie laserowe o natężeniu  $I_L = 10 \text{ mW/cm}^2$  można spodziewać się, że „ochłodzenie” jonu o masie porównywalnej z masą atomu sodu do temperatury  $T = 300 \text{ K}$  do temperatury  $T = 10^{-3} \text{ K}$  nastąpi w czasie rzędu 1ms.

W doświadczeniu wykonanym w Heidelbergu w roku 1978 zaobserwowano kilkanaście jonów  $\text{Ba}^+$  wytworzonych, zmagazynowanych i utrzymywanych przez szereg godzin w miniaturowej pułapce elektromagnetycznej (wewnętrzna średnica pułapki miała około 0,7 mm). Jony, na których następowo rozpraszanie rezonansowe światła, były widoczne w postaci chmury o średnicy około 0,05 mm. Rozmiary chmury świadczą zarówno o liczbie jonów, jak i o amplitudzie ich oscylacji, która z kolei zależy od temperatury jonów.

W tym samym laboratorium rok później udało się zaobserwować pojedynczy jon. Do pułapki odpompowanej początkowo do ciśnienia rzędu  $10^{-10} \text{ Torr}$  ( $1 \text{ Pa} = 0,0075 \text{ Torr}$ ) jednocześnie



Rys. 3

wprowadzano atomy Ba i elektrony o odpowiedniej energii, które zderzając się z atomami Ba jonizowały je. W ten sposób wytwarzano jeden lub dwa jony na minutę, które następnie chłodzono za pomocą promieniowania. Natężenie fluorescencji mierzone jako funkcja czasu wyraźnie wykazuje stopnie świadczące o zwiększeniu liczby jonów w pułapce lub o ich ucieczce (rysunek 3). Ostatecznie, pojedynczy jon był widoczny w postaci chmury o średnicy około  $2 \mu\text{m}$ . Odpowiada to temperaturze  $0,01 \text{ K}$ . Chmurę jonową można było obejrzeć dzięki użyciu mikroskopu o maksymalnym powiększeniu 200 razy oraz elektronicznego wzmacniacza obrazu. Wykonano szereg fotografii między innymi na kliszy Kodak 103 a-F, dla której stosowano czas ekspozycji równy 10 minut.

Naukowcy, którzy przeprowadzili opisane tu doświadczenia, twierdzą, że poprawiając w granicach możliwości parametry pułapki i lasera stosowanego do chłodzenia można osiągnąć minimalną temperaturę  $2 \cdot 10^{-5} \text{ K}$ .

Na zakończenie warto nadmienić, że przeprowadzono także pierwsze udane doświadczenia wykorzystujące ciśnienie wywierane przez fotony do zlokalizowania obojętnych elektrycznie atomów. Rolę pułapki odegrała stojąca fala elektromagnetyczna. Warto też zwrócić uwagę na to, że ciśnienie wywierane przez promieniowanie może być równie dobrze wykorzystane do grzania atomów. Jednakże właśnie zlokalizowanie pojedynczego jonu czy atomu i obserwacja jego oddziaływania z promieniowaniem daje fizykom nowe, ogromne możliwości poznania praw rządzących przyrodą.

## Ciągi rekurencyjne a szeregi potęgowe

Dr Jerzy RYLL

W artykule „Rzuc monetę raz jeszcze, czyli prawo arcusa sinusa” (*Delta* 10/1984) pojawił się ciąg  $p_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  spełniający zależność rekurencyjną

$$(1) \quad p_n = \sum_{k=0}^{n-1} p_k p_{n-1-k}; \quad p_0 = 1.$$

W dowodzie powyższego faktu istotne było przedstawienie  $p_n$  jako liczby elementów konkretnego zbioru i rozważania kombinatoryczne dały nam zarówno zależność rekurencyjną, jak też jawne wyrażenie na  $p_n$ .

Jak znaleźć jawny wzór na wyrazy ciągu zadanego rekurencyjnie? Zadanie takie jest na ogół dosyć trudne. Z ciągiem  $(p_n)$  nie poradzili sobie na przykład uczestnicy obozu przygotowawczego przed Międzynarodową Olimpiadą Matematyczną.

Spróbujmy znaleźć jawny wzór na wyrazy ciągu Fibonacciego, tzn. ciągu spełniającego zależność rekurencyjną

$$(2) \quad \varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + \varphi_n; \quad \varphi_0 = \varphi_1 = 1.$$

Określmy funkcję  $F$  jako sumę szeregu potęgowego o o współczynnikach  $\varphi_n$

$$(3) \quad F(t) = \varphi_0 + \varphi_1 t + \varphi_2 t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n t^n.$$

Znajdziemy teraz jawny wzór na funkcję  $F$

$$\begin{aligned} F(t) - t - 1 &= \sum_{n=2}^{\infty} \varphi_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n+2} t^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_n + \varphi_{n+1}) t^{n+2} = \\ &= t^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n t^n + t \left( \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n+1} t^{n+1} \right) = t^2 \cdot F(t) + t(F(t) - 1). \end{aligned}$$

Tak więc funkcja  $F$  spełnia równanie

$$F(t) - t - 1 = t^2 F(t) + t(F(t) - 1).$$

Jedyną taką funkcją jest (jak łatwo obliczyć)

$$F(t) = \frac{1}{1-t-t^2}.$$

Jak znaleźć współczynniki rozwinięcia funkcji  $F$ ? Zapiszmy ją trochę inaczej. Pierwiastkami trójmianu  $t^2 + t - 1$  są liczby

$$t_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{i} \quad t_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}. \quad \text{Tak więc}$$

$$F(t) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{t_2} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{t_2}} - \frac{1}{t_1} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{t_1}} \right).$$

Wystarczy teraz skorzystać ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego i

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{t_2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{t}{t_2} \right)^n - \frac{1}{t_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{t}{t_1} \right)^n \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left( \frac{t_1^{n+1} - t_2^{n+1}}{\sqrt{5} t_1^{n+1} \cdot t_2^{n+1}} \right), \end{aligned}$$

przy czym wzór ten ma sens dla  $|t| < \min(|t_1|, |t_2|)$ .

Z jednoznaczności rozwinięcia w szereg potęgowy mamy

$$\varphi_n = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1} \cdot \sqrt{5}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Funkcja może mieć tylko jedno rozwinięcie w szereg potęgowy (w otoczeniu 0).

$$\text{tzn. jeśli } f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n, \text{ to } a_n = b_n.$$

Ze zrozumiałych powodów funkcja  $F$  nazywa się funkcją tworzącą ciąg  $(\varphi_n)$ .

Oto nieco inny problem, który też można rozwiązać za pomocą funkcji tworzących. Jak szybko dąży do  $\infty$  ciąg  $a_n = \sum_{j=0}^n \binom{n+j}{2j}$ ?

Wystarczy znaleźć inny jawny wzór na  $a_n$ . Rozważmy dodatkowo

ciąg  $b_n = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+j}{2j+1}$ . Można sprawdzić, że

$$a_{n+1} = a_n + b_{n+1}, \quad a_0 = 1, b_0 = 0,$$

$$b_{n+1} = a_n + b_n.$$

Oznaczmy przez  $A$  i  $B$  funkcje tworzące ciągów  $(a_n)$  i  $(b_n)$ , to

znaczy  $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ ,  $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ . Z zależności

rekurencyjnej łatwo wynika, że funkcje  $A$  i  $B$  muszą spełniać układ równań

$$A(t) - 1 = t \cdot A(t) + B(t)$$

$$B(t) = t(A(t) + B(t)).$$

Rozwiązując ten układ otrzymujemy

$$A(t) = \frac{1-t}{1-3t+t^2}, \quad B(t) = \frac{t}{1-3t+t^2}.$$

Podobnie jak poprzednio, znajdując pierwiastki trójmianu  $t^2 - 3t + 1$  i korzystając ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego stwierdzamy, że

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left( \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left( \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \cdot t^n,$$

a więc wyrażenia w nawiasach kwadratowych są równe wyrazom

ciągu  $(a_n)$ . Ponieważ  $\left| \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right| < 1$ , więc ciąg  $(a_n)$  różni się od ciągu geometrycznego  $\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left( \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$  o ciąg zbieżny do 0.

Oczywiście przy bardziej skomplikowanych zależnościach rekurencyjnych funkcje tworzące i równania je wyznaczające też się komplikują. Potrzebna jest dodatkowa wiedza o szeregach potęgowych.

Wróćmy do ciągu  $(p_n)$  spełniającego zależność (1). Niech  $P$  będzie funkcją tworzącą. Mamy

$$P^2(t) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n p_k p_{n-k} \right) t^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1} t^n = P(t) \cdot t - 1.$$

Jeśli funkcje  $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$  i  $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ , to  $(f \cdot g)(t) =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) t^n$ . Można to wykazać mnożąc każdy wyraz rozwinięcia  $f$  przez każdy wyraz rozwinięcia  $g$  i grupując jednomiany tego samego stopnia. W przypadku szeregów potęgowych zbieżnych takie postępowanie jest dozwolone.

Rozwiązując równanie na funkcję  $P$  otrzymujemy  $P(t) =$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{t}.$$

I znów trzeba skorzystać z dodatkowej informacji:

$$(4) \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n + \dots$$

(gdzie symbol  $k!!$  oznacza iloczyn liczb niewiększych niż  $k$  i tej samej co  $k$  parzystości). Wzór powyższy jest prawdziwy dla  $|x| < 1$ .

Zauważmy, że dla  $n \geq 2$  mamy

$$\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} = \frac{(2n-2)!}{(2n-2)!!(2n)!!} = \frac{1}{2n} \frac{(2n-2)!}{[(2n-2)!!]^2} =$$

$$= \frac{1}{2n} \frac{(2n-2)!}{[2^{n-1}(n-1)!]^2} = \frac{1}{n} \cdot \binom{2n-2}{n-1} \cdot 2^{-2n+1}.$$

Wstawiając  $x = -4t$  do (4) i uwzględniając umowę  $\binom{0}{0} = 1$  otrzymujemy

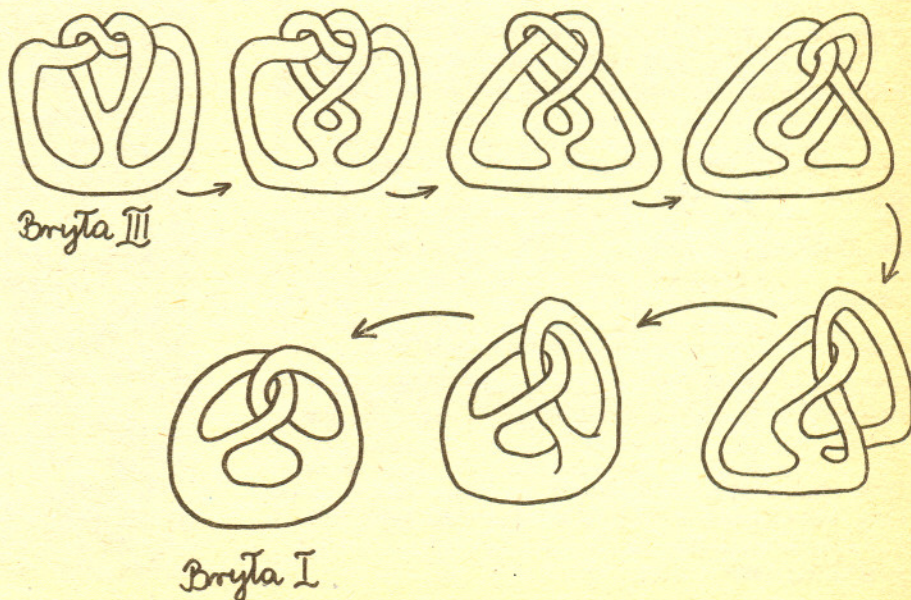
$$\sqrt{1-4t} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \binom{2n-2}{n-1} \cdot 2^{-2n+1} \cdot (-1)^n \cdot 4^n \cdot t^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n} \binom{2n-2}{n-1} t^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n+1} \binom{2n}{n} t^{n+1}.$$

$$\text{Tak więc } P(t) = \frac{1 - \sqrt{1-4t}}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} t^n.$$

(Wzór zachodzi dla  $|t| < \frac{1}{4}$ ). Tak więc otrzymaliśmy znany nam jawny wzór na ciąg  $(p_n)$ . Zauważmy, że drugie rozwiązanie

$P(t) = \frac{1 + \sqrt{1-4t}}{t}$  nie rozwija się w szereg potęgowy w otoczeniu 0, a więc nie bierzemy go pod uwagę.



#### BRYŁY

Na konkurs "Małej Delfy" nadesłano 34 dobre rozwiązania. Spośród nich wybraliśmy pracę

Marii Boryczki z Radomia i ją właśnie reprodukuje. Spośród wszystkich autorów dobrych prac nagrody książkowe wylosowały

Anna Stolarczyk ze Szczecina,  
Alicja Futrega z Morąga,  
Katarzyna Tempczyk z Warszawy.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań z numeru 11/1984

Zbigniew Bartold	- Gdynia	48,97pkt
Ryszard Pagacz	- Zawadzkie	48,48pkt
Tomasz Rawlik	- Gliwice	47,27pkt
Kazimierz Serbin	- Sanok	46,79pkt
Ryszard Mazurek	- Wrocław	44,97pkt
Piotr Figurny	- Lubartów	43,78pkt
Jerzy Mikuta	- Zielona G.	43,53pkt
Krystyna Witek	- Ostrów Maz.	41,86pkt
Współczynniki trudności zadań 97, 98, 99:		
	1,77	2,94    1,85

W Klubie 44: panowie Z. Bartold, R. Pagacz,  
T. Rawlik po raz drugi; K. Serbin,  
R. Mazurek po raz pierwszy.

## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1985.

## Rozwiązania zadań z numeru 1/1985

Przypominamy treść zadań:

103. Wielokąt foremny  $W$  o nieparzystej liczbie boków jest wpisany w okrąg, a  $P$  jest dowolnym punktem tego okręgu. Dowiedź, że można podzielić zbiór wierzchołków wielokąta  $W$  na dwa rozłączne podzbiory  $A$  i  $B$  tak, by suma odległości punktu  $P$  od punktów zbioru  $A$  była równa sumie odległości punktu  $P$  od punktów zbioru  $B$ .

104. Wyznaczyć część całkowitą liczby  $\sum_{k=1}^{10^6} \frac{1}{\sqrt{k}}$

103. Gdy  $P$  jest jednym z wierzchołków  $W$ , teza jest oczywista. Załóżmy więc, że  $P$  nie jest wierzchołkiem i ponumerujmy wierzchołki  $W$  kolejno:  $C_1, \dots, C_n$  tak, by punkt  $P$  leżał na łuku  $C_n C_1$ . Pokażemy, że zbiory  $A = \{C_1, C_3, \dots, C_n\}$  i  $B = \{C_2, C_4, \dots, C_{n-1}\}$  spełniają warunek postawiony w zadaniu. Oznaczmy przez  $a$  długość boku, a przez  $b$  długość najkrótszej przekątnej wielokąta  $W$  i przyjmijmy  $x_i = PC_i$ ,  $u = x_1 + x_3 + \dots + x_n$ ,  $v = x_2 + x_4 + \dots + x_{n-1}$ . Należy dowiedzieć, że  $u = v$ . Stosując twierdzenie Ptolemeusza do czworokątów  $PC_{i-1}C_iC_{i+1}$ ,  $1 < i < n$ , oraz do czworokątów  $PC_1C_2C_n$ ,  $PC_1C_{n-1}C_n$  dostajemy układ równości

$$\begin{aligned} bx_i &= ax_{i-1} + ax_{i+1}, & 1 < i < n, \\ bx_1 &= ax_2 - ax_n, \\ bx_n &= ax_{n-1} - ax_1. \end{aligned}$$

Dodajemy stronami te równości, w których po lewej stronie występuje  $x$  z nieparzystym wskaźnikiem, a następnie dodajemy stronami równości pozostałe. W wyniku sumowania otrzymujemy odpowiednio

$$bu = 2av - ax_1 - ax_n \quad \text{oraz} \quad bv = 2au - ax_1 - ax_n,$$

skąd  $(2a+b)u = (2a+b)v$ , czyli  $u = v$ .

104. Oznaczmy przez  $s_n$  sumę  $\sum_{k=1}^n 1/\sqrt{k}$ . W łatwej do sprawdzenia nierówności

$$2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} < 1/\sqrt{k} < 2\sqrt{k} - 2\sqrt{k-1}$$

przyjmujemy kolejno  $k = 2, 3, \dots, n$ , sumujemy stronami otrzymane nierówności i jeszcze dodajemy do wszystkich członów liczbę 1.

Dostajemy:  $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1 < s_n < 2\sqrt{n} - 1$ . Lewa strona ostatniej nierówności jest większa od  $2\sqrt{n} - 2$ . Jeśli więc  $n$  jest pełnym kwadratem, to  $[s_n] = 2\sqrt{n} - 2$ . Dla  $n = 10^6$  mamy wynik 1998.

## Rozwiązania zadań z numeru 1/1985

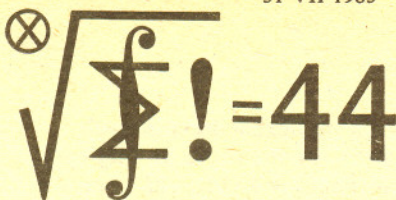
Przypominamy treść zadań

1. Znaleźć opór między punktami  $A$  i  $B$  nieskończonej, płaskiej sieci o kwadratowych oczkach, złożonej z jednakowych oporów  $r = 100\Omega$ , która została przerwana między tymi punktami.

2. Wyjaśnić mechanizm powstawania dźwięku podczas wirowania trzymanej za jeden koniec plastikowej, karbowanej rury.

1. Oznaczmy szukany opór zastępczy przez  $r_{AB}$ . Po połączeniu punktów  $A$  i  $B$  oporem  $r$  opór zastępczy między punktami  $A$  i  $B$  sieci „kompletnej” wyniesie  $r'_{AB} = \frac{r \cdot r_{AB}}{r + r_{AB}}$  (połączenie równoległe oporów). Zastosujemy teraz następujące rozumowanie zakładając, że do  $A$  przyłożony jest dodatni potencjał względem  $B$ . Jeśli oba punkty byłyby nieskończenie odległe, prąd  $i$  wypływający z  $A$  rozkładałby się równomiernie na cztery najbliższe oporniki — po  $\frac{1}{4} i$ , podobnie byłoby z prądem dopływającym z sieci do  $B$ . Po zbliżeniu punktów  $A$  i  $B$  płynące w sieci prądy stanowią sumę prądów płynących od  $A$  oraz do  $B$  w przypadku powyższym. Wobec tego przez opór  $r$  łączący  $A$  i  $B$  będzie płynął prąd  $\frac{1}{2} i$ . Zatem napięcie między tymi punktami będzie wynosiło  $U_{AB} = \frac{1}{2} ri$ . Stąd wyznaczamy  $r'_{AB} = \frac{U_{AB}}{i} = \frac{1}{2} r$ . Podstawiając to do pierwszego równania uzyskujemy  $r_{AB} = r = 100\Omega$ .

2. Przy wirującym końcu rury ciśnienie powietrza obniża się na skutek szybkiego ruchu (zjawisko Bernoulliego), co powoduje przepływ powietrza wewnątrz rury. Dzięki karbowaniom powietrze to zostaje pobudzone do drgań, których częstość zależy od odległości między kolejnymi karbowaniami i od prędkości strumienia powietrza. Z pewnego zakresu generowanych częstości wzmocnieniu ulega częstość rezonansowa rury otwartej na obu końcach, która jest też słyszalna. Przy zwiększeniu szybkości wirowania zwiększa się szybkość przepływu powietrza wewnątrz rury i częstości generowanych drgań ulegają podwyższeniu. Dzięki temu staje się możliwe pobudzenie wyższej częstości rezonansowej rury, co się objawia skokowym przejściem do wyższego tonu.



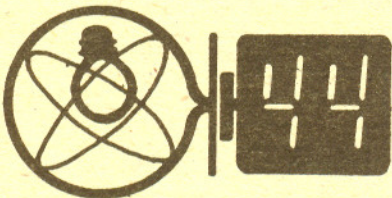
Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

111. Czy istnieje w przestrzeni ograniczony zbiór wypukły  $W$  o następujących własnościach:
- powierzchnia (brzeg) zbioru  $W$  ma w każdym punkcie płaszczyznę styczną;
  - przez każdy punkt zbioru  $W$  przechodzi odcinek zawarty w  $W$ , o długości równej średnicy zbioru  $W$ ;
  - $W$  nie jest kulą?

112. Wykazać, że równanie  $x^n + y^n = z^{2n+1}$  ma dla każdej liczby naturalnej  $n$  nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych  $x, y, z$ .

Zadanie 112 przysłał pan Werner Mnich z Opola.

#### Zadania z fizyki nr 9, 10



Redaguje dr Andrzej NADOLNY

9. Znaleźć ciśnienie pary nasyconej (tzn. pozostającej w równowadze termodynamicznej z cieczą) nad powierzchnią cieczy, która zawiera rozpuszczoną substancję nielotną w ilości  $x$  moli na 1 mol cieczy ( $x \ll 1$ ). Ciśnienie pary nasyconej nad czystą cieczą wynosi w tej samej temperaturze  $p_0$ .

10. W książkach fantastyczno-naukowych można niekiedy spotkać opisy bliźniaczej planety Ziemi, która porusza się po tej samej, co Ziemia, orbicie, lecz z przeciwległej strony Słońca. Jakie byłyby parametry optymalnej orbity pojazdu kosmicznego wysłanego z Ziemi na tę planetę? Zakładamy, że orbita Ziemi jest kołowa.

Zadanie 9 przysłał pan Wojciech Wałęcki z Warszawy

## Mapa nieba sprzed 2000 lat

*Jestem wszystkim, co jest, co było i co będzie; zaden śmiertelnik nie podniósł mojej zasłony* — napis na świątyni w Sais.

Wiedza astronomiczna mieszkańców starożytnego Egiptu powiązana ściśle ze światem magii i kultu nadal pozostaje okryta zasłoną tajemniczości. W przeciwieństwie do Babilonii i Chin nie znaleziono dotychczas egipskich, systematycznie prowadzonych obserwacji planet czy zaćmień Słońca. Odkryto natomiast płaskorzeźby i malowidła o tematyce astronomicznej, pokrywające ściany świątyń i grobowców. Do najciekawszych zabytków tego typu należy przedstawiony na ilustracji obok słynny zodiak z Dendery odkryty w maju 1799 roku przez żołnierzy francuskich uczestniczących w wyprawie Napoleona I do Egiptu. Ten kamienny krąg o średnicy ponad 1,5 metra znaleziono w doskonale zachowanej świątyni Hathor w Denderze, na zachodnim brzegu Nilu, około 400 kilometrów na południe od Kairu. Budowę tej świątyni rozpoczęto w okresie rządów Ptolemeuszów przypuszczalnie około 125 roku p.n.e., a zakończono w czasie panowania cesarza Tyberiusza w 34 roku naszej ery. Tak więc kamienny krąg wypełniony figurami bogów i zwierząt powstał mniej więcej 2000 lat temu.

Z łatwością odszukamy na nim dwanaście tradycyjnych znaków zodiaku, które nie występują na wcześniejszych zabytkach egipskich i w związku z tym przypisuje się pochodzenie tych znaków Babilończykom. Pomędzy figurami zodiaku niemiecki badacz Heinrich Brugsch w ubiegłym stuleciu odszukał symbole Merkurego (powyżej Raka), Wenus (pomiędzy Rybami i Wodnikiem), Marsa (ponad Koziorożcem), Jowisza (tuż pod Rakiem) i Saturna (pomiędzy Panną i Wagą). Symbole planet umieszczono prawdopodobnie w miejscach ich największych wpływów zgodnie z ówczesnymi wyobrażeniami astrologicznymi. W centrum kręgu znajdujemy gwiazdozbiory okołobiegunowe przedstawione w postaci hipopotama i udźca wołowego. Symbole te malowano również na ścianach grobowców począwszy od połowy II tysiąclecia przed naszą erą aż do czasów rzymskich. Poniżej Byka i Bliźniąt umieszczono sylwetkę Ozyrysa odpowiadającą konstelacji Oriona oraz zwierzęcą postać bogini Izdy (Izisz) przedstawiającą Syriusza — najjaśniejszą gwiazdę nocnego nieba, której pojawienie się tuż przed wschodem Słońca zwiastowało wylew Nilu i określało początek egipskiego nowego roku. Znaczenie pozostałych symboli nie zostało do końca wyjaśnione, lecz to, co wiemy, wystarczy do stwierdzenia, że zodiak z Dendery — eksponowany obecnie w Luwrze — jest kamienną mapą nieba, na której oprócz gwiazdozbiorów zaznaczono także położenia planet, a całość opisano znakami astrologicznymi i religijnymi.

mgr Krzysztof WŁODARCZYK

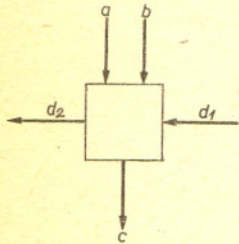
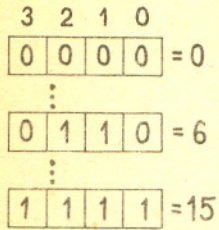




W komputerach używa się zwykle do zapisu liczby 8, 16, 32 lub 64 miejsc. Przy  $t$  miejscach możemy zapisać  $2^t$  różnych liczb.

# Komputery i liczby

Mgr Teresa PRZYTYCKA



Rys. 1. Układ elementarny dodaje 3 liczby  $a, b, d_1$  równe 0 lub 1 i otrzymany wynik podaje w postaci dwóch cyfr  $d_2$  i  $c$ , tzn.  $a + b + d_1 = 2d_2 + c$ .

$$r(5) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 5$$

$$r(-3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -3$$

$$r(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ lub } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4 + 2 = 6

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

-3 + 4 = -7

$$r(-3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r(-7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ lub } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 + 2 = 5

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

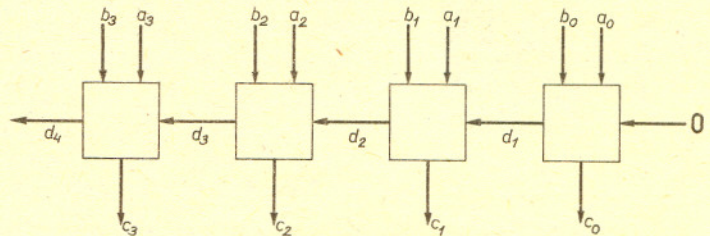
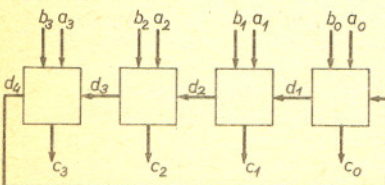
-3 + 2 = -1

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad i \quad d_4 = 1$$

3 + -2 = 0

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad i \quad d_4 = 1$$

-3 + -2 = -6



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad i \quad d_4 = 0$$

6 + 5 = 11

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad i \quad d_4 = 1$$

10 + 7 = 1

Rys. 2

Czasem jednak otrzymujemy zły wynik. Następuje to wtedy, gdy suma przekracza 15. Stan ten nazywany jest przepełnieniem. Ale wtedy  $d_4 = 1$  i w ten sposób przepełnienie można wykryć.

Teraz chcemy kodować również liczby ujemne. Najprostszy sposób to zapisanie znaku liczby na jednym z miejsc, np. miejscu 3, a na pozostałych trzech wartości bezwzględnej liczby:

$$r_1(x) = \begin{cases} 0x_B & \text{dla } x \geq 0 \\ 1|x|_B & \text{dla } x < 0, \end{cases}$$

gdzie  $x_B$  oznacza zapis dwójkowy liczby nieujemnej  $x$ . Możemy tak zapisywać liczby od  $-7$  do  $+7$ .

Niestety, dodając tak zapisane liczby sumatorem z rysunku 2 możemy otrzymać bezsensowny wynik. (Dodawanie liczb dodatnich o sumie mniejszej niż 8 wykonywane jest nadal poprawnie.)

Zakodujemy liczby inaczej

$$r_2(x) = \begin{cases} 0x_B & \text{dla } x \geq 0 \\ 1|x|_B & \text{dla } x < 0, \end{cases}$$

gdzie  $\bar{x}_B$  oznacza zmianę wszystkich cyfr na inne (tzn. 0 na 1 i 1 na 0) i spróbujemy je dodawać na naszym sumatorze.

Zauważmy, że błędne wyniki są o 1 za małe i wtedy  $d_4 = 1$ . Nie jest to przypadek. Jest tak zawsze, gdy obie liczby są ujemne lub gdy ujemna ma mniejszą wartość bezwzględną. Można zatem nasz sumator poprawić. Najpierw dodaje on liczby  $a$  i  $b$ , następnie do wyniku dodaje liczbę  $d_4$  (0 lub 1). Sprawdź Czytelniku, że tak poprawiony sumator dodaje prawidłowo (dowód w numerze). Przy tym sposobie kodowania przepełnienie wykrywamy badając, czy  $d_4 = d_3$ .

Kodowanie  $r_2$ , podobnie jak  $r_1$ , ma wadę. 0 ma dwa zapisy. Okazuje się, że na te „dwa 0” też jest lekarstwo. Kod  $r_3$  nie ma tej wady:

$$r_3(x) = \begin{cases} 0x_B & \text{dla } x \geq 0 \\ 1|x|_B + 1 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Liczby zapisane tym kodem możemy dodawać pierwszym z sumatorów otrzymując prawidłowe wyniki. Kodem  $r_3$  można zapisać liczby od  $-8$  do  $7$ .

Trzy główne majowe gwiazdozbiory to Panna, Warkocz Bereniki i Psy Gończe. Mimo że nasza mapa zniekształca nieco proporcje i tak widać, że Panna jest bardzo dużym gwiazdozbiorem. Ponadto Wąż Wodny, który pojawił się w sektorze marcowym, ciągnie się jeszcze (jak to wąż) przez maj i zakończy się dopiero w czerwcu. Te dwa gwiazdozbiory są największymi konstelacjami na niebie. Zajmują po około 3% powierzchni sfery niebieskiej, podczas gdy średnio na jedną konstelację przypada po około 1% — jest ich 88.

Najmniejszymi gwiazdozbiorami są: niewidoczny u nas Krzyż Południa (0,16%) oraz Żrebię (0,17%) i Strzała (0,19%). Są one mniej więcej dwukrotnie mniejsze niż Kruk widoczny na majowej mapce.

Trzy gwiazdozbiory wspomniane na początku, gdy patrzymy na nie gołym okiem, niczym się nie wyróżniają. W Pannie widocznych jest 110 gwiazd i nie obserwujemy żadnych innych obiektów. Jednak użycie nawet niewielkiego teleskopu pozwala na odkrycie, że pojawia się na tym obszarze nowy składnik — galaktyki. Jest ich znacznie więcej, niż spodziewalibyśmy się znając średnią ich gęstość. Znajdujemy tu 3 galaktyki jaśniejsze niż  $9^m$ , ale już 34 jaśniejsze niż  $11^m$  i prawie 300 jaśniejszych niż  $13^m$ . Posuwając się w kierunku jeszcze mniejszych jasności stwierdzamy, że prawie każdy obiekt obserwowany przez nas jest galaktyką.

Są to wszystko członkinie ogromnej gromady o nazwie *Virgo* (Panna). Znanych jest obecnie kilka tysięcy galaktyk wchodzących w jej skład. Spośród nich ponad 100 można dostrzec dobrym teleskopem amatorskim o średnicy 20 cm.

Jądro gromady o rozmiarach około  $12^\circ \times 10^\circ$  znajduje się na granicy Panny i Warkocza Bereniki, w pobliżu gwiazdy  $\rho$  Panny. Obecnie wydaje się, że aglomeracja ta jest znacznie większa niż dotychczas przypuszczano: Gromada Panny jest jedynie centralną częścią supergromady (gromady gromad), w której skład wchodzi wiele tego rodzaju skupisk, m.in. Grupa Lokalna — system kilkunastu małych galaktyk obiegających układ podwójny Droga Mleczna — Mgławica Andromedy.