

W dniu 9 listopada 1986 roku  
zmarł w Warszawie

profesor Leonard Sosnowski

wybitny fizyk.

Odkrył półprzewodnikowe złącze p-n.

Był autorytetem w dziedzinie fizyki ciała stałego.  
Zainicjował w Polsce badania w zakresie fizyki półprzewodników,  
był nauczycielem i wychowawcą wielu pokoleń fizyków polskich.

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 1(157)

Linijka, cyrkiel i przybliżone rozwiązania... <i>mgr Jarosław Górnicki</i>	str. 1
O liczbie osi symetrii wielokąta <i>dr hab. Edmund Puczyłowski</i>	str. 4
Czy Księżyc jest satelitą Ziemi? <i>dr Tomasz Kwast</i>	str. 5
Moment bezwładności w geometrii <i>Radosław Szmytkowski</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Kiedy światło biegnie po okręgu? <i>Jacek Damek</i>	str. 10
Patrz w niebo	str. 11
Zadania	str. 11
Klub 44	str. 12
Drobniaczki	str. 16

W następnym numerze:  
Chirurgia

#### „Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

#### Komitet Redakcyjny

dr Maciej Bryński  
dr Bogdan Cichoński  
dr Antoni L. Dawidowicz  
dr Alicja Derkowska  
doc. dr Jan A. Gaj  
doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
doc. dr Tomasz Hofmoki — v-przewodniczący  
doc. dr Tadeusz Jarzębowski  
doc. dr Marcin Kubiak  
mgr Andrzej Mąkowski  
dr Zbigniew Płochocki  
dr Jan Rempała  
prof. dr Konrad Rudnicki  
prof. dr Grzegorz Sitarski  
prof. dr Józef I. Smak  
prof. dr Kazimierz Stepien  
prof. dr Mieczysław Subotowicz  
doc. dr Andrzej Szymacha  
doc. dr Aniela Wolska  
prof. dr Andrzej Woszczyk  
prof. dr Wojciech Zakowski —  
przewodniczący

#### WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty kwartalnej zł 105,— półrocznej zł 210,— rocznej zł 420,—

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:  
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,  
— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
  - dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:  
— osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,  
— osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
  - Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleconiodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
- Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:  
— do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,  
— do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 35,—

#### Komputer

stał się już jednym z podstawowych narzędzi fizyka. Stosowany jest do sterowania układami pomiarowymi, zbierania i analizy danych, a w teorii do obliczeń numerycznych i symulacji ewolucji układów fizycznych metodami dynamiki molekularnej lub metodami Monte-Carlo.

Pojawia się nowa gałąź - "fizyka komputerowa".

Na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego przygotowywany jest projekt specjalizacji "fizyka komputerowa". Tak więc, obok astronomii, fizyki ciała stałego, fizyki jądrowej, fizyki cząstek elementarnych, biofizyki, geofizyki, fizyki medycznej, rozpoczynający w tym roku studia, być może, będą mogli jako specjalzację wybrać "fizykę komputerową".

Więcej szczegółów w majowym numerze "Delt".

#### Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga  
mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nacz.  
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.  
dr hab. Marek Kordos — red. nacz.  
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nacz.  
mgr inż. arch. Mariola Łotysz  
dr Andrzej Majhofer  
mgr Anna Rudnik  
dr Jerzy Ryll  
mgr Joanna Udalska  
mgr Jan Zalewski

#### Adres Redakcji

ul. Koszykowa 6a  
00-564 Warszawa  
tel. 21-19-85

#### Krajowe Wydawnictwo Czasopism

RSW „Prasa—Książka—Ruch”  
ul. Noakowskiego 14  
00-666 Warszawa  
tel. centr. 25-72-91 do 93  
Biuro Reklam i Propagandy  
tel. 25-56-26  
Nakład 25 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;  
2,50 ark. druk;  
papier offsetowy V kl. 70 g.  
Wydrukowano w Drukarni  
im. Rewolucji Październikowej  
Warszawa, ul. Mińska 65.  
Nr zam. 2937/12/86. P-33.

Danił Granin, pisarz radziecki, w książce *Naprzeciw burzy* (PIW, 1964 r.) opisuje życie naukowców końca lat pięćdziesiątych podczas ówczesnej odnowy. Zamieszcza w niej (str. 280) następującą wypowiedź (z którą się, rzecz jasna, nie solidaryzuje):

— *Wszyscy ci uczeni siedzą na karku państwa i tylko piją krew. Taki ci przychodzi do pracy, kiedy ma ochotę. Warto by ich do kopalni... Od dwóch lat się grzebią, a gdzie produkcja? Żeby miał władzę, to bym ich wszystkich... Najpierw oczywiście po linii partyjnej.*

Aby z takimi wypowiedziami można się było spotkać tylko w opowieściach o czasie minionym,

Czytelnikom i sobie życzy

*Delta*



## Linijka, cyrkiel i przybliżone rozwiązania wielkich problemów

*Mgr Jarosław GÓRNICKI*

Najstarszymi przyrządami, którymi posługiwano się w geometrii, były linijka i cyrkiel (ten ostatni pojawił się później, ale gdzie i kiedy — nie wiadomo). Pozwalają one na:

1. kreślenie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty,
2. kreślenie okręgów o środku w danym punkcie i promieniu równym odległości danych dwóch punktów,
3. wyznaczenie punktów wspólnych linii otrzymanych według powyższych zasad.

Konstrukcyjne wyznaczenie jakiegos punktu (gdy dany jest pewien zbiór punktów) polega na wykonaniu skończonej liczby kroków opisanych w 1, 2, 3. Dzisiaj konstrukcje takie nazywamy platońskimi lub klasycznymi.

W roku 1637 René Descartes (Kartezjusz, 1596—1650) zapowiedział nierozzerwalny związek geometrii z algebrą kładąc podwaliny pod geometrię analityczną i algebraiczną. Stanowiło to punkt wyjścia ogólnej teorii wielomianów i opartej na niej algebraicznej teorii konstrukcji geometrycznych. Tej ostatniej pełny kształt nadali matematycy XIX wieku — P. Ruffini, N. Abel, E. Galois, P. Wantzel, F. Lindemann. Wskazali oni ogólne twierdzenia podające warunki konieczne lub dostateczne na to, aby konstrukcje platońskie były wykonalne oraz dowiedli, że nie wszystkie punkty można otrzymać konstrukcyjnie (patrz M. Bryński, L. Włodarski, *Konstrukcje geometryczne*, Biblioteczka Deltę nr 1, WSiP, Warszawa 1979).

Zagadnienie warunków konstruowalności cyrklem i linijką stanowi tylko część problematyki związanej z konstrukcjami geometrycznymi. Już sami Grecy poszukując rozwiązań prezentowanych niżej problemów uciekali się (i to z wielkim powodzeniem) do użycia krzywych bardziej skomplikowanych niż okręgi i proste lub używali innych przyrządów. Ich konstrukcje są tak wzorowe, że późniejsze pokolenia niewiele mogły je udoskonalić. Próbowano też konstrukcji środkami uboższymi niż platońskie. Konstrukcjami posługującymi się tylko cyrklem zajmował się matematyk duński Georg Mohr (1640—1697). Popularność zyskały one dopiero w 1797 roku dzięki pracy L. Mascheroniego (1750—1800). Idee Mohra i Mascheroniego pozwoliły sformułować i udowodnić twierdzenie, że każda konstrukcja wykonalna za pomocą cyrkla i linijki jest też wykonalna samym cyrklem. Konstrukcje z użyciem samej linijki okazały się mniej efektywne. Jakub Steiner (1796—1863) wykazał w 1833 roku, że każdą konstrukcję klasyczną można wykonać za pomocą samej linijki, jeżeli na płaszczyźnie dany jest pewien okrąg oraz jego środek (patrz H. Rademacher, O. Toeplitz, *O liczbach i figurach*, PWN, Warszawa 1956, str. 221—235).

Potrąfimy uzyskać dokładne (teoretycznie) konstrukcje podwojenia sześcianu za pomocą paraboli, trysekcji kąta za pomocą Ronchoidy Nikodemesa lub ślimaka Pascala, rektyfikacji okręgu i kwadratury koła za pomocą kwadratrysy Hippiasza.

Po tych dygresjach wróćmy do konstrukcji platońskich. Oczywiście jest fakt, że żaden rysunek nie jest konstrukcją dokładną. Kreśląc otrzymujemy przedmioty fizyczne, np. „punkty” w kształcie kropek, „odcinki”, „łuki” mające grubość. Musimy zatem odróżniać rozwiązania teoretyczne od ich praktycznej realizacji. W fazie analizy teoretycznej udzielamy odpowiedzi na pytania:

1. Czy istnieje konstrukcyjne rozwiązanie danego problemu, jeżeli tak, to jak ono wygląda?
2. W przypadku odpowiedzi negatywnej, jakie jest konstrukcyjne przybliżone rozwiązanie tego problemu?

Właśnie takie, teoretycznie przybliżone konstrukcje nazywamy „konstrukcjami przybliżonymi” (nie należy tego terminu mylić z praktyczną realizacją konstrukcji).

Jak wiadomo z rozważań XIX-wiecznych matematyków, szereg zagadnień starożytności nie jest wykonalnych linijką i cyrklem. Można je rozwiązać dokładnie używając krzywych algebraicznych lub wykonać konstrukcje przybliżone. Poniżej sformułujemy kilka takich zagadnień oraz wskażemy ich przybliżone rozwiązania za pomocą konstrukcji platońskich.

A. Podwojenie sześcianu — wyznaczyć krawędź sześcianu, którego objętość jest dwa razy większa od objętości danego sześcianu.

Konstrukcja Bunofalcego. Daną mamy ścianę  $ABCD$  sześcianu o krawędzi  $a$  (rys. 1). Dzielimy przekątną  $DB$  na sześć równych odcinków. Na boku  $DA$  odkładamy odcinek  $DE = \frac{1}{6} DB$ .

Wówczas

$$EB = \sqrt{AB^2 + (AD - ED)^2} = \frac{1}{6} AB \sqrt{74 - 12\sqrt{2}}.$$

Wykonując obliczenia z dokładnością do pięciu cyfr po przecinku i porównując wynik z dokładną wartością liczby  $\sqrt[3]{2} \cdot a$  mamy:

$$0,001 \cdot a < \sqrt[3]{2} \cdot a - EB < 0,002 \cdot a.$$

B. Trysekcja kąta — podział dowolnego kąta na trzy równe części.

1. Konstrukcja Albrechta Dürera. Dany mamy kąt ostry  $\sphericalangle AOB$ , który będzie kątem środkowym okręgu  $o(O, AO)$  (rys. 2). Dzielimy odcinek  $AB$  na trzy równe części:

$AC_1 = C_1C_2 = C_2B$ . W punktach  $C_1, C_2$  prowadzimy prostopadłe do  $AB$ , które przecinają łuk  $\overset{\frown}{AB}$  w punktach  $D_1, D_2$ . Budujemy teraz sumę odcinków  $AD_1, D_1D_2, D_2B$  i znajdujemy trzecią część tej sumy. Odkładamy cięciwę  $AE$  równą otrzymanemu odcinkowi. Wtedy

$\sphericalangle AOE \approx \frac{1}{3} \sphericalangle AOB$  i błąd jest mniejszy niż  $18''$ , a ponadto maleje on, gdy kąt zbliża się

do zera. Konstrukcja ta ma piękną myśl przewodnią: punkty  $D_1, D_2$  dzielą łuk  $\overset{\frown}{AB}$  na nierówne części. Gdybyśmy przyjęli którąkolwiek cięciwę  $AD_1, D_1D_2, D_2B$  za cięciwę odpowiadającą trzeciej części kąta  $\sphericalangle AOB$ , to popełnilibyśmy duży błąd. Aby go zmniejszyć — poszukujemy cięciwy  $AE$ , której długość jest średnią arytmetyczną długości cięciw  $AD_1, D_1D_2, D_2B$ .

Dla małych kątów (mniejszych od  $22^\circ 30'$ ) bardzo dokładna jest

2. Konstrukcja Finslera. Dany mamy kąt  $\sphericalangle AOB$ ,  $AO = BO$  (rys. 3). Odkładamy punkt  $C$  tak, by był on końcem średnicy  $AC$  okręgu  $o(O, AO)$ . Na przedłużeniu  $OC$  odkładamy  $CP = OA$  oraz odcinek  $OM = \frac{4}{5} OA$ . Okrąg  $o_1(M, MA)$  przecina półprostą  $CB$  w punkcie  $D$ . Kąt  $\sphericalangle DPA$  możemy uważać za trzecią część kąta  $\sphericalangle AOB$  (błąd nie przekracza tu  $0,074''$ ).

C. Rektyfikacja okręgu — wyznaczenie odcinka o długości równej długości danego okręgu.

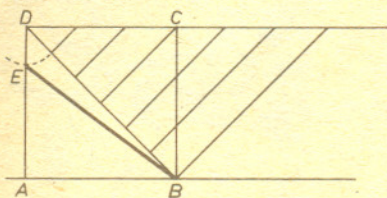
1. Konstrukcja Spechta. Do okręgu  $o(O, OA)$  kreślimy styczną w punkcie  $A$  (rys. 4). Na stycznej odkładamy odcinki  $AB = \frac{11}{5} OA$ ,  $AC = \frac{13}{5} OA$ . Na półprostej  $AO$  odkładamy odcinek  $AD = OB$ . Z punktu  $D$  prowadzimy równoległą do  $OC$ . Wtedy

$$AD = OB = \sqrt{OA^2 + \frac{121}{25} \cdot OA^2} = \frac{\sqrt{146}}{5} \cdot OA, \quad \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AO},$$

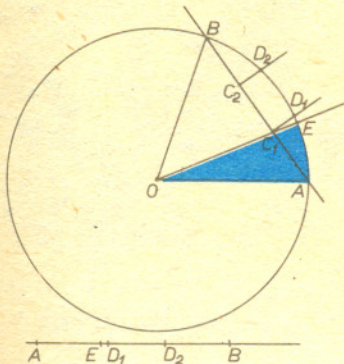
więc  $AE = \frac{13}{25} \sqrt{146} \cdot OA \approx 6,2831839 \cdot OA$ .

Długość odcinka  $AE$  różni się od długości okręgu o mniej niż  $0,000002 \cdot OA$ .

Konstrukcja ta jest teoretycznie bardzo dokładna, ale mało dogodna w stosowaniu. Technicznie prostsza jest

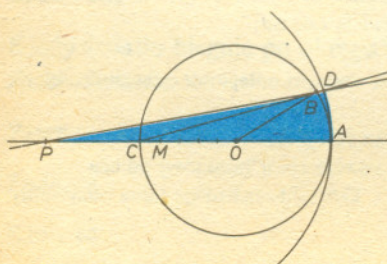


Rys. 1

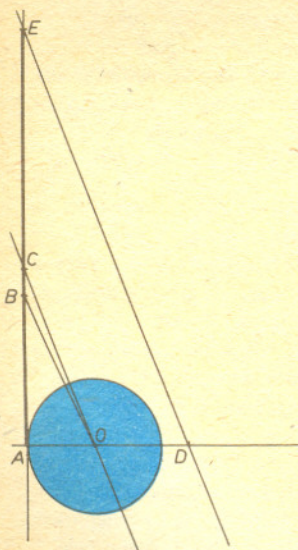


Rys. 2

Albrecht Dürer (1471—1528) — niemiecki malarz, rzeźbiarz, architekt.



Rys. 3



Rys. 4

2. Konstrukcja Adama A. Kochańskiego z 1685 roku. Do okręgu  $o(O, OA)$  kreślimy w punkcie  $A$  styczną  $AM$  (rys. 5) oraz cięciwę  $AD = AO$ . Z punktu  $O$  kreślimy prostą przechodzącą przez środek cięciwy  $AD$ . Przecina ona styczną w punkcie  $C$ . Na tej stycznej odkładamy odcinek  $CE = 3 \cdot OA$ . Wtedy

$$CA = \frac{\sqrt{3}}{3} OA, \quad AE = \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot OA \quad \text{i} \quad BE = \sqrt{\frac{40}{3} - \sqrt{12}} \cdot OA \approx 3,1415333 \cdot OA.$$

Zatem odcinek  $BE$  różni się od połowy długości okręgu o mniej niż  $0,00006 \cdot OA$ .

D. Rektyfikacja łuku — zbudowanie odcinka, którego długość równa się długości danego łuku  $AB$  okręgu  $o(O, OA)$  odpowiadającego kątowi środkowemu ostremu  $\sphericalangle AOB$ .

Podamy rozwiązanie przybliżone dla kątów  $\sphericalangle AOB$  nie przekraczających  $30^\circ$ . Na prostej  $AO$  (rys. 6) odkładamy odcinek  $OS = 2 \cdot OA$  i styczną do okręgu w punkcie  $A$ . Następnie prowadzimy prostą przechodzącą przez punkty  $S$  i  $B$ , która na stycznej wyznacza punkt  $C$ . Wówczas jeżeli  $\alpha$  jest miarą łukową kąta  $\sphericalangle AOB$ , to

$$|\overset{\frown}{AB}| = \alpha \cdot OA, \quad SD = 2 \cdot OA + OD = (2 + \cos \alpha) \cdot OA,$$

$$BD = \sin \alpha \cdot OA, \quad \text{a} \quad \frac{AC}{DB} = \frac{AS}{DS} = \frac{3}{2 + \cos \alpha}.$$

Stąd  $AC = \frac{3 \sin \alpha}{2 + \cos \alpha} \cdot OA$ . Dla  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  długość łuku  $\overset{\frown}{AB}$  różni się od długości odcinka  $AC$  o mniej niż  $0,0005 \cdot |\overset{\frown}{AB}|$ .

Dla kątów ostrych większych od  $30^\circ$  możemy każdy taki kąt zapisać w postaci  $30^\circ + \beta$  lub  $2 \cdot 30^\circ + \beta$ , gdzie  $\beta < 30^\circ$ , i wykonać rektyfikację każdego z tych łuków oddzielnie. Wtedy błąd względny takiej konstrukcji jest mniejszy niż  $0,0015$ .

E. Kwadratura koła — wyznaczyć taki odcinek, aby pole kwadratu zbudowanego na tym odcinku było równe polu koła o danym promieniu.

1. Możemy to wykonać wykorzystując np. rektyfikację Kochańskiego, co obrazuje rysunek 7. Odcinek  $AB$  jest promieniem okręgu, a odcinek  $AC$  połową długości okręgu.

Złoty podział odcinka nazywamy taki podział odcinka o długości  $a$  na dwa odcinki o długościach  $x$  i  $a-x$ ,

że  $a : x = x : (a-x)$ , stąd  $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot a$ . Odcinek o długości  $x$  nazywamy złotą częścią odcinka o długości  $a$ . Konstrukcja takiego podziału znana była już Starożytnym. Oto konstrukcja Herona z Aleksandrii (I wiek n.e.). Dany mamy odcinek  $OA$ . Budujemy okrąg  $o(O, OA)$ . Na odcinku  $OA$  jako na średnicy kreślimy okrąg  $o_1(O', \frac{1}{2} OA)$  i z punktu  $O$  wyznaczamy prostopadłą  $OB = OA$  do odcinka  $OA$ . Odcinek  $O'B$  przecina okrąg  $o_1$  w punkcie  $M$ . Z twierdzenia Pitagorasa łatwo można sprawdzić, że  $BM = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot OA$ . Jest to zatem złota część odcinka  $OA$ .

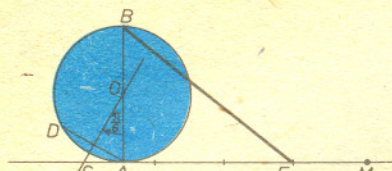
2. Dany mamy okrąg  $o(O, OA)$  oraz jego średnicę  $AB$  (rys. 8). Na odcinku  $OB$  odkładamy odcinek  $OF$  równy złotej części odcinka  $OA$ , a następnie odcinek  $FH = \frac{1}{4} OF$ . Wtedy  $AH$  jest bokiem kwadratu, którego pole różni się od pola koła ograniczonego okręgiem  $o(O, OA)$  o mniej niż  $0,001 \cdot OA^2$ . Obliczmy

$$AH = OA + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot OA + \frac{\sqrt{5}-1}{8} \cdot OA = \frac{5\sqrt{5}+3}{8} \cdot OA \approx 1,7725423 \cdot OA.$$

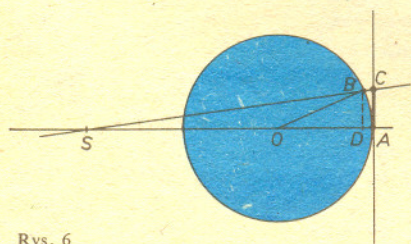
Zatem różnica między  $AH$  a  $\sqrt{\pi} \cdot OA$  nie przekracza wartości  $0,0001 \cdot OA$ .

3. Dany mamy okrąg  $o(O, OA)$  oraz punkty  $A, B$  będące końcami średnicy (rys. 9). Tworzymy odcinki  $OD = \frac{3}{5} \cdot OA$ ,  $OF = \frac{3}{2} \cdot OA$  i punkt  $E$  jako środek odcinka  $OB$ . Następnie na odcinkach  $DE$  i  $AF$  jako na średnicach budujemy półokręgi po przeciwnych stronach. Prostopadła do  $AB$  poprowadzona w punkcie  $O$  przecina te półokręgi w punktach  $G$  i  $H$ . Odcinek  $GH$  różni się od  $\sqrt{\pi} \cdot OA$  o mniej niż  $0,00002 \cdot OA$  (wystarczy zauważyć, że  $OG^2 = OD \cdot OE$ ,  $OH^2 = OA \cdot OF$ ).

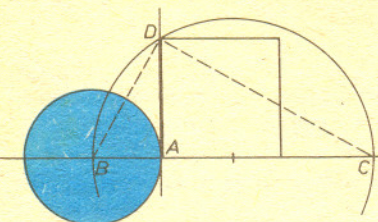
Mimo tego, że kwadratury koła nie można wykonać środkami klasycznymi, istnieją figury ograniczone łukami okręgów (tzw. księżycy Hipokratesa z V wieku p.n.e.), dla których jest to możliwe.



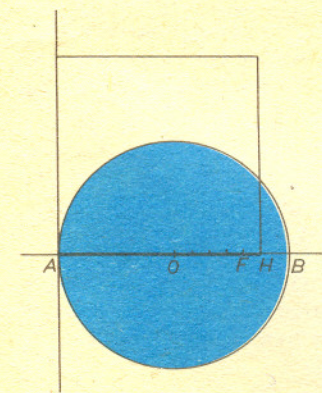
Rys. 5



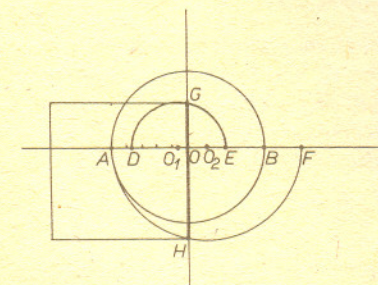
Rys. 6



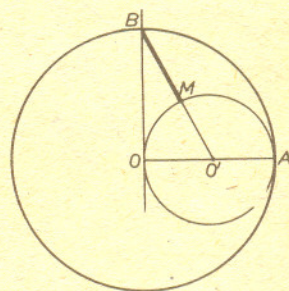
Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9



# O liczbie osi symetrii wielokąta



Rozwiązanie zadania M 457. Użyjemy dwumianu Newtona. Z jednej strony

$$\text{oczywiście } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2,$$

$$\text{z drugiej zaś } \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{2n} +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{(2n)^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{(2n)^3} +$$

$$+ \dots + \frac{1}{(2n)^n} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} < 2.$$

Dr hab. Edmund PUCZYŁOWSKI

Rozważając wielokąty o niewielkiej liczbie boków łatwo spostrzec, że liczba osi symetrii, jeśli tylko jest niezerowa, dzieli liczbę boków. Czy jest to prawda ogólna? Tak, i to właśnie chcemy udowodnić.

Niech więc dany będzie  $n$ -kąt  $W$  i niech  $I$  będzie zbiorem jego izometrii. Zauważmy, że

1° jeśli  $f, g \in I$ , to  $f \circ g \in I$  oraz  $f^{-1} \in I$ ;

2° dowolna izometria przeprowadza wierzchołki na wierzchołki, przy czym wierzchołki sąsiednie przechodzą na sąsiednie. Co więcej, izometria jest wyznaczona jednoznacznie przez wartości na dowolnej ustalonej parze wierzchołków sąsiednich, tzn. jeśli  $f, g \in I$  oraz  $P_1, P_2$  są wierzchołkami sąsiednimi i  $f(P_1) = g(P_1)$  oraz  $f(P_2) = g(P_2)$ , to  $f = g$ .

Z 2° wynika, że zbiór  $I$  można utożsamiać z pewnym zbiorem przekształceń zbioru wierzchołków  $W$ . To w szczególności oznacza, że zbiór  $I$  jest skończony.

Powiemy, że sąsiednie wierzchołki  $P_1, P_2$  są *kolejne*, gdy obiegając brzeg  $W$  w kierunku ruchu wskazówek zegara po przejściu przez  $P_1$  napotykamy jako następny wierzchołek  $P_2$ . Mówimy, że  $f \in I$  *zachowuje orientację*, gdy  $f(P_1), f(P_2)$  są kolejne, o ile tylko  $P_1, P_2$  są kolejne. Nietrudno spostrzec, że powyższa definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru pary kolejnych wierzchołków.

Oznaczmy przez  $Z$  zbiór izometrii zachowujących orientację, a przez  $S$  zbiór pozostałych izometrii. Zauważmy, że

3° i) przekształcenie tożsamościowe  $id$  należy do  $Z$ ;

ii) jeśli  $f, g \in Z$ , to  $f \circ g \in Z$  oraz  $f^{-1} \in Z$ ;

iii) jeśli  $f \in Z$  i  $g \in S$ , to  $f \circ g \in S$ ;

iv) jeśli  $f, g \in S$ , to  $f \circ g \in Z$ .

Może się zdarzyć, że zbiór  $S$  jest pusty. Jeśli jednak zbiór ten nie jest pusty, to ma on tyle samo elementów co zbiór  $Z$ . Załóżmy bowiem, że  $s \in S$ . Wówczas na podstawie 3° iii) mamy  $f \circ s \in S$  dla  $f \in Z$ . Przy tym jeśli  $f_1 \circ s = f_2 \circ s$ , to  $f_1 = (f_1 \circ s) \circ s^{-1} = (f_2 \circ s) \circ s^{-1} = f_2$ . Każdemu więc elementowi  $f \in Z$  przyporządkowujemy dokładnie jeden element  $f \circ s \in S$ . Jeśli jednak  $s_1 \in S$ , to na podstawie 3° ii) i 3° iv) mamy  $s_1 \circ s^{-1} \in Z$ . Teraz  $(s_1 \circ s^{-1}) \circ s = s_1$ . W wyniku opisanej operacji każdy element z  $S$  został przyporządkowany pewnemu elementowi zbioru  $Z$ . Zbiory  $Z$  i  $S$  mają więc tyle samo elementów.

Oczywiście dowolna symetria należy do  $S$ . Odwrotnie: jeśli  $s \in S$ , to dla pewnego wierzchołka  $P$  mamy  $s(P) \neq P$ . Nietrudno teraz spostrzec, że  $s$  jest symetrią względem symetralnej odcinka  $Ps(P)$ . W efekcie, jeśli tylko  $W$  ma jakąś oś symetrii, to ich liczba jest równa liczbie elementów zbioru  $Z$ . Zajmijmy się więc dokładniejszym zbadaniem tego zbioru.

Zauważmy, że

4° dowolna izometria z  $Z$  jest wyznaczona przez dowolny ustalony wierzchołek  $W$ . Dokładniej, jeśli  $P$  jest wierzchołkiem i dla pewnych  $f, g \in Z$  mamy  $f(P) = g(P)$ , to  $f = g$ .

5° jeśli  $f \in Z$ , a  $P, Q$  są dowolnymi wierzchołkami, to  $f(P)$  jest  $k$ -tym licząc od  $P$  w kierunku ruchu wskazówek zegara wierzchołkiem wtedy i tylko wtedy, gdy  $f(Q)$  jest  $k$ -tym wierzchołkiem licząc od  $Q$  w tym samym kierunku. Liczba  $k$  zależy więc tylko od  $f$ . Oznaczmy ją  $l(f)$ . (Przyjmujemy tutaj, że  $l(f)$  jest liczbą dodatnią, a więc  $l(id) = n$ .)

6° przekształcenie  $f$ , dla którego  $l(f)$  przyjmuje wartość minimalną, można scharakteryzować w ten sposób, że przy przejściu od dowolnego wierzchołka  $P$  do  $f(P)$  zgodnie z ruchem wskazówek zegara nie napotykamy dla żadnego  $g \in Z$  wierzchołka  $g(P)$ .

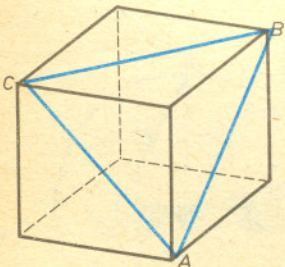
Z opisanych własności zbioru  $Z$  wynika, że elementy tego zbioru można ustawić w ciąg  $f = f_1, f_2, \dots, f_r = id$  w taki sposób, że  $l(f_1) < l(f_2) < \dots < l(f_r) = n$ . Ponieważ dla dowolnego  $1 \leq i \leq r-1$  i dowolnego wierzchołka  $P$ , przechodząc od  $f_i(P)$  do  $f_{i+1}(P)$  zgodnie z ruchem wskazówek zegara, dla żadnego  $g \in Z$  nie napotykamy wierzchołka  $g(P)$  oraz  $(f_{i+1} \circ f_i^{-1})(f_i(P)) = f_{i+1}(P)$ , więc na podstawie 6° wnioskujemy, że  $f_{i+1} \circ f_i^{-1} = f$ . Zatem

$$f_i = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{i \text{ razy}} \text{ dla } 1 \leq i \leq r \text{ oraz } l(f_i) = i \cdot l(f).$$

W szczególności  $n = l(f_r) = r \cdot l(f)$ . Oznacza to, że liczba elementów zbioru  $Z$ , a więc i liczba symetrii  $W$ , jeśli nie jest równa zeru, to dzieli  $n$ .



Rozwiązanie zadania M 458. Wystarczy zauważyć, że pole każdego rzutu prostopadłością jest dwukrotnie większe od pola rzutu trójkąta  $ABC$  (jak na rysunku). Wobec tego pole jest maksymalne, gdy płaszczyzna, na której leży trójkąt, jest równoległa do płaszczyzny rzutu.



Rozwiązanie zadania M 459.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(\xi = k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^k P(\xi = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(\xi = k) \\ &= E\xi. \end{aligned}$$

Zmiana kolejności sumowania jest dopuszczalna, bo sumowane wyrazy są nieujemne.



# Czy Księżyc jest satelitą Ziemi?

Dr Tomasz KWAST

Księżyc znajduje się w odległości  $r_0 = 3,844 \cdot 10^8$  m od Ziemi o masie  $m = 5,974 \cdot 10^{24}$  kg i w odległości  $R = 1,496 \cdot 10^{11}$  m od Słońca o masie  $M = 1,989 \cdot 10^{30}$  kg. Łatwo sprawdzić, że  $m/r_0^2 < M/R^2$ , a dokładniej: przyspieszenie Księżyca wywołane przez Słońce jest ponad dwukrotnie większe niż przyspieszenie wywierane przez Ziemię. W ogólności obszar przestrzeni, w którym przyspieszenie ze strony Ziemi dominuje nad przyspieszeniem ze strony Słońca, nazywamy strefą przyciągania Ziemi. Mówimy więc, że Księżyc znajduje się poza strefą przyciągania Ziemi. Skutkiem tego wokółsłoneczna orbita Księżyca jest wygięta stale w tę samą stronę — Słońce zawsze znajduje się po jej wklęsłej stronie. Wygląda to tak, jakby Księżyc był planetą, której ruch jest lekko zaburzany przez Ziemię. Tymczasem każdy widzi, że Księżyc jednak obiega Ziemię!

Dopóki mówimy tylko o kinematyce Księżyca, to obojętne jest, czy jego ruch przedstawimy jako geocentryczny perturbowany przez Słońce, czy heliocentryczny perturbowany przez Ziemię. Spodziewamy się jednak, że dynamika powinna podpowiedzieć, którą sytuację należy uznać za „prawdziwszą”. Czyżby więc należało uznać Księżyc za planetę, skoro Słońce działa nań silniej niż Ziemia? Otóż nie. Zauważmy bowiem, że prawie takiemu samemu przyspieszeniu ze strony Słońca podlega Ziemia. Widocznie więc nie ma znaczenia, jakie rzeczywiście przyspieszenie Księżyca wywołuje Słońce, a tylko ważna jest różnica  $a_p$  między tym właśnie przyspieszeniem  $a_{KS}$  i przyspieszeniem Ziemi  $a_{ZS}$ , którą tę różnicę nazwijmy przyspieszeniem perturbacyjnym. Ruch Księżyca można będzie uznać za geocentryczny (jedyńie perturbowany przez Słońce), jeżeli jego przyspieszenie perturbacyjne ze strony Słońca będzie dostatecznie małe w porównaniu z przyspieszeniem centralnym, czyli tu ze strony Ziemi.

Ale, jak powiedzieliśmy, równie dobrze można opisywać ruch Księżyca jako heliocentryczny perturbowany przez Ziemię. Wtedy przyspieszeniem perturbacyjnym będzie różnica  $a_p$  między jego przyspieszeniem  $a_{KZ}$  wywołanym przez Ziemię i przyspieszeniem Słońca  $a_{SZ}$  wywołanym też przez Ziemię. Analogicznie ruch Księżyca uznalibyśmy za heliocentryczny, gdyby w tym ujęciu przyspieszenie perturbacyjne było dostatecznie małe w porównaniu z centralnym, czyli ze strony Słońca.

Widzimy więc, że dla obu wersji opisu ruchu Księżyca można utworzyć stosunek

$$\gamma = \frac{\text{przyspieszenie perturbacyjne}}{\text{przyspieszenie centralne}}$$

i jeżeli będzie on mniejszy w wersji geocentrycznej, to uznamy Księżyc za satelitę Ziemi, jeśli zaś większy, to za planetę. W ogólności obszar przestrzeni, w którym  $\gamma$  jest mniejsza w wersji planetocentrycznej niż heliocentrycznej, nazwiemy strefą oddziaływania planety.

Nietrudno jest znaleźć przybliżony wzór na rozmiar strefy oddziaływania. Kto nie ma na to ochoty, może kontynuować czytanie dopiero od słowa **ostatecznie**.

a. Opis geocentryczny (rys. 1).

$$a_p = a_{KS} - a_{ZS} = \left[ \frac{GM}{q^2} \cos \psi - \frac{GM}{R^2}, \frac{GM}{q^2} \sin \psi \right]$$

Należy teraz uwzględnić, że  $\cos \psi \cong 1$ ,  $\sin \psi = \sin \varphi \frac{r}{q}$ ,  $q^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi$ , następnie rozwinąć w szereg względem małej wielkości  $r/R$  i zachować tylko pierwsze jej potęgi. Dostaniemy wtedy

$$a_p = \frac{GMr}{R^3} [2 \cos \varphi, \sin \varphi],$$

$$a_p = \frac{GMr}{R^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi},$$

$$\gamma_{geoc} = a_p \left/ \frac{Gm}{r^2} \right. = \frac{M}{m} \frac{r^3}{R^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi}.$$



**Rozwiązanie zadania F 213.** Całkowita energia wypromieniowana przez kuliste ciało w ciągu jednostki czasu zgodnie ze wzorem Stefana-Boltzmann'a wynosi

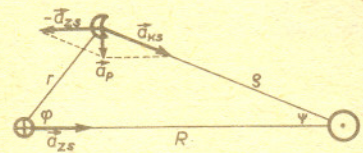
$$E = 4\pi R^2 \sigma T^4, \quad \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \text{ K}^{-4}.$$

Jednocześnie powierzchnia satelity absorbuje promieniowanie ciepłe pochodzące ze Słońca. Ponieważ przyjmujemy, że zdolność absorpcyjna powierzchni wynosi 1 (ciało doskonale czarne), to zgodnie z prawem Kirchhoffa moc promieniowania absorbowanego przez powierzchnię jest równa mocy promieniowania emitowanego przez nią, gdy jej temperatura równa jest temperaturze otoczenia. Wielkość energii zaabsorbowanej wyniesie więc

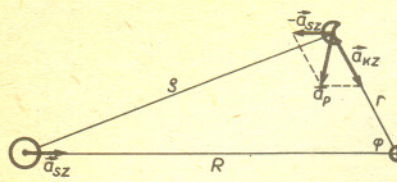
$$E_{abs} = C\pi R^2,$$

gdzie przyjmujemy, że satelita zwrócony jest tylko jedną stroną w kierunku Słońca. Porównując energię wypromieniowaną z pochłoniętą otrzymujemy

$$T = \sqrt[4]{C/(4\sigma)} \approx 280 \text{ K}.$$



Rys. 1



Rys. 2

b. Opis heliocentryczny (rys. 2).

$$a_p = a_{kz} - a_{sz} = \left[ \frac{Gm}{r^2} \cos\varphi - \frac{Gm}{R^2}, \frac{Gm}{r^2} \sin\varphi \right] \cong \frac{Gm}{r^2} [\cos\varphi, \sin\varphi]$$

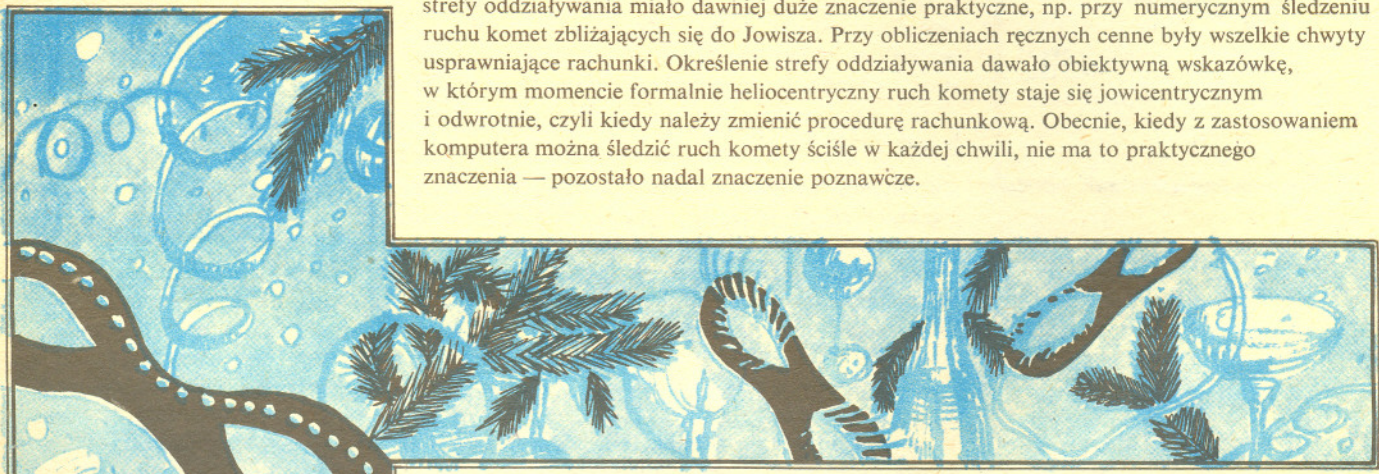
$$a_p = \frac{Gm}{r^2},$$

$$\gamma_{\text{helloc}} = a_p \frac{GM}{R^2} = \frac{m}{M} \frac{R^2}{r^2}.$$

Przyrównując oba wyrażenia na  $\gamma$  dostajemy ostatecznie wzór na rozmiar strefy oddziaływania planety

$$r = R \sqrt[5]{\frac{m^2/M^2}{1+3\cos^2\varphi}}.$$

Podstawivszy dane liczbowe stwierdzamy, że strefa oddziaływania Ziemi rozciąga się do odległości co najmniej 800 tys. km, a więc Księżyc jest stale wewnątrz niej. Oddychamy z ulgą — Księżyc rzeczywiście jest satelitą Ziemi. To samo zresztą dotyczy satelitów innych planet. Pojęcie strefy oddziaływania miało dawniej duże znaczenie praktyczne, np. przy numerycznym śledzeniu ruchu komet zbliżających się do Jowisza. Przy obliczeniach ręcznych cenne były wszelkie chwytysprawniające rachunki. Określenie strefy oddziaływania dawało obiektywną wskazówkę, w którym momencie formalnie heliocentryczny ruch komety staje się jowicentrycznym i odwrotnie, czyli kiedy należy zmienić procedurę rachunkową. Obecnie, kiedy z zastosowaniem komputera można śledzić ruch komety ściśle w każdej chwili, nie ma to praktycznego znaczenia — pozostało nadal znaczenie poznawcze.



## Moment bezwładności w geometrii

Radosław SZMYTKOWSKI

Pojęcie momentu bezwładności zostało wprowadzone do fizyki przez Eulera, gdy ten podawał równania ruchu bryły sztywnej. Od tej pory udowodniono wiele własności momentu, np. twierdzenie Steinera, twierdzenie o osiach prostopadłych, własność nierówności trójkąta i inne. Okazało się również, że pojęcie momentu bezwładności może być przydatne przy rozwiązywaniu problemów geometrycznych. Przedstawimy tu kilka zastosowań do figur płaskich. Pierwsze z nich dotyczą

Twierdzenia o siecznych przechodzących przez środek ciężkości trójkąta:

Jeżeli przez środek ciężkości trójkąta przeprowadzona jest prosta, to suma odległości od tej prostej dwóch wierzchołków trójkąta, znajdujących się po jednej stronie, równa jest odległości trzeciego wierzchołka od tej prostej.

Dowód. Zarówno w tym dowodzie, jak i w następnych będziemy korzystali z następującego faktu, który łatwo udowodnić: środek ciężkości trójkąta pokrywa się ze środkiem ciężkości figury złożonej z trzech punktów materialnych o równych masach umieszczonych w wierzchołkach tego trójkąta.

Moment bezwładności wyżej opisanego układu punktów materialnych względem osi  $K$  przechodzącej przez środek ciężkości tego układu i leżącej w płaszczyźnie trójkąta jest dany wzorem

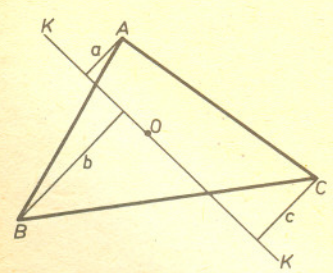
$$(1) \quad J_O = \frac{m}{3} (a^2 + b^2 + c^2),$$

gdzie  $a, b, c$  są odległościami odpowiednich wierzchołków od osi  $K$ , a  $m$  — suma mas (rys. 1). Moment bezwładności względem osi równoległej do  $K$  i przechodzącej przez punkt  $A$  jest dany wzorem  $J_A = J_O + ma^2$ . Z drugiej strony

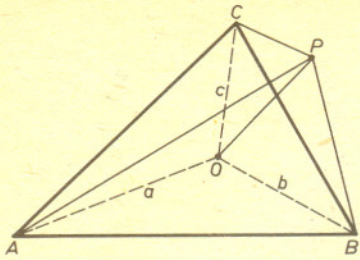
$$(2) \quad J_A = \frac{m}{3} (c-a)^2 + \frac{m}{3} (a+b)^2,$$

czyli

$$J_O = \frac{1}{3} m(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{2}{3} ma^2 + \frac{2}{3} ma(b-c),$$



Rys. 1



Rys. 2

skąd 
$$\frac{2}{3}ma^2 - \frac{2}{3}ma(b-c) = 0,$$

oraz 
$$a+c = b \quad \text{c.b.d.o.}$$

Podobnie, wykorzystując własności momentu bezwładności można udowodnić następujące

**Twierdzenie Leibniza:**

Suma kwadratów odległości dowolnego punktu  $P$  od wierzchołków trójkąta równa jest sumie kwadratów odległości wierzchołków od środka ciężkości trójkąta i potrójonego kwadratu odległości punktu  $P$  od środka ciężkości (rys. 2).

**Dowód.** Ponownie zastępujemy trójkąt trzema masami,  $m/3$  każda, umieszczonymi w jego wierzchołkach. Moment bezwładności względem osi przechodzącej przez punkt  $P$  i prostopadłej do płaszczyzny trójkąta jest równy

$$J_P = \frac{m}{3}(PA^2 + PB^2 + PC^2),$$

gdzie  $PA, PB, PC$  są odpowiednio odległościami punktu  $P$  od wierzchołków  $A, B, C$  trójkąta. Z drugiej strony, na mocy twierdzenia Steinera, moment ten jest równy

$$J_P = J_O + m \cdot PO^2,$$

gdzie  $J_O$  — moment bezwładności względem osi równoległej do poprzednio rozważanej i przechodzącej przez środek ciężkości  $O$  trójkąta, a  $PO$  — odległość od punktu  $P$  do punktu  $O$ . Przyrównując oba wyrażenia na  $J_P$  i uwzględniając, że

$$J_O = \frac{m}{3}(a^2 + b^2 + c^2),$$

gdzie  $a, b, c$  są odpowiednio odległościami wierzchołków  $A, B, C$  od punktu  $O$ , otrzymamy

$$\frac{m}{3}(PA^2 + PB^2 + PC^2) = \frac{m}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + m \cdot PO^2,$$

skąd natychmiast wynika teza twierdzenia.

Czytelnikowi proponujemy, aby korzystając z własności momentu bezwładności rozwiązał następujące

**Problemy:**

- 1) udowodnić, że suma kwadratów środkowych trójkąta jest równa  $3/4$  sumy kwadratów boków,
- 2) znaleźć długości środkowych trójkąta mając dane długości jego boków,
- 3) znaleźć odległość środka okręgu opisanego na trójkącie od środka ciężkości tego trójkąta.

Oczywiście, moment bezwładności można wykorzystać nie tylko do dowodzenia własności trójkąta. Ilustruje to następujący przykład.

**Problem.**

Pokazać, że dla cienkiego pierścienia w kształcie elipsy o masie  $m$  i dużej półosi  $a$  zachodzi

$$\sum_i \Delta m_i \cdot l_i = m \cdot a,$$

gdzie  $\Delta m_i$  — masa nieskończenie małego elementu pierścienia odległego o  $l_i$  od jednego z ognisk elipsy.

**Rozwiązanie.** Momenty bezwładności względem osi przechodzących przez ogniska  $F_1$  i  $F_2$  (rys. 3), prostopadłych do płaszczyzny rysunku, są oczywiście równe:

$$(3) \quad \sum_i \Delta m_i \cdot l_i^2 = \sum_i \Delta m_i \cdot k_i^2,$$

gdzie  $\Delta m_i$  — jak wyżej,  $l_i, k_i$  — odpowiednio odległości tego elementu od ognisk  $F_1$  i  $F_2$ . Korzystając z następującej własności elipsy  $k_i + l_i = 2a$  i podstawiając to do (3) mamy

$$\sum_i \Delta m_i \cdot l_i^2 = \sum_i \Delta m_i (2a - l_i)^2,$$

co po przekształceniu daje

$$4m \cdot a^2 = 4a \cdot \sum_i \Delta m_i \cdot l_i \quad \left( \sum_i \Delta m_i = m \right)$$

i ostatecznie

$$(4) \quad \sum_i \Delta m_i \cdot l_i = m \cdot a.$$

**Uwaga.** Własność powyższą można też udowodnić nie korzystając wcale z pojęcia momentu bezwładności. Jak?

Czytelnikowi zainteresowanemu opisywanym tutaj zagadnieniem polecamy artykuł w radzieckim czasopiśmie *Kwant* 7/1984 pod tym samym tytułem co ten. Można tam znaleźć wiele innych geometrycznych twierdzeń uzyskanych użytą tu metodą.



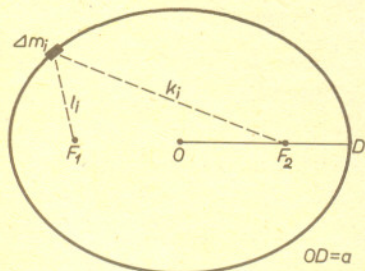
**Rozwiązanie zadania F 212.** Aby obliczyć, ile energii zaabsorbuje powierzchnia rakiety, musimy obliczyć zdolność absorpcyjną zewnętrznej powierzchni. Zdolność absorpcyjna  $A$  jest stosunkiem energii absorbowanej z padającego promieniowania do energii całkowitej tego promieniowania. Na podstawie wzoru Stefana-Boltzmana całkowita zdolność emisyjna  $E_{em}$ , tzn. ilość energii wypromieniowanej przez jednostkę powierzchni w ciągu 1 s dla danej temperatury jest równa:

$$E_{em} = A\sigma T^4, \text{ stąd } A = E_{em}/(\sigma \cdot T^4),$$

gdzie  $\sigma$  jest stałą Stefana-Boltzmana równa  $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^{-4}$ . Na podstawie danych otrzymujemy  $A = 0,88$ . Energia absorbowana  $E_{abs} = AE$ , która oświetla powierzchnię  $P = vts$ , musi być co najmniej równa ilości ciepła potrzebnej na stopienie masy  $m = \rho Ph$  metalu o gęstości  $\rho$ . Otrzymujemy stąd energię wypromieniowaną przez laser

$$E = \frac{\rho v t s h}{A} c_w (T_k - T),$$

gdzie efekty przewodnictwa ciepła zostały pominięte. Przyjmując dane dla stali  $\rho = 7700 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_w = 460 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ ,  $T_k = 1800^\circ\text{C}$  otrzymujemy  $E \approx 512000 \text{ J}$ .



Rys. 3



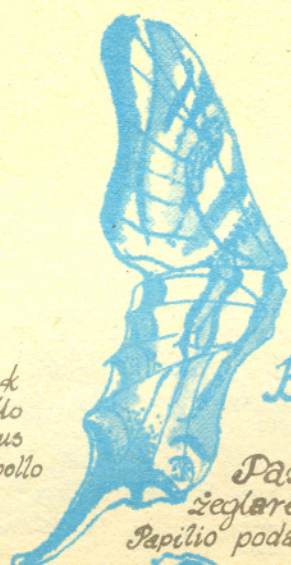


# mata delta

Motyle można rozpoznać po kształcie skrzydeł, np.:



A. Niepyłak Apollo  
*Parnassius apollo*



B. Pas Żeglarek  
*Papilio podalirius*



C. Pas królowej  
*Papilio machaon*



D. Pusałka pawik  
*Venessa io*



E. Pusałka ceik  
*Polygonia c-album*

## Kolory motyli

### Skąd biorą się kolory?

Biorą się ze światła słonecznego. Jest ono białe, co oznacza, że jest mieszaniną wszystkich barw — zawiera fale o długościach od  $\frac{1}{2600}$  mm (fiolet)

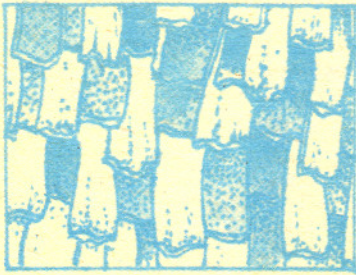
do  $\frac{1}{1300}$  mm (czerwień). Kolor przedmiotu, jaki obserwujemy, nie jest jednak związany z wpadaniem do naszego oka fal o odpowiadającej mu długości. Tak jest tylko dla przedmiotów świejących. Kolor wszystkich innych przedmiotów to wrażenie wywołane w naszym oku przez brak pewnych barw (zupełnie innych od tych, które postrzegamy) w pełnym widmie światła białego.

### Pigmenty, czyli pochłaniacze

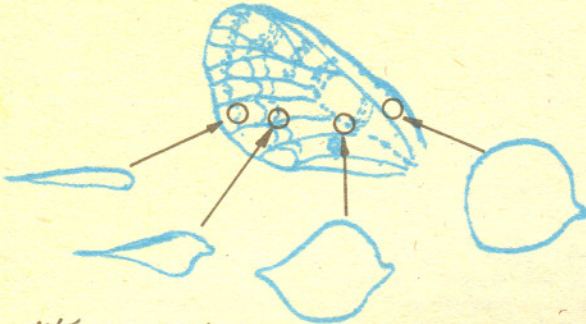
to, z punktu widzenia fizyki, rezonatory. Np. chlorofil jest „nastrojony” na barwę czerwoną. Energia fali o długości około 0,001 mm jest więc mu przekazywana i fala ta ginie. A my widzimy „resztę”, co robi na nas wrażenie zieloności. I taki właśnie kolor mają dla nas rośliny. W ten sposób działają wszystkie pigmenty.

### Barwa przeciw barwie

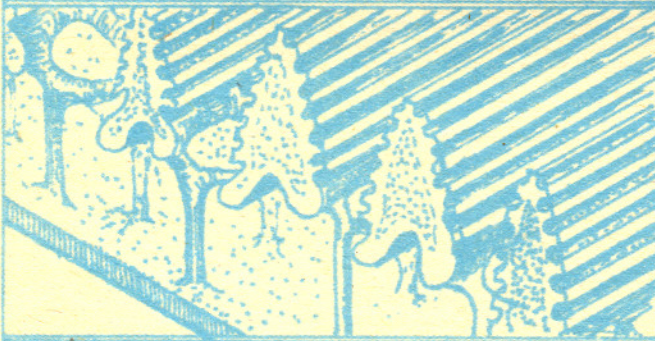
Jeżeli nakładają się dwie fale tej samej długości, ale przesunięte w fazie, następuje ich interferencja. Gdy przesunięcie to wynosi połowę okresu — fala wygasa się. I to jest drugi sposób powstawania obserwowanych kolorów. Jeśli światło odbije się od zewnętrznej i wewnętrznej ścianki przezroczystej płytki, to dla pewnej barwy różnica fazy obu odbitych fal może spowodować jej wygaszenie. Zależy to tylko od grubości płytki — nie zależy od materiału, z którego jest ona zbudowana. Np. płytka o grubości 0,002 mm wygasi barwę czerwoną (dlaczego akurat ją?) i będziemy płytkę widzieli jako zieloną. Podobnie płytkę o grubości 0,001 mm zobaczymy jako czerwoną — prawda?



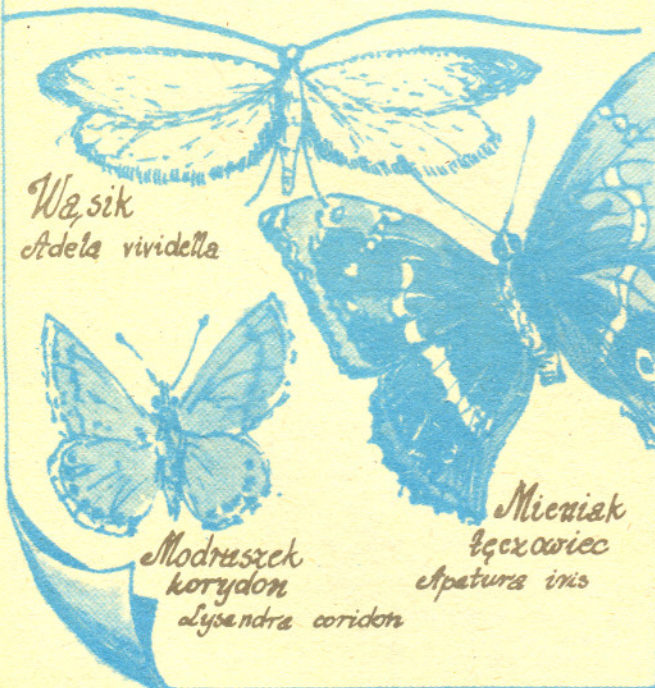
*Dachówkowate  
ułożenie łusek  
u ruszatki  
pokrzywnika*



*Włoski i łuski na skrzydle niepył-  
ka apollo*



*Warstwowa struktura łuski*



*Wąsik  
Adela vividella*

*Modraszka  
korydon  
Lycaonida coridon*

*Mieniak  
tęczowiec  
Apatura inis*

W ten sposób powstają różnorodne kolory masy perłowej — ślimak czy małż nakładają warstwę szkliwa o nierównej grubości. Bardziej prymitywny przykład to cienka warstewka (też nierówna) rozlanej na kałuży benzyny.

Interferencja powodująca wygaszanie może mieć miejsce nie tylko w przypadku przezroczystych płytek. Interferować mogą również fale odbijające się od nierównej powierzchni. Wówczas to, która barwa się wygasi, zależy od kierunku patrzenia.

A jak to „robią” motyle?

Oczywiście wszystkimi sposobami. Jako łuskoskrzydłe używają, rzecz jasna, łusek. Różnego kształtu łuski, w ogromnej liczbie (200—600 na mm<sup>2</sup>) pokrywające skrzydła i zawierające różne pigmenty, są źródłem całej gamy kolorów. Każda łuska zawiera co prawda tylko jeden pigment, a pigmentów „do wyboru” motyl ma na ogół nie więcej niż pięć, jednak przy tej liczbie możliwe jest tyle różnych kombinacji, że nie powinno dziwić obserwowane bogactwo.

Te same łuski pozwalają, przez swą budowę, uzyskać kolor i metodą interferencji. Najczęściej łuska ma dwie warstwy: dolną — gładką, zawierającą pigment i górną — o regularnie pozałamywanej powierzchni wywołującej interferencję. Bywa też odwrotnie: widoczne na okładce niebieskie półksiężycy skrzydła ruszatki pawika powstały przez interferencję na dolnej pozałamywanej powierzchni łusek (górną ich powierzchnia jest gładka i bez pigmentu, czyli przezroczysta).

Motyl wąsik swój kolor zielony uzyskuje i przez pigment, i przez interferencję.

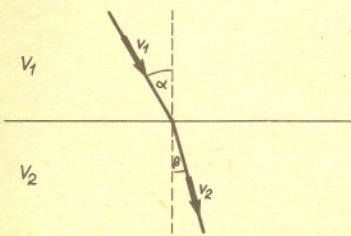
Piękny modry kolor modraszków to wynik wielokrotnej interferencji — ich łuski są wielowarstwowe.

Zmianę koloru przy zmianie kierunku patrzenia (a więc jest to kolor powstały przez interferencję) najefektowniej prezentuje mieniak tęczowiec. Metaliczny połysk jego skrzydeł to z kolei wynik działania pigmentu.

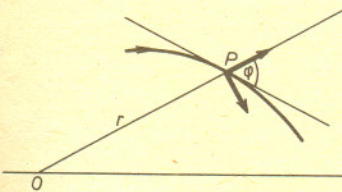
Jest rzeczą ciekawą, że u motyli (i w ogóle u zwierząt) prawie nigdy kolor zielony nie powstaje w wyniku działania samego pigmentu. Sądzi się nawet, że zielony kolor ich larw to po prostu wynik przyswojonego przez nie chlorofilu, czyli zwyczajnie jest on „pożyczony” od roślin.

A na koniec zagadka: jak są wobec tego zbudowane łuski skrzydeł motyli białych?

*Małą Deltę przygotowali  
Maciej JĘDRZEJCZAK i Janusz KUPRYJANOWICZ*



Rys. 1. Przejście cząstki przez barierę potencjału.



Rys. 2

Nasze poszukiwania ośrodków optycznych, w których możliwe dużo promieni świetlnych „zatacza” okręgi, będą po trosze przypominały postępowanie magika wyciągającego królika z kapelusza. Tym królikiem będą pewne zasady optyki geometrycznej, a kapeluszem powszechnie znane prawa mechaniki.

Zacniemy od rozpatrzenia dwóch obszarów rozdzielonych płaszczyzną, w których dana cząstka przyjmuje energię potencjalną równą odpowiednio  $V_1$  i  $V_2$  (rys. 1). Podczas przejścia cząstki przez granicę obszarów zmienia się tylko jej składowa prędkości prostopadła do „bariery”.

$$\text{Mamy więc } \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{E_{2kin}}{E_{1kin}}} = \sqrt{\frac{E-V_2}{E-V_1}},$$

gdzie  $E$  jest stałą podczas ruchu całkowitą energią cząstki. Wielkość  $\sqrt{E-V(r)}$  odpowiada więc dokładnie optycznemu współczynnikowi załamania. Zrozumiałe jest teraz, że zasadzie Fermata w optyce (patrz *Delta* 6/1985), mówiącej, iż promień światła biegnie między punktami  $A$  i  $B$

po torze, wzdłuż którego całka  $\int_A^B n(s) ds$  przyjmuje wartość ekstremalną, odpowiada

w mechanice zasada Jacobiego, według której wzdłuż toru ciała  $\int_A^B \sqrt{E-V(r)} ds = \text{extremum}$ .

Z tego wynika, że jeśli ciało o energii  $E$  zakreśla w polu o potencjale  $V(r)$  pewną krzywą, to po tej krzywej może biec światło w ośrodku o współczynniku załamania  $n(r) = \sqrt{E-V(r)}$  (z dokładnością do stałego czynnika).

Na początek postaramy się „wyciągnąć” pewną zasadę optyki geometrycznej z prawa zachowania momentu pędu w polu sił centralnych. Prawo to można zapisać w postaci  $mvr \sin \varphi = \text{const}$ , gdzie  $r$  jest odległością od centrum siły,  $m$  — masą ciała,  $v$  jego prędkością, a  $\varphi$  kątem między prędkością i promieniem wodzącym (rys. 2).

Z rozważań wstępnych wiemy, że  $n(r) \sim \sqrt{E_{kin}} \sim v$ , czyli zasadzie zachowania momentu pędu odpowiada w optyce zasada

$$nr \sin \varphi = \text{const};$$

jest to tzw. prawo Bouguera dla ośrodków o symetrii sferycznej, spełnione wzdłuż każdego promienia świetlnego.

Aby otrzymać równanie promienia świetlnego we współrzędnych biegunowych  $(r, \theta)$ ,

zauważymy, że  $\sin \varphi = \frac{r(\theta)}{\sqrt{r^2(\theta) + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}$ ,

a następnie z prawa Bouguera

$$(1) \quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{C} \sqrt{n^2 r^2 - C^2}, \quad \text{gdzie } C \text{ — stała.}$$

Z powyższego widać, że jeśli  $n(r) = k/r$ , to z dowolnego punktu ośrodka można wysłać promień, który będzie biegł po okręgu wokół punktu  $O$ .

Omówimy teraz ośrodek, zwany „rybim okiem”, o współczynniku załamania

$$n(r) = \frac{n_0}{1 + (r/a)^2}, \quad n_0 \text{ i } a \text{ — stałe. Jego własności badał Maxwell.}$$

Podstawiając  $n(r)$  do (1) otrzymujemy po scałkowaniu

$$(2) \quad \theta = \int \frac{K(1 + \varrho^2) d\varrho}{\varrho \sqrt{\varrho^2 - K^2(1 + \varrho^2)^2}}, \quad \text{gdzie wprowadziliśmy oznaczenia } \varrho = r/a, K = C/an_0.$$

Łatwo wykazać, że

$$\frac{K(1 + \varrho^2)}{\varrho \sqrt{\varrho^2 - K^2(1 + \varrho^2)^2}} = \frac{d}{d\varrho} \left[ \arcsin \left( \frac{K}{\sqrt{1 - 4K^2}} \frac{\varrho^2 - 1}{\varrho} \right) \right],$$

możemy więc przepisać (2) w postaci  $\sin(\theta - \alpha) = \frac{C}{\sqrt{a^2 n_0^2 - 4C^2}} \frac{r^2 - a^2}{ar}$ ,

gdzie  $\alpha$  — stała całkowania.

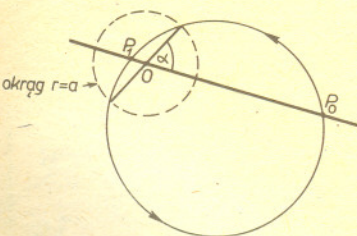
Dla jednoparametrowej rodziny promieni przechodzących przez punkt  $(r_0, \theta_0)$  mamy

$$\frac{r^2 - a^2}{r \sin(\theta - \alpha)} = \frac{r_0^2 - a^2}{r_0 \sin(\theta_0 - \alpha)}.$$

Jak widać, przy dowolnej wartości parametru  $\alpha$  równanie to jest spełnione przez  $r_1 = a^2/r_0$  i  $\theta_1 = \pi + \theta_0$ , skąd wynika, że wszystkie promienie wysłane z dowolnego punktu  $P$  zbiegają się w punkcie  $P_1$ , leżącym na prostej łączącej  $P_0$  i  $O$ ;  $P_0$  i  $P_1$  położone są po przeciwnej stronie  $O$ , oraz  $OP_0 \cdot OP_1 = a^2$  (rys. 3). Obraz punktu otrzymujemy więc przez inwersję.

Czytelnik sam sprawdzi na podstawie ostatniego wzoru, że każdy promień przecina okrąg  $r = a$  w końcach jego średnicy.

Stanisław Lem w swojej pierwszej powieści fantastyczno-naukowej *Astronauci* umieścił wyjaśnienie przez chińskiego fizyka Lao Czu sytuacji, w której promienie światła biegają po okręgach (rozdział „Profesor Lao Czu”). Tam przyczyną tego zjawiska była bardzo silna grawitacja. Obok zamieszczamy opis podobnej sytuacji, ale mającej zupełnie inne przyczyny.



Rys. 3. Promienie w „rybim oku” Maxwella.

Najjaśniejsza gwiazda nieba — Syriusz ( $\alpha$  *Canis Majoris*) góruje w Nowy Rok o północy miejscowego czasu lokalnego. Świeci wtedy pięknym, jasnym blaskiem około  $20^\circ$  nad południowym horyzontem.

Lokalny czas miejscowy jest równomiernie płynącym czasem określającym położenie tzw. Słońca średniego w danej miejscowości. Ponieważ płynie równomiernie, mógłby być wskazywany przez zegarki. Jednak konieczność ciągłej jego zmiany przy podróżowaniu spowodowała wprowadzenie czasu strefowego. Jest to czas miejscowy pewnego wybranego południka, obowiązujący na określonym obszarze. Aby w danej miejscowości znaleźć moment czasu lokalnego, wystarczy do czasu strefowego (zegarkowego) dodać różnicę długości geograficznej miejscowości i południka danej strefy wyrażoną w minutach czasowych.

Niemal w tym samym momencie, w którym góruje Syriusz, dołuje inna bardzo jasna gwiazda — Wega ( $\alpha$  *Lyrae*). Mieszkańcy Polski na północ od szerokości geograficznej  $51^\circ 20'$  mają szansę zaobserwować ją tuż nad północnym horyzontem. W Polsce południowej Wega nie jest gwiazdą okołobiegunową, a więc w momencie dołowania nie jest widoczna.

Syriusz góruje nad tzw. punktem południa (miejsce przecięcia południka niebieskiego z horyzontem), a Wega dołuje nad punktem północy. Obserwacje tych jasnych, a więc łatwych do odnalezienia gwiazd, w momencie ich kulminacji pozwalają na dobre zorientowanie stron świata. W dniach poprzedzających Nowy Rok i następujących po nim momenty kulminacji można łatwo wyznaczyć, pamiętając, że dnia następnego gwiazda góruje lub dołuje o 4 minuty wcześniej.

W naszych szerokościach geograficznych na skutek niskiego położenia nad horyzontem Syriusz silnie migocze mieniąc się przy tym różnymi barwami, widzimy go bowiem przez grubą warstwę ruchomej atmosfery. W rzeczywistości jednak gwiazda ma barwę

białą. Ścisłej — białą barwę ma jaśniejszy składnik tego układu podwójnego (Syriusz A). Jest on gwiazdą ciągu głównego, podobną pod względem zaawansowania ewolucyjnego do Słońca, choć masywniejszą i jaśniejszą od niego. Drugi składnik układu (Syriusz B) — biały karzeł — jest trudny do zaobserwowania. Dostrzeżenie go jest możliwe pod warunkiem zastosowania specjalnych technik osłabiających silny blask Syriusza A.

Wzmianki o Syriuszu pochodzące ze starożytnej Grecji, Babilonu czy Rzymu wprawiają astronomów w pewne zakłopotanie. Mogą one bowiem sugerować, że w ciągu zaledwie kilkunastu wieków układ przeszedł fazę gwałtownej ewolucji. Starożytni kronikarze nazywali go „Czerwonym Syriuszem”, co może oznaczać, że w ich czasach gwiazda świeciła zdecydowanie czerwonym blaskiem. Rzeczywiście teoria przewiduje, że Syriusz B — obecny biały karzeł — był kiedyś czerwonym olbrzymem. Niewątpliwie parę AB można było wtedy obserwować z Ziemi jako czerwoną i bardzo jasną gwiazdę ( $-4$  mag), niewiele słabszą niż Wenus w maksimum blasku. Zachęcające byłoby zatem przyjąć, że przekształcenie Syriusza B z czerwonego olbrzyma w białego karła nastąpiło niemal na „oczach ludzkich” w ciągu ostatnich dwóch tysięcy lat.

Jednak tajemnicze zmiany barwy i jasności Syriusza nie są do końca wyjaśnione. Zgodnie z teorią ewolucji gwiazd przejście od fazy czerwonego olbrzyma do fazy białego karła zajmuje gwiazdzie typu Syriusza B o wiele więcej czasu niż owe 2—3 tysiące lat, które upłynęły od historycznych przekazów. Przejściu takiemu powinien towarzyszyć wypływ materii, której pozostałości powinny być do dzisiaj zauważalne w układzie, a której jednak nie obserwuje się. Wydaje się więc, że tajemnicza czerwona barwa Syriusza wymaga innego niż „ewolucyjne” wyjaśnienia, jeśli, oczywiście, bez zastrzeżeń wierzymy starożytnym kronikom.

mgr Joanna UDALSKA



## Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 457. Udowodnić, że  $\frac{1}{2n} < \sqrt[n]{2} - 1 \leq \frac{1}{n}$  dla  $n \in \mathbb{N}$ .

Rozwiązanie na str. 4

M 458. Przy jakim położeniu prostopadłościanu względem płaszczyzny jego rzut prostopadły na tę płaszczyznę ma największe pole?

Rozwiązanie na str. 4

M 459. Niech  $\xi$  będzie zmienną losową przyjmującą wartości 0, 1, 2 ... Wykazać, że zachodzi następujący wzór na wartość oczekiwaną

$$E\xi = \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi \geq n).$$

Rozwiązanie na str. 4

Redaguje mgr Rafał STAROŃSKI

F 212. Jaka co najmniej musi być energia  $E$  wypromieniowana przez laser impulsowy umieszczony na orbicie, aby wiązka światła mogła naruszyć powłokę rakiety transkontynentalnej? Prędkość rakiety w górnej części toru nie przekracza wartości  $v = 1$  km/s. Czas trwania impulsu lasera wynosi  $t = 0,1$  ms, a średnica wiązki  $s = 1$  cm. Wiadomo też, że metalowy korpus rakiety rozgrzewa się na skutek tarcia w atmosferze do  $T = 527^\circ\text{C}$ , a jego zdolność emisyjna wynosi  $E_{em} = 2 \cdot 10^4$  J/(m<sup>2</sup> s). Grubość powłoki jest równa 10 cm. Przyjmujemy, że własności emisyjne i absorpcyjne nie zależą od długości fali promieniowania. Niezbędne dane należy odszukać w tablicach traktując powłokę rakiety jako stalową płytę. Rozwiązanie na str. 7

F 213. Nieczynny satelita telekomunikacyjny krąży wokół Ziemi. Oszacuj, do jakiej temperatury rozgrzewa się on w czasie przebywania w nasłonecznionej części orbity. Dla uproszczenia przyjmij, że satelita jest ciałem doskonale czarnym w kształcie kuli o promieniu  $R$ . Ilość energii słonecznej padającej w ciągu 1 s na 1 m<sup>2</sup> powierzchni wynosi  $C \cong 1,4 \cdot 10^3$  J/(sm<sup>2</sup>). Rozwiązanie na str. 5



Pora na doroczne omówienie ligi zadaniowej. Po podsumowaniu punktów za zadania z matematyki z numerów  $\leq 4/1986$

**Klub 44 M** liczył 42 członków. Dwie osoby, które przekroczyły sumę 44 po ocenieniu zadań z numeru 5, „zaokrągliły” tę liczbę do 44. A więc mamy jubileusz!

Jak co roku, drukujemy obszerniejszą tabelę ligową.

W następnych miesiącach będziemy znów podawać tylko ścisłą czołówkę (6—8 nazwisk). Zaprzestaniemy jednak podawania nazwisk tych uczestników, którzy osiągnąwszy stan konta bliski 44 punktów zatrzymali się i przestali przysyłać rozwiązania.

Przyjmujemy zasadę, że nazwisko uczestnika może być wymienione w czołówce z nie zmienioną sumą punktów co najwyżej trzykrotnie. Następny raz ukaże się dopiero wtedy, gdy wykona ruch w górę. Jedynie w noworocznym omówieniu będziemy stale ogłaszać obszerną czołówkę (około 60 nazwisk) w komplecie.

Korzystamy z okazji, by zwrócić się do Czytelników z prośbą o opinie na temat zadań ligowych, ich trudności i tematyki — czego brakuje, a czego jest, być może, za dużo — i o wszelkiej uwagi dotyczące ligi zadaniowej. Prosimy przy tym, by ewentualne uwagi tego typu były pisane na oddzielnych kartkach (nie razem z rozwiązaniami zadań), a także oddzielnie od innej korespondencji kierowanej do redakcji *Delty*.

Uczestników startujących jednocześnie w lidze **M** i **F** prosimy ponadto o przysyłanie wszelkiej korespondencji (rozwiązań, propozycji, uwag) dla **M** i **F** w oddzielnych kopertach. I jeszcze jedna prośba. Choć nie jest to wymagane regulaminem, miło nam, gdy uczestnik ligi, czy to w momencie rozpoczęcia swego udziału, czy to po jakimś okresie startów, decyduje się napisać parę słów o sobie (wiek, zawód, praca, inne dane, które mogą być interesujące). Zdecydowanie natomiast wymagamy, by każde rozwiązanie było podpisane imieniem i nazwiskiem. Gdy ktoś chce poznać swoje oceny (patrz omówienie sprzed roku), powinien nam przysłać kartkę pocztową (oddzielną dla **M** i **F**), ofrankowaną i zaadresowaną do siebie, ze sporządzoną tabelką z umieszczonymi w jej rubrykach numerami zadań i z pustymi okienkami do wpisania ocen.

Przejdźmy do zadań z matematyki z ubiegłego roku.

W nielicznych tylko przypadkach udało się uczestnikom znaleźć rozwiązania wyraźnie zgrabniejsze od naszych, i to głównie w zadaniach najłatwiejszych (z czego by wynikało, że my mamy skłonność do zbędnego komplikowania rzeczy prostych...). Za to nierzadko były znajdowane interesujące uogólnienia. Jak co roku, przedstawiamy szkiec ciekawszych rozwiązań i uogólnień oraz odnotowujemy zadania, które zostały rozwiązane prawidłowo przez niewielką liczbę uczestników. Brak komentarza przy informacji o rozwiązaniach oznacza, że nie odbiegają one w istotny sposób prostotą ani ogólnością od rozwiązań podanych przez nas.

**Zadanie 109** [Wielomiany o współczynnikach  $\pm 1$  i pierwiastkach wyłącznie rzeczywistych] (*WT* = 3,33) rozwiązyli poprawnie tylko M. Mazur, A. Pawłowski, T. Szymczyk, P. Figurny, P. Jędrzejewicz, Z. Koza, D. Kurpiel.

**Zadanie 111** [Zbiór wypukły ograniczony w  $\mathbb{R}^3$ , nie będący kulą, którego brzeg ma w każdym punkcie płaszczyznę styczną i przez którego każdy punkt przechodzi średnica] (*WT* = 3,60). Przykład (taki sam, jak w rozwiązaniu w *Delcie*) skonstruowali: M. Gałecki, J. Janowicz, Z. Koza (z dowodem) oraz J. Ciach, T. Józefczyk, K. Kowalkowski (bez dowodu). Ponadto T. Rawlik dał dobry przykład: koło(!) — sprytnie wykorzystując przeoczenie w sformułowaniu treści (brak żądania, by zbiór miał niepuste wnętrze).

**Zadanie 117** [Dla czworościanów  $A_1A_2A_3A_4$  opisanych na kuli  $K(O, 1)$ ,  $OA_1 \geq \dots \geq OA_4$ ,  $\inf OA_i = ?$ ] (*WT* = 3,31). Tylko D. Kurpiel, K. Serbin, T. Szymczyk, M. Gałecki, M. Mazur, J. Uryga, Z. Galias, J. Janowicz, P. Jędrzejewicz.

**Zadanie 114** [ $a_n > 0$ ,  $x_n = (a_1 \dots a_n)^{1/n}$ ,  $n = 1, 2, \dots \Rightarrow a_{n+1} + \dots + a_{n+m} \geq (n+m)x_{n+m} - nx_n$ ] (*WT* = 2,18) ma bardzo proste rozwiązanie, znalezione przez wielu uczestników:

$$\frac{1}{n+m} (nx_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+m}) \geq (x_n^n a_{n+1} \dots a_{n+m})^{\frac{1}{n+m}} = x_{n+m}.$$

**Zadanie 118** [ $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ,  $p \in \mathbb{N}$  nieparzyste  $\Rightarrow \sum x_i^{p+1} \sum x_i^{p-1} \geq (\sum x_i^p)^2$ ] (*WT* = 1,15). Komentarz jak wyżej; natychmiastowy dowód z nierówności Schurza ( $\sum u_i v_i^2 \leq \sum u_i^2 v_i^2$  zastosowanej do liczb  $u_i = x_i^{(p+1)/2}$ ,  $v_i = x_i^{(p-1)/2}$ ).

**Zadanie 122** [ $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \in \mathbb{R}$ ,  $f(xy) = f(x) + f(y)$ , gdy

$NWD(x, y) = 1$ ; wyznaczyć  $f$ ] (*WT* = 2,02). Sytuacja, jak w poprzednich dwóch zadaniach. Krótkie rozwiązanie: ustalmy  $x \in \mathbb{N}$  i niech  $(p_n)$  będzie ciągiem wszystkich liczb pierwszych  $> x$ ; wtedy  $f(xp_n) = f(x) + f(p_n)$  i w granicy  $g = f(x) + g$ , skąd  $f \equiv 0$ .

**Zadanie 124** [ $u, v, w$  wektory o długości 1  $\Rightarrow$  któryś z wektorów  $\pm u \pm v \pm w$  ma długość  $\leq 1$ ] (*WT* = 2,75) zostało rozwiązane poprawnie przez ponad 20 uczestników. Wyróżniamy za urodę i oryginalność dwa rozwiązania: I (P. Jędrzejewicz). Sformułowanie równoważne: Dane 3 proste przechodzące przez wspólny punkt  $O \Rightarrow$  istnieją punkty  $A, B, C$ , po jednym na każdej z tych prostych, takie, że  $OA = OB = OC = 1$ ,  $|\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}| \leq 1$ .

Pomijamy przypadek trywialny, gdy dwie (lub trzy) proste pokrywają się. Rozbijamy każdą prostą na dwie półproste (o początku  $O$ ) i wybieramy punkty  $A, B, C$  na „co drugiej” z powstałych sześciu półprostych. Trójkąt  $ABC$  jest wówczas ostrokątny.  $O$  jest środkiem koła opisanego  $\Rightarrow \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH}$ , gdzie  $H$  — ortocentrum trójkąta  $ABC$ . Wobec ostrokatności,  $H \in \text{int}ABC \Rightarrow OH < 1$ .

II (M. Gałecki). Możemy przyjąć, że  $v \neq \pm w$ . Niech  $u = \vec{OS}$ . Końce wektorów  $u \pm v \pm w$  są wierzchołkami rombu o boku 2 i środku  $S \in \omega$ , gdzie  $\omega = o(O, 1)$ . Należy dowieść, że jeden z wierzchołków leży w kole  $K$  ograniczonym okręgiem  $\omega$ . Półprosta  $SO^{\rightarrow}$  przecina brzeg rombu w punkcie  $P \in K$ . Niech  $P$  leży na boku  $AB$  i niech proste  $SA, SB$  przecinają  $\omega$  (poza punktem  $S$ ) w punktach  $E, F$  (w razie styczności,  $E = S$  lub  $F = S$ ). Ponieważ  $SA \perp SB$ , punkty  $E$  i  $F$  są końcami średnicy okręgu  $\omega$ . Odcinek  $AB$  przecina półprostą  $SO^{\rightarrow}$ , więc  $A \in SE^{\rightarrow}$ ;  $B \in SF^{\rightarrow}$  i z równości  $AB = 2 = EF$  wnosimy, że  $A \in \vec{SE}$  lub  $B \in \vec{SF}$ . Stąd  $A \in K$  lub  $B \in K$ .

**Zadanie 125** [Cykliczne uporządkowanie pewnego zbioru ciągów skończonych z relacją bliskości] (*WT* = 2,94). Dwanaście dobrych rozwiązań. S. Solecki znalazł takie uogólnienie: Niech

$$Z = Z(m_1, \dots, m_n) = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{1, \dots, m_i\}, i = 1, \dots, n\};$$

ciągi  $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)$  są bliskie  $\Leftrightarrow \sum |x_i - y_i| = 1$ .

Istnienie cyklicznego uporządkowania zbioru  $Z$ , przy którym sąsiednie ciągi są bliskie, jest równoważne alternatywie warunków: a)  $\sum m_i \in \{n, n+1\}$ , b) istnieją  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ , takie, że  $m_i$  jest parzyste, a  $m_j > 1$ .

**Zadanie 128** [Istnienie  $p$  punktów ( $p$  — liczba pierwsza) bez trójki współliniowej w zbiorze  $\{(x, y) : x, y \in \{1, \dots, p\}\}$ ] (*WT* = 3,16) rozwiązyli poprawnie: A. Bonk, P. Jędrzejewicz, M. Mazur, H. Mikołajczak, J. Mikuta, Z. Surduka, Z. Koza. W jednym z listów znaleźliśmy nawet dowód tezy bez założenia, że  $p$  jest liczbą pierwszą, niestety, niepoprawny. A szkoda; nie wiadomo bowiem, czy w tej ogólności twierdzenie zachodzi — jest to otwarty problem (tzw. *no-three-in-line* problem). Jeśli przez  $M(n)$  oznaczymy maksymalną liczbę punktów bez trójki współliniowej w kwadracie kratowym  $n \times n$ , a przez  $N(n, M)$  — liczbę różnych rozmieszczeń  $M$  takich punktów, to zgodnie z tezą zadania  $M(n) \geq n$ , gdy  $n$  jest liczbą pierwszą (spostrzeżenie pochodzące od P. Erdősa). Jednak — poza oczywistym oszacowaniem  $M(n) \leq 2n$  — nie więcej nie wiadomo o zachowaniu wielkości  $M(n)$  dla dużych  $n$ , mimo że eksperymentalnie stwierdzono w przybliżeniu wykładniczy wzrost wielkości  $N(n, 2n)$  dla  $n$  niezbyt wielkich! (zob. artykuł R. K. Guya w książce *Combinatorial Mathematics and Its Applications*, Acad. Press, London, New York 1971 str. 124 — cyt. za p. J. Celem, który zadanie zaproponował).

**Zadanie 129** [Czy w sześciokącie wypukłym o polu  $S$  musi istnieć przekątna odcinająca trójkąt o polu  $\leq S/6 \geq S/6$ ?] (*WT* = 3,18). Tylko P. Jędrzejewicz, D. Kurpiel, J. Uryga, J. Klisowski, P. Kumor, Z. Galias.

**Zadanie 130** [inf  $(m^{-1/n} + n^{-1/m}) = ?$  ( $WT = 1,71$ ). Dużo poprawnych  $m, n \in \mathbb{N}$

rozwiązań. Dwa ciekawe uogólnienia:

I (P. Jędrzejewicz). inf  $(x^y + y^x) = 1$ . Dowód z nierówności między  $x, y \in (0, 1]$

średnią arytmetyczną ważoną i średnią geometryczną ważoną

$$(\sum q_i u_i \geq \prod u_i^{q_i} \text{ dla } u_1, \dots, u_n > 0, q_1, \dots, q_n \geq 0, \sum q_i = 1):$$

$$x^y + y^x = \left(\frac{1}{x}\right)^y \cdot 1^{1-y} + \left(\frac{1}{y}\right)^x \cdot 1^{1-x} \geq \\ \geq \left(y \cdot \frac{1}{x} + (1-y) \cdot 1\right)^{-1} + \left(x \cdot \frac{1}{y} + (1-x) \cdot 1\right)^{-1} > 1.$$

II (J. Kaja). Niech  $A \subset (1, \infty)$ ,  $\sup A = \infty$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$Z = \left\{ \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^k a_i \right) - a_j \right\}^{-1/a_j}, a_1, \dots, a_k \in A.$$

Zainicjowana przed dwoma laty liga fizyczna zdążyła się już na dobre zdomować na łamach *Delty* i okrzepnąć. Przez pierwsze półtora roku jej istnienia uczestniczyło w niej ponad 120 osób, jest też już pierwszy członek **Klubu 44** w tej konkurencji.

Wśród uczestników (którzy zechcieli się bliżej przedstawić) tak jak przed rokiem przeważają uczniowie i studenci. Spory wzrost liczby nadsyłanych prac nastąpił po wydrukowaniu w numerze 1/1986 omówienia początków działalności oraz pierwszej tabeli ligowej. Liczymy na podobne skutki obecnego, kolejnego podsumowania.

Lektura nadsyłanych rozwiązań skłania nas do zamieszczenia paru, zdawałoby się oczywistych, rad:

1. Na gotowe rozwiązanie zadania powinno się spojrzeć krytycznie, by stwierdzić, czy na pewno wynik ma sens fizyczny (np. mogliśmy pomylić się w przekształceniach).
2. Wyznaczane wielkości „liczbowe” należy podawać z dokładnością odpowiadającą dokładności zastosowanej metody oraz użytych danych wyjściowych (w treści zadań podajemy je zwykle z dokładnością do dwóch miejsc znaczących, taką samą dokładność proponujemy stosować podczas korzystania z tabel). Pamiętajmy o jednostkach!

A teraz omówienie wybranych zadań.

**Zadanie 11** [Wyznaczanie masy przedmiotu zawieszonego wewnątrz gąbłotki] ( $WT = 2,63$ ). Wszyscy rozwiązujący podali (przynajmniej obok innych metod) metody wykorzystujące drgania przedmiotu na sprężynie, ewentualnie drgania całej gąbłotki, zawieszanej na sprężynie o znanej stałej sprężystości (jak podali P. Figurny i T. Rawlik, układ ten ma dwie częstotliwości rezonansowe). Najładniejsze rozwiązanie podał M. Semla: gąbłotkę z przedmiotem wprawionym w drgania pionowe o amplitudzie  $A$  stawiamy, na szybko reagującej wadze i odczytujemy amplitudę wahań ciężaru  $F$ , stąd znajdujemy stałą sprężystości zawieszenia przedmiotu  $k = F/A$ . Znając dodatkowo okres drgań przedmiotu  $T$  wyznaczamy jego masę jako

$$m = \frac{kT^2}{4\pi^2} = \frac{T^2 F}{4\pi^2 A}.$$

**Zadanie 15** [Pętla z izolowanego przewodu w zanikającym polu magnetycznym] ( $WT = 3,10$ ). Rozwiązania zbliżone do naszego nadesłali W. Bartz, M. Semla, L. Szalast, P. Zawadzki. W rozwiązaniu opublikowanym w numerze 2/1986 powinno się dla poprawności toku rozumowania umieścić między punktami  $P$  i  $S$  opornik, odpowiadający izolacji dzielącej dwa przewody w miejscu ich styku. Dzięki dużej wartości oporu nie będzie on wpływał na występujące w pętli napięcia i prądy, jego umieszczenie spowoduje natomiast, że omawiane obwody przyjmą postać dwóch zamkniętych oczek. Jest to o tyle ważne, że siła elektromotoryczna indukuje się w obwodach zamkniętych (choćaby przerwą iskrową); dla obwodu nie zamkniętego strumień indukcji magnetycznej nie jest określony. W omawianym rozwiązaniu przyjęto za promienie okręgów podane w treści zadania wartości średnic. Wpłynęło to na końcowe wartości napięć, nie zmieniając jednak ostatecznego wniosku.

**Zadanie 17** [Przesuwanie po podłożu pręta z górnym końcem mocowanym w więzach prostoliniowych] ( $WT = 1,65$ ) pomimo niskiej wartości  $WT$  nastroczało poważne trudności. Świadczy o tym mała liczba nadesłanych rozwiązań oraz fakt, że niektórzy członkowie uczestnicy ligi mieli wiele trudności z poprawnym rozłożeniem wszystkich sił i sformulowaniem warunków, które siły muszą spełniać. Otrzymaliśmy nawet list od Czytelnika wytykający nam rzekomy błąd w rozwiązaniu zamieszczonym w numerze 3/1986. Rozwiązanie to jednak, jeśli tylko nie liczyć pewnych niedokładności rysunków, jest poprawne.

**Wówezas** inf  $Z = 1$ . Dowód z uogólnionej nierówności Bernoulliego  $((1+x)^t \geq 1+tx$  dla  $x \geq 0, t > 1$ ) przez podstawienie  $t = a_j$ ,  $x = a_j^{-1}((\sum a_j) - a_j - 1)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , proste przekształcenie i zsumowanie powstałych nierówności.

**Zadanie 132**  $\left[ \left( \sum_i \prod_j a_{ij} \right)^k \leq \prod_j \sum_i a_{ij}^k (a_{ij} > 0, i \leq n, j \leq k) \right]$  ( $WT = 1,71$ )

było rozwiązywane na wiele sposobów: tak, jak w *Delcie*, bądź przez indukcję (po  $k$ , po  $n$ ), indukcję wsteczną ( $k \rightarrow 2k, k \rightarrow k-1$ ), pracowicie wyznaczanie sum, wreszcie stosowanie znanych nierówności (Jensena, Höldera). Przytoczona w omówieniu zadania 130 nierówność między średnimi ważonymi posłużyła M. Mazurowi (który zresztą to zadanie zapropnował) i R. Mitrzaszkiemu do uzyskania uogólnienia w postaci

$$\sum_i \prod_j a_{ij} \leq \prod_j \left( \sum_i a_{ij}^{q_j} \right)^{1/q_j} \text{ dla } a_{ij} > 0, q_j > 0, \sum 1/q_j = 1;$$

dla  $k = 2$  nierówność ta redukuje się do zwykłej nierówności Höldera (a nierówność wyjściowa — do nierówności Schwarza).

**Zadanie 21** [Elektryczna czarna skrzynka] ( $WT = 1,96$ ) zostało przez kilku uczestników (R. Pluta, J. Stelmach, T. Wiczorek) rozwiązane z użyciem źródeł prądowych. Niestety, tylko jedno z nich (T. Wiczorek) było satysfakcjonujące. Mniej więcej w połowie nadesłanych rozwiązań zastosowano układ „gwiazdy”.

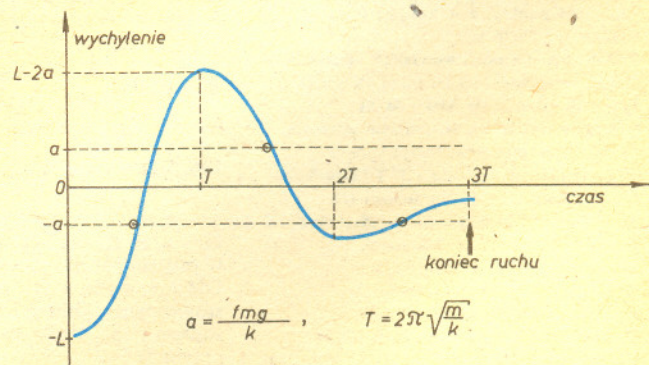
**Zadanie 22** [Przelewanie cieczy lewarem] ( $WT = 3,81$ ) okazało się najtrudniejsze w minionym roku. Tylko J. Osada zwrócił uwagę na rolę ciśnienia pary nasyconej cieczy, natomiast opory przepływu jako jedyny uwzględnił J. Stelmach.

**Zadanie 26** [Pocisk wystrzelony z Księżyca] ( $WT = 2,27$ ). Dz. Lipniacki rozpatrywał ruch pocisku w nieinercyjnym układzie związanym z Ziemią i Księżycem, co znacznie komplikuje problem. Przy okazji poprawiamy błędy liczbowe, które wystąpiły w naszym rozwiązaniu (*Delta* 7/1986): największa odległość, na którą może pocisk oddalić się od powierzchni Księżyca, wynosi  $1/5R$ , a przyciąganie ziemskie jest na całym torze pocisku co najmniej 400 razy mniejsze od przyciągania Księżyca.

**Zadanie 29** [Ruch klocka pod wpływem działania sprężyny i tarcia] ( $WT = 1,70$ ). W większości nadesłanych rozwiązań (m.in. P. Miłoszewski, J. Osada, L. Szalast, P. Wach) wykorzystano zasadę zachowania energii: przyrównując pracę wykonaną na pokonanie siły tarcia  $W = fmg s$  (— współczynnik tarcia,  $m$  — masa klocka,  $g$  — przyspieszenie ziemskie,  $s$  — szukane przesunięcie klocka) do różnicy energii sprężyny w pozycji pierwotnej i końcowej  $\Delta E = \frac{1}{2}k(L^2 - x^2)$  ( $x$  — odkształcenie sprężyny w końcowym położeniu klocka) otrzymuje się

$$s = 2 \left( L - \frac{fmg}{k} \right) \text{ dla } L > \frac{fmg}{k} \text{ oraz } s = 0 \text{ dla } L \leq \frac{fmg}{k}.$$

Kilku uczestników (A. Gluza, Dz. Lipniacki, J. Soboń) rozwiązywało równanie ruchu klocka, co było metodą bardzo pracochłonną. J. Lipkowski stwierdził, że ruch klocka jest typowym ruchem harmonicznym tłumionym, jak rozpatrywany w podręcznikach. Dokładnie to tak nie jest: w naszym przypadku siła tarcia jest niezależna od prędkości i ruch między zatrzymaniami klocka ma charakter taki, jak bez tłumienia, natomiast kolejne ruchy klocka mają skokowo malejącą amplitudę i różne „punkty równowagi” (patrz rysunek). Rozwiązanie zbliżone do naszego (*Delta* 9/1986) nadesłał jedynie M. Wójcicki, który podał jeszcze jedną ciekawą metodę wykorzystującą fakt, że działająca na klocek wypadkowa siła w momencie pierwszego zatrzymania (ściśle: graniczna wartość siły, odpowiadająca zatrzymaniu się klocka) jest równa co do wartości wypadkowej sile działającej na klocek ruszający z położenia startowego i ma przeciwny do niej znak. Należy jeszcze zwrócić uwagę, że dość powszechnie przyjmowano siłę tarcia statycznego w przypadku klocka nieruchomego jako równą  $T = fmg$ , niezależnie od wartości siły działania sprężyny na klocek  $F$ . Tymczasem dla  $fmg > F$  zachodzi  $T = F$ , inaczej siła tarcia spowodowałaby ruch klocka!



### Lista uczestników ligi zadaniowej Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 131 ( $WT = 2,00$ ) i 132 ( $WT = 1,71$ )

Zbigniew Galias	— Kraków	45,62
Robert Mitraszewski	— Wrocław	45,19
Marian Roman	— Elk	1—43,09
Zbigniew Koza	— Jelenia Góra	1—43,03
Andrzej Sudol	— Nowy Sącz	42,56
Tomasz Rawlik	— Gliwice	2—41,48
Marek Prauza	— Poraj	1—41,30
Jerzy Mikuta	— Zielona Góra	1—40,50
Grzegorz Kuś	— Kraków	39,93
Henryk Mikołajczak	— Wałbrzych	39,26
Zbigniew Zaus	— Kraków	36,93
Michał Marczak	— Radom	36,56
Wojciech Krzyżański	— Żywiec	34,45
Edward Orzechowski	— Warszawa	2—34,31
Artur Smolczyk	— Tarnów Op.	1—33,68
Sławomir Solecki	— Ostrów Wlkp.	1—33,35
Jerzy Tyszkiewicz	— Warszawa	33,28
Zygmunt Bartkowski	— Warszawa	32,93
Mariusz Łopusiewicz	— Legnica	32,15
Miroslaw Mikucki	— Augustów	31,67
Piotr Figurny	— Lubartów	1—31,39
Krzysztof Jakubczak	— Kudowa Zdrój	31,00
Dariusz Kowalczyk	— Warszawa	29,81
Krzysztof Jedziniak	— Katowice	1—29,49
Władysław Wasiak	— Toruń	28,92
Jarosław Kaczyński	— Starogard Gd.	28,31
Stanisław Dorosz	— Kraków	28,06
Maciej Głuszek	— Wrocław	27,85
Janusz Prajs	— Opole	27,57
Jan Ciach	— Ostrowiec Św.	1—27,21
Tomasz Komorowski	— Świdnik	2—26,82
Tadeusz Józefczyk	— Poznań	1—26,60
Jerzy Cisło	— Wrocław	26,56
Radosław Zapert	— Kielce	26,51
Krzysztof Zygan	— Lubin	24,98
Adam Stadler	— Rzeszów	24,94
Zbigniew Kryłow	— Sopot	24,93
Miroslaw Matłega	— Skoczów	24,82
Karol Jachacy	— Tuszcz	24,67
Tomasz Masłowski	— Toruń	24,40
Krzysztof Trautman	— Warszawa	1—24,31
Jerzy Małopolski	— Kraków	1—24,23
Adam Wyrwa	— N. Wiśnicz	1—23,43
Lech Bartłomiejczyk	— Gliwice	22,50
Ryszard Pagacz	— Zawadzkie	2—22,16
Małgorzata Czerniakowska	— Gdańsk	1—20,54
Dzierżysław Lipniacki	— Lublin	20,07
Józef Siwy	— Łaziska G.	1—19,73
Paweł Kamiński	— Warszawa	4—19,58
Piotr Wach	— Katowice	19,03
Piotr Jędrzejewicz	— Toruń	1—19,00
Jerzy Janowicz	— Bolesławiec	5—18,76
Adam Ruszel	— Krosno	18,72

Legenda (przykładowo): stan konta 5—18,76 oznacza, że uczestnik już pięciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (szóstej) rundzie ma 18,76 p. Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników, którzy zgromadzili co najmniej 18 punktów. Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie) (cyfra w nawiasie wskazuje, ile razy uczestnik przekroczył barierę 44 punktów): Z. Bartold (2), T. Biegański (1), A. Bonk (1), W. Boratyński (1), M. Fiszer (1), M. Galecki (5), A. Głuz (1), D. Kurpiel (1), J. Mańdziuk (1), M. Mazur (2), R. Mazurek (1), J. Milczarek (1), W. Olszewski (1), A. Pawłowski (3), K. Serbin (2), D. Sowizdrzał (3), T. Szymczyk (1), W. Szymczyk (1), J. Uryga (4), K. Witek (1).

- Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs — ligę zadaniową pod nazwą **Klub 44**.
- Liga ma charakter ciągły. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po 4 zadania w każdym numerze: 2 z matematyki i 2 z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 6 i 7 każdego roku).
- Uczestnikiem ligi może być każdy.
- Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przysyłaniu opracowanych rozwiązań do Redakcji *Dety*. Aby zostać uczestnikiem, wystarczy przesłać rozwiązanie choćby jednego zadania.
- Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.
- Rozwiązania zadań z numeru  $n$  należy nadsyłać do końca miesiąca  $n+2$  (dodawanie modulo 12, np. termin nadsyłania rozwiązań zadań z nr 11/1987 upływa 31 stycznia 1988). W numerze  $n+4$  podane są zskicowe rozwiązania.
- Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru i podpisane. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci — roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**.
- Prace powinny być samodzielne. Serie rozwiązań jednobrzmiących nie będą brane pod uwagę.
- Rozwiązanie każdego zadania jest oceniane w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Przy ocenie jest brana pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.
- Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po upływie terminu nadsyłania rozwiązań. Współczynnik ten jest liczbą między 1 a 4 ustaloną według następującej zasady: jeżeli  $N$  oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru, a  $S$  oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności  $WT = 4 - 3S/N$ . Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).
- Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań (obliczone według podanej wyżej zasady) są sumowane, oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy 44 punktów w jednej z tych dziedzin uczestnik staje się członkiem Klubu 44.
- Po zgromadzeniu 44 punktów (i zostaniu członkiem Klubu 44) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość 44 zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.
- Trzykrotne uzyskanie członkostwa Klubu 44 daje tytuł Weterana Klubu 44.
- Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*.
- Członkowie Klubu 44 będą zapraszani na spotkania Klubu 44, które będą organizowane w Warszawie raz do roku.
- Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możliwość zmian Regulaminu.

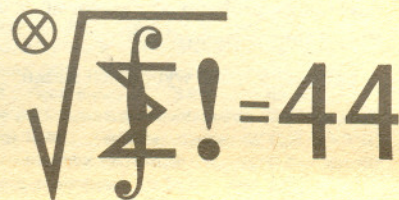
### Zadania z matematyki nr 143, 144

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

**143.** We wnętrzu kwadratu rozmieszczono w dowolny sposób skończoną liczbę rozłącznych kół domkniętych (o różnych promieniach). Udowodnić, że można ten kwadrat podzielić na wielokąt wypukły o rozłącznych wnętrzach tak, by we wnętrzu każdego wielokąta znalazło się dokładnie jedno z kół.

**144.** Dowieść, że równanie  $1987y^2 = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$  nie ma rozwiązań w liczbach wymiernych  $x, y$ .

Zadanie 144 przysłał pan Jarosław Cel z Łodzi.



### Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/1986

Przypominamy treść zadań:

**135.** Okręgi  $K$  i  $L$  są wpisane w ramiona kąta o wierzchołku  $O$ . Trzeci okrąg jest styczny zewnętrznie do  $K$  i  $L$  w punktach  $P$  i  $Q$ . Dowieść, że punkty  $O, P, Q$  są współliniowe.

**136.** Udowodnić, że iloczyn dowolnych czterech kolejnych a) liczb naturalnych, b) liczb parzystych, c) liczb nieparzystych — można przedstawić na dwa różne sposoby jako różnicę kwadratów dwóch liczb naturalnych.

**135.** Niech  $O_1, O_2, r_1, r_2$  oznaczają odpowiednio środki i promienie okręgów  $K$  i  $L$ ; przez  $O_3, r_3$  oznaczmy środek i promień trzeciego okręgu. Jednokładność o środku  $O$  i skali  $r_2/r_1$  przeprowadza okrąg  $K$  na okrąg  $L$ ; stąd proporcja  $OO_2:OO_1 = r_2:r_1$ . Punkty  $P$  i  $Q$  leżą na bokach  $O_1O_3$  i  $O_3O_2$  trójkąta  $O_1O_3O_2$ , a punkt  $O$  leży na przedłużeniu boku  $O_1O_2$ .

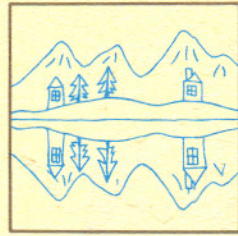
Z równości  $\frac{O_1P}{PO_3} \cdot \frac{O_3Q}{QO_2} \cdot \frac{O_2O}{OO_1} = \frac{r_1}{r_3} \cdot \frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_1} = 1$  na mocy twierdzenia Menelausa wynika współliniowość punktów  $P, Q$  i  $O$ .

**136.** Dla dowolnych liczb  $a, b, x, y$  i dla  $\varepsilon = \pm 1$  zachodzi równość

$$(ab + \varepsilon xy)^2 - (bx + \varepsilon ay)^2 = (a-x)(a+x)(b-y)(b+y).$$

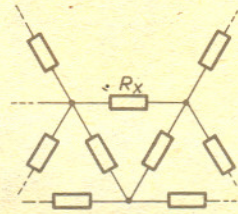
Gdy  $a, b, x, y$  są liczbami naturalnymi, otrzymujemy przedstawienie iloczynu po prawej stronie w postaci różnicy dwóch kwadratów na dwa różne sposoby przyjmując  $\varepsilon = 1$  oraz  $\varepsilon = -1$ . Dla  $b = a+x, y = x$  dostajemy po prawej stronie iloczyn  $(a-x)a(a+x)(a+2x)$ ; przy stosownym wyborze wartości  $a, x \in \mathbb{N}$  ( $0 < x < a$ ) czynnikami tego iloczynu będą dowolnie zadane cztery liczby naturalne w postępie arytmetycznym. Stąd tego zadania w każdym z trzech przypadków.

41. Fotografując z brzegu jeziora o gładkiej powierzchni przeciwległy brzeg otrzymano obraz tego brzegu wraz z jego odbiciem w wodzie, jak na rysunku 1. W jaki sposób można określić, co jest odbiciem w wodzie, jeśli obie połowy zdjęcia nie różnią się pod względem ostrości ani jasności?



Rys. 1

42. Rysunek 2 przedstawia fragment sieci złożonej z oporów o nie znanych wartościach. W jaki sposób można wyznaczyć wartość oporu  $R_x$  nie przerywając nigdzie sieci, jeśli dysponuje się tylko omomierzem i przewodami do połączeń? Wyprowadzić odpowiedni wzór.



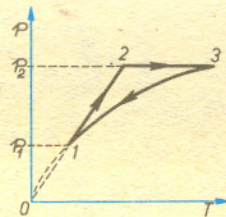
Rys. 2

### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/1986

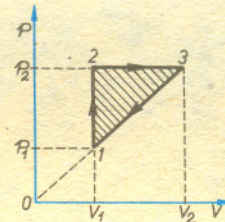
Przypominamy treść zadań:

33. Gaz doskonały (jednoatomowy) podlega odwracalnemu procesowi kołowemu, dla którego zależność ciśnienia  $p$  od temperatury  $T$  jest przedstawiona na rysunku 3 (odcinek 1—3 opisywany jest zależnością  $p = \text{const} \cdot \sqrt{T}$ ). Podać wykres zależności ciśnienia od objętości dla tego procesu i obliczyć sprawność silnika cieplnego realizującego taki cykl, w którym  $p_2 = 2p_1$ . Czy dla gazu dwuatomowego wynik będzie taki sam?

34. Posługując się argumentacją fizyczną ocenić, jaka część wokółslonecznego toru Księżyca ma wypukłość zwróconą ku Słońcu.



Rys. 3



Rys. 4

33. Zależność ciśnienia od objętości dla danego procesu przedstawia rysunek 4. Przemiana 3—1 jest opisywana zależnością  $p \sim V$ , wówczas bowiem — ze względu na równanie Clapeyrona — zachodzi  $p^2 \sim T$ . Mamy więc  $V_2/V_1 = p_2/p_1 = 2$ . Stosunki temperatur w odpowiednich punktach cyklu wynoszą:  $T_2/T_1 = p_2/p_1 = 2$ ,  $T_3/T_1 = (p_2/p_1)^2 = 4$ . Sprawność silnika cieplnego wynosi

$$(1) \quad \eta = \frac{W}{Q},$$

gdzie  $W$  — praca wykonana przez gaz w jednym cyklu,  
 $Q$  — ciepło pobrane przez gaz w jednym cyklu.

Praca  $W$  jest różnicą pracy wykonanej przez gaz w przemianie 2—3 i pracy wykonanej nad gazem w przemianie 3—1.

Wartości  $W$  odpowiada pole powierzchni zakreskowanego trójkąta na rysunku 4:

$$(2) \quad W = \frac{1}{2} p_1 V_1 = \frac{1}{2} nRT_1 \quad (n \text{ — liczba moli gazu, } R \text{ — stała gazowa}).$$

Gaz pobiera ciepło w przemianach 1—2 oraz 2—3 (w przemianie 3—1 oddaje ciepło). Wobec tego

$$Q = n[C_V(T_2 - T_1) + C_p(T_3 - T_2)]$$

( $C_V$  i  $C_p$  — molowe ciepło właściwe gazu odpowiednio przy stałej objętości oraz przy stałym ciśnieniu).

Po dokonaniu podstawień  $C_V = \frac{3}{2} R$ ,  $C_p = \frac{5}{2} R$  (dla gazu jednoatomowego) oraz  $T_2 = 2T_1$ ,  $T_3 = 4T_1$  otrzymujemy

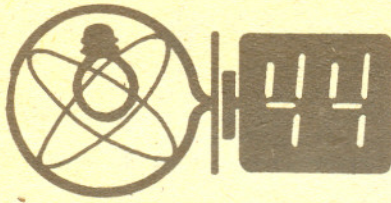
$$(3) \quad Q = \frac{13}{2} nRT_1.$$

Ostatecznie ze wzorów (1), (2), (3) wyznaczamy  $\eta = \frac{1}{13}$ . Dla gazu dwuatomowego mamy

$C_V = \frac{5}{2} R$  oraz  $C_p = \frac{7}{2} R$ , zatem  $Q = \frac{19}{2} nRT_1$ . Praca  $W$  jest nadal opisywana wzorem (2)

i w rezultacie  $\eta = \frac{1}{19}$ .

34. Rozwiązanie w artykule dr. Tomasza Kwasta.



### Lista uczestników ligi zadaniowej Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 29 ( $WT = 1,70$ )  
i 30 ( $WT = 2,52$ )

Tomasz Rawlik	— Gliwice	36,85
Aleksander Surma	— Myszków	31,77
Dzierżysław Lipniacki	— Lublin	30,20
Paweł Rogocz	— Legnica	23,63
Anna Gluza	— Toruń	21,65
Jacek Stelmach	— Zabrze	18,49
Robert Repucha	— Goldap	17,58
Piotr Bała	— Toruń	1—15,34
Mirosław Semla	— Opole	15,20
Janusz Osada	— Legnica	15,17
Piotr Wach	— Katowice	14,95
Leszek Szalast	— Radzyń Podl.	14,14
Zbigniew Galias	— Kraków	12,48
Maciej Stasiak	— Człuchów	12,15
Wiesław Stochmal	— Szczecin	11,88
Zbigniew Lipowczan	— Katowice	11,81
Mariusz Surma	— Kielce	10,18
Piotr Dziembaj	— Kraków	10,05
Maciej Krzyżanowski	— Lublin	8,58
Wiesław Kacprzak	— Kraków	8,46
Tadeusz Foszcz	— Ilmenau (NRD)	8,15
Maciej Głuszek	— Wrocław	8,11

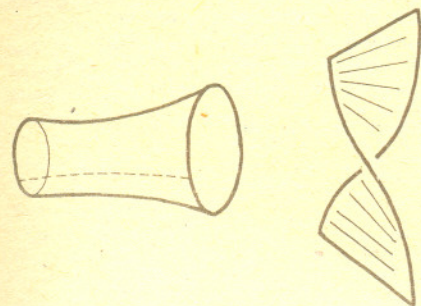
Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników, którzy zgromadzili co najmniej 8 punktów.

Jedynek przed stanem konta P. Bała oznacza, iż zdobył on już raz 44 punkty i obecnie odbywa drugą rundę.



Najmniejsza ilość energii, na jaką może zareagować nasze oko, wypoczęte przez dłuższy czas w ciemności, odpowiada w przybliżeniu energii 20 fotonów światła zielonożółtego. Wrażliwość oka jest tak duża, że możemy w pewnych warunkach „zaobserwować” pojedyncze fotony. Użyjmy źródła światła o natężeniu nieco poniżej progu widzialności; do oka dociera wtedy średnio trochę mniej niż 20 fotonów jednocześnie. Liczba ta ulega jednak fluktuacjom i może co pewien czas przekroczyć wartość progową. Obserwować będziemy nieregularne krótkie błyski. Pręciki są bardziej wrażliwe na światło niż czopki, dlatego błyski widzimy nie na żółtej plamce (największa gęstość czopków), lecz na bocznych częściach siatkówki (największa gęstość pręcików), tj. patrząc nie na wprost. Pręciki nie dają jednak wrażeń barwnych i rozbłyski są z reguły białe.

Kalendarz z roku 1975 nadawał się do użytku w 1986 roku, obecnie jednak nie możemy posługiwać się kalendarzem z 1976 roku — nie pasuje. Powstają dwa pytania: z jakich lat kalendarze nadają się dla 1987 roku i ile trzeba mieć kalendarzy, żeby „zawsze” któryś z nich był zgodny z bieżącym.



Konstruowane obecnie pułapki elektromagnetyczne umożliwiają uwięzienie, w temperaturze ciekłego helu, pojedynczej cząstki naładowanej. Fizykom z Uniwersytetu Waszyngtońskiego udało się utrzymać jeden elektron przez dziesięć miesięcy w pułapce o objętości około milimetra sześciennego. Oznacza to, że w przyszłości możliwe będzie badanie np. ruchu wyizolowanego elektronu przy oddziaływaniu z promieniowaniem elektromagnetycznym.

Punkty styczności boków trójkąta opisanego na okręgu z tym okręgiem tworzą trójkąt wpisany w ten okrąg. To oczywiste. Mniej oczywiste jest, że albo oba trójkąty mają boki odpowiednio równoległe, albo proste zawierające nie przecinające się boki tych trójkątów przecinają się w punktach leżących na jednej prostej.



Łatwo sprawdzić, że

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots$$

Istotnie, wystarczy pomnożyć obie strony przez  $(1-x)$  i gotowe. Podobnie

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + \dots$$

Zatem łącznie, wobec  $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x-1} = 0$ , mamy

$$\dots + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^i} = 0,$$

dla każdego  $x \neq 1$ . Gdzie tu tkwi błąd?

Katenoida (powierzchnia, utworzona przez błonę mydlaną, rozpiętą na dwóch okręgach prostopadłych do odcinka łączącego ich środki), wykonana np. z blachy, po rozciągnięciu da się ułożyć w kształt helikoidy (powierzchni utworzonej z przecinających linię śrubową prostych, przecinających również pod kątem prostym oś śruby).

Ciało swobodnie spadające w ośrodku płynnym (cieczy lub gazie) nie porusza się bynajmniej ruchem jednostajnie przyspieszonym. Przeciwnie — po pewnym czasie jego ruch staje się jednostajny. Kiedy — zależy zarówno od ośrodka, jak i kształtu ciała.

Wielkość i odległość od Ziemi Słońca i Księżyc są tak „dobre”, że ich kątowe średnice obserwowane z Ziemi są prawie równe, o czym można się przekonać podczas zaćmień. Jak się wydaje, nikt nie sprawdził dotąd, czy taka zależność ma miejsce jeszcze dla jakiegoś satelity jakiejś innej planety.

Johann Bernoulli wyraził życzenie, by na jego nagrobku znajdowała się spirala logarytmiczna — wdzięczni (i chyba niedouczeni) potomni ozdobili jego grób spiralą Archimedesesa. Carl Friedrich Gauss życzył sobie, by jego nagrobek nie zawierał napisów, a jedynie rysunek siedemnastokąta foremnego — na nagrobku są napisy, nie ma natomiast rysunku siedemnastokąta. Bliższe badania (bo na oko nie sposób tego stwierdzić) pozwalają jednak siedemnastokąt znaleźć — taki kształt ma postument pomnika.

Z nowym rokiem rozpoczynamy nowy serial obrazkowy na ostatnich stronach okładki. Będzie to przegląd rozmaitych charakterystycznych obiektów mikro- i makroświata. Serial zaprojektowany jest następująco. W roku mamy do dyspozycji 24 strony. Zważywszy, że w głąb mikroświata powinniśmy dojść do odległości rzędu  $10^{-20}$  m, zaś w głąb Wszechświata sięgamy do odległości rzędu 10 Gpc ( $3 \cdot 10^{26}$  m), łatwo zrozumieć, że musimy co miesiąc prezentować skalę 100 razy mniejszą i tyleż razy większą. Inaczej mówiąc, z miesiąca na miesiąc będziemy oglądać obiekty o dwa rzędy wielkości mniejsze i większe.

Nie wynika wszakże z tego, Drogi Czytelniku, że dowiesz się wreszcie, jak wygląda np. atom lub kwark. Chyba zrozumiałe, że obiekty mniejsze od długości fali świetlnej w ogóle nie „wyglądają” — zobaczyć ich już nie można przy żadnym powiększeniu. Można jedynie pośrednimi sposobami odtwarzać ich strukturę i przedstawiać ją za pomocą mniej lub bardziej symbolicznych rysunków. Tego rodzaju informacje znajdują się właśnie w naszym serialu. Przy zgłębianiu Wszechświata nie ma tych kłopotów, są za to inne. Mianowicie — obrazy odległych galaktyk uzyskuje się wprawdzie łatwo, trzeba jednak mieć na względzie, że tak jak na zdjęciu wyglądały one tyle czasu temu, ile potrzebuje światło na przebycie odległości od nich do nas. Inaczej mówiąc, im dalej sięgamy w przestrzeń, tym dawniejszą fazę życia Wszechświata widzimy.

Rozpoczynamy nowy serial od skali  $10^{-2}$  i  $10^2$ . Mamy tu do czynienia z obiektami dobrze znanymi. Za miesiąc chyba już tak nie będzie i z biegiem czasu będziemy oglądać coraz bardziej „egzotyczne” obiekty otaczającego nas świata. Mamy nadzieję, że te 24 obrazki skłonią Czytelnika do samodzielnego zastanowienia się nad „znikomością” lub „wielkością” człowieka.

10<sup>-2</sup>

SPUTNIK 1



SPACE SHUTTLE

5-m TELESKOP Z PALOMAR MOUNTAIN

SANTA MARIA

REKIN OLBRZYMI

10 m

