

Dnia 10 maja 1986 roku

zmarł

prof. dr Edward Otto

wybitny geometra

wychowawca wielu pokoleń polskich inżynierów

autor "Deltę"

SPIS TREŚCI

NUMERU 7 (151)

| | |
|---|---------|
| Kwantowy efekt Halla — Nobel 1985 <i>dr hab. Tomasz Dietl</i> | str. 1 |
| Czytelnicy proponują | str. 3 |
| O pewnym algorytmie i związanym z nim zadaniu geometrycznym <i>dr Jerzy Jaromczyk, Grzegorz Świątek</i> | str. 4 |
| Mała Delta | str. 8 |
| LIDAR <i>doc. dr Krzysztof Ernst</i> | str. 10 |
| Ukryta masa we Wszechświecie <i>mgr Jacek Chołoniewski</i> | str. 12 |
| Jak Kepler stwierdził eliptyczność orbit planet | str. 13 |
| Zadania | str. 13 |
| Różne geometryczne pochodne | str. 14 |
| Kątek olimpijski | str. 15 |
| Klub 44 | str. 16 |
| Patrzy w niebo | str. 17 |

W następnym numerze:
Kryształ

„Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny
dr Maciej Bryński
dr Bogdan Cichoński
dr Alicja Derkowska
doc. dr Jan A. Gaj
doc. dr Bolesław Gleichgewicht
doc. dr Tomasz Hofmoki
doc. dr Tadeusz Jarzembowski
doc. dr Marcin Kubiak
mgr Andrzej Mąkowski
dr Zbigniew Płochocki — v-przewodniczący
dr Jan Rempała
prof. dr Konrad Rudnicki
prof. dr Grzegorz SitarSKI
prof. dr Józef I. Smak
prof. dr Kazimierz Stępień
prof. dr Mieczysław Subotowicz
dr Michał Szurek
doc. dr Andrzej Szymacha
doc. dr Aniela Wojska
prof. dr Andrzej Woszczyk
prof. dr Wojciech Zakowski —
przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga
mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.
dr hab. Marek Kordos — red. nac.
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.
mgr inż. arch. Mariola Łotysz
dr Andrzej Majhofer
mgr Anna Rudnik
dr Jerzy Ryll
mgr Joanna Udalska
mgr Jan Zalewski

Adres Redakcji
ul. Koszykowa 6a
00-564 Warszawa
tel. 21-19-85

Krajowe Wydawnictwo Czasopism
RSW „Prasa—Książka—Ruch”
ul. Noakowskiego 14
00-666 Warszawa
tel. centr. 25-72-91 do 93
Biuro Reklam i Propagandy
tel. 25-56-26
Nakład 25 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.;
2,50 ark. druk;
papier offsetowy V kl. 70 g.
Wydrukowano w Drukarni
im. Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 2323/12/86. P-33.

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty kwartalnej zł 105,— półrocznej zł 210,— rocznej zł 420,—

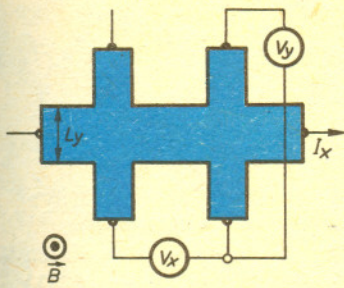
- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
- dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
— osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
— osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
- Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleconiodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:

- do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,
- do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 35,—

dr hab. Tomasz DIETL



Rys. 1

16 października 1985 r. Komitet Nagród Nobla Szwedzkiej Królewskiej Akademii Nauk poinformował o przyznaniu nagrody Nobla czterdziestodwuletniemu zachodnioniemieckiemu fizykowi Klausowi von Klitzingowi. Nagrodę przyznano za „odkrycie kwantowego efektu Halla”. Odkrycie nastąpiło w 1980 r., a więc sto lat po odkryciu przez amerykańskiego fizyka Edwina Herberta Halla „klasycznego” efektu Halla. W 1879 r. Hall stwierdził, że przyłożenie pola magnetycznego do materiału, przez który płynie prąd elektryczny, prowadzi do pojawienia się w przewodniku pola elektrycznego (napięcia) o kierunku prostopadłym do kierunku pola magnetycznego i prądu elektrycznego (rys. 1). Klasyczny efekt Halla stanowi od wielu lat podstawową metodę charakteryzacji przewodników, gdyż, jak się okazuje, opór Halla R_{xy} (stosunek napięcia U_y do prądu I_x) pozwala na wyznaczenie gęstości nośników prądu elektrycznego.

Klaus von Klitzing wykazał doświadczalnie, że w pewnych warunkach opór Halla nie zależy od temperatury i indukcji pola magnetycznego, a jego odwrotność jest wielokrotnością e^2/h , gdzie h jest stałą Plancka, a e ładunkiem elektronu!

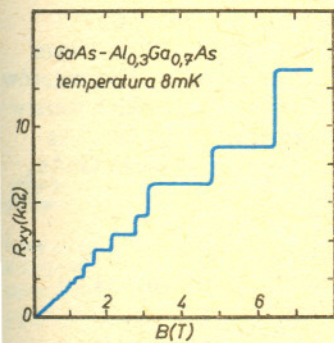
Przykładową zależność R_{xy} od pola magnetycznego B w heterostrukturze GaAs — $Al_{0,3}Ga_{0,7}As$ przedstawia rysunek 2. W słabych polach magnetycznych R_{xy} rośnie liniowo z wartością B . W obszarze tym mamy do czynienia z klasycznym efektem Halla. Stosunek R_{xy}/B wyznacza koncentrację elektronów w próbce. W odpowiednio silnych polach magnetycznych i niskich temperaturach na wykresie pojawiają się charakterystyczne stopnie. W obszarach plateau (stopni) $R_{xy} = h/e^2 i \approx 26k\Omega/i$, gdzie $i = 2, 3, 4, \dots$

Jakie mogą być praktyczne zastosowania efektu von Klitzinga? Po pierwsze, kwantowy efekt Halla może służyć do zbudowania „atomowego” wzorca jednostki oporu elektrycznego. Ponadto przyjmując, że prędkość światła jest znana z innych pomiarów, e^2/h wyznacza bezwymiarową stałą struktury subtelnej α . Jak wiadomo, stała α opisuje „siłę” oddziaływań elektromagnetycznych. Jej dokładna znajomość pozwala więc na precyzyjne porównanie przewidywań elektrodynamiki kwantowej i wyników doświadczalnych.

Kwantowy efekt Halla obserwuje się w tzw. układach dwuwymiarowych, których budowę omówimy w dalszej części artykułu. Od połowy lat siedemdziesiątych istniały przesłanki teoretyczne i dane doświadczalne sugerujące, że w układach dwuwymiarowych znajdujących się w ekstremalnie niskich temperaturach i silnych polach magnetycznych opór Halla może przyjmować wartości skwantowane w jednostkach h/e^2 . Spodziewano się jednak, że podobnie jak w wielu analogicznych sytuacjach w fizyce ciała stałego, na wyniki doświadczalne będzie wpływać szereg niekontrolowanych efektów (kontakty, defekty struktury krystalicznej itp.). Ponadto istniejące teorie zostały zbudowane przy wielu założeniach upraszczających. W związku z tym nie oczekiwano zgodności teorii i wyników doświadczalnych lepszej od, powiedzmy, 10%. Wielkim osiągnięciem Klause von Klitzinga było podjęcie precyzyjnych pomiarów oporu Halla R_{xy} (w myśl zasady, że należy prowadzić pomiary tam, gdzie teoretycy nie oczekują niczego interesującego). Doświadczenia von Klitzinga wykazały, że $R_{xy} = h/e^2 i$, dla naturalnego i , z dokładnością do błędu eksperymentalnego, który w pierwszych pomiarach wynosił 10^{-3} %. Późniejsze doświadczenia prowadzone z dokładnością $2 \cdot 10^{-6}$ % potwierdziły wyniki von Klitzinga. Równocześnie rzesze teoretyków przystąpiły do teoretycznego uzasadnienia wyniku doświadczalnego oraz do znalezienia poprawek do wyrażenia $R_{xy} = h/e^2 i$. Jak dotychczas, nie ma powszechnie akceptowanego modelu teoretycznego. Kwantowy efekt Halla, a także odkryty później ułamkowy kwantowy efekt Halla ($i = 1/3, 2/3, 1/5, 2/5, \dots$) stanowią poligon współczesnych teorii podejmujących próbę opisu zjawisk przenoszenia ładunku elektrycznego przez układ wielu oddziaływujących elektronów w obecności pola magnetycznego i losowo rozmieszczonych centrów rozpraszających (źródłem tych centrów są domieszki i defekty istniejące w każdym realnym materiale).

Heterostruktura — złącze zbudowane z dwóch różnych materiałów z reguły o różnej wartości przerwy energii wzbronionych.

$Al_{0,3}Ga_{0,7}As$ oznacza materiał półprzewodnikowy o strukturze krystalicznej takiej jak związek GaAs, w którym 30% atomów Ga zastąpionych jest przez atomy Al. Atomy galu i glinu wymieszane są w sieci w sposób przypadkowy.



Rys. 2



Odkrycie kwantowego efektu Halla jest także sukcesem tych fizyków i inżynierów, którzy pracują nad wytwarzaniem silnych pól magnetycznych i niskich temperatur oraz zajmują się produkcją wysokiej jakości materiałów półprzewodnikowych. Doświadczalne badanie zjawiska prowadzi się w stacjonarnych polach magnetycznych około $5 \cdot 10^5$ razy silniejszych od pola ziemskiego i w temperaturach często zaledwie kilku tysięcznych części kelwina. Produkcja półprzewodników o wysokiej czystości wymagała opanowania m.in. techniki wytwarzania „próżni” o ciśnieniu resztkowym rzędu 10^{-14} ciśnienia atmosferycznego.

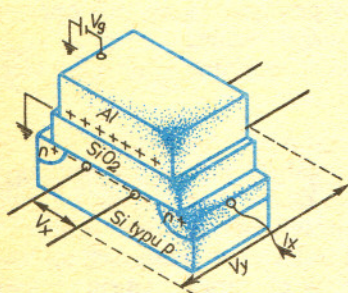
Układy dwuwymiarowe

Pierwsze doświadczenia dotyczące kwantowego efektu Halla prowadzone były w tranzystorach polowych z izolowaną bramką typu MOS-FET. Tranzystory takie stanowią podstawowy element układów o dużej skali integracji. W typowym kalkulatorze lub zegarku elektronicznym jest ich około 5 tysięcy! Schemat budowy tranzystora przedstawia rysunek 3. Układ ten możemy traktować jako kondensator, którego jedną z okładek stanowi metal, a drugą wysokooporowy krzem typu p. Między okładkami znajduje się dielektryk SiO_2 , który wytwarza się przez utlenienie powierzchni krzemu. Przyłożenie napięcia V_g do kondensatora prowadzi do pojawienia się przy powierzchni półprzewodnika ładunku $Q = C \cdot V_g$, gdzie C jest pojemnością kondensatora. Elektrony przypowierzchniowe mogą się poruszać swobodnie jedynie w płaszczyźnie międzypowierzchniowej Si-SiO_2 i w tym sensie stanowią układ dwuwymiarowy (ruch w kierunku prostopadłym do międzypowierzchni uniemożliwia napięcie V_g). Zależność energii elektronu od pędu ma więc w układach dwuwymiarowych postać

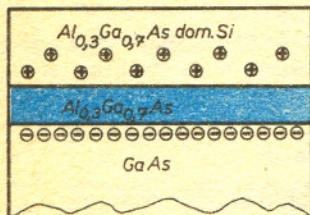
$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m}.$$

W badaniach kwantowego efektu Halla interesuje nas iloraz napięcia U_y do prądu I_x jako funkcja pola magnetycznego prostopadłego do międzypowierzchni (rys. 3).

Drugi układ półprzewodnikowy, który omówimy, ma jak dotąd mniejsze zastosowania praktyczne, ale wydaje się, że w przyszłości będzie podstawowym elementem urządzeń telekomunikacji światłowodowej oraz szybkich komputerów. Typowa struktura GaAs—AlGaAs, bo o niej mowa, składa się z cienkich warstw czystego GaAs i $\text{Al}_{0,3}\text{Ga}_{0,7}\text{As}$ oraz domieszkowanego krzemem $\text{Al}_{0,3}\text{Ga}_{0,7}\text{As}$ nałożonych metodą wiązek molekularnych na podłoże z półizolacyjnego GaAs (urządzenie do laboratoryjnej produkcji takich struktur, zwanych heterostrukturami, kosztuje około miliona dolarów). Ponieważ pasmo przewodnictwa GaAs leży niżej niż w $\text{Al}_{0,3}\text{Ga}_{0,7}\text{As}$, elektrony z domieszek (donorów) krzemowych w $\text{Al}_{0,3}\text{Ga}_{0,7}\text{As}$ domieszkowanego Si przechodzą do GaAs (rys. 4). I tutaj elektrony tworzą układ dwuwymiarowy, gdyż przyciąganie elektrostatyczne przez dodatnie donory uniemożliwia ruch w kierunku prostopadłym do międzypowierzchni GaAs-AlGaAs.



Rys. 3



Rys. 4

Obszar w pobliżu granicy między dwoma różnymi materiałami nazywamy międzypowierzchnią. W wielu przypadkach w pobliżu takiej granicy własności obu materiałów ulegają zmianom ze względu na możliwość występowania defektów struktury krystalicznej.



O fizyce klasycznego i kwantowego efektu Halla

Przypuśćmy, że przez przewodnik o jednorodnym przekroju i długości L_x płynie prąd elektryczny I_x (rys. 1 i 3). Oczywiście I_x jest tym większe, im większa jest średnia prędkość elektronów v oraz ich liczba N , $I_x = evN/L_x$ (Czytelnik może podjąć próbę wyprowadzenia tego wzoru samodzielnie). Przyłożmy teraz pole magnetyczne B o kierunku prostopadłym do powierzchni naszej próbki. Na elektrony zaczyna działać siła Lorentza $F = eE + e(v \times B)$, gdzie E jest polem elektrycznym w przewodniku. Siła Lorentza powoduje przepływ ładunku w kierunku prostopadłym do kierunku pola magnetycznego i prądu elektrycznego (zjawisko to jest wykorzystywane w niektórych oscyloskopach do odchylenia wiązki elektronów). Prowadzi to do gromadzenia się ładunku na ściankach próbki. Ładunki te wytwarzają pole elektryczne E_y , które zaczyna kompensować składową magnetyczną siły Lorentza i osłabiać przepływ nośników w kierunku y .



Warunki stacjonarne ustalą się, gdy $F_y = 0$, a więc gdy $E_y = -vB$. Stąd pamiętając, że $E_y = -V_y/L_y$, otrzymujemy

$$(1) \quad R_{xy} = \frac{V_y}{I_x} = \frac{BL_x L_y}{eN}$$

Równanie to stanowi istotę klasycznego efektu Halla. Jest ono spełnione zarówno w przypadku, gdy elektrony znajdują się w całej objętości próbki, jak również gdy występują w cienkiej ($d \approx 10^{-8} \text{m}$) warstwie przy międzypowierzchni.

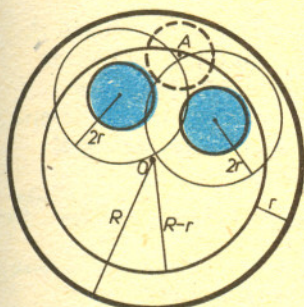
Jak powyższy klasyczny obraz modyfikuje mechanika kwantowa? Lew Landau wykazał w 1930 r., że pole magnetyczne „kwantuje” ruch elektronów w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku pola magnetycznego. W przypadku dwuwymiarowym oznacza to, że energia elektronów może przyjmować tylko dyskretne wartości E_i (w przypadku trójwymiarowym $E = E_i + p_z^2/2m$). Stwierdził on także, że odległość między poziomami E_i (nazywamy je obecnie poziomami Landaua) jest proporcjonalna do indukcji pola magnetycznego. Udowodnił wreszcie, że na każdym poziomie Landaua może znajdować się co najwyżej $eBL_x L_y/h$ elektronów. W odpowiednio niskiej temperaturze elektrony zapełniają tylko najniższe poziomy. Liczbę zapełnionych poziomów określa wtedy wzór $\nu = hN/eBL_x L_y$. W polach magnetycznych, w których zapełnionych jest całkowicie i poziomów, a pozostałe są puste, otrzymujemy

$$(2) \quad R_{xy} = \frac{BL_x L_y}{eN} = \frac{h}{e^2 i}$$

Wydaje się więc, że nasz prosty model całkowicie tłumaczy kwantowy efekt Halla! Gdzie więc te kłopoty fizyków-teoretyków, o których wspominaliśmy? Chwila zastanowienia wystarczy jednak, by stwierdzić, że nasze rozumowanie przewiduje „skwantowane” wartości R_{xy} tylko dla dyskretnej wartości pól magnetycznych $B_i = hN/ieL_x L_y$. W doświadczeniu natomiast obserwuje się spełnienie równania (2) w szerokim zakresie pól magnetycznych (rys. 2). Większość fizyków uważa, że występowanie stopni związane jest z defektami (domieszkami), które istnieją w każdej próbce. Jeśli jednak defekty mają znaczenie, to czemu równanie (2) wyprowadzone przy ich zaniedbaniu jest spełnione? Intuicyjnie możemy to tłumaczyć tym, że obszary geometryczne próbki, w których istnieje silny potencjał elektrostatyczny wytworzony przez defekt, są „omijane” przez elektrony. Prowadzi to do zmniejszenia efektywnej powierzchni próbki. Nie wpływa to jednak na równanie (2), gdyż nie zawiera ono żadnych wymiarów geometrycznych.



Rozwiązanie zadania M 441. Suma pól n kół o promieniu r jest mniejsza od pola dużego koła. Stąd $nr^2 < R^2$, czyli $\sqrt{n} < \frac{R}{r}$. Z drugiej strony, rozpatrzmy koła o promieniu $2r$ i o tych samych środkach.



Muszą one pokrywać pole większe niż pole koła o promieniu $R-r$ środka O — inaczej dałoby się umieścić nowe koło o promieniu r . Zatem $n \cdot 4r^2 > (R-r)^2$, czyli $\sqrt{n} > \left(\frac{R-r}{2r}\right)$.

W kole da się umieścić jeszcze jedno koło o promieniu r i środka A .

Czytelnicy proponują

Pan Kazimierz Łuczak z Beldowa nadesłał nam szereg ciekawych wzorów z zakresu teorii liczb. Oto jedna z serii:

$$\begin{aligned} 7^4 + 8^4 + 64 \cdot 1^3 &= 9^4, \\ 22^4 + 23^4 + 24^4 + 64(1+2)^3 &= 25^4 + 26^4, \\ 45^4 + \dots + 48^4 + 64(1+\dots+3)^3 &= 49^4 + \dots + 51^4, \\ 76^4 + \dots + 80^4 + 64(1+\dots+4)^3 &= 81^4 + \dots + 84^4 \\ \text{itd.} \end{aligned}$$

Gdyby ktoś chciał udowodnić te wzory, to proponujemy najpierw wykazać (indukcyjnie), że

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),$$

a następnie, za pomocą udowodnionego wzoru, wykazać, że

$$\sum_{k=4n^2+3n}^{4n^2+4n} k^4 + (2n(n+1))^3 = \sum_{k=4n^2+4n+1}^{4n^2+5n} k^4,$$

skąd bezpośrednio można już wypisać dowolnie wiele równości podanego typu.

O pewnym algorytmie i związanym z nim zadaniu geometrycznym

Dr Jerzy JAROMCZYK, Grzegorz ŚWIĄTEK

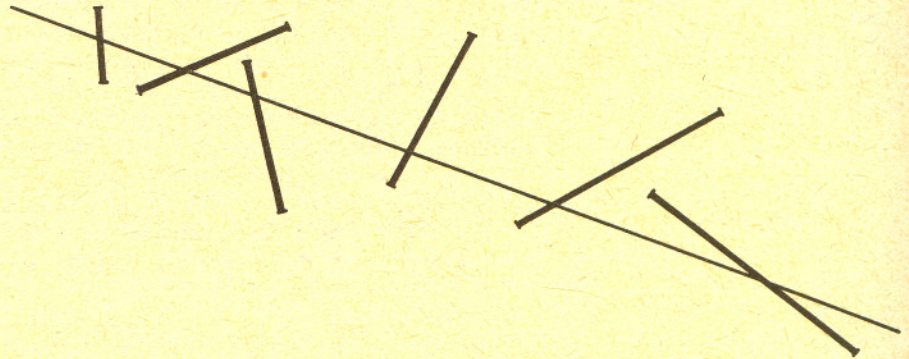
*Wziął pierzastą strzałę leżącą na stole
Kiedy inne w zawartym leżały kołczanie,
Przeznaczone Achiwom wnet na skosztowanie.
Tę wzięwszy, karbem przytknął do cięciwy szczerlnie,
I jak siedział na stolku wymierzył luk celnie,
Grot puścił i ten topory wszystkie trafił rzędem
Przeszywszy pierwsze ucho, wyleciał tym pędem
Przez ostatnie (...)*

Homer, *Odyseja*, Pieśń 21
tłum. L. Siemiński

Tak opisuje Homer rozwiązanie przez Odysa zadania Penelopy przestrzelenia jednym strzałem z łuku otworów w dwunastu ustawionych rzędem obuchach toporów. W artykule tym zajmiemy się rozwiązaniem podobnego zadania, aczkolwiek w zgoła innym celu niż zrobił to Odys.

Zadanie jest następujące:

Na płaszczyźnie dany jest układ n odcinków (otwartych). Znaleźć (o ile istnieje) prostą, która ma niepuste przecięcie z każdym odcinkiem układu.



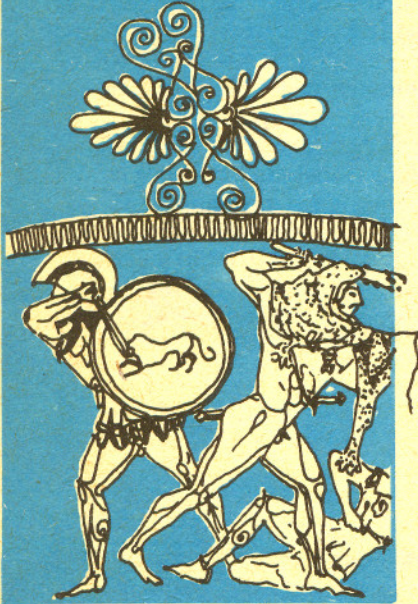
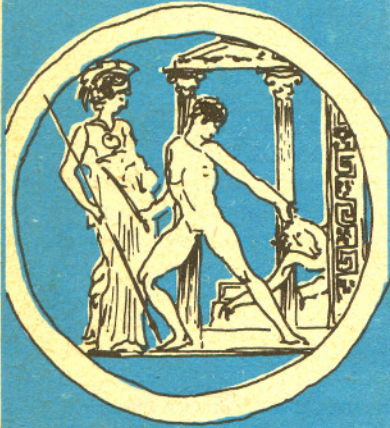
Prostą taką będziemy nazywać, dla zachowania analogii z zadaniem Penelopy, prostą przyszywającą dany układ odcinków. Interesować nas będzie rozwiązanie w postaci algorytmu (sposobu postępowania) pozwalającego na znalezienie, dla danego układu odcinków, prostej przyszywającej. W tej sytuacji zadanie wymaga sprecyzowania, co rozumiemy przez „znalezienie prostej”.

Przyjmujemy, że układ odcinków jest określony przez n czwórek liczb $(x_0^i, y_0^i, x_1^i, y_1^i)$, $(x_0^2, y_0^2, x_1^2, y_1^2), \dots, (x_0^n, y_0^n, x_1^n, y_1^n)$, gdzie punkty o współrzędnych (x_0^i, y_0^i) oraz (x_1^i, y_1^i) są końcami i -tego odcinka układu. Zakładamy ponadto, że liczby $x_0^i, x_1^i, x_0^j, x_1^j, \dots, x_0^n, x_1^n$ są parami różne. Dla każdego układu odcinków na płaszczyźnie odpowiedni wybór układu współrzędnych pozwala spełnić ten warunek, z drugiej zaś strony w zastosowaniach praktycznych równość dwóch nie związanych ze sobą danych nie powinna w ogóle się zdarzyć.

Zadaniem jest znalezienie równania prostej mającej niepuste przecięcie z każdym z danych odcinków.

Proponujemy Czytelnikowi, aby przerwał na moment lekturę tego artykułu i spróbował samodzielnie znaleźć rozwiązanie.

Wydaje się, że rozwiązanie naszego zadania nie jest łatwe. Znalezienie na przykład prostej przyszywającej pewien podzbiór $n-1$ odcinków z danego układu wcale nie musi nas przybliżyć do rozwiązania. Wiadomo w szczególności, że dla każdego $n \geq 3$ istnieje układ n parami rozłącznych odcinków o jednakowej długości taki, że każdy podzbiór $(n-1)$ odcinków ma prostą przyszywającą, natomiast cały układ takiej prostej nie ma.



Rozwiązanie zadania F 200. Cukier rozpuszczając się pochłania ciepło i dlatego temperatura herbaty podczas tego procesu maleje. Herbata przekazuje w jednostce czasu do otoczenia tym więcej energii, im większa jest różnica temperatur między nią i otoczeniem, a więc herbata z rozpuszczonym cukrem przekaże w tym samym czasie do otoczenia mniejszą ilość ciepła niż mająca wyższą temperaturę herbata bez cukru. Klient, który pierwszy posłodził, będzie więc pił herbatę cieplejszą.



Rozwiązanie, które pragniemy przedstawić, opiera się na pewnej transformacji geometrycznej. Rozpocznijmy od jej określenia i kilku podstawowych własności.

Rozważmy dwie płaszczyzny P i P' . Wybierzmy na każdej z nich układ współrzędnych prostokątnych. Współrzędne na płaszczyźnie P oznaczajmy jako x i y — na P' odpowiednio jako x' i y' . Transformacja, którą nazywać będziemy dualną, przyporządkowuje prostej o równaniu $y = ax + b$, leżącej w płaszczyźnie P , punkt o współrzędnych (a, b) na płaszczyźnie P' . Przekształcenie to odwzorowuje w sposób wzajemnie jednoznaczny zbiór prostych niepionowych płaszczyzny P na płaszczyznę P' . W sposób naturalny nasuwa się pytanie, co jest przeciwobrazem prostej przy tej transformacji. Przyjmijmy, że równanie tej prostej, leżącej w płaszczyźnie P' , jest postaci

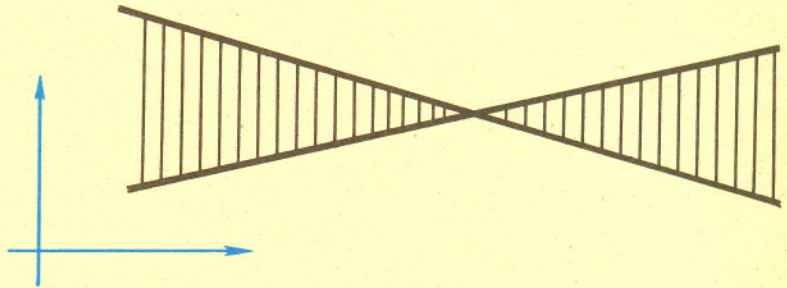
$$y' = a'x' + b'$$

Wówczas proste należące do przeciwobrazu mają równania $y = xx' + a'x' + b'$, gdzie x' jest parametrem przebiegającym zbiór liczb rzeczywistych. Podstawiając $x = -a'$ otrzymujemy $y = -b'$. Zatem punkt $(-a', b')$ należy do każdej z tych prostych, a ich współczynniki kierunkowe przebiegają wraz z parametrem x' liczby rzeczywiste.

Dokonałiśmy więc następującego spostrzeżenia:

Przeciwobrazem prostej o równaniu $y' = a'x' + b'$ z płaszczyzny P' jest zbiór prostych niepionowych płaszczyzny P przechodzących przez punkt $(-a', b')$.

Przypuśćmy teraz, że w płaszczyźnie P dany jest domknięty odcinek I o końcach (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , przy czym $x_0 \neq x_1$. Znajdźmy obraz przy transformacji dualnej zbioru prostych niepionowych przecinających I . Zgodnie z powyższym spostrzeżeniem jest on sumą prostych, z których każda jest obrazem zbioru prostych przechodzących przez pewien punkt odcinka. Równania tych prostych są postaci $y' = t(-x_0x' + y_0) + (1-t)(-x_1x' + y_1)$, gdzie parametr t przyjmuje wartości z przedziału domkniętego $[0, 1]$. Zauważmy, że skoro $x_0 \neq x_1$, to proste $y' = -x_0x' + y_0$ oraz $y' = -x_1x' + y_1$ przecinają się. Obraz zbioru prostych niepionowych przecinających I jest domknięciem pary kątów wierzchołkowych i nie zawiera prostej pionowej.



Zbiór o powyższych własnościach będziemy dalej nazywać obszarem wierzchołkowym. Dowiedliśmy, że zbiór prostych przecinających domknięty odcinek niepionowy przechodzi przy transformacji dualnej na pewien obszar wierzchołkowy. Odwracając to rozumowanie Czytelnik udowodni bez trudu, że każdemu obszarowi wierzchołkowemu odpowiada w ten sposób pewien niepionowy odcinek.

Wyposażeni w transformację dualną możemy przystąpić do rozwiązywania naszego zadania. W myśl przyjętego na wstępie założenia żaden odcinek układu nie jest pionowy. Przekształćmy zatem każdy odcinek w odpowiadający mu obszar wierzchołkowy. Przypomnijmy, że punkty leżące w obszarze wierzchołkowym odpowiadają prostym przecinającym odcinek. Tak więc każdy punkt leżący w części wspólnej obszarów wierzchołkowych odpowiada prostej przesywającej wszystkie odcinki.

Opisane powyżej rozumowanie pozwala łatwo sformułować algorytm znajdowania prostej przesywającej. Algorytm jest następujący:

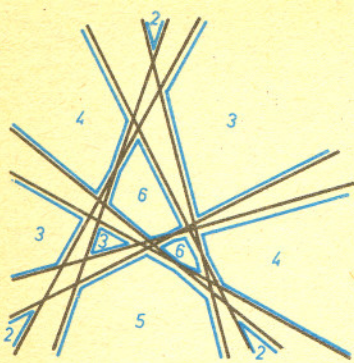
1. Przekształcić każdy odcinek w odpowiadający mu obszar wierzchołkowy.
2. Znaleźć podzbiór płaszczyzny będący częścią wspólną wszystkich obszarów wierzchołkowych.
3. Wybrać punkt należący do znalezionej części wspólnej i wyznaczyć prostą będącą jego przeciwobrazem. Prosta ta jest szukaną prostą przesywającą.

W przypadku, gdy część wspólna obszarów wierzchołkowych jest pusta, układ nie ma niepionowej prostej przesywającej; jednak nie ma on wtedy w ogóle prostej przesywającej. Przypuśćmy bowiem, że układ ma pionową prostą przesywającą. W myśl założenia przyjętego na początku artykułu co najwyżej jeden odcinek przecina ona w końcu, pozostałe zaś w punktach wewnętrznych. Istnieje więc również niepionowa prosta przesywająca powstała z poprzedniej przez niewielki obrót.

Rozwiązanie zadania M 440. Liczba $2^{4n} - 1 = 16^n - 1$ dzieli się przez 5, zatem $2^{4n} - 1 = 5k$ dla pewnego nieparzystego k . Stąd

$$6 \cdot 2^{2^{4n}} + 1 = 6 \cdot 2^{5k+1} + 1 = 12 \cdot 2^{5k} + (12 - 11) = 12(2^{5k} + 1) - 11 = 12(2^{5^k} + 1) + 1(2^{5^{k-1}} - 2^{5^{k-2}} + \dots - 2^5 + 1) - 11 = 12 \cdot 33(2^{5^{k-1}} - 2^{5^{k-2}} + \dots - 2^5 + 1) - 11.$$

Tak więc liczba $6 \cdot 2^{2^{4n}} + 1$ dzieli się przez 11.



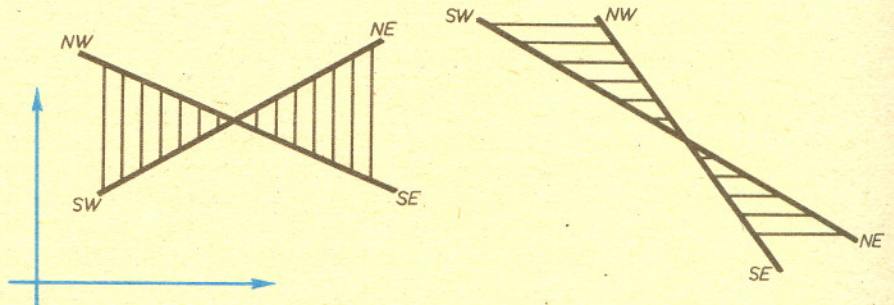
Rysunek przedstawia cztery pary kątów wierzchołkowych, których część wspólna ma łącznie czterdzieści boków. Jej składowe wielokąty zostały na rysunku obwiedzione kolorem i w każdym wpisano liczbę jego boków. Miary wszystkich kątów są bliskie π — przykłady oparte na podobnej zasadzie można konstruować dla dowolnie wielu par kątów, otrzymując dla n par kątów właśnie $2n(n+1)$ boków, co, jak nietrudno z kolei pokazać, jest już górną granicą.

W przypadku natomiast, gdy część wspólna obszarów wierzchołkowych jest niepusta, pionowe proste przeszłyby musimy wyznaczyć oddzielnie. Czytelnikowi pozostawimy dowód faktu, że proste te wypełniają pas pionowy ograniczony prostymi o równaniach $x = \max \{x'_i : 1 \leq i \leq n\}$ oraz $x = \min \{x''_i : 1 \leq i \leq n\}$, jak również znalezienie prostego i efektywnego algorytmu wyznaczania minimum i maksimum zbioru liczb.

Zastanówmy się nad złożonością przedstawionego algorytmu. Zagadnienie złożoności obliczeniowej pewnych innych algorytmów było już w *Delcie* przedstawione (patrz A. Kreczmar *Delta* 4/1986, T. Przytycka *Delta* 9/1985). Zwróćmy uwagę, że w naszym algorytmie główna praca (po wykonaniu transformacji) poświęcona jest znalezieniu części wspólnej obszarów wierzchołkowych. Można pokazać, czym tutaj nie będziemy się zajmować, że zadanie takie wymaga rzędu $M \cdot n \cdot \log n$ elementarnych operacji, takich jak znajdowanie punktów przecięcia prostych itp. (n — to liczba odcinków, M — liczba niezależna od n). W przedstawionym algorytmie znacznie ciekawszym zagadnieniem jest jego złożoność pamięciowa. Intuicyjnie rozumieć przez to można ilość informacji (takich jak współrzędne punktów, współczynniki prostych itp.), które musimy mieć w trakcie wykonywania algorytmu. W przypadku realizacji algorytmu przez komputer informacje przechowujemy w pamięci komputera — stąd termin złożoność pamięciowa. Jasne jest, że oszacowania wymaga ilość informacji związanych z opisem wielokątów będących częścią wspólną obszarów wierzchołkowych. Opisem takim jest na przykład ciąg boków poszczególnych wielokątów. Pokażemy, że liczba ta jest proporcjonalna do liczby odcinków. Dokładniej — udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie. Łączna liczba boków wielokątów będących częścią wspólną n obszarów wierzchołkowych jest nie większa niż $8n$.

Stwierdzenie to jest dość zaskakujące; wydawać się może, że liczba ta jest równa $2n(n+1)$, co dla dużych n ogromnie przewyższa $8n$. Istotnie, gdyby nie założenie, że żaden z obszarów wierzchołkowych nie zawiera prostej pionowej, można by skonstruować przykład z $2n(n+1)$ bokami. To niepozornie wyglądające założenie całkowicie zmienia sytuację.

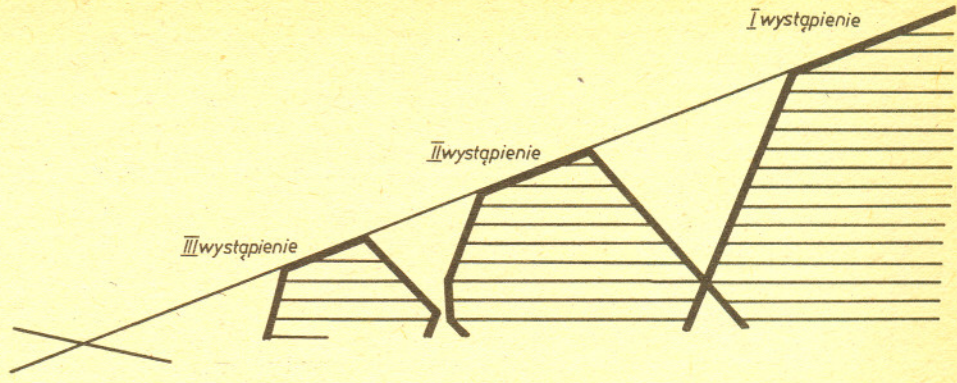


W dowodzie twierdzenia posłużymy się dwoma lematami. Rozpatrzmy obszar wierzchołkowy. Nazwijmy jego krawędzie kierunkami stron świata. Sądzimy, że rysunki najlepiej wyjaśniają zasadę tego nazewnictwa. Przeprowadzimy proste pionowe przez wierzchołki wszystkich obszarów wierzchołkowych. Podzielią one płaszczyznę na $n+1$ pasów (w tym dwie półpłaszczyzny).

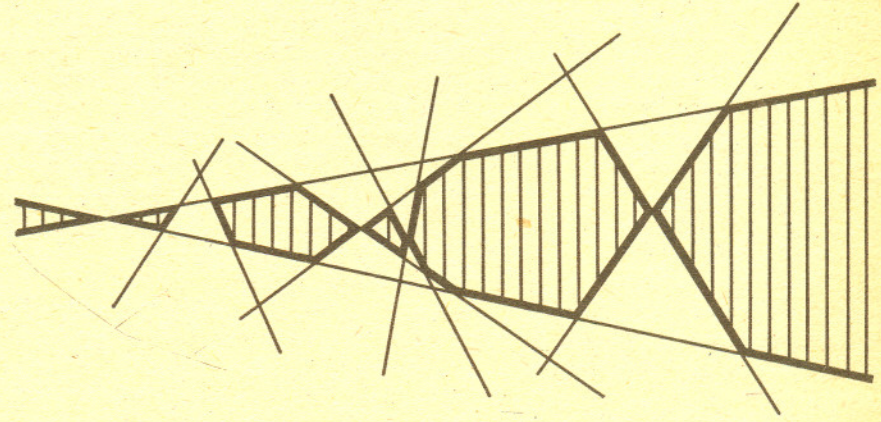
Lemat 1. Przecięcie każdego z pasów z obszarami wierzchołkowymi jest wielokątem wypukłym, którego bokami są krawędzie obszarów wierzchołkowych. (Przez wielokąt rozumiemy figurę o brzegu złożonym z odcinków lub półprostych.)

Dowód: Rozważane przecięcie jest częścią wspólną pewnych półpłaszczyzn, zatem jest wielokątem wypukłym. Łatwo zauważyć, że proste pionowe ograniczające pas nie mogą być bokami wielokąta — każda z nich, z wyjątkiem jednego punktu, leży na zewnątrz obszaru wierzchołkowego, którego wierzchołek zawiera.

Z lematu wynika, iż przecięcie n obszarów wierzchołkowych jest sumą co najwyżej $n+1$ wielokątów. Nazwijmy je składowymi tego przecięcia. Rozpatrzmy krawędź określonego typu (np. *NE*) jednego z obszarów wierzchołkowych. Występuje ona jako bok pewnych składowych przecięcia. Numerujemy te wystąpienia poczynając od składowych najdalej położonych względem wierzchołka obszaru.



Lemat 2. W każdym wielokącie (składowej przecięcia) wszystkie krawędzie danego kierunku (NE, NW, SW lub SE), z wyjątkiem co najwyżej jednej, występują pierwszy raz.



Dowód: Zauważmy, że nie po raz pierwszy wystąpić może tylko krawędź o najmniejszym nachyleniu spośród krawędzi danego kierunku. W wielokącie jest co najwyżej jedna taka krawędź każdego kierunku. (Czy nachylenie krawędzi NE drugiego z obszarów przedstawionych na rysunku 3 jest duże, czy małe?)

Teraz możemy wyznaczyć łączną liczbę boków wielokątów składowych. Liczba pierwszych wystąpień krawędzi obszarów wierzchołkowych nie przekroczy liczby wszystkich krawędzi, tj. $4n$. W każdej z $n-1$ składowych ograniczonych mogą pojawić się co najwyżej cztery boki pochodzące od krawędzi występujących nie pierwszy raz. Daje to dodatkowo $(4n-4)$ boki składowych ograniczonych. W składowych nieograniczonych pojawić się mogą co najwyżej po dwa takie boki, bowiem każda z takich składowych ma boki pochodzące od krawędzi w dwóch kierunkach (SW i NW lub SE i NE). W sumie otrzymujemy oszacowanie $8n$ na łączną liczbę boków wielokątów składowych, co kończy dowód twierdzenia.

Okazuje się, że przedstawione oszacowanie nie jest najlepsze. Można je poprawić do $\lfloor 7,5n \rfloor - 4$ ($\lfloor r \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż r) i to oszacowanie jest już niemal optymalne. Istnieją przykłady obszarów wierzchołkowych dających w przecięciu $\lfloor 7,5n \rfloor - 6$ boków. Jednak zarówno dowód tego oszacowania, jak i konstrukcja przykładu nie są już łatwe.

Zastanówmy się na koniec nad złożonością wykonania transformacji dualnej w przypadku, gdy algorytm znajdowania prostej przeszywającej jest realizowany przez komputer. Chwila namysłu przekonuje, że złożoność ta jest... zerowa. Po prostu transformacja dualna, która tak bardzo ułatwiła nam pracę, nie jest dla komputera żadnym przekształceniem. Proste reprezentowane przez parę liczb przechodzą w transformacji dualnej na te same pary. Odcinek jest parą par współrzędnych swoich końców, a obszar wierzchołkowy jest parą tych samych par liczb oznaczających tym razem jego krawędzie. Cała transformacja jest więc tylko zmianą interpretacji, która pozwoliła w naszym przypadku zastąpić mało uchwytne zbiory prostych przecinających odcinki znacznie łatwiej wyobrażalnymi obszarami wierzchołkowymi. W geometrii analitycznej identyfikujemy punkt z jego współzrędnymi. Nie warto jednak brać tego utożsamienia zbyt kategorycznie, gdyż, jak to wskazuje powyższy przykład, może to ograniczać naszą intuicję.

Przedstawiony w tym artykule algorytm należy do geometrii obliczeniowej, będącej częścią działu projektowania i analizy algorytmów. Projektowane w obrębie geometrii obliczeniowej algorytmy znajdują zastosowanie między innymi w grafice komputerowej, a także w statystyce matematycznej.



Rozwiązanie zadania F 201. Ilość ciepła, jaką otrzymuje część pręta o przekroju kołowym znajdująca się w płomieniu, jest proporcjonalna do jej powierzchni bocznej, a więc do promienia pręta. Ciepło jest odprowadzane wzdłuż pręta. Straty ciepła są więc proporcjonalne do powierzchni przekroju poprzecznego pręta, a więc do kwadratu promienia. Dlatego równowaga cieplna grubego pręta ustala się w znacznie niższej temperaturze niż cienkiego drutu i cienki drut topi się w płomieniu, a gruby pręt nie.

delta

CCD



Przyjrzyjcie się dokładnie (najlepiej przez lupę) fotografii zamieszczonej w gazecie. Czy widzicie, że fotografia składa się z siatki zlewających się kropek różnej wielkości odległych od siebie o około $\frac{1}{3}$ mm?

Wielkość kropek określa jakość zdjęcia — jego rozdzielczość. Podobnie jest w przypadku klisz, tu rozdzielczość określana jest przez wielkość tzw.

ziarna kliszy, typowo wynosi ona $\frac{1}{100}$ mm (czyli dziesięciokrotnie mniej niż grubość włosa ludzkiego). Można wyprodukować kliszę o mniejszych nawet ziarnach, jednak cena, jaką za to płacimy, jest wysoka: im mniejsze ziarno, czyli większa rozdzielczość — tym mniejsza czułość, a i tak typowa czułość kliszy fotograficznej jest niewiele większa niż czułość oka. Ponadto klisza ma jeszcze jedną poważną wadę: np. na zdjęciach nieba potrafimy dosyć dobrze zmierzyć położenia gwiazd, natomiast określenie na podstawie zaczernienia kliszy jasności poszczególnych gwiazd nie jest ani łatwe, ani jednoznaczne.

A więc klisza fotograficzna, będąca jednym z największych osiągnięć techniki XIX w., pozostawia uczucie niedosytu: przy bardzo dobrej rozdzielczości jej czułość oraz wierność odtworzenia skali jasności są dla wielu celów zdecydowanie zbyt niskie.

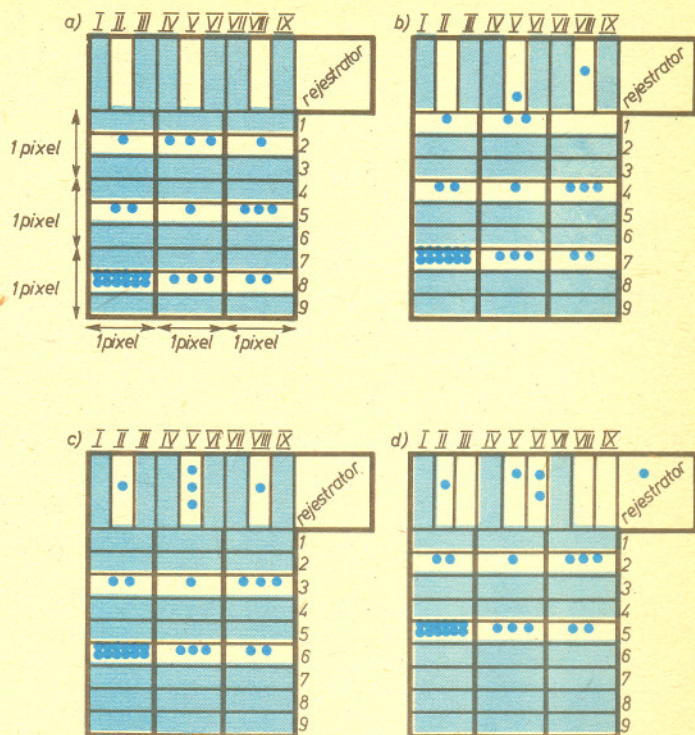
Zupełnie przeciwne oceny uzyskuje fotomnożnik, instrument działający na podobnej zasadzie co fotokomórka. Każdy wie, że prąd przepływający przez fotokomórkę zmienia się pod wpływem oświetlenia. Okazuje się, że czułość fotomnożnika jest kilkunastokrotnie większa niż czułość kliszy, a jego charakterystyka jest liniowa, co znaczy, że natężenie prądu jest dokładnie proporcjonalne do natężenia oświetlenia. Natomiast rozdzielczość fotomnożnika jest fatalna, bo żadna.

Od kilkudziesięciu lat pracuje się nad pomysłami połączenia zalet tych dwóch „detektorów”. Można powiedzieć, że produktem tej pracy jest m.in. telewizja, ale tam, gdzie potrzebna była skrajnie wysoka czułość, trzeba było szukać dalej.

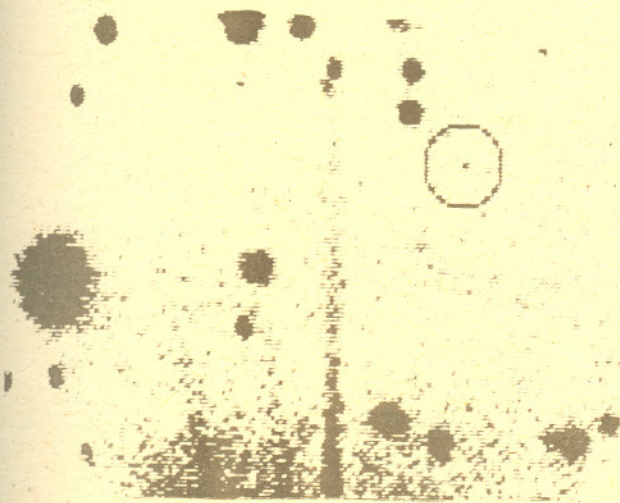
Najprostszym urządzeniem byłyby siatka fotomnożników, jednak zarówno ich duże rozmiary, jak i ogromna ilość oprzyrządowania elektronicznego powodowały, że trzeba było poszukiwać innych dróg. Wreszcie w 1973 roku w Laboratorium Bella (USA) udało się skonstruować pierwsze duże urządzenie nowego typu. Nazwano je trzema literami: CCD (czyta się sjsjidi) od angielskiej nazwy (charge-coupled device). Czułość tego urządzenia jest jeszcze pięciokrotnie wyższa niż fotomnożnika, liniowa charakterystyka pozwala na dokładne odtworzenie rozkładu jasności obserwowanego obiektu; otrzymujemy obraz o wystarczająco dobrej rozdzielczości.

Zasada działania CCD jest następująca: całe urządzenie podzielone jest na elementy zwane pixelami (to też dziwaczny skrót od słów picture element). Pixel jest równoważny ziarnu kliszy i jego wielkość decyduje o rozdzielczości instrumentu. Każdy pixel podzielony jest na 3 paski, jak na rysunku. W czasie naświetlania paski zakreskowane są naładowane tak, że odpychają od siebie elektrony (podobnie jak obudowa i „żeberka” oznaczone podwójną linią). Prawie każdy foton, padający na płytkę CCD, powoduje wybitcie jednego elektronu z regularnej krzemowej siatki krystalicznej. Elektron zewsząd odpychany „ładuje” w najbliższym niezakreskowanym pasku — jest to środkowy pasek jakiegoś pixela. Podobnie dzieje się ze wszystkimi wybitymi elektronami. Po skończonej ekspozycji uwięzione elektrony są zliczane w pęczkach odpowiadających poszczególnym pixelom i liczby te są zapamiętywane przez komputer.

Prześledźmy ów proces na rysunku, gdzie przedstawiono schemat CCD mający 9 pixeli (3 × 3) oraz u góry — rząderek rejestrujący. A więc zaczynamy. W czasie ekspozycji do pasków nr 1, 3, 4, 6, 7, 9 przyłożone jest napięcie odpychające elektrony. Wszystkie elektrony grzęzną w paskach 2, 5, 8 (rys. a). Rozpoczynając zliczanie odłączamy napięcie od pasków 1, 4, 7 i elektrony rozlewają się po obszarach 1—2, 4—5 i 7—8. Następnie przykładamy napięcie do pasków 2, 5, 8, co zmusza pozostałe tam elektrony do przesunięcia się do pasków 1, 4, 7 (rys. b). Ale pasek 1 styka się z paskami II, V i VIII rzędka rejestrującego. Jeśli więc po odłączeniu napięcia od pasków 3 i 6 przyłożymy napięcie znowu do pasków 1, 4, 7, to elektrony, które znajdowały się w najwyższym szeregu pixeli, znajdują się w rzędku rejestrującym, a te, które były w szeregu środkowym, zostaną przesunięte do szeregu najwyższego (rys. c). Jeszcze jedno przełączenie napięć (wyłączenie 2, 5, włączenie 3, 6) i sytuacja staje się prawie taka sama jak na początku operacji, tylko że elektrony z szeregu górnego znajdują się w rzędku rejestrującym, a szereg dolny (paski 7, 8, 9) jest pusty — wszystkie elektrony są przesunięte o „oczko” wyżej (rys. d).



Teraz ta sama zasada jest wykorzystana do przesuwania w prawo, w kierunku rejestratora, elektronów w rzędku rejestrującym. Po opróżnieniu, zliczeniu i zapamiętaniu liczb tych elektronów całą operację przełączania napięć rozpoczynamy od początku.



Reprodukcja obrazu uzyskanego przy użyciu CCD, na którym widoczna jest kometa Halleya (wewnątrz kółka).

Prostota pomysłu i konstrukcji pozwoliła na to, że już w 10 lat od wymyślenia CCD stał się najbardziej rozpowszechnionym, od wojska po astronomię, superczułym detektorem obrazującym. Dzisiaj można kupić w sklepie CCD o liczbie pixeli 300 × 300, a większe, np. 800 × 800, produkowane są na zamówienie wojska. Taki CCD o 640000 pixeli ma rozmiary 12 × 12 mm, czyli rozmiar 1 pixela jest również 10 razy mniejszy niż grubość włosa ludzkiego. A więc udało się połączyć zalety kliszy fotograficznej i fotomnożnika — powstał zupełnie nowy wspaniały detektor — CCD.

Właśnie przy użyciu CCD dwaj astronomowie amerykańscy, David C. Jewitt i G. Edward Danielson, odkryli kometa Halleya 16 października 1982 roku. W momencie odkrycia kometa była oddalona od Słońca o ponad półtora miliarda kilometrów i miała wtedy jasność 24 mag. Po raz pierwszy dostrzeżono kometa tak wcześnie — trzy lata przed jej zbliżeniem do Słońca i w tak dużej odległości od Słońca. Na zdjęciach kometa została zarejestrowana prawie dwa lata później.

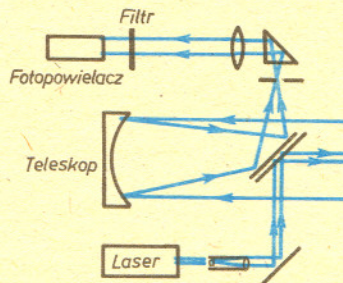
Doc. dr Krzysztof ERNST

O różnych zastosowaniach laserów pisaliśmy już wielokrotnie na łamach *Delty*. Staraliśmy się równocześnie zwrócić uwagę na specyfikę promieniowania laserowego, a w szczególności na te jego cechy, dzięki którym zastosowania te stały się w ogóle możliwe.

Kolejny przykład, który chcemy przedstawić dzisiaj, to LIDAR, czyli, mówiąc inaczej, laserowy radar. Już samo pochodzenie nazwy wiele nam wyjaśni, LIDAR jest bowiem akronimem od angielskiego określenia „Light Detection and Ranging”, co oznacza wykrywanie i określanie położenia za pomocą światła. Należy tu od razu zwrócić uwagę na istotną różnicę między radarem i lidarem. Zmieniając dwie pierwsze litery w nazwie przeszliśmy od fal radiowych do obszaru widzialnego zmniejszając tym samym o wiele rzędów wielkości długość fali promieniowania elektromagnetycznego używanego do poszukiwania obiektów w przestrzeni. Tylokrotnie też zwiększyliśmy zdolność rozdzielczą naszego układu, który jest teraz w stanie wykrywać obiekty nawet tak małe, jak np. cząsteczki gazów znajdujących się w atmosferze.

Stosowane od dawna metody badań atmosfery, a w szczególności jej zanieczyszczeń, polegały na pobieraniu próbek z atmosfery, a następnie wykonywaniu pomiarów w warunkach laboratoryjnych. Sam pomiar jest w ten sposób bardzo prosty, ale zdobycie próbki dosyć kłopotliwe, szczególnie jeśli interesuje nas trudno osiągalny obszar. Spróbujmy więc ustawić taki układ detekcyjny, który umożliwiałby pomiary przy przestrzennym rozdzieleniu badanego obiektu i aparatury badawczej.

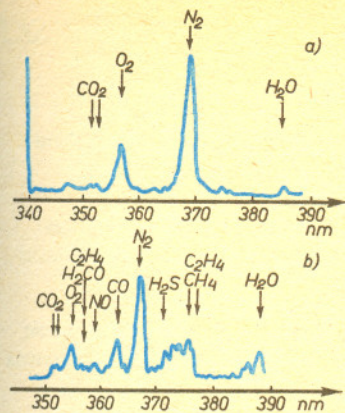
Rozpatrzmy na początku prosty układ, w którym wykorzystany jest jeden z podstawowych procesów oddziaływania promieniowania z materią, jakim jest rozpraszanie światła. Układ składa się z lasera, teleskopu i detektora promieniowania, a jego schemat przedstawiony jest na rysunku 1. Wiązka światła wyemitowana przez laser oddziałuje z cząsteczkami gazów lub też z większymi obiektami typu cząstek aerozoli, pyłu czy kurzu znajdującymi się w atmosferze. Światło rozproszone do tyłu powraca do naszego układu i po zebraniu przez teleskop rejestrowane jest za pomocą czułego detektora (np. fotopowielacza). Światło powracające do układu stanowi na tyle znikomą część światła wyemitowanego w przestrzeń, że praktycznie tylko użycie lasera pozwala na uzyskanie mierzalnego sygnału. Monochromatyczność i spójność umożliwia dobrą kolimację wiązki, co z kolei pozwala na uzyskanie przestrzennej gęstości fotonów na tyle dużej, że nawet powracająca ich część przewyższa tło wynikające z rozproszenia światła słonecznego. Ponadto mała rozbieżność wiązki pozwala na wysoką kierunkową zdolność rozdzielczą układu.



Rys. 1

Lasery stosowane w układach lidar są zazwyczaj laserami impulsowymi, co pozwala na ocenę odległości (range) z odstępem między wysłanym a powracającym impulsem. Im krótszy impuls, tym dokładniej tę odległość możemy ocenić. Np. przy impulsie o czasie trwania 10 ns (typowa szerokość impulsu z lasera barwnikowego pompowanego laserem azotowym) rozmycie przestrzenne impulsu wynosi 3 metry.

Przedstawiony na rysunku 1 przykładowy układ przy wielu swoich zaletach ma pewną istotną wadę. Zdolny do wykrywania w przestrzeni cząstek aerozolu czy też cząsteczek gazu, a także do określania ich odległości i oszacowania koncentracji, nie pozwala nam ich jednoznacznie zidentyfikować. W jaki sposób należałoby zatem zmodyfikować nasz układ, aby oprócz odpowiedzi na pytania: „czy, gdzie i ile”, uzyskać także niezwykle ważną informację: „co”.



Rys. 2

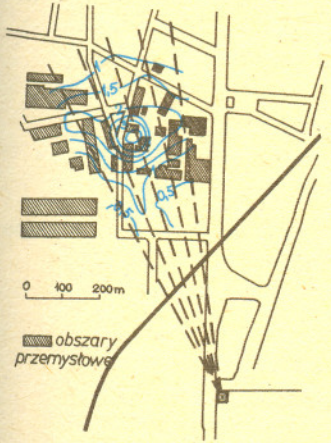
W przedstawionym układzie (rys. 1) pomiar natężenia światła odbywał się na częstotliwości emitowanej przez laser, co oznacza, że rejestrowaliśmy rozproszenie Rayleigha. Światło rozproszone na układach cząsteczkowych zawiera również składowe o częstotliwościach różnych od częstotliwości światła padającego. Przesunięcie tych składowych, zwanych ramanowskimi, zależy od budowy cząsteczki i jest jednocześnie wielkością pozwalającą na jej identyfikację w sposób analogiczny do identyfikacji układów atomowych na podstawie absorbowanych lub emitowanych przez nie częstotliwości.

Zmodyfikujemy więc teraz nasz układ stosując filtr obcinający wszelkie tło wynikające z rozproszenia rayleighowskiego i rejestrujemy rozkład widmowy tylko światła rozproszonego ze zmianą częstotliwości. Na rysunku 2 przedstawione są typowe zapisy widma ramanowskiego dla rozproszenia w atmosferze. Zapisu a) dokonano w atmosferze "względnie" czystej, natomiast zapisu b) dokonano w atmosferze o dużej zawartości samochodowych gazów spalinyowych. Użyto lasera azotowego o długości fali 337 nm, a umieszczone na rysunku strzałki wskazują na oczekiwane położenia maksimów dla zidentyfikowanych w widmie cząsteczek.

Istotnym ograniczeniem powyższej metody jest bardzo małe natężenie linii Ramana w stosunku do linii Rayleigha. Wymagane są zatem lasery o dużej mocy, duże teleskopy, długie czasy zliczania (poprawiające stosunek sygnału do szumu) i wreszcie duże koncentracje cząsteczek w badanych obszarach.

Spróbujmy zatem zmodyfikować nasz pierwotny układ w inny sposób. Niech źródło emituje teraz dwie linie o różnych częstotliwościach tak, aby jedna z nich wypadła w maksimum absorpcji, podczas gdy druga była słabo absorbowana przez gaz, którego obecność chcemy wykryć. Pomiarów natężenia światła rozproszonego do tyłu dokonujemy teraz dla każdej z dwóch częstotliwości niezależnie. Obecność określonego gazu w badanej przestrzeni uwidoczni się osłabieniem jednego z sygnałów względem drugiego. Dokładna analiza pozwala na uzyskanie informacji o koncentracji gazu absorbującego, a także o jej rozkładzie przestrzennym. Pomiarów dla różnych gazów dokonywać możemy przez dobór odpowiedniej długości fali światła laserowego. Stosujemy w tym celu lasery strojone, czyli takie, w których możemy zmieniać w sposób ciągły długość fali emitowanej wiązki. Typowym przykładem takiego lasera jest działający w obszarze widzialnym laser barwnikowy.

Posługując się opisaną metodą zwaną DIAL (differential absorption lidar) i stosując właśnie laser barwnikowy grupa fizyków z Kolonii dokonała szeregu pomiarów rozkładu koncentracji dwutlenku azotu w atmosferze. Przy niewielkiej koncentracji NO₂, odpowiadającej zanieczyszczeniu atmosfery nad Kolonią, zasięg pomiarów wynosił około 4 km. Ciekawe wyniki uzyskano badając rozkład stężenia NO₂ w kilkusetmetrowym otoczeniu komina fabrycznego. Pomiarów dokonano na wysokości 45 metrów w pięciu kierunkach. Dla każdego kierunku uśredniano wyniki pochodzące z wielu impulsów laserowych dla każdej z dwóch długości fal. Wyniki przedstawione są na rysunku 3. Połączone zostały punkty odpowiadające jednakowej koncentracji NO₂, a zamieszczone na rysunku liczby wyrażają stężenie w ppm (part per million, czyli w milionowych). Przedstawienie danych pomiarowych na tle mapki terenu pozwala natychmiast wykryć winnych zanieczyszczenia atmosfery.



Rys. 3

Informacje, które możemy uzyskać za pomocą lidaru, znacznie wykraczają poza podane wyżej przykłady. Stosowane są również różnorodne techniki i systemy pomiarowe. Bardzo rozpowszechnione są badania atmosferycznych aerozoli. Dzięki dużym przekrojom czynnym na rozproszenie (duże cząstki) są one bardzo wygodnym obiektem do obserwacji i umożliwiają m.in. badania dynamiki dolnych warstw atmosfery. Możemy również badać chmury określając np. ich wysokość i rozkład przestrzenny, a także uzyskiwać informację o śniegu i deszczu, aczkolwiek przy przejściu do tak dużych cząstek radar mikrofalowy staje się bardziej użyteczny.

Lidar pozwala ponadto na uzyskanie wielu informacji przydatnych w meteorologii, takich jak siła wiatru, temperatura, gęstość, wilgotność czy widoczność. Wymaga to zazwyczaj precyzyjnych urządzeń i złożonej analizy danych. Np. siłę wiatru można określić na podstawie przesunięcia dopplerowskiego badanych linii, a temperaturę z rozkładu natężeń składowych rotacyjnych w widmach cząsteczkowych.

Techniki lidarowe rozwinęły się szczególnie intensywnie w latach siedemdziesiątych dzięki możliwościom zastosowania najnowszych technik laserowych. W tym też mniej więcej okresie uświadomiono sobie wielkie niedbania w tego typu badaniach. Wynikły one z prostej w zasadzie przyczyny. Otóż do niedawna atmosfera traktowana była jako zbiornik bez dna na różnego rodzaju odpady wytwarzane na Ziemi. Rzeczywistość okazała się zupełnie inna i dopiero dokładne badania atmosfery, m.in. za pomocą lidaru pokazały, jak niepokojący jest stan jej zanieczyszczenia i czym grozi nam w przyszłości zlekceważenie istniejącego niebezpieczeństwa.

Rozwiązanie zadania M 439. Iloczyn skalarny wektorów jest nie większy niż iloczyn ich długości. Rozpatrując wektory $(\cos x, \sin x)$ i $(k, 1)$ otrzymujemy

$$k \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x \leq \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} \cdot \sqrt{k^2 + 1} = \sqrt{k^2 + 1}$$

Planety, gwiazdy i galaktyki wysyłają promieniowanie elektromagnetyczne i tylko dzięki temu możemy je badać. Wydaje się więc, że ciało niebieskie, które nie wysyła takiego promieniowania, będzie dla astronoma nie do wykrycia. Tak jednak nie jest. Obiekt astronomiczny, który nie świeci lub świeci bardzo słabo, można mimo to wykryć. Obiekt taki będzie bowiem oddziaływał grawitacyjnie na inne ciała powodując zmianę kierunku i prędkości ich ruchu.

Około roku 1844 zauważono, że najjaśniejsza gwiazda nocnego nieba — Syriusz — porusza się na nim po elipsie (oprócz znanego już wcześniej ruchu postępowego po prostej). Fakt ten można wyjaśnić zakładając, że Syriusz wchodzi w skład układu podwójnego i bierze udział w ruchu obiegowym wokół jego środka masy. Hipoteza ta okazała się słuszna. W roku 1862 odkryto rzeczywiście niewidzialnego dotychczas towarzysza Syriusza A — Syriusza B. Jest on jednak gwiazdą świecąca bardzo słabo, mimo dość znacznej masy. Dalsze badania pozwoliły odkryć cały szereg podobnych gwiazd, które nazwano białymi karłami (białe karły reprezentują końcowe stadium ewolucji pewnych typów gwiazd).

Następnym przykładem wykrycia ciała niebieskiego na podstawie jego wpływu na ruch innych ciał jest historia ósmej planety Układu Słonecznego — Neptuna. Wskazówką do jego odkrycia było stwierdzenie niezgodności między obliczonym a obserwowanym położeniem Urana, najdalszej od Słońca, znanej wtedy (około roku 1844) planety. Niezgodność ta, wynosząca około dwóch minut kątowych, była o wiele większa od dokładności ówczesnych obliczeń teoretycznych. Aby wytłumaczyć tę niezgodność, wysunięto hipotezę o istnieniu na zewnątrz orbity Urana jeszcze jednej planety. Hipoteza ta okazała się prawdziwa — we wskazanym przez teoretyków miejscu znajdowało się dość słabo świecące ciało, obiegające Słońce — planeta Neptun.

Kolejnym etapem naszej wędrówki w poszukiwaniu ukrytej masy będą galaktyki spiralne. Ruch materii, na którą składają się głównie gwiazdy, odbywa się w nich po okręgach o wspólnym środku w centrum galaktyki. Prędkość tego ruchu jest funkcją odległości od centrum (r). Jej przykładowy przebieg dla galaktyki M31 jest pokazany na rysunku. Znajomość tego przebiegu pozwala wyznaczyć masę materii zawartej wewnątrz orbity o promieniu r :

$$M(r) = rv^2(r)/G.$$

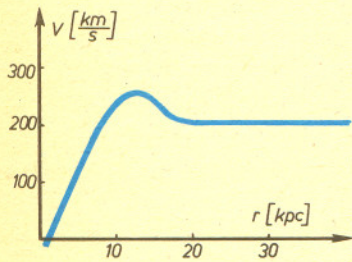
Okazuje się, że masa materii świecącej, na którą składają się masy poszczególnych gwiazd, jest mniejsza, niżby to wynikało z powyższego wzoru. Co więcej, różnica ta powiększa się wraz ze wzrostem odległości od centrum. Wnioskujemy stąd o istnieniu w galaktykach spiralnych ciemnej, nieświecącej materii.

Podobne zjawisko obserwujemy w przypadku gromad galaktyk. Masy gromad galaktyk obliczone na podstawie analizy ich dynamiki są znacznie większe od sumy mas wszystkich widocznych galaktyk, wchodzących w skład poszczególnych gromad.

Problem „brakującej masy” w galaktykach spiralnych i gromadach galaktyk nie doczekał się do dzisiaj ostatecznego wyjaśnienia. Jedną z ostatnio wysuniętych hipotez na ten temat jest hipoteza „masywnych neutrin”. Zgodnie z nią, ciemną, nieświecąca materią, związaną z galaktykami i gromadami galaktyk byłyby chmury masywnych neutrin.

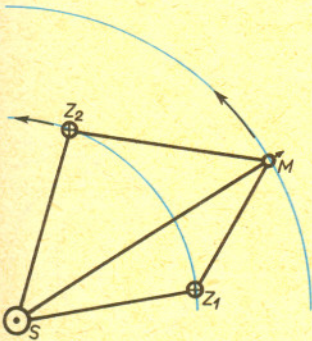
Okazuje się, że problem „brakującej masy” istnieje również w odniesieniu do Wszechświata jako całości. Jak zaraz zobaczymy, wynika on jednak nie tyle z przesłanek fizycznych, co filozoficznych. Dalsza ewolucja Wszechświata zależy bowiem od jego średniej gęstości. Jeśli gęstość ta jest większa od pewnej wartości krytycznej (wynosi ona $3H_0^2/8\pi G$, gdzie H_0 — stała Hubble'a), to po fazie ekspansji, w której się obecnie znajdujemy, nastąpi faza zapadania się, która może zakończyć się powtórным Wielkim Wybuchem. Dla średniej gęstości mniejszej od gęstości krytycznej ekspansja Wszechświata nigdy nie ulegnie zahamowaniu. Chcielibyśmy oczywiście, aby miał miejsce pierwszy, oscylujący, scenariusz ewolucji Wszechświata. Drugi z nich oznacza bowiem, że Wszechświat „zdarzył się tylko raz”. Obliczenia średniej gęstości Wszechświata polegają na podzieleniu mas wszystkich galaktyk znajdujących się w dostępnej obserwacyjnie części Wszechświata przez jej objętość. Dają one, niestety, wielkość kilkakrotnie mniejszą od gęstości krytycznej, co wskazuje na otwarty, nieskończenie ekspandujący Wszechświat. „Domknięcie” Wszechświata mogłoby zapewnić, podobnie jak dla galaktyk i gromad galaktyk, istnienie w przestrzeni międzygalaktycznej masywnych neutrin lub innej ciemnej materii.

To już koniec naszej wędrówki w poszukiwaniu „ukrytej masy”. O ile w dwóch pierwszych, opisanych tu przypadkach (odkrycie Syriusza B i Neptuna), można ją było jednoznacznie zidentyfikować, to w pozostałych jej natura nie jest jeszcze ostatecznie poznana.



Jak Kepler stwierdził eliptyczność orbit planet

W dziele *Astronomia Nova* wydanym w 1609 r. Johann Kepler ogłosił dwa z trzech nazwanych jego imieniem praw ruchu planet. W tym samym roku Galileusz zaczął dopiero obserwować niebo za pomocą konstruowanych przez siebie lunet. Wynika stąd, że w szczególności pierwsze prawo głoszące, że orbity planet są elipsami, a Słońce znajduje się w ich ognisku, Kepler wyprowadził na podstawie obserwacji wykonanych „gołym okiem” — w każdym razie tylko za pomocą przyrządu typu celownicy. Inaczej mówiąc, mając tak ograniczone możliwości Kepler był w stanie stwierdzić, że odległość np. Marsa od Słońca jest zmienna. Tu trzeba od razu nadmienić, że Kepler był entuzjastą systemu heliocentrycznego i od razu przyjmował, że planety (łącznie z Ziemią) obiegają Słońce. Pozostawał tylko „drobiazg” — znalezienie kształtu ich orbit.



Rozumowanie Keplera przebiegało w przybliżeniu następująco. Przyjmijmy, że orbita Ziemi jest kołowa i leży w płaszczyźnie orbity Marsa. Uznajemy za znany okres obiegu Marsa wokół Słońca — okres ten znany był już od dawna, lecz dopiero od czasów Kopernika zaczął być interpretowany jako „rok marsyjski”. Wyobraźmy sobie, że Marsa w położeniu M obserwujemy z Ziemi w położeniu Z_1 . Po upływie roku marsyjskiego Ziemia znajdzie się w położeniu Z_2 , ponieważ wykona w tym czasie więcej niż jeden obieg wokół Słońca S . W obu sytuacjach można zmierzyć kąty SZ_1M i SZ_2M , jak również na podstawie upływu czasu można określić kąt Z_1SZ_2 . W czworokącie SZ_1MZ_2 mamy zatem znane dwa boki $SZ_1 = SZ_2$ (ich długość można przyjąć za jednostkę odległości) oraz wszystkie kąty, można zatem wyznaczyć boki pozostałe albo też przekątną SM . Wyznaczając w ten sposób wielokrotnie odległość Marsa od Słońca Kepler zdołał stwierdzić, że jest ona zmienna i — jak wiemy — dopasował do orbity elipsę.

Praktycznie Kepler postępował oczywiście trochę inaczej. Dysponując wieloletnimi, odpowiednio „gęstymi” obserwacjami Marsa można skonstruować wiele analogicznych czworokątów odpowiadających sytuacji, gdy Mars w jednym położeniu obserwowany jest jakby z dwóch miejsc. Słowo „jakby” uzasadnione jest tym, że obserwacje takie mogą być nawet w pewnym sensie fikcyjne. Mianowicie, można drogą interpolacji znajdować takie fikcyjne położenia Marsa i odpowiadające im po dwa położenia Ziemi, które spełniałyby założenia metody. Szczęśliwie Kepler miał do dyspozycji ogromny zbiór obserwacji wykonanych przez Tycho Brahego, którego był uczniem i współpracownikiem.

W pewnym stopniu na sukces Keplera złożyły się też sprzyjające okoliczności. Mianowicie, przypadkowo Mars ma orbitę stosunkowo silnie spłaszczoną (jej mimośród wynosi 0,0934) — tylko Merkury i Pluton mają orbity bardziej spłaszczone. Ponadto orbita Ziemi jest rzeczywiście w dobrym przybliżeniu kołowa i rzeczywiście leży prawie w płaszczyźnie orbity Marsa. Gdyby tak nie było, to może Keplerowi nie udało się zauważyć prawidłowości w ruchach planet, a wtedy może z kolei Newton nie miałby z czego wyprowadzić prawa grawitacji itd...

dr Tomasz KWAST



Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 439. Pokazać, że $k \cos x + \sin x \leq \sqrt{k^2 + 1}$.

Rozwiązanie na str. 11

M 440. Udowodnić, że liczba $6 \cdot 2^{2^n} + 1$ nie jest liczbą pierwszą, o ile $n \geq 1$.

Rozwiązanie na str. 5

M 441. W kole o promieniu R umieszczono n rozłącznych kół o promieniu r w taki sposób, że nie da się umieścić ani jednego więcej. Dowieść, że

$$\left(\frac{R-r}{2r}\right) < \sqrt{n} < \frac{R}{r}.$$

Rozwiązanie na str. 3

Redagują mgr Tomasz TRATKIEWICZ i mgr Włodzimierz ZIELICZ

F 200. W kawiarni dwaj konsumenci otrzymali równocześnie herbatę. Pierwszy posłodził ją natychmiast, a drugi dopiero po zjedzeniu przyniesionego równocześnie kremu. Obaj zaczęli pić herbatę jednocześnie.

Który z nich pił ciepłą herbatę?

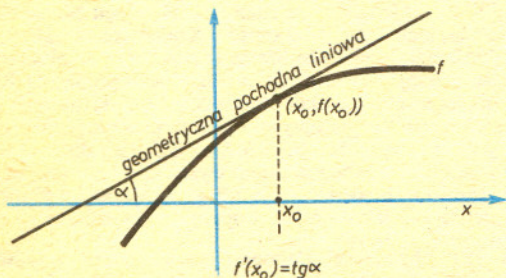
Rozwiązanie na str. 4

F 201. Dlaczego cienki drut miedziany topi się w płomieniu kuchenki gazowej, a miedziany pręt nawet nie rozgrzewa się do czerwoności?

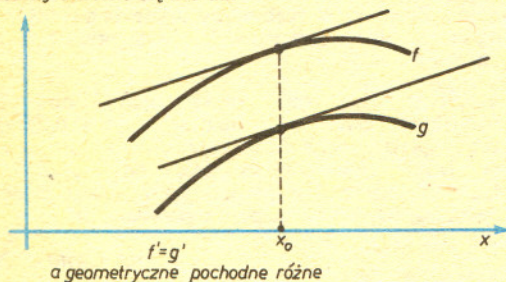
Rozwiązanie na str. 7

Różne geometryczne pochodne

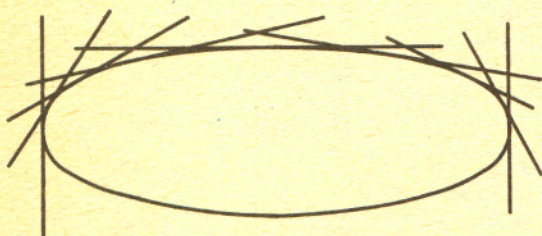
Wynikiem różniczkowania funkcji f w punkcie x_0 jest liczba oznaczana przez $f'(x_0)$. Np. w drugiej klasie liceum podaje się przepis, jak obliczyć tę liczbę. Geometryczne spojrzenie na ten przepis pozwala liczbę $f'(x_0)$ przedstawić jako rezultat następujących działań: prowadzimy styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ i następnie znajdujemy tangens kąta, który ta styczna tworzy z osią „iksów”. Opuszczając w tym przepisie część znajdującą się po słowie *następnie* otrzymujemy *geometryczną pochodną* funkcji f w punkcie x_0 — geometryczna pochodna jest więc prostą. Pojęcie geometrycznej pochodnej jest bogatsze od pojęcia „zwykłej” pochodnej z dwóch powodów:



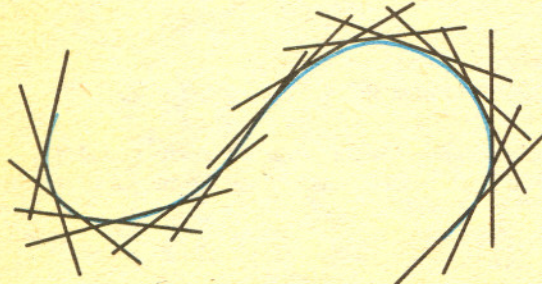
1° Mając geometryczną pochodną możemy znaleźć „zwykłą” pochodną, a znając tylko zwykłą pochodną — pochodnej geometrycznej określić się nie da.



2° Geometryczna pochodna nie zależy od układu współrzędnych i można ją znaleźć również dla krzywych nie będących wykresami funkcji.

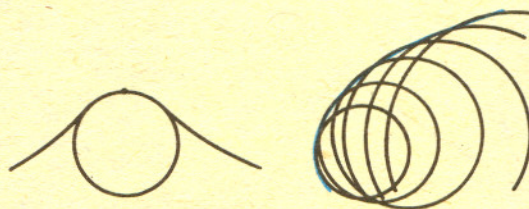


Odpowiednikiem całkowania (czyli operacji prowadzącej od pochodnej jakiejś funkcji do tejże funkcji) jest rysowanie obwiedni (czyli krzywej stycznej do wszystkich prostych — lub ogólniej krzywych — danej rodziny). Bierze się to z wariacyjnego określenia stycznej — jest to prosta najlepiej (spośród wszystkich prostych) przybliżająca krzywą w otoczeniu danego punktu.

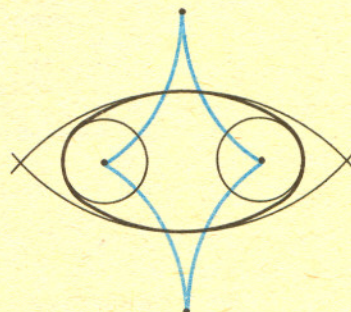


W takim właśnie określeniu geometrycznej pochodnej kryje się możliwość uogólnienia tego pojęcia. Żeby dalej nie było nieporozumień, nazwijmy *liniową* zdefiniowaną wyżej geometryczną pochodną.

Pozostając wśród krzywych płaskich nazwijmy geometryczną pochodną *okręgową* danej krzywej w danym punkcie okrąg najlepiej (spośród wszystkich okręgów) przybliżający krzywą w otoczeniu tego punktu. Odpowiednim całkowaniem będzie i tutaj rysowanie obwiedni. Zwolennicy metod rachunkowych i z tego pojęcia zrobili „coś rachunkowego” — odwrotność promienia geometrycznej pochodnej okręgowej danej krzywej w danym punkcie nazywa się *krzywizną* krzywej w tym punkcie i jest to oczywiście liczba. Znane są też metody uzyskania tej liczby bez posługiwania się metodami geometrii.



Z geometrycznej pochodnej okręgowej można „wyciągnąć” nie tylko liczby — mogą to być też punkty, np. środki uzyskanych okręgów. Tak się robi, a utworzoną z nich krzywą nazywa się *ewolutą* krzywej wyjściowej.



ewoluta elipsy

Oczywiście pojęcia tak liniowej, jak i okręgowej geometrycznej pochodnej mogą być rozciągnięte również na krzywe przestrzenne. Wtedy bardzo przydatne okazuje się jeszcze pojęcie geometrycznej pochodnej *śrubowej*. Konsekwentnie — jest to linia śrubowa najlepiej przybliżająca krzywą w otoczeniu danego punktu. I znów zwolennicy rachunków uzyskają z niej liczby — dla śruby o promieniu r i skoku h są to

$$\frac{4\pi^2 r}{4\pi^2 r^2 + h^2} \quad \text{i} \quad \frac{2\pi h}{4\pi^2 r^2 + h^2}$$

Pierwsza z tych liczb to krzywizna — ta sama, którą uzyskalibyśmy stosując geometryczną pochodną okręgową. Drugą liczbę nazywa się *skręceniem* krzywej. Sto pięćdziesiąt lat temu Frenet udowodnił, że krzywizna (jeśli jest wszędzie różna od zera) i skręcenie wyznaczają krzywą z dokładnością do położenia. Geometryczna pochodna wyznacza ją oczywiście jednoznacznie.

W tym miejscu może powstać przekonanie, że można by określić mnóstwo jeszcze innych geometrycznych pochodnych. Tak też jest rzeczywiście: można poszukiwać najlepszych przybliżeń danej krzywej wśród krzywych dowolnie obranej przez siebie rodziny. Żeby jednak takie nowe geometryczne różniczkowanie było uznane za sensowny wynik (a nie za zbędne mnożenie pojęć), należałoby wykazać, że za jego pomocą można uzyskać jakieś rezultaty, jakieś twierdzenie łatwiej niż innymi metodami. Albo jeszcze lepiej — uzyskać nie znane dotąd fakty. Bo narzędzie musi być nie tylko zmyślnie skonstruowane, ale przede wszystkim przydatne.

dr hab. Marek KORDOS

Funkcja $f:(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ nazywa się funkcją wypukłą, jeśli dla dowolnych $x, y \in (a, b)$ i $0 \leq t \leq 1$ zachodzi nierówność

$$(1) \quad f(t \cdot x + (1-t) \cdot y) \leq t \cdot f(x) + (1-t) \cdot f(y).$$

Geometrycznie oznacza to, że dla dowolnej prostej przecinającej wykres funkcji w więcej niż jednym punkcie żadna część wykresu między punktami przecięcia nie leży nad tą prostą.

Dla funkcji wypukłej zachodzi nierówność Jensena:

Dla dowolnych $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ oraz nieujemnych t_1, t_2, \dots, t_n spełniających warunek $t_1 + \dots + t_n = 1$ mamy

$$(2) \quad f(t_1 \cdot x_1 + \dots + t_n \cdot x_n) \leq t_1 \cdot f(x_1) + \dots + t_n \cdot f(x_n).$$

Nierówności tej dowodzi się za pomocą indukcji matematycznej korzystając z nierówności (1).

Udowodnijmy teraz, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c mamy

$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a + b + c} \leq a^3 + b^3 + c^3.$$

Dzieląc przez $a + b + c$ otrzymujemy nierówność równoważną

$$\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} \right)^2 \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c},$$

która wynika bezpośrednio z (2), jeśli podstawimy $f(x) = x^2$, $n = 3$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$, $t_i = \frac{x_i}{a + b + c}$ ($i = 1, 2, 3$). Trzeba jeszcze wiedzieć, że funkcja f jest wypukła. Można to łatwo sprawdzić korzystając z jednego z poniższych warunków.

(3) Jeśli druga pochodna funkcji (w przedziale) istnieje i jest nieujemna, to funkcja jest w tym przedziale wypukła.

(4) Jeśli w każdym punkcie $x \in (a, b)$ istnieją pochodne lewo- i prawostronne ($f'_-(x)$ i $f'_+(x)$), przy czym $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ oraz pochodne te są funkcjami niemalejącymi, to funkcja jest w przedziale (a, b) wypukła.

(Funkcja wartość bezwzględna nie jest różniczkowalna, ale spełnia warunek (4).)

W naszym zadaniu $f''(x) \equiv 2 > 0$.

Uwaga: Jeśli druga pochodna jest dodatnia w przedziale, to funkcja jest ściśle wypukła, tzn. jeśli tylko nie wszystkie x_1, \dots, x_n są równe oraz $0 < t_i < 1$ ($i = 1, \dots, n$), to nierówność (2) jest ostra.

A oto zadania, w których można skorzystać z nierówności Jensena

1. Dowieść, że

$${}^{44}\sqrt{\operatorname{tg}1^\circ \cdot \operatorname{tg}2^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg}44^\circ} < \sqrt{2} - 1 < \frac{1}{44} (\operatorname{tg}1^\circ + \dots + \operatorname{tg}44^\circ).$$

(I Zawody Austriacko-Polskie, 1978r.)

2. Udowodnić, że dla każdych liczb dodatnich p i q spełniających warunek $p + q = 1$ zachodzi nierówność

$$p \log p + q \log q \geq -\log 2.$$

(2 — I — XXII)

3. Udowodnić, że jeśli liczby $x, y, z > -1$ spełniają warunek $x + y + z = 1$, to

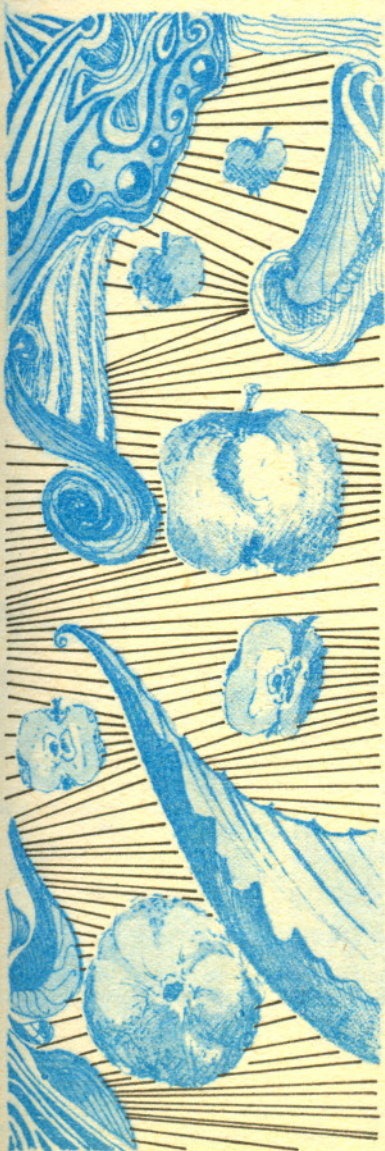
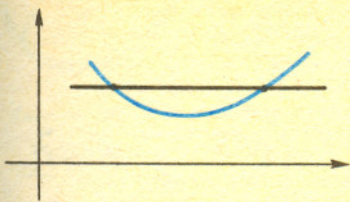
$$\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} \leq \frac{3}{2}$$

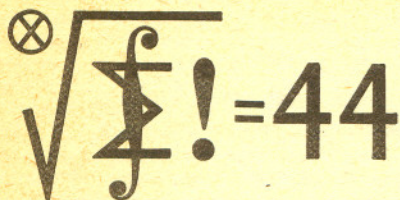
(2 — I — XXXVII)

4. W okrąg k wpisany jest trójkąt ABC . Na okręgu k wybrano takie punkty A', B', C' , że proste AA', BB', CC' zawierają środkowe trójkąta ABC . Wykazać, że pole trójkąta $A'B'C'$ jest nie mniejsze od pola trójkąta ABC .

(3 — I — XXXI)

dr Jerzy RYLL





Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44, M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1986.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/1986

Przypominamy treść zadań:

127. Czy istnieje w R^3 zbiór mający dokładnie 6 osi symetrii?

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 123 /WT=1,46/ i 124 /WT=2,75/
z numeru 1/1986

| | | |
|--------------------|-------------|----------|
| Andrzej Bonk | - Chełmża | 47,41pkt |
| Marek Gałecki | - Milanówek | 45,90pkt |
| Jacek Mańdziuk | - Lublin | 44,39pkt |
| Piotr Jędrzejewicz | - Toruń | 43,96pkt |
| Marian Roman | - Ełk | 43,09pkt |
| Andrzej Sudoł | - Nowy Sącz | 42,56pkt |
| Kazimierz Serbin | - Sanok | 42,54pkt |
| Dariusz Sówizrzał | - Szczecin | 41,36pkt |

Pan Gałecki jest drugim uczestnikiem ligi, który wykonał pięć pełnych okrążeń. Panowie: Bonk i Mańdziuk - to nowe twarze w Klubie 44.

127. Niech L będzie pewną ustaloną osią symetrii rozpatrywanego zbioru. Jeśli prosta L' jest inną osią symetrii i albo nie przecina prostej L , albo przecina, ale nie pod kątem prostym, to prosta L'' symetryczna do L' względem prostej L także jest osią symetrii. Jeśli natomiast pewna oś symetrii L' przecina L prostopadłe, to inną osią symetrii jest prosta L'' przechodząca przez punkt przecięcia prostych L i L' i prostopadła do nich. W ten sposób wszystkie osie symetrii różne od L zostały pogrupowane w pary L', L'' . Jeśli więc dany zbiór ma dodatnią i skończoną liczbę osi symetrii, to liczba ta jest nieparzysta — nie może zatem być równa 6.

128. Warunki zadania spełnia na przykład p punktów postaci $(x, r(x))$, gdzie $x = 1, \dots, p$, a $r(x)$ jest resztą z dzielenia x^2 przez p (dla $x < p$) oraz $r(p) = p$. Załóżmy, że trzy punkty tej postaci (x_i, y_i) są współliniowe. Wówczas $x_i, y_i \in \{1, \dots, p\}$, $y_i \equiv x_i^2 \pmod{p}$ ($i = 1, 2, 3$), $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) = (y_3 - y_1)/(x_3 - x_1)$. Stąd

$$(x_2^2 - x_1^2)(x_3 - x_1) \equiv (x_3^2 - x_1^2)(x_2 - x_1) \pmod{p},$$

czyli

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \equiv 0 \pmod{p}.$$

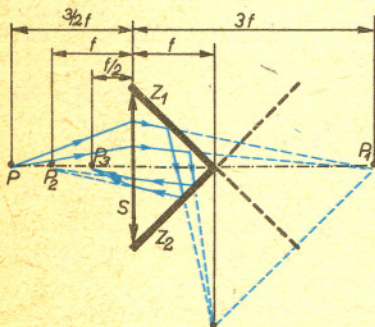
To jednak jest niemożliwe, bo liczba pierwsza p musiałaby dzielić któryś z czynników lewej strony, a wartość bezwzględna każdego z tych czynników zawiera się ostro między 0 a p .

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/1986

Przypominamy treść zadań:

25. W układzie optycznym dwa zwierciadła płaskie Z_1 i Z_2 , prostopadłe do siebie, tworzą dwie ściany graniastostupa o podstawie trójkąta równoramiennego. W trzeciej ścianie (nieprzezroczystej) tego graniastostupa umieszczono soczewkę skupiającą S o ogniskowej f w taki sposób, że jej oś optyczna przecina prostopadłe krawędź styku zwierciadeł, a jedno z ognisk soczewki leży na tej krawędzi. Znaleźć położenie i powiększenie wytworzonego przez ten układ obrazu małego przedmiotu P , znajdującego się w pobliżu osi optycznej soczewki w odległości $1,5f$ od niej.

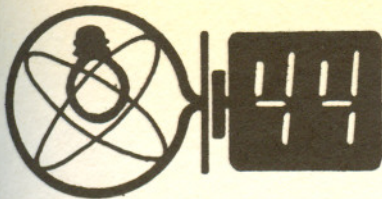


25. Rysunek przedstawia bieg promieni w płaszczyźnie prostopadłej do zwierciadeł i zawierającej oś optyczną soczewki. Położenia obrazów wyznaczamy przy założeniu, że soczewka jest cienka. Jeśli by nie było zwierciadeł, obraz przedmiotu P powstałby w punkcie P_1 , w odległości $3f$ od soczewki. Powiększenie tego obrazu w stosunku do przedmiotu wynosiłoby $3f/1,5f = 2$. Na skutek odbić od zwierciadeł (niezależnie od kolejności tych odbić) promienie tworzące obraz biegną w kierunku punktu P_2 . W punkcie tym występuje obraz urojony dla soczewki, powiększony dwukrotnie względem przedmiotu. Jak wynika z rozważań geometrycznych, punkt P_2 znajduje się w odległości f od soczewki. Po przejściu promieni przez soczewkę ostateczny obraz (rzeczywisty) powstaje w punkcie P_3 . Odległość d tego punktu od soczewki, wyznaczona z równania soczewki $\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{f}$, wynosi $0,5f$. Obraz P_3 jest dwukrotnie zmniejszony w stosunku do obrazu P_2 , jest więc wielkości przedmiotu.

26. Obliczmy najpierw wzajemny stosunek działających na ciało znajdujące się na powierzchni Księżyca sił przyciągania go przez Księżyc i przez Ziemię. Wartości tych sił wynoszą odpowiednio

$$\frac{\gamma M_K m}{R^2} \quad \text{oraz} \quad \frac{\gamma M_Z m}{r^2},$$

gdzie: $\gamma = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ — stała grawitacji, $M_K = 7,3 \cdot 10^{22} \text{kg}$ — masa Księżyca, $M_Z = 6,0 \cdot 10^{24} \text{kg}$ — masa Ziemi, $R = 1,7 \cdot 10^6 \text{m}$ — promień Księżyca, $r = 3,8 \cdot 10^8 \text{m}$ — średnia odległość Ziemia — Księżyc, m — masa ciała.



Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 F"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 21 /WT=1,96/ i 22 /WT=3,81/
z numeru 1/1986

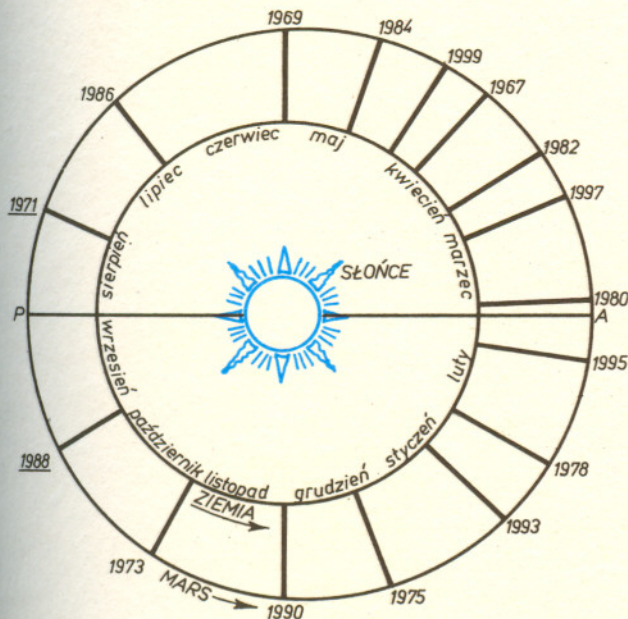
| | | |
|-----------------------------|-----------|----------|
| Piotr Baża | - Toruń | 43,19pkt |
| Tomasz Rawlik | - Gliwice | 28,64pkt |
| Aleksander Surma | - Myszków | 18,94pkt |
| Dziersyżaw Lipniacki-Lublin | | 18,82pkt |
| Mirosław Semla | - Opole | 15,20pkt |

Patrz w niebo

Mars nie jest wprawdzie planetą najbliższą Ziemi, ale jest planetą, która w momentach najdogodniejszych do przeprowadzania obserwacji powierzchni zbliża się do Ziemi na najmniejszą odległość. Jak w przypadku wszystkich planet górnych najdogodniejsze warunki do dokonywania obserwacji wypadają w czasie opozycji. Jednak nie wszystkie opozycje są równie dobre.

Orbita Marsa jest dość silnie spłaszczona (mimośród 0,093), w związku z czym nie wszędzie jest jednakowo odległa od orbity Ziemi. Obie planety poruszają się niemal w jednej płaszczyźnie, a więc odległość między nimi można mierzyć w płaszczyźnie ich ruchu. Ziemia dokonuje jednego obiegu dookoła Słońca w ciągu 365,26 dób, Mars — w ciągu 686,96 dób ziemskich, a więc okres synodyczny, tj. odstęp między dwiema jednakowymi konfiguracjami tych planet jest równy 779,94 doby.

Związek między okresem synodycznym (S) planety górnej, jej okresem obiegu wokół Słońca (T) i rokiem gwiazdowym (E) jest następujący: $1/S = 1/E - 1/T$.



Opozycje Marsa do 1999 roku. Podkreślono daty wielkich opozycji. P — peryhelium orbity Marsa, A — aphelium orbity Marsa.

Stosunek wartości obu tych sił jest równy $\frac{M_K r^2}{M_Z R^2} \approx 600$. Siła przyciągania ziemskiego jest więc na tyle mała w porównaniu z siłą przyciągania Księżyca, że będzie ona tylko nieznacznie modyfikowała ruch pocisku w polu grawitacyjnym Księżyca. Aby stwierdzić, czy pocisk spadnie z powrotem na Księżyc, czy też ma szansę od niego się oderwać, porównamy jego prędkość z pierwszą i drugą księżycową prędkością kosmiczną. Prędkość pocisku, równa prędkości Księżyca w ruchu wokół Ziemi, wynosi $v = \frac{2\pi r}{T} = 1,0 \text{ km/s}$ ($T = 2,4 \cdot 10^6 \text{ s}$ — miesiąc

gwiazdowy). Księżycowe prędkości kosmiczne, równe odpowiednio $v_I = \sqrt{\frac{\gamma M_K}{R}} = 1,7 \text{ km/s}$ oraz $v_{II} = \sqrt{2} v_I = 2,4 \text{ km/s}$, są — jak widać — znacznie większe od prędkości pocisku. Stąd wnioskujemy, że pocisk spadnie na powierzchnię Księżyca. Obliczając jeszcze maksymalną odległość, na jaką pocisk może oddalić się od Księżyca (około $5R$) stwierdzamy, że na całym torze pocisku udział przyciągania ziemskiego (poniżej $1/20$) jest zbyt mały, aby wpłynąć na zmianę tego rozwiązania.

Ponieważ okresy obiegu Ziemi i Marsa nie są współmierne, opozycje wypadają w bardzo różnych położeniach Marsa na orbicie. Te, w czasie których Mars znajduje się w peryhelium, są najkorzystniejsze do dokonywania obserwacji. Opozycje takie wypadają co 15 lub 17 lat, zawsze w sierpniu lub we wrześniu i zwane są „wielkimi opozycjami Marsa”. Ma on wtedy szczególnie duże rozmiary kątowe — średnica jego tarczy sięga $25''$, a jasnością dochodzącą do $-2,8$ mag ustępuje jednej tylko planecie — Wenus. Dla porównania: w momencie największego oddalenia od Ziemi Mars jest niewiele jaśniejszy od Gwiazdy Polarnej, a średnica kątowa jego tarczy jest równa zaledwie $3,5''$.

W czasie wielkich opozycji Mars zbliża się do Ziemi na odległość mniejszą niż 60 mln km. Wprawdzie jeszcze bardziej zbliża się do Ziemi Wenus (40 mln km), ale Wenus jako planeta dolna jest wtedy niewidoczna (złączenie dolne.) Gdy sierp Wenus powiększy się na tyle, by można dokonywać obserwacji powierzchni, planeta jest już odległa od Ziemi przynajmniej o 100 mln km. Obserwacje dokonywane w czasie wielkich opozycji Marsa przyczyniły się istotnie do sporządzenia szczegółowych map jego powierzchni, a także doprowadziły do odkrycia jego księżyców (Asaph Hall 1877 r.). W bieżącym stuleciu wielkie opozycje wypadają w latach: 1909, 1924, 1939, 1956, 1971. Najbliższa będzie 18 września 1988 r.

Przypadająca 10 lipca bieżącego roku opozycja charakteryzuje się warunkami bardzo zbliżonymi do wielkiej. W okolicy tej daty Mars zbliża się do Ziemi na odległość około 60 mln km, średnica jego tarczy wynosi $23''$, a jasność osiąga $-2,4$ mag (dla porównania: Mars na początku 1986 roku był obiektem $+1,4$ wielkości gwiazdowej). W czasie opozycji Mars znajduje się w gwiazdozbiornie Strzelca. Obecne jego położenie można łatwo wyznaczyć na podstawie fragmentu mapy nieba z okładki *Delta* 8/1985. W okolicy daty opozycji Mars pojawia się na niebie po zachodzie Słońca i jest widoczny przez całą noc, pozostając jednak bardzo nisko nad południowym horyzontem.

2 sierpnia Mars osiągnie maksymalną południową deklinację ($-28^\circ 7'$). Od 1907 roku deklinacja jego po raz pierwszy przyjmuje tak małą wartość. W momencie górowania, w szerokości geograficznej Warszawy znajdzie się niecałe 10° nad horyzontem.

Oddalając się i słabnąc Mars pozostanie gwiazdą wieczorną do końca 1986 roku.

mgr Joanna UDALSKA