

Dnia 27 lipca 1987 roku

zmarł

Profesor Jan Mikusiński

twórca algebraicznej teorii rachunku operatorów.

Jego książka "Rachunek operatorów" doczekała się największej liczby tłumaczeń spośród wszystkich polskich książek matematycznych.

Przez szereg lat prowadził w Instytucie Matematycznym PAN seminarium z funkcji uogólnionych /w szczególności dystrybucji/, które gromadziło nie tylko jego uczniów, ale również wielu wybitnych matematyków z całej Polski i które przyczyniło się do rozwoju metod algebraicznych w analizie.

SPIS TREŚCI

NUMERU 10(166)

Wreszcie supernowa widoczna
gołym okiem

dr Tomasz Kwast

str. 1

Obalamy prawa fizyki albo uczmy
się pokory wobec przyrody

doc. dr Jan Gaj

str. 2

Rozmowa o matematyce
z *prof. dr. Andrzejem*

Białynickim-Birulą

str. 4

Komputer szuka jedności

Maciej Mirowicz

str. 6

Patrz w niebo

str. 7

Mała Delta

str. 8

Nierówności cykliczne

mgr Jarosław Górnicki

str. 10

Zadania

str. 12

Czym prawa strona różni się od lewej?

mgr Marek Pfützner

str. 13

Klub 44

str. 15

Drobiazgi

str. 16

W następnym numerze:

Kłopoty z cefeidami

„Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny

Polskiego Towarzystwa

Matematycznego, Polskiego

Towarzystwa Fizycznego i Polskiego

Towarzystwa Astronomicznego

wydawany przy poparciu

Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny

dr Maciej Bryński

dr Bogdan Cichocki

dr Antoni L. Dawidowicz

dr Alicja Derkowska

doc. dr Jan A. Gaj

doc. dr Bolesław Gleichgewicht

doc. dr Tomasz Hofmokr — v-przewodniczący

doc. dr Tadeusz Jarzębowski

doc. dr Marcin Kubiak

mgr Andrzej Mąkowski

dr Zbigniew Plochocki

dr Jan Rempała

prof. dr Konrad Rudnicki

prof. dr Grzegorz SitarSKI

prof. dr Józef I. Smak

prof. dr Kazimierz Stępień

prof. dr Mieczysław Subotowicz

doc. dr Andrzej Szymacha

doc. dr Aniela Wolska

prof. dr Andrzej Woszczyk

prof. dr Wojciech Zakowski —

przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga

mgr Maciej Jędrzejczak — z-ca red. nac.

mgr Krystyna Kordos — sekr. red.

dr hab. Marek Kordos — red. nac.

dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.

mgr inż. arch. Mariola Łotysz

dr Andrzej Majhofer

mgr Anna Rudnik

dr Jerzy Ryll

mgr Joanna Udalska

mgr Jan Zalewski

Krajowe Wydawnictwo Czasopism

RSW „Prasa—Książka—Ruch”

ul. Noakowskiego 14

00-666 Warszawa

tel. centr. 25-72-91 do 93

Biuro Reklam i Propagandy

tel. 25-56-26

Nakład 25 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;

2,50 ark. druk;

papier offsetowy V kl. 70 g.

Wydrukowano w Drukarni

im. Rewolucji Październikowej

Warszawa, ul. Mińska 65.

Nr zam. 4623/12/87. K-23.

Uwaga Czytelnicy !

**Tylko PRENUMERATA gwarantuje systematyczne
otrzymywanie naszego czasopisma.**

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty kwartalnej zł 120,— półrocznej zł 240,— rocznej zł 480,—

1. dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:

— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,

— instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

2. dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:

— osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW

„Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,

— osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”

opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych

dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty”

na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.

3. Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala

Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział

w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest

droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla

zlecających instytucji i zakładów pracy.

Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:

— do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,

— do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 40,—

Uwaga Czytelnicy !

W kioskach "Ruchu" przyjmowane są zlecenia

na odkładanie prasy do teczek.

Dr Tomasz KWAST

Wybuch gwiazdy supernowej to jedno z najbardziej efektownych zjawisk astronomicznych. Jego „efektowność” jest tak wysoka, że aby to docenić, warto znajdować się dostatecznie daleko od wybuchającej gwiazdy. Byłoby po prostu źle, gdyby jako supernowa wybuchła najbliższa Słońcu gwiazda. Jest nią α Centauri — odległy o około 1 pc układ potrójny, którego zresztą żaden składnik nie kwalifikuje się na supernową w ciągu najbliższych kilku miliardów lat. Ale załóżmy! W maksimum blasku supernowe świecą z mocą taką, jak cała przeciętna galaktyka, czyli rzędu 10^{37} W. Z odległości 1 pc = $3 \cdot 10^{16}$ m dawałoby to na Ziemi oświetlenie około 1 kW/m^2 , czyli porównywalne z oświetleniem dawanym przez Słońce. Komentarz tu chyba jest zbędny, a nie wspomnieliśmy nawet o lawinie wysokoenergetycznych cząstek towarzyszącej takiemu wybuchowi.

Historia ludzkości zanotowała pięć widocznych gołym okiem rozbłysków supernowych w naszej Galaktyce (patrz drobiazg nr 100 z *Delty* 6/1986). Podejrzewa się, że w ciągu ostatniego tysiąclecia nastąpił w naszej Galaktyce przynajmniej jeszcze jeden wybuch gwiazdy supernowej. Przypuszcza się mianowicie, że mgławica *Cassiopeia A* (silne radioźródło) jest pozostałością po wybuchu, który miał miejsce około roku 1670. Zjawisko to przeszło niezauważone, być może dlatego, że rozbieganiu się otoczki gwiazdy po wybuchu towarzyszyło powstanie ogromnej ilości pyłu który promieniowanie widzialne przetworzył na podczerwone.

Gdyby polegać na tak ubogiej statystyce, należałoby obecnie spodziewać się rozbłysku następnej supernowej. I rzeczywiście! W nocy 23/24 lutego 1987 r. pojawiła się supernowa widoczna gołym okiem, co prawda nie w naszej Galaktyce, lecz też niedaleko, bo w Wielkim Obłoku Magellana. Jak widać, mamy tu podobnego pecha jak z kometa Halleya — najciekawsze rzeczy dzieją się ostatnio na niebie południowym. Supernową nazwaną SN 1987A jako pierwszy zarejestrował na swoim zdjęciu Ian Shelton z Uniwersytetu w Toronto przebywający akurat w Obserwatorium Las Campanas w Chile.

Współrzędne supernowej wynoszą: $\alpha = 5^{\text{h}}35^{\text{m}}50^{\text{s}}$, $\delta = -69^{\circ}17'58''$. Znajduje się ona w Wielkim Obłoku Magellana niedaleko jasnej mgławicy 30 *Doradus* (zwanej też „Tarantula”) w gwiazdozbiorze Złotej Ryby (*Dorado*). Przypadkowo Shelton sfotografował ten sam obszar nieba dobę wcześniej i dlatego wiadomo, że gwiazda pojaśniała co najmniej o 8 mag. O ile identyfikacja jest poprawna, to jest to gwiazda Sanduleak $-69^{\circ}202$ (od nazwiska autora katalogu gorących gwiazd na południowym niebie), która przed wybuchem była niebieskim nadolbrzymem typu B3 o widomej jasności około 12 mag. W marcu 1987 r. jej jasność utrzymywała się na poziomie 4,5 mag, co przy jej odległości 160 000 lat świetlnych (50 kpc) daje jasność absolutną -14 mag.

I ta właśnie jasność stanowi pierwszą zagadkę gwiazdy. Nie ulega wątpliwości, że mamy do czynienia rzeczywiście z supernową. Dowodzi tego jej widmo, w którym linie przesunięte są o wielkość wskazującą na prędkość rozbiegania się otoczki, przewyższającą 20 000 km/s. Jest to prędkość absolutnie nieosiągalna przy wybuchach np. gwiazd nowych. Tymczasem jasność tej supernowej jest o kilka wielkości gwiazdowych niższa od oczekiwanej dla obiektu tego rodzaju.

Obecna klasyfikacja dzieli supernowe na dwa typy. Tzw. typ-I to stare gwiazdy mało masywne, prawdopodobnie białe karły, które osiągają masę krytyczną (tzw. masę Chandrasekhara) i zapadają się tworząc gwiazdę neutronową. Charakterystyczny dla białych karłów brak (prawie) wodoru przejawia się jako brak linii Balmera w ich widmach. Jest to grupa gwiazd o cechach dość zbliżonych. Natomiast w typie II mamy obiekty bardziej różnorodne. Są to w ogóle gwiazdy masywniejsze, które szybko przeewoluowały do stadium nadolbrzyma wytwarzając wielowarstwowe (w sensie składu chemicznego) jądro. Jądro to wreszcie detonuje (jeśli jest węglowe) lub zapada się (jeśli jest żelazne) nawet do stadium czarnej dziury. Otóż w widzialnej części widma SN 1987A widać wyraźnie linie wodorowe, co przemawia za typem II, natomiast widmo nadfioletowe jest (lub raczej było) dość typowe dla przypadku akrecji materii przez białego karła, co świadczyłoby za typem I.

Jeszcze jedna zagadka SN 1987A wiąże się z obserwacjami neutrinowymi. Mianowicie w czasie, gdy jasność gwiazdy rosła, dwa laboratoria zaobserwowały dwa impulsy neutrin: wpierw francuskie, a w kilka godzin później japońskie, przy czym japońskie rejestrowało neutrina o wyższych energiach niż francuskie. Na razie nie zostało wyjaśnione, dlaczego aparatura francuska zarejestrowała tylko impuls „słabszych” neutrin, a nie jednych i drugich.

Tak więc oczekiwane od kilkuset lat zjawisko przyniosło — jak na razie — więcej pytań niż odpowiedzi, a przedstawiliśmy tu, oczywiście, nie wszystkie. Co więcej, pytania te dotyczą nie tylko przebiegu wybuchu tej akurat supernowej, lecz również np. masy obserwowanych neutrin, a w dalszej konsekwencji podstawowych zagadnień fizyki cząstek elementarnych i kosmologii.

Obalamy prawa fizyki albo uczmy się pokory wobec przyrody

Doc. dr Jan GAJ

Nie do wiary, jak zarozumiały jest człowiek. Swoje nad wyraz skromne doświadczenia zdobyte na Ziemi — tym pyłku w Kosmosie — próbuje zastosować do całego świata nie bacząc, że zna tylko bardzo małą jego część, a wiedza ta jest daleka od doskonałości. Jednym z rezultatów tego zarozumiałstwa jest pewna maniera spotykana wśród fizyków, zarówno teoretyków, jak i eksperymentalistów, polegająca na utożsamianiu twórców myśli ludzkiej — modeli i teorii fizycznych — z rzeczywistością, którą te modele i teorie mają opisywać. Piszą: mają, bo nie wątpię że nasze teorie są ułomne i niekompletne, a ich liczne wady z pewnością będzie wymieniał z pamięci uczeń w szkole za kilkadziesiąt lat, jeżeli nasza zarozumiałość nie doprowadzi przedtem do katastrofy obecnej cywilizacji. Powtarzam: prawa Newtona, Maxwella i Einsteina to nie rzeczywistość, tylko nasze nieudolne próby jej opisu. Aby Cię, Czytelniku, przekonać do mojego spojrzenia na te sprawy i zachęcić do wspólnej nauki pokory wobec przyrody, przedstawiam Ci dzisiaj niezbity, dotychczas nigdzie nie publikowany dowód, że Atom wodoru nie może istnieć (w stanie podstawowym).

Co wiemy o rzeczywistości?

Wodór rzadko wprawdzie obserwuje się w stanie atomowym (chętnie łączy się w cząsteczki H_2), ale jego własności w tym stanie są tak proste i ciekawe, że zostały dość szczegółowo zbadane. Stwierdzono, że elektron i proton, związane siłami przyciągania elektrostatycznego, nie mogą przyjmować dowolnych energii*, ale tylko ściśle określone wartości opisane wzorem Rydberga

$$E_n = -R/n^2 \quad n = 1, 2, \dots$$

R, czyli stała Rydberga, wynosi 13,6 eV i jest energią wiązania elektronu z protonem w najniższym stanie, zwanym podstawowym, opisanym liczbą n równą 1. Tę własność energii atomu wodoru po raz pierwszy opisał w swoim modelu Niels Bohr, a współczesna mechanika kwantowa również przewiduje skwantowanie energii atomu wodoru, wprowadzając do oryginalnego wzoru Rydberga szereg bardzo małych poprawek, o których tu nie będziemy mówić, oraz zwracając uwagę, że każdej energii E_n odpowiada $2n^2$ różnych stanów o różnych wartościach momentu pędu. Atomy wodoru o temperaturze na przykład pokojowej występują z reguły w stanie podstawowym ($n = 1$), co najłatwiej poznać po tym, że wodór nie świeci, chyba że go pobudzimy dostarczając mu w jakiś sposób energii (silnym podgrzaniem, wyładowaniem elektrycznym, światłem itd.). Pobudzony wraca szybko** do stanu podstawowego wysyłając światło o długościach fali układających się w serie Lymana, Balmera itd. Promienie orbit elektronowych w stanach opisanych kolejnymi wartościami n wynoszą na_0 , gdzie $a_0 = 0,53 \text{ \AA}$ jest promieniem Bohra, czyli zasięgiem elektronu w stanie podstawowym.

* Jeżeli atom jako całość pozostaje w spoczynku.

** W czasie rzędu 10^{-8} s (jest to czas, w którym światło przebywa odległość 3 m).

Atak: wodór nie może istnieć w stanie podstawowym

Przed przeprowadzeniem dowodu przypomnijmy sobie podstawowe prawo fizyki statystycznej, które mówi, że jeżeli układ fizyczny może przebywać w stanach o różnych energiach, to dla równowagi termodynamicznej w temperaturze T prawdopodobieństwo znajdowania się układu w jakimś stanie jest proporcjonalne do $e^{-E/kT}$, gdzie E jest energią tego stanu. T oznacza temperaturę (w skali bezwzględnej), a k nosi nazwę stałej Boltzmanna i wynosi $8,6 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}$. Na przykład w temperaturze pokojowej ($T \approx 290 \text{ K}$) $kT \approx 25 \text{ meV}$. Oczywiście jeżeli chcemy obliczyć wartość prawdopodobieństwa, musimy podzielić to wyrażenie przez sumę takich samych wyrażań obliczonych dla wszystkich stanów układu*. (Żeby nie skłaniać Cię, Czytelniku, do kierowania energią intelektualnej w niewłaściwą stronę, wyjaśniam od razu, że powyższe prawo i wynikający z niego wzór na prawdopodobieństwo obsadzenia stanu nie będą tu kwestionowane.) Dalsze rozumowanie jest proste. Zgodnie z tym, co powiedzieliśmy powyżej:

$$P_1 = e^{-E_1/kT} / \sum e^{-E_i/kT},$$

gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich stanach atomu wodoru.

* W ten sposób zapewniamy, że suma wszystkich prawdopodobieństw wynosi 1.

Tych stanów jest nieskończenie wiele, a każdy wyraz sumy w mianowniku jest większy od jedności (bo wszystkie E_i są ujemne*). A więc suma jest nieskończona, czyli cały ułamek (to znaczy prawdopodobieństwo, że układ znajduje się w stanie podstawowym) równa się zeru.

* W zasadzie powinniśmy uwzględnić także stany o dodatnich energiach, ale uczyniłoby to sumę jeszcze większą.

Konsekwencja: nowa broń (kosmiczna?)

Każdy, kto słyszał kiedykolwiek o laserze i jego zasadzie działania, zawoła natychmiast w tym miejscu: Ależ to jest inwersja obsadzeń! Wodór w stanie równowagi termodynamicznej nadaje się do zbudowania lasera, w którym każdy atom w niezwykle krótkim czasie wypromieniuje energię 13,6 eV w postaci promieniowania nadfioletowego. Oznacza to, że kilogram wodoru, czyli około 1000 moli wyrzuci z siebie energię $1000 N_A \cdot 13,6 \text{ eV} = 10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 13,6 \text{ eV} \approx 10^{28} \text{ eV} = 10^{28} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1,6 \cdot 10^9 \text{ J}$. Gdyby impuls laserowy trwał na przykład 10^{-8} s , oznaczałoby to moc ponad 10^{16} W , a więc znacznie więcej niż moc wszystkich elektrowni na świecie łącznie z Czernobylem i Three Mile Island, a także więcej niż moc wszystkich samochodów, samolotów i statków. Nie życzę żadnemu żołnierzowi armii zaprzyjaźnionej lub obcej, aby jego przeciwnik dysponował taką bronią!

Obrona: Wszechświat jest za mały

Suma, która występuje w mianowniku wyrażenia na prawdopodobieństwo obsadzenia stanów, nazywa się sumą statystyczną. Jest to bardzo ważna wielkość charakteryzująca układ fizyczny. Stwierdziliśmy powyżej, że jest ona nieskończona, to znaczy: dodając kolejne wyrazy tej sumy możemy osiągnąć dowolnie wielką liczbę — a więc w szczególności dowolnie dużą w porównaniu z członem pochodzącym od stanu podstawowego. Jakkolwiek beznadziejnie wyglądałoby sumowanie nieskończonej liczby wyrazów, spróbujmy się do niego zabrać. Niech nasz wodór ma temperaturę pokojową ($T \approx 290 \text{ K}$). Najniższą energię $E_1 = -13,6 \text{ eV}$ ($n = 1$) mają właściwie dwa stany o przeciwnych kierunkach momentu pędu (spinowego). Wyraz odpowiadający tej energii wyniesie więc $2 \cdot e^{13,6 \text{ eV}/0,025 \text{ eV}} = 2e^{544}$. Jak zauważyłeś, Czytelniku, zamiast rozważać wyrazy sumy statystycznej, odpowiadające pojedynczym stanom, grupuję je w człony odpowiadające kolejnym energiom.

Następnej energii $E_2 = -13,6 \text{ eV}/4 = -3,4 \text{ eV}$ ($n = 2$, czyli 8 stanów o różnych momentach pędu) odpowiada wyraz $8 \cdot e^{3,4/0,025} = 8e^{136}$. Jest on, oczywiście, $1/4e^{408}$, czyli $6,3 \cdot 10^{169}$ razy mniejszy od pierwszego. Jak wielka jest to liczba, trudno sobie wyobrazić. Ocenia się, że masa dostępnej naszym obserwacjom części Wszechświata jest rzędu 10^{51} kg^* , co w przeliczeniu na atomy wodoru daje liczbę rzędu 10^{78} . Gdybyśmy wzięli tyle Wszechświatów, ile atomów wodoru odpowiada masie całego Wszechświata, i wszystkie te Wszechświaty rozdrobnili na atomy wodoru, to liczba tych ostatnich byłaby jeszcze kilkadziesiąt bilionów razy mniejsza od wyliczonego powyżej stosunku pierwszego do drugiego wyrazu sumy statystycznej. Jeżeli drugi wyraz sumy statystycznej jest tak niewiarygodnie mały w porównaniu z pierwszym — powiesz z pewnością — to jak ogromną liczbę wyrazów musimy wziąć, aby ich suma przewyższyła wartość pierwszego wyrazu, a choćby stała się z nim porównywalna!

Nie będę Cię zanudzał rachunkami: jeśli zechcesz, sprawdzisz, że aby suma kolejnych wyrazów, nie licząc pierwszego, dorównała jego wartości, trzeba dojść do wartości n rzędu 10^{79} , a więc większej niż liczba atomów wodoru, które złożyłyby się na masę Wszechświata.

Możesz jeszcze, Czytelniku, zapytać, jakie rozmiary miałyby orbita elektronu odpowiadająca tak wielkiej liczbie n ? Odpowiedź jest łatwa — trzeba promień stanu podstawowego $a_0 = 0,53 \text{ \AA} = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ pomnożyć przez wyliczoną liczbę n . Otrzymujemy atom wodoru wielkości rzędu $10^{69} \text{ m} = 10^{53} \text{ lat świetlnych}$, a więc monstrum o rozmiarach liniowych przewyższających 10^{43} razy promień dostępnego naszej obserwacji Wszechświata. Takiego atomu wodoru nikt nigdy nie widział i na pewno nieprędko zobaczy! Teraz już chyba widzisz, co miałem na myśli mówiąc o zarozumiałości fizyków — rozciągnięcie zakresu stosowania modelu poza wszelkie granice zdrowego rozsądku wykonujemy mimochodem, nawet tego nie zauważając. Przetestowałem opisany powyżej paradoks na wielu fizykach — przekonując się na ogół, że teoria zwyciężyła nad faktami w ich umysłach**. Ponieważ, jak wiadomo, zmienić cokolwiek w nauce można tylko czekając, aż wymrą zwolennicy starych poglądów, nie będę tracił energii na przekonywanie fizyków już ukształtowanych, lecz zwracam się do Ciebie, przyszły fizyku: spójrz ze mną z pokorą i szacunkiem na przyrodę, a z nieufnością na ludzką o niej wiedzę.

* *Struktura materii* — przewodnik encyklopedyczny, PWN Warszawa 1980, str. 809.

** Nie świadczy to wcale o niskim poziomie intelektualnym moich rozmówców. Nie kto inny niż Hegel odpowiadając na zarzut, że fakty przeczą jego teoriom, rzekł: „tym gorzej dla faktów”.

Andrzej Szczepan Białynicki-Birula urodził się w Nowogrodku 26 grudnia 1935 r. Studia matematyczne ukończył na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Warszawskiego w 1956 roku. Jego głównym zainteresowaniem po ukończeniu studiów były logika matematyczna i algebra. Zapewne duży wpływ na taki wybór miała osobowość profesora Andrzeja Mostowskiego. Jednak późniejsze studia, szczególnie studia doktoranckie na Uniwersytecie w Berkeley (USA), wpłynęły na wyraźną zmianę zainteresowań. Już w pierwszej połowie lat sześćdziesiątych zajął się geometrią i topologią algebraiczną. Dziś stawia na pierwszym miejscu uzyskiwanie konkretnych, nowych faktów z tzw. twardej matematyki. Jest pod wpływem szkoły bourbakistów. Taki zyciorys naukowy pozwala sądzić, że jego wypowiedzi na temat matematyki są rzetelne (bo na różne sposoby ją skutecznie uprawiał) i przemyślane (bo się zmieniały).

Rozmowa o matematyce

z prof. dr. Andrzejem BIAŁYNICKIM-BIRULĄ,
członkiem korespondentem PAN

Czy matematyka to jedna nauka, czy raczej grupa dyscyplin połączonych ze względów administracyjnych i tradycyjnych?

Z całą pewnością jest to jedna nauka. I łatwo zresztą wskazać, co łączy jej poszczególne gałęzie i co decyduje, że wszystkie zasługują na miano matematyki. Tą cechą wspólną jest używanie dedukcji jako jedyne narzędzia uzyskiwania nowych faktów, twierdzeń.

Cechą wspólną czy częścią wspólną? Bo jeśli wziąć pod uwagę np. teorię grafów i równania cząstkowe...

Przykład jest bardzo krańcowy. Między tymi dwiema (chyba rzeczywiście odległymi) gałęziami matematyki leży cały szereg innych i w płynny sposób można w obrębie matematyki przejść od teorii grafów do równań różniczkowych. Metoda dedukcyjna nie jest tylko sztucznie uzyskanym przecięciem, ale istotą matematyki. Matematycy to ci, którzy posługują się dedukcją w procesie wnioskowania prowadzącym od przyjętych założeń (aksjomatów, definicji) do nowo odkrywanych faktów (twierdzeń).

Komisarz Maigret też posługuje się dedukcją.

Ale tylko częściowo. Przedmiot jego badań nie daje się zaksjomatyzować. W jego dziedzinie pracy nie można precyzyjnie ustalić założeń i zgodzić się jedynie na bezwzględnie pewne reguły wnioskowania, a więc nie jest on matematykiem. Gdyby można było stworzyć model matematyczny przedmiotu zainteresowań Maigreta, on także byłby matematykiem.

Hilbert w 1900 roku uważał rachunek prawdopodobieństwa za dział fizyki.

Właśnie. A kiedy w latach trzydziestych stworzono dobry i całkowicie matematyczny model prawdopodobieństwa opierający się na teorii miary — probabilistyka „przeniósł się” do matematyki i dziś jest jedną z jej ważnych i pełnoprawnych gałęzi. Wcześniej to samo stało się np. z mechaniką. Prace Newtona umożliwiły zbudowanie matematycznego modelu mechaniki — stąd np. zasady d'Alemberta i Hamiltona zostały uzyskane już jako twierdzenia matematyczne. W ten sposób znaleźliśmy się przy równaniach różniczkowych.

Ale nie zaczęliśmy od teorii grafów.

Matematyka od samego początku miała zarówno dyskretny, jak ciągły charakter. Od początku były liczby naturalne i wymierne oraz przestrzeń. Mierzenie reprezentowało wtedy związek między dyskretną a ciągłą stroną matematyki.

Trudno uwierzyć, że dziś matematyka jest badaniem liczb i przestrzeni.

Nie tak trudno. „Dalsze” pojęcia w ten czy inny sposób można na ogół z owych liczb czy z przestrzeni wyprowadzić. Są wyjątki, np. pojęcia logiki matematycznej mają inne źródła. W wielu działach matematyki pojęcia o dyskretnym i o ciągłym rodowodzie zgodnie występują obok siebie. W krańcowych przypadkach dominują pojęcia o dyskretnym lub ciągłym pochodzeniu. Nie sądzę, by można było wyciągnąć stąd jakieś interesujące wnioski dotyczące różnic dzielących te przypadki. Łączy je z pewnością wspomniana metoda dedukcji, ale nie tylko. Poszczególne etapy rozwoju matematyki mają swój ulubiony punkt widzenia na objekty badań, punkt widzenia wspólny dla wielu nieraz bardzo odległych dziedzin. Dla dwudziestowiecznej matematyki ważne stało się badanie powiązań między pokrewnymi obiektami, powiązań wykrywanych przez istnienie i własności przekształceń badanych obiektów. Można by powiedzieć, że matematyk patrzy na badane objekty tak, jakby znajdowały się one w ruchu, podlegały zmianom, przekształceniom. W związku z tym same przekształcenia stały się objektem badań.

Niezależnie od tego, o którą gałąź matematyki chodzi.

Nie należy dzielić matematyki na gałęzie. Szybki rozwój poszczególnych teorii matematycznych, a co za tym idzie — wypracowywanie specjalnych i bardzo nieraz trudnych metod powoduje separację, trudności w komunikowaniu sobie nawzajem wyników i kłopotów. Jednak znaczące sukcesy uzyskane w jednym kierunku mają często znaczący wpływ na inne — użyta metoda wzbogaca wspólny dla wszystkich matematyków zasób narzędzi i język pojęciowy. Właśnie rozwój tego wspólnego języka jest najsilniejszym czynnikiem integrującym matematykę. Pozwala to



MASER NA JEDNYM ATOMIE

W ostatnich latach w laboratoriach fizycznych pojawił się nowy interesujący obiekt badań, tzw. atom rydbergowski. Jest to atom, w którym jeden z elektronów znajduje się na orbicie bardzo oddalonej od jądra i pozostałych elektronów. Jego rozmiary mogą być nawet porównywalne z rozmiarami komórek zwierzęcych. Poziomy energetyczne atomu rydbergowskiego są rozmieszczone tak gęsto, że przejściom między nimi towarzyszy emisja (bądź absorpcja) fal, już nie świetlnych, a radiowych o długościach rzędu centymetrów. Od 1982 roku grupa fizyków francuskich prowadzi eksperymenty z atomami umieszczonymi we wnękach rezonansowych nastrojonych na przejścia między sąsiednimi poziomami rydbergowskimi. Przy dobrym rezonatorze energia takiego układu koncentruje się albo w polu elektromagnetycznym, albo w atomach i może "przepływać" z pola do atomów i odwrotnie.

W Instytucie Maxa Plancka w Monachium udało się zaobserwować taką wymianę energii, gdy w rezonatorze znajdował się jeden tylko atom, a średnia liczba fotonów o częstotliwości radiowej nie przekraczała dziesięciu. Uzyskano więc maser na jednym atomie!

Układ złożony z jednego atomu i kilku fotonów jest wyjątkowo cennym obiektem do badania subtelnych efektów elektrodynamiki kwantowej. Teoria przewiduje np. tłumienie wymiany energii między atomami i polem z wpływem czasu przebywania atomu w rezonatorze oraz, zjawisko raczej nieoczekiwane, po pewnym czasie ponowne wzmocnienie wymiany. Zgodnie z kwantową teorią promieniowania liczba fotonów w rezonatorze nie jest dokładnie określona, każdej zaś liczbie odpowiada inna częstota z jaką zachodzi wymiana energii między atomem i polem. Przyczyna tłumienia jest składanie różnych częstotliwości, a ponowne wzmocnienie związane jest z faktem, iż zbiór możliwych częstotliwości jest dyskretny. Po pięciu latach od chwili opublikowania prac przewidujących to zjawisko, zostało ono odkryte przez fizyków niemieckich w maserze na jednym atomie. W eksperymencie użyto nadprzewodzącego rezonatora o częstotliwości 21,5 GHz, przez który przepuszczano pojedyncze atomy rubidu.

Nawet na stwierdzenie, że panuje swego rodzaju dynamiczna równowaga: z jednej strony naturalna specjalizacja, a z drugiej ciągle wzbogacany wspólny sposób myślenia i mówienia. Ostatnio, jak już mówiłem, jest to myślenie o przekształceniach, morfizmach, słowem, to, co najlepiej ilustruje teoria kategorii, ale nie tylko ona. Nawet w szkolnym nauczaniu geometrii w latach sześćdziesiątych zadomowiły się przekształcenia, znane, ale obecne jedynie fragmentarycznie, jeszcze w XIX wieku. Poprzednio takie wzbogacenie wspólnego języka stanowiły pojęcia mnogościowe, zbiory i rachunki na nich.

I wszystko jedno, w jakiej gałęzi będzie odniesiony taki znaczący sukces? A co w ogóle oznacza słowo znaczący?

Oczywiście. Chociaż słowo „sukces” lepiej zastąpić słowem „postęp”. Do dziś nie został rozwiązany problem tzw. Wielkiego Twierdzenia Fermata. Ale znaczący postęp uzyskany przeszło sto lat temu w badaniu tego problemu przez Kummera i jego uczniów dał wszystkim matematykom podstawowe pojęcia algebry. W ten zresztą sposób można mierzyć wagę uzyskanych rezultatów — są ważne, jeśli nie tylko udzielają odpowiedzi na konkretne pytanie, lecz także, a może przede wszystkim, dają przydatny dla wielu nowy zasób metod badawczych. Zasób dobry, bo sprawdzony przez odniesiony za jego pomocą konkretny sukces.

Wydaje się jednak, że ta równowaga tendencji odśrodkowych i dośrodkowych w matematyce to pewna przesada. Jakoś trudno trafić na kogoś, kto znałby całą matematykę, a nie tylko swoją dyscyplinę.

To znaczy znał wszystkie twierdzenia?

Nie. Ale rozumiał, co mówią inni.

Ta trudność bierze się jedynie z faktu, że ludzi zawodowo związanych z matematyką jest dziś niestychanie wielu. I tych samych kilkunastu matematyków, którzy w sumie znają problematykę ogółu gałęzi matematyki, a na dodatek umieją się między sobą porozumieć, można dziś wskazać równie łatwo, jak można to było zrobić sto lat temu. Dziś tylko bardzo rozrosło się tło — dlatego może ich mniej widać.

Wróćmy jeszcze do Maigreta. Raczej nie zanoszą się na to, by w dającej się przewidzieć przyszłości zbudowano model matematyczny świata przestępczego i by kryminologia poszła w ślady mechaniki czy probabilistyki i stała się gałęzią matematyki. W innych jednak dyscyplinach wiedzy matematyzacja się dokonuje. Czemu? Czy rzeczywiście warto zabiegać o taki „awans”? A może to tylko chwilowa moda?

Nie sądzę, aby rzeczywiście o to chodziło. Nie zauważyłem, by jakkolwiek dyscyplina miała ambicje czy choćby ochotę stać się gałęzią matematyki. W większości przypadków tzw. matematyzacji mamy do czynienia tylko z zapożyczeniem języka (i to z prostszych działów matematyki) dla opisu ilościowego. To z matematyką nie ma wiele wspólnego (tylko liczby — bo niby jak inaczej mówić o ilości). Ważniejsza jest możliwość zbudowania modeli matematycznych, ale nie całokształtu problematyki jakiejś dyscypliny wiedzy, a tylko jakiegoś jej aspektu lub jakiegoś zjawiska. Pozwala to na dedukcyjne badanie tego zjawiska, przewidywanie jego przebiegu...

Zjawiska przypadkowo wybranego?

Nie. Dzieje się to głównie tam, gdzie odkryto podstawowe prawa rządzące powiązaniem badanych obiektów w czasie i przestrzeni (fizyka, chemia). Modele matematyczne wprowadza się często też tam, gdzie ilość informacji staje się zbyt wielka i zachodzi konieczność ich uporządkowania, systematyzacji. Np. systematyka biologiczna z konieczności wprowadza w świecie ożywionym strukturę, która bardzo przypomina geometrię — chodzi przecież o to, które gatunki są bliższe, a które dalsze. W związku z tym można te zagadnienia modelować używając pojęć geometrii.

Powstają więc „matematyczne kolonie” w biologii, ekonomii, socjologii itp.?

Jeszcze nie. Byłyby to kolonie, gdyby w ich obrębie, w obrębie matematycznego modelu, uzyskiwano dedukcyjnie nowe fakty, nowe twierdzenia. Ale tak się praktycznie nigdzie nie dzieje. Stosując dobrze znane twierdzenia dotyczące tych modeli i przekładając je na język modelowanej dziedziny uzyskuje się fakty z tej dziedziny, a nie nowe twierdzenia matematyczne. Jeśli matematycy mogą mówić o koloniach, to chyba tylko w informatyce (np. złożoność obliczeniowa) i w fizyce (np. mechanika kwantowa czy teoria pola). Gdzie indziej — matematykę się stosuje. A stosować matematykę to zupełnie coś innego niż ją uprawiać.

W imieniu Czytelników Delty dziękuję za rozmowę.

Rozmawiał Marek KORDOS

Komputer szuka jedności

Trudno się spodziewać, aby komputer mógł „sam” udowodnić twierdzenie dotyczące zbiorów nieskończonych, może on jednak pomóc matematykowi w formułowaniu hipotez, których potem dowodzi się „ręcznie”. Właśnie za jego pomocą opisałem grupę elementów odwracalnych pewnego pierścienia — okazało się, że badana nieskończona grupa nie jest nawet skończenie generowana. Potrzebne jest jednak pewne wprowadzenie.

Rozważmy zbiór wszystkich izometrii prostej rzeczywistej przekształcających zbiór liczb całkowitych \mathbb{Z} na siebie. Izometrie te ze składaniem jako działaniem tworzą grupę, tzw. grupę dihedralną nieskończoną, którą będziemy oznaczać symbolem D . Zaczniemy od opisanja jej. Izometria prostej jest wyznaczona przez swoje wartości na dwóch różnych punktach, np. 0 i 1. Weźmy dowolne $f \in D$ — niech $f(0) = n \in \mathbb{Z}$. Zachodzi jedna z dwóch możliwości.

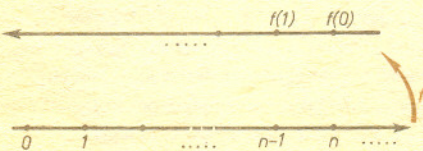
Albo $f(1) = 1 + n$, co daje $f(r) = r + n$ dla każdego $r \in \mathbb{R}$,

Zbiór G wraz z dwuargumentowym, łącznym działaniem „ \cdot ”, oraz wyróżnionym elementem e nazywamy grupą, jeśli dla każdego g :

- $e \cdot g = g = g \cdot e$.
- istnieje $h \in G$ spełniająca $g \cdot h = h \cdot g = e$.



albo $f(1) = -1 + n$ i wtedy $f(r) = -r + n$.



Używając dwóch szczególnych izometrii: przesunięcia o 1 ($f(r) = r + 1$) oraz symetrii względem punktu 0 ($x(r) = -r$), w pierwszym przypadku zapisujemy f jako $f = t^n$, w drugim $f = t^{-n}x$. Oznacza to, że x, t generują grupę D . Zauważmy, że $x^2(r) = r = id(r)$, $xt(r) = -r - 1 = t^{-1}x(r)$, zatem w D zachodzą równości: $x^2 = e$, $xt = t^{-1}x$ — tę ostatnią łatwo jest indukcyjnie uogólnić na $xt^i = t^{-i}x$ dla $i \in \mathbb{Z}$. Tym sposobem uzyskaliśmy pełny opis grupy D — dowolne jej elementy umiemy przedstawiać w postaci t^n lub $t^{-n}x$, a ich iloczyn sprowadza do takiej postaci za pomocą równości $x^2 = e$, $xt^i = t^{-i}x$, np. $t^n x t^m = t^n t^{-m} x = t^{n-m} x$, $t^n x t^m x = t^n t^{-m} x^2 = t^{n-m}$.

Mówimy, że podzbiór $X \subseteq G$ generuje grupę G , jeśli każdy element $g \in G$ daje się zapisać w postaci iloczynu $g = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$, gdzie $x_i \in X$.

Oznaczmy przez $Z_2 D$ rodzinę wszystkich skończonych podzbiorów D , określimy na niej dwa działania. Dla $A, B \in Z_2 D$ określimy sumę $A + B$ jako zbiór składający się z tych elementów D , które należą do dokładnie jednego ze zbiorów A, B , czyli jako różnicę symetryczną $A \dot{-} B$. W szczególności jeśli $A = \{g_1, \dots, g_n\}$, to $A = \{g_1\} + \dots + \{g_n\}$ — będziemy stosować skrócony zapis $A = g_1 + \dots + g_n$. Mnożenie zadajemy najpierw na zbiorach jednoelementowych przez $\{g\} \cdot \{h\} = \{g \circ h\} \subseteq D$, a dowolne

$A, B \in Z_2 D$ mnożymy korzystając z rozdzielności mnożenia względem dodawania, przedstawiając je w postaci $A = g_1 + \dots + g_n, B = h_1 + \dots + h_l$. Tak określone działania mają podobne własności do dodawania i mnożenia liczb całkowitych — rolę jedynki przejmuje $\{id\} \in Z_2 D$, rolę zera zbiór pusty. Mówimy, że $Z_2 D$ jest pierścieniem. Mnożenie w $Z_2 D$ nie jest przemienne, np. $\{x\} \cdot \{t\} \neq \{t\} \cdot \{x\}$, bo $t \circ x \neq x \circ t$, ciekawym zjawiskiem jest występowanie dzielników zera, tzn. niezerowych elementów, których iloczyn jest zerem, np. $\{id, x\} \neq \emptyset$, ale $\{id, x\} \cdot \{id, x\} = (id + x) \cdot (id + x) = id \circ id + id \circ x + x \circ id + x \circ x = (id + x) + (x + id) = \{id, x\} + \{id, x\} = \emptyset$. Nas szczególnie interesować będą elementy odwracalne (czasami nazywane jednościami), czyli takie $u \in Z_2 D$, dla których istnieje $v \in Z_2 D$ spełniająca $u \cdot v = v \cdot u = \{id\}$. Łatwo jest sprawdzić, że jedności tworzą grupę ze względu na mnożenie w $Z_2 D$; oznaczmy ją przez U . Moim zadaniem było opisanie tej grupy, a w jego realizacji szczególnie pomocny okazał się komputer IBM PC.

Zbiór P z dwoma dwuargumentowymi działaniami „ $+$ ” i „ \cdot ” nazywamy pierścieniem, jeśli

- P z działaniem „ $+$ ” jest grupą,
- „ $+$ ” jest przemienne,
- „ \cdot ” jest łączne,
- „ \cdot ” jest rozdzielne względem „ $+$ ”, tj. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

Najprostszymi elementami odwracalnymi w $Z_2 D$ są jednoelementowe podzbiory D (dla $u = \{g\}$ wystarczy przyjąć $v = \{g^{-1}\}$); tworzą one grupę tzw. trywialnych jedności, którą zapominając o nawiasach $\{ \}$ można utożsamić z D . Opisane w ten sposób trywialne jedności nie wyczerpują jednak całego U , bo np. $u = t^{-1} + id + t + t^{-1}x + tx$ spełnia $u \cdot u = \{id\}$, zatem $u \in U$. Wiedziałem, że mogę się ograniczyć do badania elementów odwracalnych szczególnej postaci $u = id + t^{i_1} + \dots + t^{i_n} + t^{j_1}x + \dots + t^{j_l}x + t^d x$, gdzie $0 < i_1 < \dots < i_n < d$, $0 < j_1 < \dots < j_l < d$ — liczbę d będę dalej nazywał stopniem u . Pierwszym zadaniem napisanego w Turbo-Pascalu programu było znalezienie wszystkich jedności powyższej postaci i stopnia nie większego od 12. Po około 40 minutach obliczeń, w czasie których sprawdzonych zostało 8 384 513 kandydatów, komputer wypisał 683 elementy odwracalne. Następnym etapem było znalezienie możliwie najmniejszej liczby generatorów (opisując D widzieliśmy, jak przydatna jest ich znajomość) i rozpisanie znalezionych 683 jedności w postaci ich iloczynów. Tym razem obliczenia trwały około 3 minut i wybranych zostało 12 generatorów $u_i = id + t^i + t^{2i} + x + t^{2i}x$, $w_i = id + t^i + t^{2i} + tx + t^{2i+1}x$ dla $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, do których należało jeszcze dodać generatory grupy trywialnych jedności, czyli $\{t\}$ i $\{x\}$. Przytaczam tu początek wypisanej przez komputer listy:

jedność	rozkład
1. $u_1 = id + t + t^2 + x + t^2x$	generator
2. $u_2 = id + t^2 + t^4 + x + t^4x$	generator
3. $a_1 = id + t + t^2 + t^3 + t^4 + x + tx + t^3x + t^4x$	$a_1 = \{t\} \cdot u_1 \cdot \{t^{-2}\} \cdot u_3$
4. $a_2 = id + t + t^2 + t^4 + t^5 + x + t^2x + t^3x + t^5x$	$a_2 = \{t\} \cdot w_1 \cdot \{t^{-1}\} \cdot u_1$
5. $a_3 = id + t + t^3 + t^4 + t^5 + x + t^2x + t^3x + t^5x$	$a_3 = \{t\} \cdot w_1 \cdot u_1$
6. $u_3 = id + t^3 + t^6 + x + t^6x$	generator
7. $a_4 = id + t + t^3 + t^5 + t^6 + x + tx + t^5x + t^6x$	$a_4 = u_3 \cdot \{t^{-2}\} \cdot u_2$
8. $a_5 = id + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + x + tx + t^2x + t^4x + t^5x + t^6x$	$a_5 = u_3 \cdot \{t^{-2}\} \cdot u_2 \cdot \{t^{-1}\} \cdot u_1$

Wyniki sugerowały, że prawdziwe może być twierdzenie: jedności $u_i, w_i, \{t\}, \{x\}$ dla $i > 0$ generują grupę U , przy czym do otrzymania jedności stopnia d wystarczają te u_i, w_i , dla których $2i \leq d$.

Tak konkretnie sformułowaną hipotezę udało mi się udowodnić.

Korzystając z tego samego materiału doświadczalnego zaproponowałem i dowiodłem jeszcze jedno twierdzenie: u_k nie daje się zapisać w postaci iloczynu $\{t\}, \{x\}$ i tych u_i, w_i , dla których $i < k$.

Dwa powyższe twierdzenia pokazują, że żadna skończona liczba jedności nie generuje całego U . Jeśli bowiem $v_1, \dots, v_n \in U$, to

wyberzmy k większe od maksymalnego ze stopni v_i . Na mocy pierwszego twierdzenia każdy iloczyn $v_{i_1} \cdot \dots \cdot v_{i_m}$ daje się też zapisać jako iloczyn $\{t\}, \{x\}$ i tych u_j, w_j , że $2j < k$. Ale na mocy drugiego twierdzenia u_k nie daje się przedstawić w postaci takiego iloczynu, zatem v_1, \dots, v_n nie mogą generować całego U .

Znajomość generatorów grupy elementów odwracalnych pierścienia Z_2D pozwoliła mi ostatecznie na całkowite jej opisanie. Wynik końcowy podaję dla koneserów.

$$U \simeq \left(\bigoplus_{i \in Z} * \oplus_{j \in Z} Z_2 \right) \rtimes D$$

Patrz w niebo

Przez cały 1987 rok Jowisz porusza się w obszarze gwiazdozbiorów zodiakalnych Wodnika i Ryb. 27 marca był w złączeniu ze Słońcem, a więc wczesną wiosną pozostawał niewidoczny dla ziemskiego obserwatora. Później, wskutek tego, że ruch jego jest wolniejszy od ruchu Słońca, stopniowo oddalał się od naszej gwiazdy dziennej w kierunku zachodnim, wschodził tuż przed świtem tak, że do maja pozostawał jeszcze niewidoczny. Od połowy maja wschodzi już na tyle wcześniej, że można obserwować go na ciemnym tle nieba. Każdej nocy moment jego wschodu jest coraz wcześniejszy, aż do czasu, gdy znajdzie się w opozycji ze Słońcem. Wtedy, jak każda planeta górna, będzie świecił, dla ziemskiego obserwatora, po przeciwnej stronie nieba niż Słońce. W dniu opozycji wędzie dokładnie o zachodzie Słońca, będzie górował o północy i pozostanie nad horyzontem przez całą noc.

Przypadająca w tym roku 17 października opozycja jest dość korzystna. Średnica kątowa planety, podczas jej największego zbliżenia do Ziemi, osiągnie $49'7''$. Maksymalnie, podczas opozycji, tarcza Jowisza może osiągać $52''$ i zdarza się to co 83 lata. Najbliższą wielką opozycję będziemy mogli zaobserwować dopiero w 2034 roku, a obecna jest największa od 1975 roku. Do momentu, gdy w listopadzie na niebie wieczornym pojawi się Wenus, Jowisz (przy jasności około $-2,9$ mag) będzie najjaśniejszą „gwiazdą”. Następnie aż do maja przyszłego roku Wenus pozostanie najjaśniejszą „gwiazdą wieczorną”.

Jesienią Merkury znajdzie się dwukrotnie w największej elongacji, tj. najdogodniejszym położeniu dla ziemskiego obserwatora. Najpierw — 3 października — oddali się o 26° na wschód od Słońca. W tym czasie jednak ekliptyka tworzy mały kąt z horyzontem (patrz *Delta* 1/1986), a więc Merkury będzie słabo widoczny i zajdzie jeszcze o zmierzchu. Później, w okolicach 13 listopada, będzie można dostrzec Merkurego na niebie porannym, w maksymalnej odległości (19°) na zachód od Słońca. Tym razem, choć maksymalna odległość kątowa będzie mniejsza niż w październiku, warunki obserwacji będą znacznie lepsze, ponieważ o tej porze roku ekliptyka tworzy o świcie duży kąt z horyzontem.

Ci, którzy lubią wstawać, mają szansę zaobserwować jesienią również Marsa. Od 23 sierpnia, gdy przeszedł złączenie ze Słońcem, warunki jego widzialności stopniowo polepszają się. 10 listopada warto zwrócić uwagę na stosunkowo bliskie (w odległości 3°) przejście Marsa na północ od Spiki — najjaśniejszej gwiazdy konstelacji Panny. Do września przyszłego roku Mars będzie wschodził coraz wcześniej, aż do momentu osiągnięcia opozycji. Tym razem będzie to Wielka Opozycja Marsa! (O opozycjach Marsa pisaliśmy w *Delcie* 7/1986.)

Miłośnikom nieba, dysponującym przyrządami astronomicznymi, polecamy dokonanie obserwacji Jowisza podczas zbliżającej się opozycji. Wielka planeta jest szczególnie efektywna — przy trzydziestokrotnym powiększeniu wygląda jak Księżyc obserwowany gołym okiem. Kilkunastocentymetrowy instrument pozwala dostrzec kilka charakterystycznych pasów równoległych do równika planety. Pasy te utworzone są z chmur istniejących w rozległej atmosferze Jowisza. O istnieniu atmosfery świadczy również fakt, że tarcza planety jest jaśniejsza w środku niż przy brzegu.

Dla skromnych na ogół środków optycznych miłośnika astronomii dostępne są tylko cztery najjaśniejsze (odkryte przez Galileusza) satelity Jowisza. Widać je w postaci świecących punktów, zmieniających szybko swe położenie względem planety. Ich ruch odbywa się niemal dokładnie w płaszczyźnie równika Jowisza, toteż cały czas układają się prawie wzdłuż prostej. W ciągu kilku godzin obserwacji można zauważyć zakrycia satelitów Jowisza przez jego tarczę, zaćmienia satelitów zanurzających się w cieniu planety lub cienie satelitów na jej powierzchni.

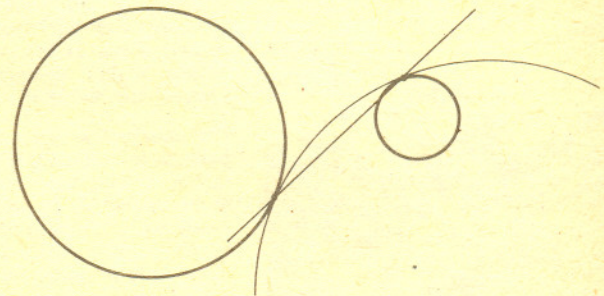
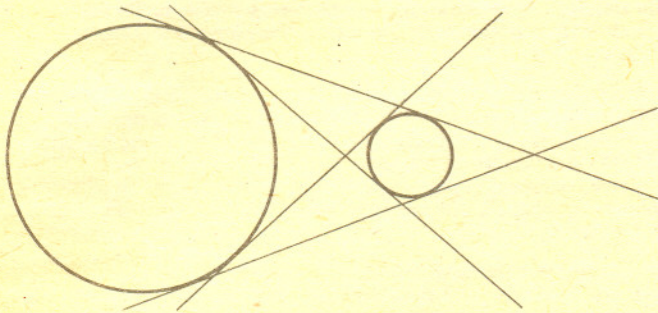
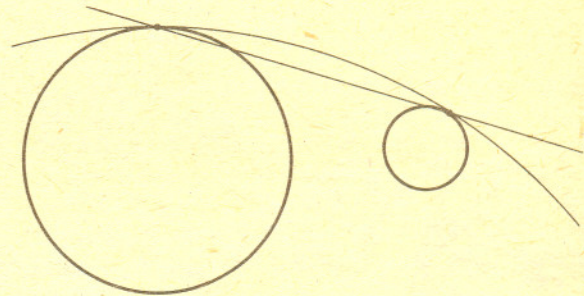
mgr Joanna UDALSKA

delta

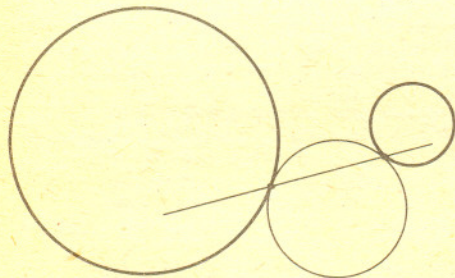
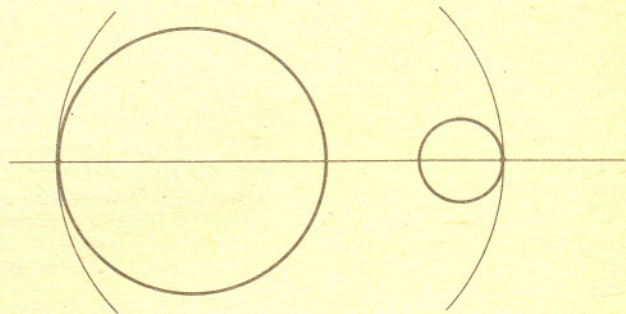


Cztery styczne do dwóch okręgów

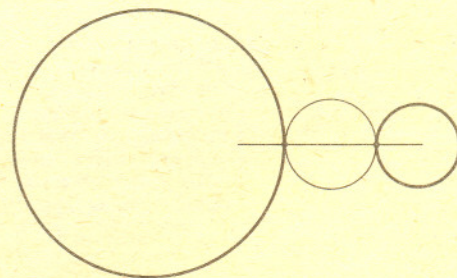
Dwa różnej wielkości okręgi, leżące jeden na zewnątrz drugiego, mają cztery wspólne styczne. To wie każdy. Nie każdy natomiast wie, że te styczne mają dużo ciekawych własności.

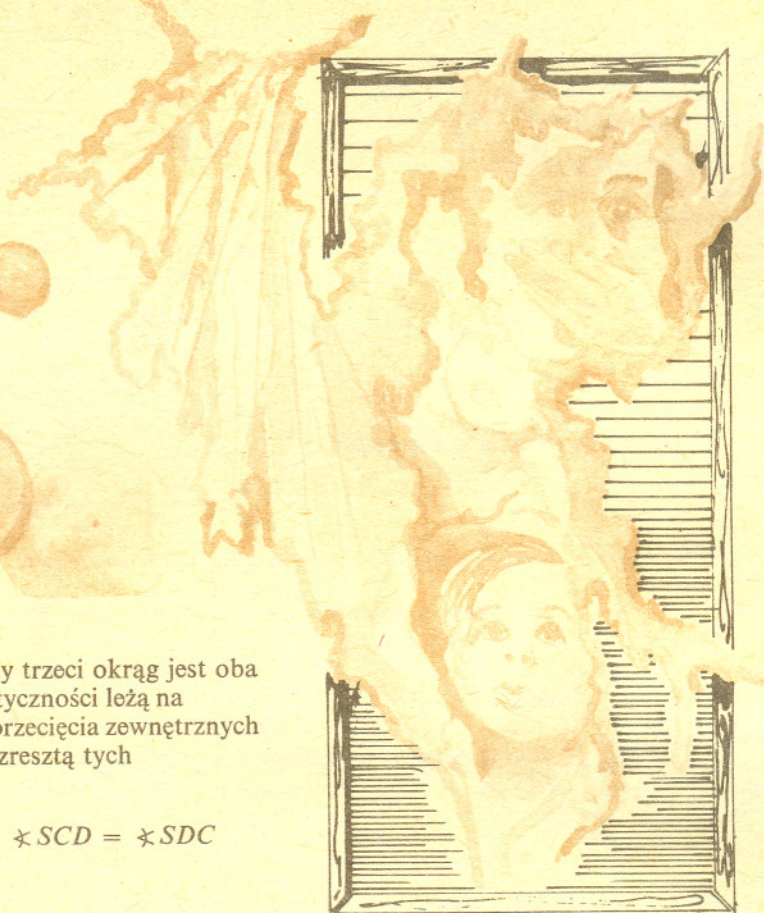
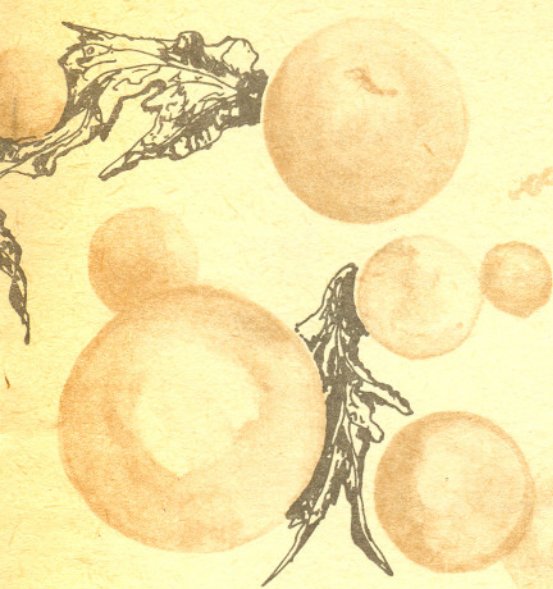


Narysujmy trzeci okrąg, styczny do pierwszych dwóch. Punkty styczności leżą na prostej przechodzącej albo przez punkt przecięcia zewnętrznych stycznych, albo przez punkt przecięcia wewnętrznych stycznych.



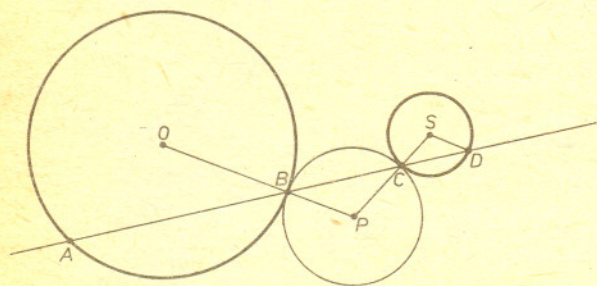
To „albo” bierze się stąd, że trzeci okrąg może być do każdego z pierwszych styczny albo zewnętrznie, albo wewnętrznie. Może się też zdarzyć, że na prostej przechodzącej przez punkty styczności leżą będą oba punkty przecięcia stycznych.





Dowodziemy, że w przypadku, gdy trzeci okrąg jest oba razy styczny zewnętrznie, punkty styczności leżą na prostej przechodzącej przez punkt przecięcia zewnętrznych stycznych. Nie będziemy rysowali zresztą tych stycznych. Spójrzmy na rysunek.

$$\sphericalangle OBA = \sphericalangle PBC = \sphericalangle PCB = \sphericalangle SCD = \sphericalangle SDC$$

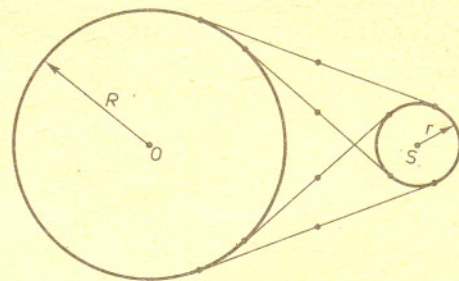


Pierwsza i trzecia równość wynika stąd, że kąty są wierzchołkowe, a druga i czwarta z tego, że trójkąty są równoramienne. Z równości pierwszego i piątego kąta wynika, że promienie OB i SD są równoległe. Można więc przekształcić jednokładnie jeden okrąg na drugi tak, by te promienie nałożyły się. Wówczas zarówno prosta OS , jak prosta BD będą przechodziły przez środek jednokładności. A przecież środkiem tym jest punkt przecięcia stycznych.

Czytelnicy zechcą przeprowadzić dowód w pozostałych przypadkach — okaże się on bardzo podobny. I okaże się też, że jeśli obie styczności są takie same (zewnętrzne lub wewnętrzne), to prosta przechodząca przez punkty styczności przechodzi przez punkt przecięcia stycznych zewnętrznych, a gdy styczności są różne — wewnętrznych.

A oto jeszcze jedna własność czterech stycznych do dwóch okręgów. Środki odcinków każdej z nich — od punktu styczności do punktu styczności — leżą na jednej prostej. Aby sprawdzić to, można np. stwierdzić, że rzut prostokątny każdego z nich jest tym samym punktem odcinka OS — mianowicie punktem odległym od O o

$$\frac{OS^2 + R^2 - r^2}{2 \cdot OS}$$



Jestem pewny, że Czytelnicy potrafią znaleźć bardziej elegancki dowód tego twierdzenia.

Nierówności cykliczne

Mgr Jarosław GÓRNICKI

Rozwiązanie zadania M 486. Jedno. W tym celu wystarczy wykazać, że zapis dziesiętny liczby 9^{999} nie kończy się na 99. Gdyby $9^{999} \equiv 99 \pmod{100}$, to $9^{998} \equiv 11 \pmod{100}$, czyli $(9^{499})^2 \equiv 11 \pmod{100}$. Jednak kongruencja $x^2 \equiv 11 \pmod{100}$ nie ma rozwiązań: jeśli $x = 10k \pm 1$, to $x^2 = 100k^2 \pm 20k + 1$, skąd wniosek, że cyfra dziesiątek jest parzysta.

Cykliczność to zjawisko, które w matematyce jest znane. Mamy cykliczne: grupy, permutacje, no i nierówności. Na te ostatnie chcemy zwrócić uwagę Czytelników.

Oto najprostszy przykład. Jeżeli różne od zera liczby rzeczywiste x_1, x_2 są tego samego znaku, to

$$(1) \quad \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \geq 2.$$

Wynika to z rachunku

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{x_1 x_2} (x_1 - x_2)^2 + 2 \geq 2.$$

Naturalne uogólnienie nierówności (1) jest następujące.

Twierdzenie 1. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną ($n \geq 2$). Wtedy dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x_1, x_2, \dots, x_n zachodzi nierówność

$$(2) \quad \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_4} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

Dowód. Skorzystamy z zasady indukcji matematycznej. Dla $n = 2$ nierówność jest prawdziwa. Załóżmy, że dla pewnego n zachodzi wzór (2). Wykażemy, że wtedy prawdziwa jest nierówność

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1}} + \frac{x_{n+1}}{x_1} \geq n+1.$$

Niech $x_1 = \min(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$, czyli $x_2 \geq x_1, \dots, x_{n+1} \geq x_1$.

Mamy więc

$$(x_2 - x_1)(x_{n+1} - x_1) = x_2 x_{n+1} - x_2 x_1 - x_1 x_{n+1} + x_1^2 \geq 0,$$

czyli

$$x_2 x_{n+1} - x_1 x_{n+1} + x_1^2 \geq x_2 x_1.$$

Dzieląc obustronnie ostatnią nierówność przez $x_2 x_1$ otrzymujemy

$$\frac{x_{n+1}}{x_1} - \frac{x_{n+1}}{x_2} + \frac{x_1}{x_2} \geq 1,$$

skąd

$$\frac{x_1}{x_2} + \left(\frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1}} + \frac{x_{n+1}}{x_2} \right) - \frac{x_{n+1}}{x_2} + \frac{x_{n+1}}{x_1} \geq n+1.$$

Gdy $x_k = \min(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$, gdzie $k \in [2, n+1] \cap \mathbb{N}$, to przenumerowujemy ciąg (x_i) cyklicznie, tzn. $y_1 = x_k, y_2 = x_{k+1}, y_{n-k+2} = x_{n+1}, y_{n-k+3} = x_1, \dots, y_{n+1} = x_{k-1}$, a następnie korzystamy z części już udowodnionej. Zatem na podstawie twierdzenia o indukcji matematycznej wzór (2) jest prawdziwy dla liczb naturalnych $n \geq 2$.

W 1903 roku A. M. Nesbitt podał następującą nierówność dla liczb rzeczywistych (Problem 15114, *Educ. Times* (2) 3 (1903), 37–38):

jeżeli $x_1, x_2, x_3 > 0$, to

$$(3) \quad \frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \frac{x_3}{x_1 + x_2} \geq \frac{3}{2}.$$

Jej dowód możemy przeprowadzić korzystając z nierówności (1).

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \frac{x_3}{x_1 + x_2} &= \frac{1}{2} \left[\frac{(x_1 + x_2) + (x_1 + x_3)}{x_2 + x_3} - 1 + \frac{(x_2 + x_1) + (x_2 + x_3)}{x_1 + x_3} - \right. \\ &\quad \left. - 1 + \frac{(x_3 + x_1) + (x_3 + x_2)}{x_1 + x_2} - 1 \right] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x_1 + x_2}{x_2 + x_3} + \frac{x_3 + x_2}{x_1 + x_2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{x_1 + x_3}{x_2 + x_3} + \frac{x_2 + x_3}{x_1 + x_3} \right) + \left(\frac{x_2 + x_1}{x_1 + x_3} + \frac{x_3 + x_1}{x_1 + x_2} \right) - 3 \right] \geq \frac{1}{2} (2 + 2 + 2 - 3) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Równość w (3) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2 = x_3$.

Można podać prostszy dowód twierdzenia 1, gdy znamy nierówność Cauchy'ego: dla nieujemnych liczb rzeczywistych y_1, y_2, \dots, y_n ,

$$\frac{1}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n) \geq (y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Przyjmując $y_i = \frac{x_i}{x_{i+1}}$ dla $i = 1, 2, \dots, n-1$

oraz $y_n = \frac{x_n}{x_1}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} \left(\frac{x_1}{x_2} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \right) \geq \\ &\geq \left(\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdot \dots \cdot \frac{x_{n-1}}{x_n} \cdot \frac{x_n}{x_1} \right)^{\frac{1}{n}} = 1. \end{aligned}$$

Rozwiązanie zadania M 485. Niech X_m oznacz różnicę między liczbą kul w pudełkach I i II po m losowaniach ($X_0 = n$). Jeśli $X_m = k$, to w pudełku I jest $\frac{n+k}{2}$ kul (dłaczego jest to liczba całkowita?). Ponadto

$$X_{m+1} - X_m =$$

$$= \begin{cases} -2 \text{ z prawdopodobieństwem } \frac{n+k}{2n}, \\ 2 \text{ z prawdopodobieństwem } \frac{n-k}{2n}. \end{cases}$$

czyli $P(X_{m+1} - X_m = -2 | X_m = k) = \frac{n+k}{2n}$.

$$P(X_{m+1} - X_m = 2 | X_m = k) = \frac{n-k}{2n}.$$

Dla wygody wprowadzimy nowe oznaczenie: jeśli X jest zmienną losową, A — zdarzeniem, to $E(X; A) = EX \cdot I_A$, gdzie I_A jest zmienną losową przyjmującą wartość 1, gdy A zaszło i 0 w przeciwnym razie. Mamy więc

$$E(X_{m+1} - X_m; X_m = k) = -2 \cdot \frac{k}{n} \cdot P(X_m = k).$$

Sumując po k otrzymujemy

$$E(X_{m+1} - X_m) = -\frac{2}{n} \cdot EX_m.$$

$$\text{stąd} \quad EX_{m+1} = \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot EX_m,$$

$$\text{zatem} \quad EX_m = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m \cdot EX_0 = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m \cdot n.$$

Jak widać, średnia różnica dość szybko zmierza do zera.



Rozwiązanie zadania F 231. Tryt różni się od wodoru jedynie istnieniem dwóch dodatkowych neutronów w jądrze, a więc jego własności chemiczne, określone przez elektrony, będą takie same jak „zwykłego” wodoru. A więc w temperaturze pokojowej będzie to gaz o wzorze $^3\text{H}_2$ i masie molowej $\mu = 6 \text{ g/mol}$. Na początku podanego okresu w pojemniku znajdowała się $\nu_w = 1/6$ mola wodoru. W ciągu 12 lat połowa jego przekształca się w jednoatomowy hel, a więc zostało $\nu = 1/4$ mola. Ciśnienie znajdziemy z równania stanu gazu doskonałego:

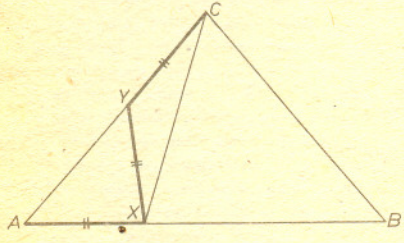
$$p = \nu RT/V = 6,2 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$



Rozwiązanie zadania M 484. Jeżeli punkty X i Y stanowią rozwiązanie zadania, to

1° $\sphericalangle CAB = \sphericalangle YAX = \sphericalangle AYZ$ — wynika stąd, że rozwiązanie istnieje tylko dla takich A, B, C , dla których $\sphericalangle CAB < 90^\circ$;
 2° $\sphericalangle ACX = \sphericalangle YCX = \sphericalangle YXC$
 $= \frac{1}{2} (180^\circ - \sphericalangle CYX) = \frac{1}{2} \sphericalangle AYZ = \frac{1}{2} \sphericalangle CAB$
 — wynika stąd, że rozwiązanie istnieje tylko dla takich A, B, C , dla których $\sphericalangle ACB > \frac{1}{2} \sphericalangle CAB$.

Warunki te wystarczają również do przeprowadzenia konstrukcji, bowiem z 2° wynika, że X leży na półprostej tworzącej z CA kąt $\frac{1}{2} \alpha$, gdzie $\alpha = \sphericalangle CAB$, a taką półprostą łatwo skonstruować.



Wynik dla $n = 13$ został uzyskany w 1985 roku (B. A. Troesch in *Math. Computation* 45 (1985), 199—207).



Rozwiązanie zadania F 230. Po wybuchu liczba cząstek radioaktywnych pochodzących z wybuchu $M = 1 \text{ kg}$ plutonu ($A = 242$) w całej atmosferze wynosi $N = MN_A/A = 2,5 \cdot 10^{24}$. Masa powietrza w atmosferze jest równa $M_0 = P_0 4\pi R^2/g = 4,6 \cdot 10^{18} \text{ kg}$, a liczba molekul powietrza w całej atmosferze $N_0 = M_0 N_A/\mu = 9,6 \cdot 10^{43}$ (μ — masa molowa, P_0 ciśnienie normalne). Liczbę molekul w objętości 1 dm^3 można w warunkach normalnych znaleźć z warunku, że 1 mol ($6,02 \cdot 10^{23}$) powietrza zajmuje objętość $V_0 = 22,4 \text{ dm}^3$. Znajac całą liczbę molekul powietrza i cząstek radioaktywnych możemy znaleźć liczbę cząstek w objętości $V = 1 \text{ dm}^3$: $n = n_0 N/N_0 = 700 \text{ dm}^{-3}$. A więc każda próba atomowa w atmosferze powoduje, iż za każdym kolejnym wdechem wchłaniamy do organizmu około 700 długożyciowych radioaktywnych produktów rozpadów zachodzących w trakcie wybuchu.

Nierówność (3) może mieć różne uogólnienia w postaci nierówności cyklicznych. Pierwszym z nich jest

Twierdzenie 2. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną ($n \geq 2$). Wtedy dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x_1, x_2, \dots, x_n zachodzi nierówność

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3 + \dots + x_n} + \frac{x_2}{x_1 + x_3 + \dots + x_n} + \dots + \frac{x_n}{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Dowód. Zastosujemy to samo przekształcenie co w dowodzie nierówności (3). W celu uproszczenia zapisów wprowadzmy oznaczenia:

$$u_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n - x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Otrzymujemy wtedy

$$x_i = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n-1} - u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

a zatem

$$\begin{aligned} & \frac{x_1}{x_2 + x_3 + \dots + x_n} + \frac{x_2}{x_1 + x_3 + \dots + x_n} + \dots + \frac{x_n}{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}} = \\ & = \frac{1}{n-1} \left[\left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_1} \right) + \dots + \left(\frac{u_{n-1}}{u_n} + \frac{u_n}{u_{n-1}} \right) - n(n-2) \right] \geq \\ & \geq \frac{1}{n-1} (2+2+\dots+2 - n(n-2)) = \frac{1}{n-1} (n^2 - n - n^2 + 2n) = \frac{n}{n-1}. \end{aligned}$$

$\frac{n(n-1)}{2}$ razy

Inne uogólnienie nierówności (3) zaproponował w 1954 roku, na łamach *The American Mathematical Monthly* (Problem 4603, str. 571), H. S. Shapiro,

Problem Shapiro. Niech $0 \leq x_i \in \mathbb{R}, x_i + x_{i+1} > 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, ($x_{n+1} = x_1$). Czy dla wszystkich naturalnych $n \geq 3$ prawdziwa jest nierówność

$$(4) \quad \frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1} + \frac{x_n}{x_1 + x_2} \geq \frac{n-2}{2}?$$

Negatywną odpowiedź dał w 1956 roku M. J. Lighthill wykazując, że dla $n = 20$ nierówność (4) nie zachodzi. W tym samym roku H. S. Shapiro podał dowód nierówności (4) dla $n = 4$, C. R. Phelps zaś — dowód dla $n = 5$. Powstało wtedy pytanie: dla jakich $n \geq 3$ nierówność (4) jest prawdziwa? W latach następnych pojawiło się kilkadziesiąt prac, m.in. A. Zulaufa i P. H. Dianandy, którzy podjęli to zagadnienie. W wyniku dotychczasowej działalności udowodniono, że

1° dla $n \leq 13$ nierówność (4) jest prawdziwa,
 2° dla $n = 14, 16, 18, 20, 22$ i dla dowolnego $n \geq 24$ nierówność (4) jest fałszywa.
 Przypadki $n = 15, 17, 19, 21, 23$, nie zostały dotychczas rozstrzygnięte!

W 1958 roku A. Zulauf podał kontrprzykład dla $n = 14$. Nie będziemy tu omawiać metody, która pozwala podać wiele takich przykładów, a wskażemy jeden układ liczb rzeczywistych, dla których nierówność (4) nie jest spełniona. Oto te liczby:

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{14}) = \left(\frac{17}{10}, \frac{7}{10}, \frac{7}{5}, \frac{3}{5}, \frac{11}{10}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{5}, \frac{11}{10}, 0, \frac{7}{5}, \frac{1}{10}, \frac{8}{5}, \frac{2}{5} \right).$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{x_1}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1} + \frac{x_n}{x_1 + x_2}$$

Wówczas elementarne rachunki pokazują, że

$$f_{14}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{14}) = 2 + \frac{9965667}{2042040} \approx 6,88 < \frac{14}{2}.$$

A. Zulauf podał również kilka ciekawych obserwacji.
 I. Jeżeli w problemie Shapiro istnieje kontrprzykład dla n , to istnieje kontrprzykład dla $n+2$.
 Dowód. Niech liczby x_1, x_2, \dots, x_n spełniają wszystkie założenia problemu Shapiro oraz

$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) < \frac{n}{2}$. Na podstawie łatwej do sprawdzenia równości

$$f_{n+2}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n-1}, x_n) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + 1$$

widać, że istnieją liczby $y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}$, dla których

$$f_{n+2}(y_1, y_2, \dots, y_{n+2}) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + 1 < \frac{n+2}{2}.$$

Ponieważ wskazaliśmy kontrprzykład dla $n = 14$, więc na podstawie powyższej uwagi, dla dowolnego parzystego $n > 14$ nierówność (4) jest fałszywa.

II. Dla losowo wybranych n dodatnich liczb rzeczywistych prawdopodobieństwo tego, że nierówność (4) jest prawdziwa, wynosi co najmniej $\frac{1}{2}$.

Jest to konsekwencja następującej nierówności

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + f_n(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1) \geq n.$$

Oto jej dowód. Jeżeli $A_k = x_k + x_{k+1}$, ($x_{k+n} = x_k$), $k = 1, 2, \dots, n$, to wtedy

$$\begin{aligned} f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + f_n(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1) &= \sum_{k=1}^n \frac{x_k + x_{k+3}}{A_{k+1}} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k - A_{k+1} + A_{k+2}}{A_{k+1}} = \\ &= -n + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{A_{k+1}} + \sum_{k=1}^n \frac{A_{k+2}}{A_{k+1}} \geq n, \end{aligned}$$

ponieważ

$$\sum_{k=1}^n \frac{A_k}{A_{k+1}} \geq n, \quad \sum_{k=1}^n \frac{A_{k+2}}{A_{k+1}} \geq n$$

na podstawie twierdzenia 1.

III. Dla nieujemnych liczb rzeczywistych x_1, x_2, \dots, x_n ($n \geq 3$), takich, że $x_i + x_{i+1} > 0$, ($x_{n+1} = x_1$, $i = 1, 2, \dots, n$) prawdziwa jest nierówność

$$1 < \frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-1} + x_n} + \frac{x_n}{x_n + x_1} < n - 1.$$

Czytelnika zainteresowanego tą problematyką odsyłamy do prac oryginalnych, których bibliografię można znaleźć w monografii Dragoslava S. Mitrinovicia *Analytic Inequalities*.



Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 484. Dany jest trójkąt ABC . Znaleźć taki punkt X na boku AB i taki punkt Y na boku AC , żeby $AX = XY = YC$.

Rozwiązanie na str. 11

M 485. W pudełku I znajduje się n ponumerowanych kul. Pudełko II jest puste. Postępujemy w następujący sposób: losujemy numer kuli i kulę o tym numerze przekładamy z pudełka do pudełka. Znaleźć średnią różnicę liczby kul w pudełku I i II po m przełożeniach.

Rozwiązanie na str. 10

M 486. Ile zer ma na końcu liczba $9^{999} + 1$ w zapisie dziesiętnym?

Rozwiązanie na str. 10

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

F 230. Zakładając, że podczas wybuchu bomby atomowej wykonanej z $M = 1$ kg plutonu ^{242}Pu z każdego atomu plutonu powstaje jedna długożyciowa cząstka radioaktywna, ocenić liczbę takich cząstek w objętości $V = 1 \text{ dm}^3$ powietrza przy powierzchni Ziemi. Przyjąć, że wiatr powoduje równomierne rozprzestrzenienie w całej atmosferze Ziemi radioaktywnych produktów wybuchu. Promień Ziemi jest równy $R = 6 \cdot 10^6 \text{ m}$.

Rozwiązanie na str. 11

F 231. W pojemniku o objętości 1 l znajduje się 1 g trytu (izotop wodoru o masie atomowej 3) o temperaturze 27°C . W ciągu 12 lat połowa jąder trytu przejdzie w jądra helu. Jakie ciśnienie będzie panowało w zbiorniku po upływie tego czasu?

Rozwiązanie na str. 11

Czym prawa strona różni się od lewej?

Mgr Marek PFÜTZNER

Niedawno (przełom 1986/87) minęło 30 lat od odkrycia pewnego zdumiewającego prawa przyrody. Jest ono na tyle podstawowe, że do zastanowienia się nad nim wystarczy szkolna znajomość fizyki: zachęcam więc każdego do namysłu nad tą intrygującą sprawą.

Zagadka

Istotę problemu chyba najlepiej opisał R. Feynman (patrz *Wykłady Feynmana z fizyki*, tom 1, rozdział 52). Otóż wyobraźmy sobie, że nawiązaliśmy łączność radiową z jakąś pozaziemską cywilizacją. Nauczyliśmy się już rozumieć wzajemne sygnały i wymieniamy informacje o naszych światach. Nagabywani przez kosmicznych rozmówców napotykamy problem: jak wytłumaczyć im, że serca mamy umieszczone po lewej stronie ciała, albo jak jednoznacznie wskazać, że podajemy sobie prawe dłonie w geście powitania? Drogą radiową możemy przekazać im wiele naszych pojęć, takich jak liczby, góra, dół, ale jak rozróżnić prawe i lewe? A skąd my wiemy, która strona jest prawa? No, oczywiście każdemu z nas, w dzieciństwie, rodzice pokazali: *To jest Twoja prawa ręka* i ponieważ wszyscy stosują tę samą konwencję, nie dochodzi do nieporozumień. Ale wyobraźmy sobie jeszcze, że z jakichś powodów nie możemy wskazać naszym rozmówcom żadnego obiektu, mówiąc np: *Jak patrzycie w naszym kierunku, to ta gwiazda jest po lewej stronie*, tylko musimy opisać sposób jednoznacznego wyróżnienia np. prawej strony. Nasze zadanie polega na znalezieniu jakiegoś zjawiska fizycznego, które wykazuje asymetrię wyróżniającą stronę prawą lub lewą.

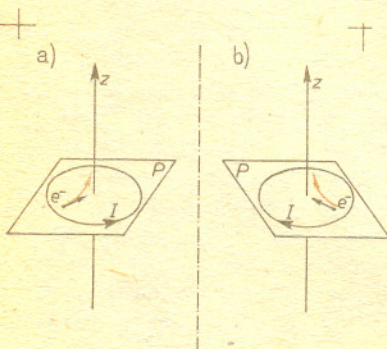
Żeby sprawdzić, czy dane zjawisko przejawia taką asymetrię, możemy posłużyć się następującą metodą. Budujemy najpierw urządzenie, w którym będzie przebiegał badany proces. Następnie budujemy drugie urządzenie, które jest identyczne ze zwierciadlanym odbiciem tego pierwszego (przez odbicie zwierciadlane rozumiemy przekształcenie symetrii płaszczyznowej). Mamy teraz dwa fizyczne układy będące swoimi lustrzanymi odbiciami. Wykonujemy doświadczenie w pierwszym urządzeniu, a potem w drugim, rejestrując wyniki w obydwu przypadkach np. na taśmie filmowej. Porównujemy oba przebiegi w następujący sposób. Film przedstawiający proces w drugim układzie puszcza normalnie, a film z pierwszego urządzenia wkładamy do projektoru odwrócony „na lewą stronę”, tak, by na ekranie obserwować zwierciadlane odbicie zarejestrowanego zjawiska. Jeśli zauważymy jakieś różnice między tak oglądanymi filmami, to będzie to znaczyło, że zjawisko w drugim urządzeniu przebiega inaczej niż zwierciadlany obraz zjawiska w pierwszym układzie. Powiemy wtedy, że badany proces wykazuje asymetrię zwierciadlaną, co, jak się okaże, pozwala na odróżnienie strony prawej i lewej.

Rozważmy prosty przykład. Na rysunku 1a przedstawiony jest pewien układ doświadczenia. Tworzy go, leżąca na płaszczyźnie P , pętla z drutu, w której płynie prąd elektryczny I . Wyróżniona jest oś „ z ” prostopadła do płaszczyzny. Stosując nasze konwencje powiedzielibyśmy, że prąd w tej pętli płynie w kierunku „prawym”, bo śruba prawoskrętna wkręcana w tym kierunku będzie się przesunąć w dodatnią stronę osi „ z ”. Na rysunku 1b mamy układ będący zwierciadlanym odbiciem układu a . W pętli b prąd płynie w „lewo”. Niech doświadczenie polega na tym, że w pobliżu środka pętli wystrzelujemy elektrony poruszające się w płaszczyźnie pętli. Prąd I wytwarza pole magnetyczne, które odchyli elektrony w kierunku zaznaczonym na rysunku (warto to sprawdzić stosując elementarne prawa elektrodynamiki). Ruch elektronów w układzie b (rys. 1b) będzie lustrzanym odbiciem ruchu elektronów w urządzeniu a , mamy tu symetrię zwierciadlaną i nie możemy na podstawie tego doświadczenia odróżnić kierunku prawego od lewego.

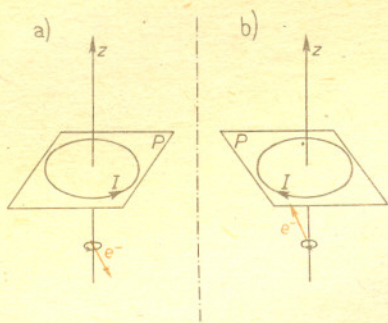
W tym miejscu zachęcam Czytelnika do zastanowienia się i do próby wymyślenia takiego procesu, który byłby asymetryczny w wyżej wymienionym sensie.

Pomysł Lee i Yanga

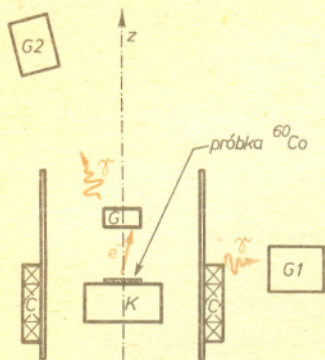
Okazuje się, że dopóki pozostajemy w kręgu zjawisk mechanicznych lub elektromagnetycznych, to nie znajdziemy sposobu na rozwiązanie naszej zagadki. Jest tak dlatego, że podstawowe prawa mechaniki i elektrodynamiki, bardzo dobrze sprawdzone doświadczalnie, wykazują symetrię zwierciadlaną. Ale w przyrodzie są jeszcze inne procesy, należą do nich np. oddziaływania słabe. W 1956 roku fizycy Tsung Dao Lee i Chen Nin Yang zauważyli, że brak jest danych doświadczalnych rozstrzygających, czy oddziaływania słabe są symetryczne względem odbić



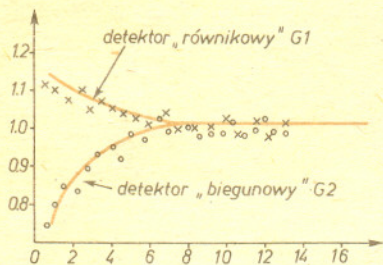
Rys. 1



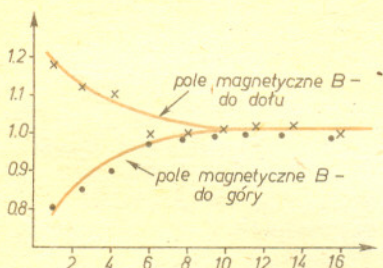
Rys. 2



Rys. 3. G — detektor elektronów
G1, G2 — detektory kwantów γ
C — cewka wytwarzająca pole magnetyczne
K — kryształ azotanu CeMg



Rys. 4. Na osi pionowej liczba zliczeń kwantów γ podzielona przez liczbę zliczeń przy ciepłej próbce. Na osi poziomej czas w minutach.



Rys. 5

zwierciadlanych czy nie, i zaproponowali w związku z tym kilka eksperymentów. Oto idea jednego z nich.

Do zjawisk zachodzących pod wpływem sił słabych należy tzw. rozpad β^- jąder atomowych. Polega on na tym, że jeden z neutronów w jądrze zmienia się w proton i towarzyszy temu emisja elektronu oraz bardzo przenikliwej cząstki, zwanej neutrinem. Neutrino jest bardzo trudne do zarejestrowania i nie będziemy dalej brali go pod uwagę. Niektóre z jąder, ulegające takiej przemianie, mają moment magnetyczny, czyli zachowują się tak, jak mała pętla z prądem. Wykorzystamy teraz nasz poprzedni układ doświadczalny i umieścimy próbkę takich jąder w pobliżu środka drucianej pętli (patrz rysunek 2a). Momenty magnetyczne jąder zostaną uporządkowane przez pole magnetyczne prądu I . Jeśli do opisu tego zjawiska posłużymy się analogią momentu magnetycznego do ramki z prądem, to powiemy, że ustawi się ona równoległe do płaszczyzny P , a kierunek płynącego w niej prądu będzie taki sam, jak kierunek prądu I w dużej pętli. Na rysunku 2b mamy lustrzane odbicie omówionego powyżej układu. Prąd w dużej ramce płynie „w lewo” i kierunek pola magnetycznego jest odwrócony, co pociąga za sobą zmianę orientacji momentów magnetycznych jąder w próbce. Eksperyment polega teraz na tym, że obserwujemy, w którą stronę wylatują elektrony emitowane przez rozpadające się jądra. Jeśli kierunek emisji elektronu nie zależy od orientacji momentu magnetycznego, to w układzie 2a tyle samo elektronów poleci w górę i w dół względem osi z , w układzie 2b będzie tak samo i zjawisko okaże się symetryczne względem odbić zwierciadlanych. Jeśli jednak kierunek momentu magnetycznego wpływa na kierunek emisji elektronów i np. w układzie 2a byłyby one emitowane przeważnie do dołu, to w układzie 2b będą wylatywały do góry!

Większość fizyków tak głęboko wierzyła w to, że wszystkie prawa przyrody są symetryczne względem odbić lustrzanych, że ten drugi przebieg zjawiska wydawał się zupełnie absurdalny. Jeden z najwybitniejszych fizyków, Wolfgang Pauli, gotów był nawet założyć się o dużą sumę, że w rzeczywistym doświadczeniu elektrony będą emitowane symetrycznie względem momentu magnetycznego.

Doświadczenie Wu

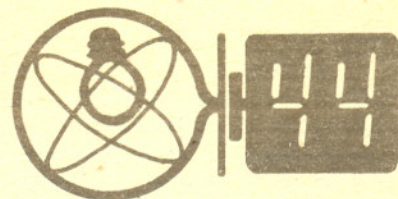
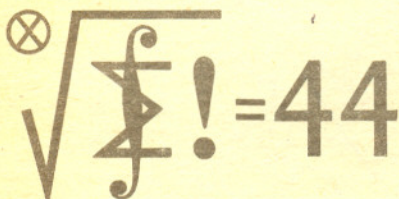
Przeprowadzono więc eksperyment. Dokonała tego grupa fizyków amerykańskich pod kierownictwem pani Chien Shien Wu. Schemat układu doświadczalnego przedstawiony jest na rysunku 3. Jako próbkę użyto izotopu kobaltu ^{60}Co , który ulega przemianie β^- i którego jądra mają różny od zera moment magnetyczny. Próbka ta została umieszczona wewnątrz rury próżniowej, otoczonej cewkami wytwarzającymi pole magnetyczne. Nad próbką znajduje się detektor elektronów. Największa trudność techniczna polega na tym, że w normalnej temperaturze nie można ustawić momentów magnetycznych w jednym kierunku — przeszkadzają temu drgania cieplne. Ochłodzenie próbki do bardzo niskiej temperatury odbyło się następująco. Warstwa ^{60}Co została napylna na kryształ paramagnetyka (był to azotan CeMg). Przez chłodzenie ciekłym helem (temp. 1,2 K), a następnie przez adiabatyczne rozmagnezowanie paramagnetyka udało się obniżyć temperaturę próbki do 0,01 K. W tych warunkach zewnętrzne pole magnetyczne polaryzuje powłoki elektronowe paramagnetyka, które z kolei wytwarzają pole zdolne do ustawienia momentów magnetycznych jąder ^{60}Co . W rozpadzie β^- ^{60}Co oprócz elektronu i neutrina emitowane są także cząstki promieniowania elektromagnetycznego, tzw. kwanty γ . Rozkład kątowy tych cząstek jest symetryczny względem kierunku momentu magnetycznego, ale prawdopodobieństwo emisji w płaszczyźnie „równikowej” (tj. prostopadłej do osi „ z ”) jest większe niż prawdopodobieństwo emisji w kierunkach „biegunowych”. Mierząc natężenie tego promieniowania w płaszczyźnie „równikowej” (służy do tego detektor G1) oraz w kierunku „biegunowym” (detektor G2) można sprawdzić, czy rzeczywiście udało się ustawić momenty magnetyczne w jednym kierunku.

Na rysunku 4 przedstawiono liczby zliczeń zarejestrowanych przez detektory G1 i G2 jako funkcje czasu, który upłynął od ochłodzenia próbki. Zgodnie z oczekiwaniem licznik G1 rejestrował więcej cząstek γ niż licznik G2, co wskazuje na to, że momenty magnetyczne jąder ^{60}Co zostały uporządkowane. Wskutek ogrzewania się próbki anizotropia ta zmniejsza się z czasem i zanika zupełnie po upływie około 7 minut, co odpowiada zniszczeniu uporządkowania przez drgania termiczne. Okazało się, że efekt ten jest taki sam, jeśli wykonania się to doświadczenie z polem skierowanym przeciwnie. Najciekawszy jest jednak wynik zliczania elektronów. Rysunek 5 przedstawia liczbę zarejestrowanych elektronów jako funkcję czasu dla dwu przeciwnych kierunków pola magnetycznego. Widać wyraźnie, że w przypadku, gdy pole B było skierowane do góry (prąd w cewkach płynie wtedy tak, jak na rysunkach 1a i 2a), do licznika dolatuje mniej elektronów niż wtedy, gdy pole jest skierowane do dołu!!! Powolne ogrzewanie się próbki i towarzyszący mu zanik uporządkowania zmniejsza ten efekt dokładnie tak samo, jak w przypadku cząstek γ . Okazało się więc, że kierunek emisji elektronów zależy od orientacji momentu magnetycznego jądra!

Wielkości związane z obrotami, takie jak moment pędu czy moment magnetyczny nazywamy pseudowektorami. Ich zwrot określamy za pomocą konwencji (śruba prawoskrętna). Obliczmy iloczyn skalarny momentu magnetycznego jądra i pędu emitowanego elektronu. Otrzymamy liczbę, czyli skalar. Ale nie jest to zwykły skalar, bo jak zmienimy konwencję (użyjemy śruby lewoskrętnej), to moment magnetyczny zmieni zwrot, a pęd nie, w wyniku czego ich iloczyn skalarny zmieni znak. Wielkość taką nazywamy pseudoskalar. Doświadczenie Wu pokazało więc, że w przyrodzie istnieją zjawiska, które można opisać przez różną od zera wielkość pseudoskalarą. Jej znak zależy od konwencji definiującej prawoskrętność.

Mamy zatem zjawisko niesymetryczne względem odbić zwierciadlanych. Oto rozwiązanie naszej zagadki. Możemy opisać całe urządzenie naszym kosmicznym sąsiadom i powiedzieć im: *Wybierzcie sobie zwrot osi z. Ustawcie wszystko tak, żeby elektrony wylatywały przeważnie do dołu (tj. przeciwnie do zwrotu osi „z”). Jeżeli źródłem zewnętrznego pola magnetycznego jest cewka, w której płyną ładunki dodatnie (takie jak proton), to płyną one w kierunku, który my nazywamy prawym.*

Jak to zwykle bywa w nauce, rozwiązanie jednej zagadki przynosi nowe. W powyższej definicji kierunku prawego istotną rolę pełni znak ładunku płynącego w cewkach. Ale przecież wiadomo, że w przyrodzie istnieją antycząstki i np. antyproton ma masę i wielkość ładunku elektrycznego taką samą jak proton, różni się tylko znakiem ładunku. Jak teraz wytłumaczyć, że chodzi nam o cząstki z ładunkiem dodatnim? Powyższa metoda zadziała poprawnie, jeśli świat kosmicznych przyjaciół jest zbudowany z takich samych cząstek co nasz. A co będzie, jeśli w ich otoczeniu znajdują się wyłącznie antycząstki?



Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delfy”

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3 S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1987.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 1987

Zadania z matematyki nr 157, 158

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

157. Wielokąt płaski W ma pole S i obwód długości d . Udowodnić, że W zawiera koło o promieniu większym od S/d .

158. Liczby rzeczywiste x_1, \dots, x_n spełniają warunki $x_1 \leq \dots \leq x_n$, $x_1 + \dots + x_n = 0$. Dowieść, że $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq -nx_1 x_n$ i orzec, kiedy zachodzi równość.

Zadanie 158 przysłał pan Adam Ruszel z Krosna.

Zadania z fizyki nr 55 i 56

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

55. Danych jest piętnaście oporników, z których jeden różni się oporem od pozostałych — identycznych. Dysponując ogniwem o znanej biegunowości, galwanometrem wskazującym kierunek płynącego prądu (z zerem pośrodku skali) i przewodami do połączeń, należy zidentyfikować odmienny opornik i określić, czy jego opór jest większy, czy też mniejszy od pozostałych oporników. W jaki sposób należy postępować, aby tego dokonać za pomocą jak najmniejszej (nie większej niż sześć) liczby pomiarów?

56. Patrząc przymrużonymi oczyma na odległe latarnie widzimy zwykle dodatkowo „promienie” wychodzące ze źródła światła w górę i w dół. Podać wyjaśnienie tego zjawiska, możliwie poparte własnymi obserwacjami.

Wskazówka: powierzchnia rogówki oka jest zawsze pokryta warstwą śluzowatej cieczy.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M" po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 147 /WT=2,59/ i 148 /WT=2,46/ z numeru 3/1987

Paweł Kamiński	- Warszawa	47,87pkt
Zbigniew Zaus	- Kraków	45,47pkt
Krzysztof Zawisławski	- Warszawa	42,14pkt
Karol Jachac	- Tłuszcz	41,97pkt
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	41,27pkt
Dariusz Kurpiel	- Ząrzyszyn	41,16pkt
Grzegorz Zakrzewski	- Trzcianka	40,03pkt

Pan Kamiński jest trzecim pięciokrotnym zdobywcą 44 punktów. Pan Zaus wchodzi do Klubu 44 z numerem czterdziestym siódmym.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 F" po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 47 /WT=1,52/ i 48 /WT=2,85/ z numeru 4/1987

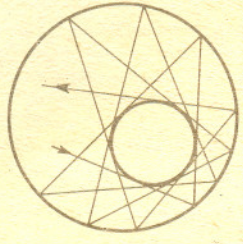
Piotr Baża	- Toruń	47,43pkt
Robert Repucha	- Gołdap	44,50pkt
Anna Gluza	- Toruń	44,11pkt
Jerzy Lipkowski	- Elbląg	41,03pkt
Jacek Stelmach	- Zabrze	40,67pkt
Piotr Wach	- Katowice	38,92pkt
Leszek Szalast	- Radzyń Pdl	34,92pkt
Zbigniew Galias	- Kraków	30,98pkt

Pan Baża osiągnął 44 punkty już po raz drugi, pan Repucha jest piątym członkiem Klubu 44 F, a pani Gluza — pierwszą panią w klubie 44 F.

Drobiazgi

Efekt fotoelektryczny polega na wybijaniu elektronów z powierzchni metalu przez padające z zewnątrz kwanty promieniowania elektromagnetycznego — fotony. Różnica energii pochłoniętego fotonu i pracy wyjścia z metalu zamienia się przy tym w energię kinetyczną elektronu. Przed czterema laty odkryto, przewidziane wcześniej teoretycznie, tzw. zjawisko fonokinetyczne, które jest bliskim analogiem zjawiska fotoelektrycznego. Zjawisko to polega na wybijaniu atomów z powierzchni nadciekłego helu przez kwanty rozchodzącego się w cieczy dźwięku (fonony). Pracy wyjścia odpowiada w tym procesie ciepło parowania na jeden atom cieczy. Jak się okazało, suma tego ciepła i zmierzonej energii kinetycznej wybitego atomu jest zawsze równa energii pochłoniętego fononu, czyli spełniona jest identyczna relacja jak w przypadku efektu fotoelektrycznego.

Załóżmy, że mamy dane na płaszczyźnie dwa okręgi, z których jeden jest zawarty w drugim. Wybieramy punkt na okręgu zewnętrznym i prowadzimy z niego styczną do mniejszego okręgu. Z punktu przecięcia tej stycznej z większym okręgiem prowadzimy następną styczną itd. (rysunek). W efekcie otrzymujemy łamaną opisaną na mniejszym z okręgów i wpisaną w większy. Kiedy ta łamana się zamknie? Oczywiście zależy to od położenia i wielkości danych okręgów. Okazuje się, że nie zależy to jednak od wyboru punktu początkowego. Jest to szczególnie przypadek twierdzenia Ponceleta.

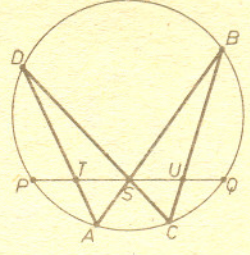


Z gwiazd zmiennych jako pierwszą została odkryta *Mira Ceti* (Fabricius, 1596) — jej nazwa jest zresztą późniejsza i pochodzi od Heweliusza. Jest dość dziwne, że kilka gwiazd, których zmienność można było zauważyć nawet gołym okiem, tak długo pozostawało nieznanymi. Dopiero w XVII w. odkryto (ponownie) Algola (β Persei), a do połowy XIX w. znano mniej niż 20 gwiazd zmiennych. Gwałtowny wzrost liczby znanych gwiazd zmiennych zawdzięczamy bardzo popularnej do dziś wśród amatorów astronomii metodzie oceniania jasności gwiazd opracowanej przez Fryderyka Argelander'a (1799—1875).

Cztery lata temu J. F. Prins z Johannesburga zaprezentował pierwszy tranzystor z naturalnego diamentu. Jego wartość użytkowa była niewielka, ale z zastosowaniem diamentu w elektronice wiązane są duże nadzieje. Diament, półprzewodnik o tej samej strukturze co krzem, jest bowiem bardzo dobrym przewodnikiem ciepła (lepszym niż miedź i srebro). Jego zastosowanie pozwoliłoby rozwiązać problem odprowadzania ciepła z układów elektronicznych, a dzięki dużej przerwie energetycznej między pasmem walencyjnym i pasmem przewodnictwa (5,45 eV wobec 1,1 eV w krzemie) układy takie byłyby też bardzo odporne na zmiany temperatury i napromieniowanie. Technologia produkowania cienkich warstw diamentowych, niezbędna do produkcji obwodów elektronicznych, pozwoliłaby także wytwarzać nieścieralne narzędzia (np. noże nie wymagające ostrzenia), układy optyczne odporne na powstawanie rys itp. Grupa prof. B. I. Derdzagina w Instytucie Chemii Fizycznej w Moskwie opracowała metodę tworzenia warstw diamentowych w normalnych ciśnieniach (!) z szybkością 1 μm na godzinę.

Po odkryciu przez Galileusza czterech pierwszych księżyców Jowisza Kepler oświadczył, że Mars powinien mieć dwóch satelitów, ponieważ znajduje się między Ziemią, która ma jeden Księżyc, a Jowiszem, który ma ich 4. Nie poparte dowodem naukowym przypuszczenie Keplera zostało potwierdzone dopiero w 1877 roku, gdy A. Hall odkrył Deimosa i Phobosa. Już w 15 lat później E. Barnard odkrył piątego satelitę Jowisza.

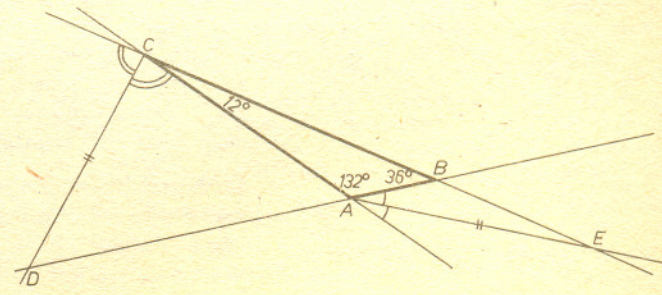
Jeśli przez środek S dowolnej cięciwy PQ pewnego okręgu poprowadzimy dwie inne cięciwy AB i CD (niech A i C leżą na jednym z łuków PQ , a B i D na drugim), to S jest środkiem również punktów T i U , w których AD i BC przecinają PQ . Ze względu na rysunek nazywa się ten fakt twierdzeniem o motyłu.



Dźwięk to okresowe drgania — następujące kolejno po sobie zagęszczenia i rozrzedzenia ośrodka. Bardzo krótki sygnał dźwiękowy może się jednak składać tylko z jednego okresu fali, a nawet tylko z fazy zagęszczenia. Generacja bardzo krótkich sygnałów akustycznych stała się możliwa dzięki rozwojowi techniki laserowej. W Bell Laboratories w Stanach Zjednoczonych udało się uzyskać impulsy dźwiękowe w cieczy o czasie trwania poniżej 1 nanosekundy (10^{-9} s). Powstawały one przy naświetlaniu nanosekundowymi impulsami światła poczerwionej folii metalowej będącej w kontakcie z cieczą. Amplituda impulsów sięgała kilkunastu tysięcy atmosfer, co w przypadku „nieściśliwej” wody odpowiada zmniejszeniu objętości prawie o 30%. Krótkie impulsy dźwiękowe staną się nowym narzędziem badania własności ciał stałych i cieczy. Mogą być ponadto stosowane do określenia grubości cienkich błonek przez pomiar różnicy czasu zarejestrowania „echa” od dolnej i górnej powierzchni błonki.

Najjaśniejsze gwiazdy Wielkiej Niedźwiedzicy (a dokładniej: β , γ , δ , ϵ i ζ *Ursae Maioris*) poruszają się na sferze niebieskiej ku jednemu punktowi, co sugeruje, że w przestrzeni poruszają się niemal równolegle. Gwiazdy te są przykładem tzw. gromady ruchomej. Nazywamy tak grupę gwiazd nieraz mocno rozproszonych na dużym obszarze nieba, które łączy właśnie wspólny ruch w przestrzeni. Oczywiście przekonać się o tym można dopiero w wyniku szczegółowych obserwacji.

Jeśli trójkąt ma równej długości dwie dwusieczne, to jest równoramienny (dokładniej: równe mają być odcinki dwusiecznych od wierzchołka do przecięcia z przeciwnym bokiem). Dowód jest trudny — świadczy o tym fakt, że twierdzenie to ma nazwę: Steiner-Lehmusa, oraz że do dziś trwają poszukiwania eleganckiego dowodu wprost. Radzimy samemu spróbować. Łatwo natomiast zauważyć, że jeśli dwie dwusieczne zewnętrznych kątów trójkąta są równej długości, to nie musi on być równoramienny. Oto przykład



10^{-24}

NAJBLIŻSZE GALAKTYKI
(w rzucie na płaszczyznę
Drogi Mlecznej)

M 83

Cen^o A
(slajd na zewnątrz)

do M104 w tej skali 40 cm

NGC 6822

Nasza Galaktyka

M 31 Leo I

M 33

IC 1805

M 82

M 81



GROMADA GALAKTYK W CENTAURZE

$10^{23} \text{ m} = 3,3 \text{ Mpc}$

