



SPIS TREŚCI

NUMERU 2(170)

Krzywizna <i>dr Jerzy Konarski</i>	str. 1
Uran widziany z Voyagera 2 <i>dr Tomasz Kwast</i>	str. 4
Klub 44	str. 6
Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki	str. 7
Mała Delta	str. 8
O pewnym hokus-pokus w kombinatoryce <i>dr Jerzy Rutkowski</i>	str. 10
Zadania	str. 12
O obrotach ciał niewielkich (I) <i>dr Jacek Dobaczewski,</i> <i>dr hab. Witold Nazarewicz</i>	str. 13
Czytelnicy piszą	str. 15
Drobiazgi	str. 16
Patrz w niebo	str. 17

W następnym numerze:
Manowce intuicji

„Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny
 miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa
 Matematycznego, Polskiego
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
 Towarzystwa Astronomicznego
 wydawany przy poparciu
 Ministerstwa Edukacji Narodowej

Komitet Redakcyjny

dr Maciej Bryński
 dr Bogdan Cichocki
 dr Antoni L. Dawidowicz
 dr Alicja Derkowska
 doc. dr Jan A. Gaj
 doc. dr Bolesław Gleichgewicht
 doc. dr Tomasz Hofmokl — v-przewodniczący
 doc. dr Tadeusz Jarzębowski
 doc. dr Marcin Kubiak
 mgr Andrzej Mąkowski
 dr Zbigniew Plochocki
 dr Jan Rempala
 prof. dr Konrad Rudnicki
 prof. dr Grzegorz Sitarski
 prof. dr Józef I. Smak
 prof. dr Kazimierz Stepien
 prof. dr Mieczysław Subotowicz
 doc. dr Andrzej Szymacha
 doc. dr Aniela Wolska
 prof. dr Andrzej Woszyk
 prof. dr Wojciech Żakowski —
 przewodniczący

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty kwartalnej zł 120,— półrocznej zł 240,— rocznej zł 480,—

- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
 - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
 - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
 - dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
 - osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
 - osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
 - Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
- Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:
 — do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,
 — do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 40,—

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga
 mgr Krystyna Kordos — sekr. red.
 dr hab. Marek Kordos — red. nacz.
 dr Tomasz Kwast
 mgr inż. arch. Mariola Łotysz
 dr Andrzej Majhofer
 mgr Anna Rudnik
 dr Jerzy Ryll
 mgr Joanna Udalska

Adres Redakcji
 ul. Koszykowa 6a
 00-564 Warszawa
 tel. 21-19-85

Krajowe Wydawnictwo Czasopism

RSW „Prasa—Książka—Ruch”
 ul. Noakowskiego 14
 00-666 Warszawa
 tel. centr. 25-72-91 do 93
 Biuro Reklam i Propagandy
 tel. 25-56-26
 Nakład 25 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;
 2,50 ark. druk;
 papier offsetowy V kl. 70 g.
 Wydrukowano w Drukarni
 im. Rewolucji Październikowej
 Warszawa, ul. Mińska 65.
 Nr zam. 5037/12/87. K-33.

Wszystkich miłośników astronomii w wieku od 13 do 17 lat zapraszamy na obozy astronomiczne organizowane w lecie w ramach Harcerskiej "Operacji 2001" Frombork.

**Pytania, zgłoszenia itp. prosimy kierować pod adresem: Andrzej Piłski
 ul. Katedralna 8, 14-530 Frombork.**

Dr Jerzy KONARSKI

Christian Huygens (1629—1695), uczoney holenderski, znany ze swej zasady rozchodzenia się fal. Skonstruował wahadło izochroniczne (tj. takie, którego okres drgań nie zależy od amplitudy). Właśnie do tej konstrukcji były mu potrzebne własności ewolwent.

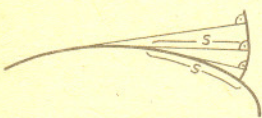
Alexis-Claude Clairaut (1713—1765), matematyk francuski, zajmował się m.in. krzywymi przestrzennymi, powierzchniami obrotowymi (także kształtem Ziemi) i ruchem Księżycy. Pierwszą pracę o krzywych napisał mając 12 lat, książkę o krzywych wspomnianą w tekście obok — cztery lata później, w wieku lat 17 został członkiem Paryskiej Akademii Nauk.

Gaspard Monge (1746—1818), matematyk, fizyk, chemik i inżynier francuski. Za czasów Napoleona minister marynarki, był jednym z założycieli akademii wojskowej École Polytechnique. W matematyce zajmował się geometrią i równaniami różniczkowymi.

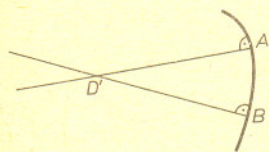
Leonhard Euler (1707—1783), jeden z największych matematyków XVIII wieku. Zajmował się wieloma dziedzinami matematyki.

W języku potocznym termin krzywizna ma, przynajmniej w odniesieniu do linii krzywych, dość jasne znaczenie. W geometrii różniczkowej nazwą tą określa się różne wielkości związane z krzywymi i powierzchniami (a także innymi obiektami geometrycznymi) i mające uogólniać to najprostsze, intuicyjne znaczenie. Omówimy tutaj w skrócie rozwój tych pojęć, zajmujących centralne miejsce w geometrii różniczkowej, ograniczymy się jednak tylko do krzywych i powierzchni.

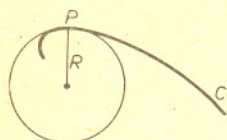
Najpierw zajmiemy się krzywymi płaskimi. Zaczniemy od roku 1673, w którym Christian Huygens opublikował pracę o ewolwentach. Przypomnijmy, że ewolwentą („odwijaną”) danej krzywej płaskiej nazywamy krzywą, którą zakreśli „koniec sznurka, pierwotnie przyklejonego wzdłuż danej krzywej, a następnie z niej odrywanego”. Można powiedzieć, że rysowanie ewolwenty przypomina kreślenie okręgu, ale ze zmiennym środkiem przesuwającym się wzdłuż danej krzywej i o zmiennym promieniu. W swojej pracy Huygens m.in. udowodnił, że możliwa jest też konstrukcja odwrotna: dla danej krzywej można znaleźć nową krzywą (tzw. ewolwę), której ta pierwsza jest ewolwentą. Znaczy to, że jeśli przez wybrany punkt p na krzywej poprowadzimy do niej prostą prostopadłą, to można na niej znaleźć „środek owego zmieniającego się okręgu” występującego w konstrukcji ewolwenty. Środek i promień tego okręgu nazwano później odpowiednio środkiem i promieniem krzywizny krzywej w punkcie p . Odwrotność długości promienia krzywizny nazywa się krzywizną krzywej w punkcie p , a sam okrąg — okręgiem ściśle stycznym do krzywej w tym punkcie. Ta ostatnia nazwa pochodzi stąd, że jak w kilka lat po Huygensie wykazał Newton, między tym okręgiem a krzywą nie da się „zmieścić” żadnego innego okręgu stycznego. Okrąg ściśle styczny najlepiej ze wszystkich okręgów przybliża krzywą w okolicy danego punktu. Zauważmy, że powyższa definicja krzywizny zgadza się z określeniem potocznym: za krzywiznę okręgu przyjmujemy odwrotność jego promienia (im promień większy, tym krzywizna mniejsza), a za krzywiznę krzywej — krzywiznę okręgu, który ją przybliża.



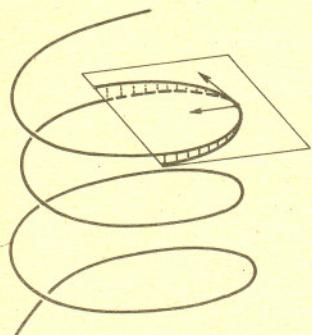
Ewolwenta krzywej.



Huygens wykazał, że jeśli $B \rightarrow A$, to D' dąży do pewnej granicy D . Jest to dowód istnienia środka krzywizny.



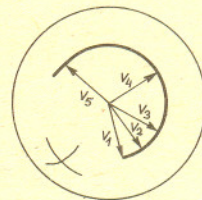
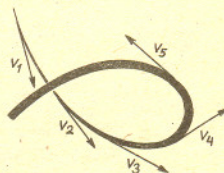
Okrąg ściśle styczny i promień krzywizny krzywej C w punkcie p .



Płaszczyzna ściśle styczna.

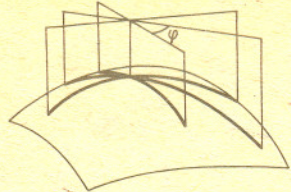
Krzywe o stałej krzywiznie i stałym skręceniu — to linie śrubowe. Krzywe o zerowym skręceniu to krzywe płaskie.

Przejdźmy do krzywych przestrzennych. Pomysł, aby określić dla nich dwie krzywizny, pojawił się po raz pierwszy w książce A. C. Clairaut, jednak proponowana przez niego metoda badania krzywych za pomocą ich rzutów na płaszczyznę rozpiętą przez osie układu współrzędnych nie dała dobrych wyników. Krzywiznę krzywej przestrzennej jako pierwszy określili G. Monge i L. Euler w roku 1775. Pierwszy z nich uogólnił geometryczny dowód Huygensa, rozpatrując zamiast prostych prostopadłych — płaszczyznę prostopadłą do krzywej. Drugi zaproponował następujący sposób. Sparametryzował krzywą długością łuku, co umożliwiło traktowanie jej jako drogi punktu poruszającego się w przestrzeni ze stałą szybkością (skalarną). To nam daje wektor styczny do krzywej w każdym jej punkcie (jednostkowy, bo szybkość jest stała). Pomysł Eulera polegał na tym, żeby mierzyć krzywiznę szybkością zmian kierunku tego wektora. Ścisłej mówiąc, Euler przeniósł ten wektor do początku układu współrzędnych. Koniec tego wektora opisywał zatem pewną nową krzywą, tzw. indykatrysę sferyczną, na sferze jednostkowej. Krzywizna była określona jako stosunek długości króciutkiego odcinka indykatrysy sferycznej do długości odpowiadającego mu łuku danej krzywej.



Krzywa i jej indykatrysa sferyczna. Na łuku między v_1 a v_2 krzywizna jest mała, między v_4 a v_5 — duża.

Drugą krzywiznę, zwaną później skręceniem, wprowadził dopiero uczeń Monge'a, M. Lancret. Gdy poruszamy się po krzywej, wektory styczne w „sąsiednich” punktach (takiej terminologii wówczas używano) wyznaczają tzw. płaszczyznę ściśle styczną. Jeśli np. krzywa jest płaska, to zawierająca ją płaszczyzna jest jednocześnie płaszczyzną ściśle styczną w każdym jej punkcie. Dzisiaj powiedzielibyśmy, że płaszczyzna ta jest rozpięta na wektorze stycznym (wektorze głównym (jeśli poruszamy się ze stałą szybkością skalarną, jest to dokładnie kierunek wektora przyspieszenia), a kierunek prostopadły do płaszczyzny ściśle stycznej — kierunkiem binormalnym. Druga krzywizna, czyli skręcenie, miała mierzyć, na ile dana krzywa nie jest płaska. O ile krzywizna była określona jako szybkość zmian wektora stycznego, skręcenie zostało zdefiniowane jako szybkość zmian płaszczyzny ściśle stycznej lub, co na jedno wychodzi, jednostkowego wektora binormalnego. Jakie jest znaczenie skręcenia? Otóż okazuje się, że znajomość krzywizny i skręcenia (w przypadku płaskim — samej krzywizny) wystarcza już do pełnego opisu krzywej, oczywiście tylko z dokładnością do jej położenia w przestrzeni.



Równoległe z teorią krzywych zaczęła się rozwijać teoria powierzchni. Za twórcę jej podstaw należy uznać L. Eulera. Powierzchnię w okolicy danego punktu badał rozpatrując wszystkie możliwe przekroje tej powierzchni płaszczyznami prostopadłymi do niej i przechodzącymi przez dany punkt. Wśród tych płaszczyzn wybrał jedną, a pozostałe parametryzował za pomocą kąta φ , który tworzą one z tą wybraną. Następnie znalazł zależność krzywizny otrzymanego przekroju prostopadłego od kąta φ . Była ona postaci $\kappa = L + M \cos 2\varphi + N \sin 2\varphi$, gdzie L, M, N oznaczały pewne współczynniki zależące od danej powierzchni. Aby znaleźć wartości ekstremalne krzywizny przekroju, Euler różniczkował to względem φ , przyrównał do zera i otrzymał równanie

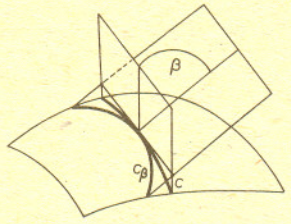
$$\tan 2\varphi = \frac{N}{M}$$

Z okresowości funkcji tangens wynika, że istnieją dwa prostopadłe (!) rozwiązania.



Znaczy to, że jeśli w jednym z kierunków krzywizna przekroju jest największa, to w prostopadłym do niego — najmniejsza. Kierunki te nazywają się obecnie kierunkami głównymi, a odpowiednie krzywizny przekroju — krzywiznami głównymi. Łatwo je dostrzec np. na walcu: krzywizna przekroju waha się tam od zera (przekrój równoległy do osi) do odwrotności promienia „podstawy” (przekrój prostopadły do osi). Na sferze wszystkie przekroje są jednakowe, więc wszystkie kierunki są główne.

Krzywizna przekroju normalnego walca waha się od 0 do $\frac{1}{r}$.



Skoro mówimy o krzywiznie przekroju płaszczyzną, to warto wspomnieć również twierdzenie udowodnione przez matematyka francuskiego Meusnier'a i mówiące o przekroju dowolną płaszczyzną (niekoniecznie prostopadłą). Otóż jeśli taka płaszczyzna jest odchylona od kierunku prostopadłego o kąt β , to aby obliczyć krzywiznę otrzymanego przekroju, prowadzimy najpierw przekrój płaszczyzną prostopadłą w tym samym kierunku stycznym, obliczamy jego krzywiznę, a następnie dzielimy ją przez $\cos \beta$. Należy również dodać, że już wtedy rozpatrywano krzywizny główne opatrzone znakiem. W zależności od tego, czy odpowiednie środki krzywizny leżały po tej samej, czy po przeciwnych stronach powierzchni, krzywizny główne były tego samego albo różnych znaków. Na przykład na torusie po stronie zewnętrznej (dalszej od środka) obie krzywizny są tego samego znaku, a po stronie wewnętrznej — różnych znaków. Widać więc, że powierzchnia ma lokalnie kształt „górkę” (lub „dołka”), jeśli krzywizny główne są jednego znaku i kształt „przełęcz”, gdy są różnych znaków.

$$\kappa(c, \beta) = \frac{\kappa(c)}{\cos \beta}$$

Meusnier udowodnił jeszcze inne ciekawe twierdzenie. Wykazał mianowicie, że jeśli powierzchnia jest ograniczona krzywą zamkniętą i ma najmniejsze pole spośród powierzchni ograniczonych tą krzywą (np. błonka mydlana rozpięta na pętlicę z drutu), to w każdym punkcie tej powierzchni suma krzywizn głównych wynosi zero.

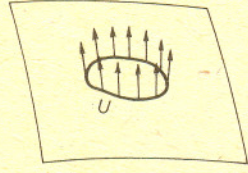


Decydującego kroku w rozwoju teorii powierzchni dokonał Gauss. Między innymi wprowadził nowy rodzaj krzywizny, dzisiaj zwany krzywizną Gaussa. Mianowicie, rozpatrywał na powierzchni jednostkowe pole normalne, tzn. w każdym punkcie powierzchni zaczął jednostkowy wektor prostopadły. Następnie skorzystał z pomysłu Eulera zdefiniowania krzywizny krzywych za pomocą indykatrixy sferycznej. Przypomnijmy, że tam krzywizna była mierzona szybkością zmian wektora stycznego. Tutaj — szybkością zmian pola normalnego. Gauss przeniósł wektory normalne do początku układu współrzędnych i otrzymał tzw. odwzorowanie sferyczne η z powierzchni w sferę jednostkową, przyporządkowujące punktowi na powierzchni koniec wektora normalnego w tym punkcie (przesuniętego do początku układu). Następnie dla dowolnego punktu p rozpatrzył jego małe otoczenie U na powierzchni i porównał jego pole powierzchni z polem powierzchni jego obrazu $\eta(U)$. Krzywiznę powierzchni w punkcie p określił jako granicę ilorazu $\frac{\text{pole } \eta(U)}{\text{pole } U}$ przy U malejącym do punktu p (zaopatrzoną jeszcze w znak „-”, jeśli odwzorowanie sferyczne zmienia orientację, tzn. w przypadku powierzchni typu „przełęcz”). Zobaczmy to na kilku przykładach.

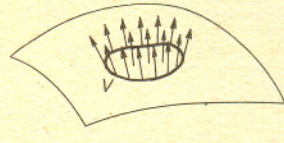
$$\kappa_1 \cdot \kappa_2 > 0$$



$$\kappa_1 \cdot \kappa_2 < 0$$



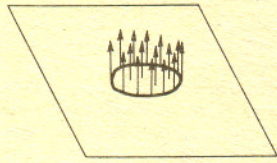
Krzywizna Gaussa mała, bo $\frac{\text{pole } \eta(U)}{\text{pole } U}$ małe.



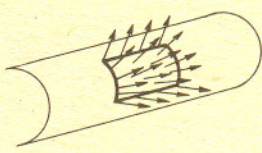
Krzywizna Gaussa większa, bo $\frac{\text{pole } \eta(U)}{\text{pole } U}$ większe.



Dla płaszczyzny odwzorowanie sferyczne jest stałe, zatem krzywizna Gaussa jest równa zero ($\eta(U)$ jest zawsze jednym punktem). Dla walca obrazem η jest koło wielkie na sferze i znowu obraz dowolnego otoczenia ma zerową powierzchnię. Krzywizna Gaussa, jak poprzednio, wynosi zero.

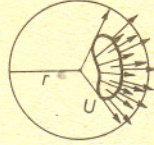


$$\eta(U) = \text{punkt} \Rightarrow K = 0$$



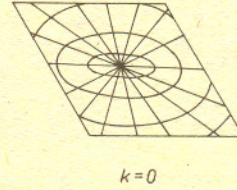
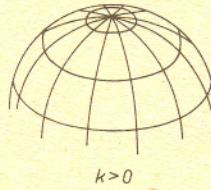
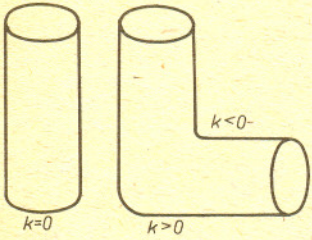
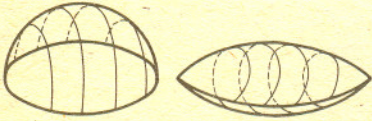
$$\eta(U) = \text{krzywa} \Rightarrow K = 0$$

Dla sfery o promieniu r odwzorowanie sferyczne jest jednokładnością o skali $\frac{1}{r}$, a więc dla dowolnego U pole $\eta(U) = \frac{1}{r^2} \cdot \text{pole } U$. Wynika stąd, że krzywizna Gaussa jest równa $\frac{1}{r^2}$.

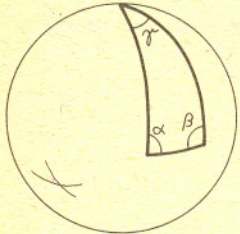


$$K = \frac{1}{r^2}$$

Gauss podał wzór pozwalający wyliczyć krzywiznę dowolnej powierzchni, gdy dana jest jej parametryzacja. Ze wzoru tego wyprowadził wniosek, że nowa krzywizna jest akurat równa iloczynowi krzywizn głównych określonych pół wieku wcześniej przez Eulera, $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2$. Łatwo to sprawdzić na przykładach rozpatrzonych przed chwilą. Wynikiem, który Gaussowi sprawił największą radość, było twierdzenie mówiące, że nowa krzywizna nie zmienia się przy zginaniach powierzchni (bez rozciągania). Sam określił je jako „theorema egregium” (twierdzenie wspaniałe, chwalebne). Wyobraźmy sobie np. kawałek gumowej piłki. Gdy próbujemy ją w jednym kierunku nieco wyprostować, w drugim zagina się sama — a krzywizna Gaussa, czyli iloczyn krzywizn głównych, nie zmienia się. Inny przykład: rury walcowej nie da się zagiąć bez jej rozciągania — inaczej krzywizna Gaussa musiałaby się zmienić. Z tych samych powodów nie da się wykonać mapy kuli ziemskiej (ani jej części) z zachowaniem wszystkich odległości.



Aby wspomnieć o jeszcze jednym z wyników Gaussa, przypomnijmy najpierw, że geodezyjną na powierzchni nazywamy krzywą, która spełnia jeden z równoważnych warunków: 1) lokalnie minimalizuje odległość między swoimi punktami, 2) jej płaszczyzny ściśle styczne są prostopadłe do powierzchni (tzn. posuwając się po niej nie skręcamy na boki). Otóż wspomniany wynik Gaussa mówi, że jeśli na powierzchni dany jest trójkąt geodezyjny A (tzn. figura ograniczona trzema geodezyjnymi), to całka z krzywizny Gaussa po tym trójkącie jest równa sumie jego kątów wewnętrznych minus π . Wynika stąd np., że na sferze suma kątów trójkąta geodezyjnego jest zawsze większa niż π .

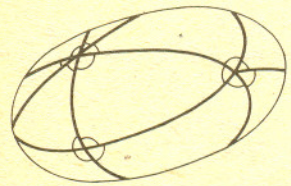


$$\iint K = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

Postaramy się teraz scałkować krzywiznę Gaussa na dowolnej domkniętej i ograniczonej powierzchni M . Najpierw dzielimy ją na trójkąty geodezyjne $M = \cup A_i$. Oznaczmy przez W , B i S odpowiednio liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian tego podziału. Ze wzoru Gaussa mamy

$$\iint_M K = \sum_{A_i} \iint_{A_i} K = 2\pi W - \pi S = 2\pi(W - B + S) = 2\pi\chi(M).$$

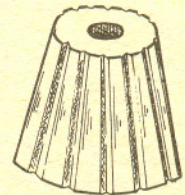
Skorzystaliśmy tu z tego, że każdy trójkąt ma trzy boki, a każda krawędź jest bokiem dwóch trójkątów, co daje $B = \frac{3}{2}S$. Liczba $\chi(M) = W - B + S$ nazywa się charakterystyką Eulera powierzchni M i wiadomo o niej, że nie zależy od podziału na trójkąty, a ponadto, że nie zmienia się przy pewnych ciągłych odkształceniach M (można rozciągać, ale nie przecinać ani sklejać). Jest więc tzw. niezmiennikiem topologicznym. Wynika z tego bardzo ciekawy wniosek, że całka krzywizny Gaussa jest też takim niezmiennikiem. Zatem obliczając tę całkę gubimy niemal wszystkie informacje o geometrii powierzchni (potrzebne do obliczenia samej krzywizny)!



Suma wszystkich występujących tu kątów wewnętrznych wynosi $2\pi W$.



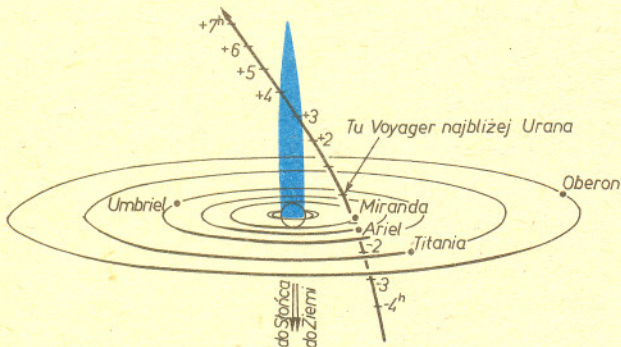
$$\iint K = 4\pi, \text{ bo ogórek } \sim \text{sfera, więc } \chi = 2.$$



$$\iint K = 0, \text{ bo babka } \sim \text{torus, więc } \chi = 0.$$

Na zakończenie wymieńmy jeszcze twierdzenie Mindinga mówiące o tym, że dwie powierzchnie o stałej i równej krzywiznie Gaussa lokalnie powstają jedna z drugiej przez zginanie. W szczególności aby wiedzieć, czy dana powierzchnia rozwija się na płaszczyźnie, wystarczy sprawdzić, czy jej krzywizna Gaussa jest równa zero. Ten przykład, jak i inne wspomniane poprzednio, świadczy o dużym znaczeniu różnych rodzajów krzywizny w geometrii.

Jak już pisaliśmy (*Delta* 8/1986) — 24 I 1986 amerykańska sonda Voyager 2 minęła Urana (rys. 1). Spotkanie zakończyło się pełnym sukcesem, co jest tym bardziej imponujące, że po spotkaniu z Saturnem w 1981 r. uległy awarii radioodbiorniki Voyagera oraz mechanizm sterujący kamerami telewizyjnymi. Usterki te zostały zdalnie usunięte, tak że przelot koło Urana został w pełni wykorzystany. Zauważmy przy tym, że sygnał radiowy do Saturna leci już ponad 10 minut, do Urana zaś dwukrotnie dłużej.



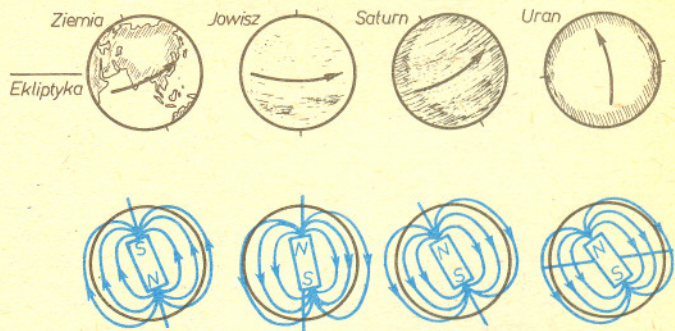
Rys. 1. Trasa przelotu Voyagera 2 w pobliżu Urana.

Obserwacje prowadzone z Ziemi nawet za pomocą najpotężniejszych teleskopów nie są w stanie ujawnić żadnych szczegółów na tarczy Urana. Okazało się, że ta wodorowo-helowa planeta nawet z bliska ma wygląd zielono-niebieskiej, niemal jednolitej kuli, czyli chmur w atmosferze praktycznie nie widać. Za tę barwę odpowiedzialny jest następnym (po wodorze i helu) składnik atmosfery Urana — metan — który szczególnie silnie absorbuje promieniowanie czerwone. Sporadycznie dostrzegalne chmury pozwoliły na bezpośrednie sprawdzenie okresu rotacji Urana, a w każdym razie jego wysokich warstw atmosfery. Okres ten jest rzędu -16^h i jest różny w różnych szerokościach uranograficznych, przy czym różnice sięgają godziny. Dowodzi to istnienia silnych systematycznych wiatrów.

Ujemny okres obrotu oznacza, że planeta wiruje w kierunku wstecznym, czyli przeciwnym do kierunku obiegu wokół Słońca. Północny biegun świata na Uranie ma współrzędne $\alpha = 17^h09^m$, $\delta = -15^{\circ}05'$ i leży zaledwie 8° na północ od płaszczyzny orbity, blisko gwiazdy ηOph . Voyager 2 zbliżając się do Urana „widział” w pełni oświetloną jego południową półkulę.

Osobny problem to wyznaczenie okresu rotacji sztywnego wnętrza planety. Wyznaczono go z obserwacji zmian pola magnetycznego i zmian gęstości uwieczonych w nim cząstek naładowanych, gdyż rozsądnym wydaje się założenie, iż pole magnetyczne jest sztywno związane z „twardym” (prawdopodobnie skalnym) jądrem planety (rys. 2). Jako wynik otrzymano -17^h14^m . Widać, że atmosfera rotuje szybciej, inaczej mówiąc — wiatry wieją przeważnie w kierunku obrotu Urana. Jak wiadomo na Ziemi również mamy przewagę wiatrów zachodnich, kłopot jednak w tym, że Ziemia jest nagrzewana głównie w strefie równikowej, podczas gdy Uran głównie w strefach polarnych. Badacze związani z misją Voyagera twierdzą zatem, że mechanizm tego zjawiska jest — jak na razie — nieznanym.

Uran jako całość jest w równowadze termodynamicznej z otoczeniem, tzn. z padającym nań promieniowaniem słonecznym. Niemniej jednak sondowania atmosfery planety wykazały pewne jej lokalne osobliwości. Sondowania te polegały na obserwacji krawędzi tarczy Urana w podczerwieni, przesłedzeniu przebiegu zakrycia gwiazdy γPeg w nadfiolecie oraz obserwacji z Ziemi promieniowania radiowego nadajników sondy, gdy zniknęła za tarczą Urana, a następnie pojawiała się ponownie. Okazało się, że najwyższe warstwy atmosfery na oświetlonej stronie mają temperaturę 750 K, podczas gdy na stronie ciemnej 1000 K. Przepuszcza się, że nieoświetlone, a bardzo rozrzedzone górne warstwy atmosfery po prostu bardzo powoli stygną. Niżej



Rys. 2. Ustawienie dipola i schemat pola magnetycznego Ziemi, Jowisza, Saturna i Urana. Zwraca uwagę wyjątkowa niezgodność osi dipola magnetycznego i osi rotacji Urana — kąt między nimi wynosi około 60° .

temperatura dość gwałtownie spada i na poziomie ciśnienia 0,1 bara osiąga minimum równe 51 K. Głębiej znowu rośnie. Temperatury równika i bieguna są tam praktycznie jednakowe. Osobliwość stanowią pierścieniowe obszary wokół obu biegunów z temperaturą o kilka stopni niższą (w szerokościach $\pm 30^{\circ}$).

Obszerna magnetosfera Urana obejmuje wszystkie jego pierścienie i większość satelitów. Skład chemiczny plazmy wewnątrz magnetosfery okazał się zdecydowanie inny niż na zewnątrz, mianowicie wewnątrz stwierdzono niedobór ciężkich jonów helu, węgla i tlenu. Liczba protonów i elektronów natomiast jest nie zmieniona. Ponieważ ciężkie jony pochodzą z wiatru słonecznego, widać, że magnetosfera skutecznie osłania Urana przed jego wpływem. Protony i elektrony znajdują się wewnątrz magnetosfery muszą zatem pochodzić z samego Urana, z wysokich warstw jego atmosfery. Nie mogą natomiast pochodzić z lodowych powierzchni księżyców, bowiem obfitość protonów kłóci się tu z niedoborem jonów tlenu.

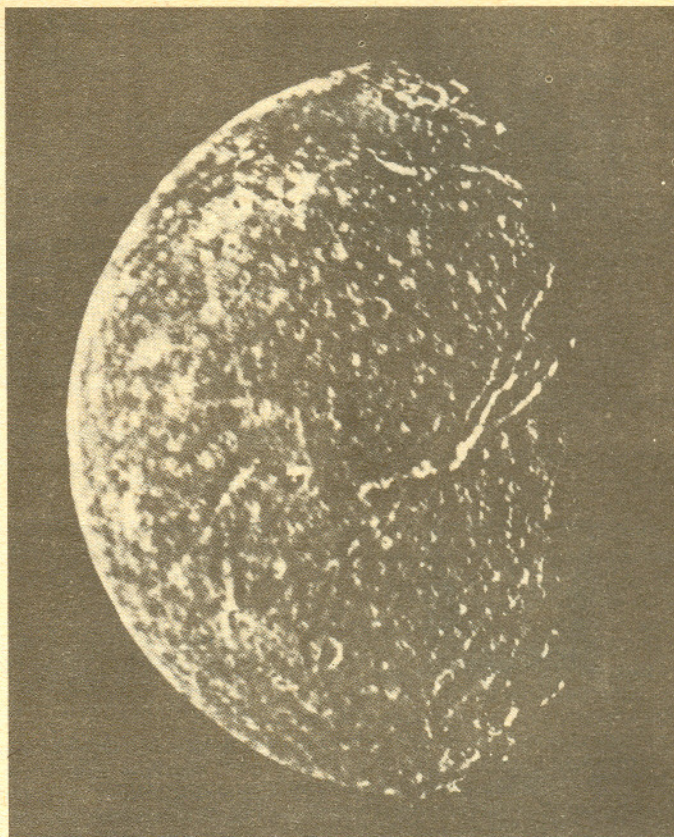
Od 1977 r. znanych było dziewięć pierścieni otaczających Urana w płaszczyźnie jego równika (patrz tabela i rys. 3). Voyager 2 odkrył dziesiąty pierścień oznaczony 1986UIR. W tej chwili jest zupełną zagadką, jaki mechanizm powoduje, że są one tak wąskie i mają tak ostre brzegi, np. pierścień γ ma zaledwie 700 m szerokości. Analiza odbitego od nich światła dowodzi, że składają się one z bryłek o rozmiarach rzędu metra. Struktura pierścieni wygląda inaczej, gdy ogląda się je na tle samego Urana, a inaczej — odtworzona na podstawie zakrycia gwiazdy lub przy patrzeniu ostro „pod Słońce”. Okazało się, że przestrzeń między dziesięcioma dobrze widocznymi pierścieniami wypełniona jest wieloma innymi, bardziej rozmytymi i zbudowanymi z mniejszych cząstek. Przy korzystnym oświetleniu cały układ pierścieni Urana przypomina wręcz pierścienie Saturna.

Osobny wreszcie rozdział „uranologii” to jego satelity (patrz tabela). Dotychczas wiadomo było o nich właściwie tylko tyle, że ich rozmiary zawierają się między 500 a 1600 km oraz że ich powierzchnie pokrywa lód. Zupełnym zaskoczeniem okazało się wykrycie przejawów geologicznej aktywności na tych zamrożonych globach. Otóż np. na Oberonie, na białym, a więc pokrytym rozkruszonym lodem, dnie niektórych kraterów uderzeniowych zaobserwowano ciemne plamy zinterpretowane jako osady pochodzące z brudnej wody wyciekającej z tych kraterów. Jest to jakby lodowy odpowiednik działalności wulkanicznej. Powstanie niektórych rowów na Titanii (rys. 4) i Arielu przypisuje się rozsadaniu zewnętrznej skorupy przez wodę zamarznąjącą w głębi gruntu. Niestety, nie bardzo przy tym wiadomo, jakie mogłyby być przyczyny okresowego topnienia zamarzliny. Umbriel, najciężniejszy z pięciu wielkich satelitów, pozbawiony jest „promieni” pokruszonego lodu rozchodzących się od kraterów uderzeniowych; nie wiadomo w tej chwili, dlaczego tak jest. Ścisłe mówiąc, tylko jeden jego krater ma białe dno, tzn. tylko jeden krater ukazuje czysty lód spod ciemnej warstwy pyłu pokrywającego całego satelitę. Najbardziej zagadkowe formacje geologiczne znaleziono na Mirandzie (rys. 5). Szeregi równoległych wałów i rowów układają się tam w jakiejś dość

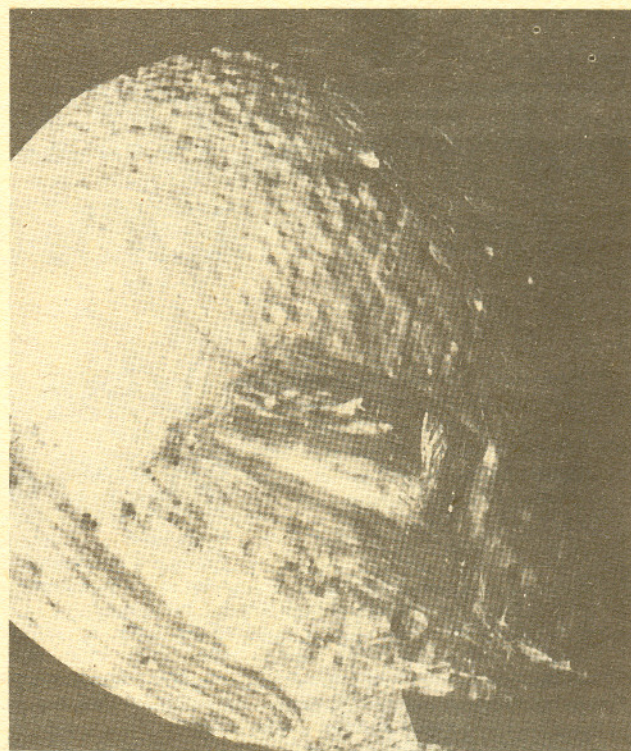
regularne figury. Przypuszcza się, że Miranda powstała ze zlepiania się wielkich brył skalnych i lodowych i owe geometryczne wzory są wynikiem tonięcia brył skalnych, w bardziej plastycznym lodzie.

Satelity i pierścienie Urana

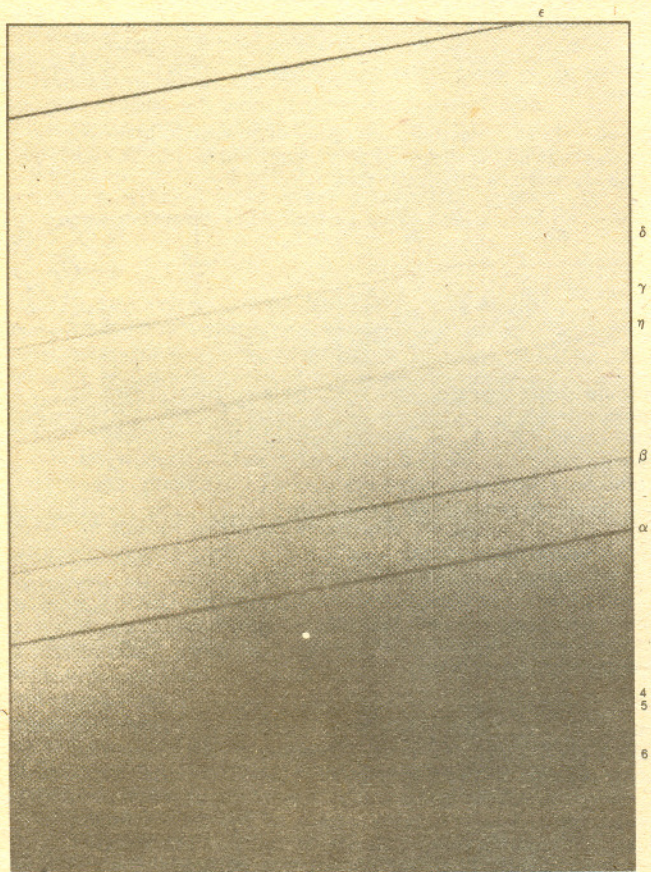
Nazwa lub oznaczenie (R oznacza pierścień)	Promień orbity lub promień pierścienia (km)
R 6	41 837
R 5	42 235
R 4	42 571
R α	44 717
R β	45 659
R η	47 174
R γ	47 622
R δ	48 296
1986U7	49 284
R ϵ	51 145
1986U8	53 290
1986U9	59 080
1986U3	61 740
1986U6	62 690
1986U2	64 340
1986U1	66 080
1986U4	69 910
1986U5	75 080
1985U1	85 970
Miranda	129 400
Ariel	191 000
Umbriel	266 300
Titania	435 900
Oberon	583 400



Rys. 4. Titania widziana z odległości 370 000 km.

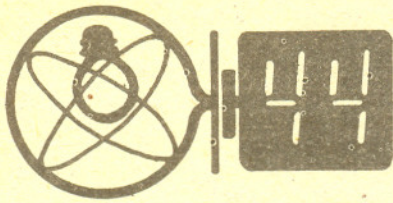


Rys. 5. Osobliwe formacje geologiczne na Mirandzie.



Rys. 3. Dziewięć pierścieni widocznych na tle tarczy Urana.

Misja Voyagera 2 dostarczyła wiele nowych informacji o siódmej planecie Układu Słonecznego, ale oczywiście nie wyjaśniła wszystkich zagadek. Ciągłe np. nie wiemy rzeczy chyba najważniejszej, mianowicie dlaczego Uran ma tak osobliwe ustawioną płaszczyznę równika, w dodatku zgodną z płaszczyzną orbit satelitów. Tak zresztą najczęściej jest, że nowe obserwacje stawiają badaczowi nowe pytania. Z całą pewnością powtórzy się to przy okazji spotkania Voyagera z Neptunem w 1989 r.



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3 S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotnie członkostwo — to tytuł Weterana.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1988.

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 1988

Zadania z fizyki nr 63 i 64

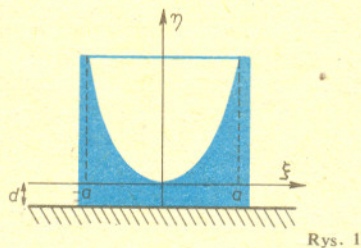
Redaguje dr Andrzej NADOLNY

63. Na poziomym stole spoczywa „kielich” o masie M . Jego wewnętrzna powierzchnia jest paraboloidą obrotową, której przekrój płaszczyzną przechodzącą przez oś paraboloidy jest (w układzie związanym z „kielichem” — rysunek 1) określony równaniem

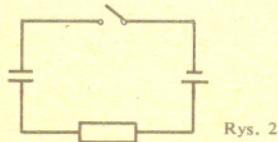
$$\eta = k \xi^2 \quad (-a < \xi < a)$$

Na brzegu paraboloidalnej powierzchni umieszczono mały klocek o masie m i puszczono go. Określić charakter ruchu wykonywanego przez ten klocek przy zaniedbywalnym tarcia klocka o „kielich” oraz „kielicha” o stół i znaleźć równanie toru klocka (traktowanego punktowo) w układzie związanym ze stołem.

64. Zestawiono obwód jak na rysunku 2, złożony ze źródła napięcia o sile elektromotorycznej 18 V i oporze wewnętrznym 3Ω , kondensatora o pojemności 40 mF oraz opornika (o nominalnej mocy 0,5 W) o oporze 10Ω wiszącego na przewodach między baterią a kondensatorem. O ile wzrośnie temperatura opornika po zamknięciu obwodu, jeśli jego masa wynosi 0,7 g, a ciepło właściwe — przy traktowaniu opornika jako ciała termicznie jednorodnego — $0,7 \text{ Jg}^{-1} \text{ K}^{-1}$? Czy wzrost temperatury opornika byłby taki sam, mniejszy czy też większy, gdyby jego opór wynosił $10 \text{ k}\Omega$?



Rys. 1



Rys. 2

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/1987

Przypominamy treść zadań:

55. Danych jest 15 oporników, z których jeden różni się oporem od pozostałych. Dysponując ogniwem, galwanometrem (z zerem pośrodku skali) i przewodami do połączeń należy zidentyfikować odmienny opornik i określić, czy jego opór jest większy, czy też mniejszy od oporu pozostałych oporników.

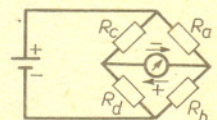
W jaki sposób postępować, aby tego dokonać za pomocą jak najmniejszej liczby pomiarów?

56. Patrząc przymrużonymi oczyma na odległe latarnie widzimy zwykłe dodatkowo „promienie” odchodzące ze źródła światła w górę i w dół. Podać wyjaśnienie tego zjawiska, możliwie poparte własnymi obserwacjami.

Wskazówka: powierzchnia rogówki oka jest zawsze pokryta warstwą śluzowatej cieczy.

55. Numerujemy oporniki kolejno od 1 do 15, oznaczając ich opory odpowiednio przez R_1, R_2, \dots, R_{15} . Następnie łączymy po trzy oporniki szeregowo i zestawiamy układ mostkowy jak na rysunku 3, stosując trzy kombinacje wyrażone w poniższej tabelce.

	R_a	R_b	R_c	R_d
I	$R_1 + R_2 + R_3$	$R_4 + R_5 + R_6$	$R_7 + R_8 + R_9$	$R_{10} + R_{11} + R_{12}$
II	$R_1 + R_2 + R_3$	$R_4 + R_5 + R_6$	$R_{10} + R_{11} + R_{12}$	$R_{13} + R_{14} + R_{15}$
III	$R_4 + R_5 + R_6$	$R_7 + R_8 + R_9$	$R_{10} + R_{11} + R_{12}$	$R_{13} + R_{14} + R_{15}$



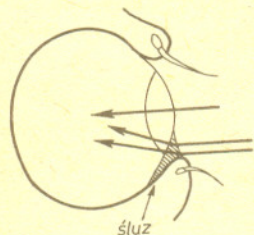
Rys. 3

Za każdym razem notujemy wskazanie galwanometru: brak wychylenia świadczy o tym, że nietypowy opornik znajduje się poza mostkiem, wychylenie „+” oznacza, że jeden z oporów R_a, R_d ma mniejszą wartość lub jeden z oporów R_b, R_c ma większą wartość od pozostałych, wychylenie „-” oznacza stwierdzenie przeciwne. Na podstawie tych trzech — co najwyżej — pomiarów znajdujemy trójkę oporników zawierającą nietypowy opornik i określamy, czy jego opór jest większy, czy też mniejszy od oporu pozostałych oporników.

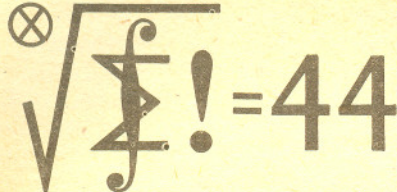
Na przykład wyniki I „+”, II „+”, III „-” wskazują, że nietypowy opornik znajduje się w trójce R_4, R_5, R_6 i jest większy, w przypadku wskazań I „+”, II „-” poszukiwany opornik znajduje się wśród R_{10}, R_{11}, R_{12} i jest mniejszy (pomiar III niepotrzebny).

W końcu rozłączamy nietypową trójkę i dwa z oporników wstawiamy do mostka jako R_a i R_b , dając w miejsce R_c i R_d dwie inne — identyczne — trójki (lub też pojedyncze oporniki). Ten czwarty pomiar umożliwia ostateczną identyfikację nietypowego opornika wraz z określeniem znaku odchyłki jego oporu względem reszty oporników.

56. Śluzowata ciecz pokrywająca rogówkę oka tworzy przy powiekach pryzmatyczny menisk, który załamuje światło (patrz rysunek 4). Przy dolnej powiece promienie ulegają załamaniu w dół dając taki efekt, jakby przychodziły z góry — stąd te widziane „promienie” odchodzące od oglądanego źródła w górę. Podobnie pryzmat cieczozy przy górnej powiece odchyła promienie do góry, dając wrażenie „promieni” odchodzących od źródła w dół. Warunkiem zajścia tego zjawiska jest, oczywiście, aby pryzmat cieczozy znajdował się w obrębie źrenicy, co występuje właśnie przy przymrużonych powiekach. Podczas przekręcania głowy „promienie” również przekręcają się, gdyż pozostają prostopadłe do krawędzi powiek. Ponieważ krawędzie te są zaokrąglone, obserwowane wiązki „promieni” są lekko rozbieżne, a podczas patrzenia kątem oka pochylają się względem siebie.



Rys. 4



Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Czołówka ligi sędziowskiej "Klub 44 M" po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 153 /WT=1,51/ i 154 /WT=2,52/ z numeru 8/1987

Marcin Mazur	- Białystok	47,59pkt
Piotr Kumer	- Olsztyn	47,51pkt
Jan Ciach	- Ostrowiec S	44,17pkt
Mirosław Mikucki	- Augustów	42,68pkt
Pieter Wach	- Katowice	41,35pkt
Edward Orzechowski	- Warszawa	41,15pkt
Tadeusz Józefczyk	- Poznań	41,10pkt
Krzysztof Jedziniak	- Katowice	39,85pkt

Sumę 44 punktów przekraczają: pan Mazur po raz trzeci /ósmi Weteran Klubu 44/, pan Kumer po raz pierwszy i pan Ciach po raz drugi.

158. Liczby x_1 i x_n są pierwiastkami trójmianu kwadratowego $f(t) = t^2 - (x_1 + x_n)t + x_1 x_n$. Zatem $f(t) < 0$ dla $t \in (x_1; x_n)$, a stąd $0 \geq f(x_1) + \dots + f(x_n) = \sum x_i^2 - (x_1 + x_n) \sum x_i + n x_1 x_n = \dots$

157. Przypuśćmy, że nie istnieje koło o promieniu r zawarte w W . Wówczas każdy punkt wielokąta W jest odległy nie więcej niż r od brzegu. To znaczy, że jeśli weźmiemy paski szerokości r wzdłuż każdego boku, to one (w zasadzie) pokryją W .

Czytelnicy zapewne zauważyli, że podane tu rozwiązanie zadania 157 różni się stylem i charakterem od większości prezentowanych w lidze rozwiązań. Być może, zauważyli też, że jest ono w ogóle niepoprawne. Zadanie to zostało zacierpnięte z pewnego amerykańskiego zbioru zadań. Znajduje się ono tam wraz z rozwiązaniem, którego dosłownym tłumaczeniem jest przytoczony tekst.

Przy redakcji "Delt" powstał ZERO KOPRU, czyli Zespół Rozpowszechniania Konkursu Prac Uczniowskich, złożony z laureatów dotychczasowych konkursów. Członkowie zespołu będą wyjeżdżać do szkół średnich na spotkania z uczniami, wystarczy tylko, aby zainteresowane takim spotkaniem szkoły skontaktowały się z redakcją "Delt" w celu uzgodnienia szczegółów wizyty.

Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania.
2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.
3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.
4. W eliminacjach bierze udział uczeń, który w terminie do dnia 1 maja prześle pod adresem Redakcji *Delt* jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, klasa, nazwa i adres szkoły, imię, nazwisko i adres nauczyciela — opiekuna pracy.
5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.
6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Komisję Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną przedstawione Jury Konkursu. Jury zakwalifikuje najlepsze prace do finału, który odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

165. Funkcja f o wartościach rzeczywistych, określona i różniczkowalna w zbiorze liczb dodatnich, spełnia warunek: $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + f'(x)) = 0$. Czy stąd wynika, że $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$?

166. W przestrzeni trójwymiarowej z ustalonym kartezjańskim układem współrzędnych rozpatrujemy zbiór punktów kratowych, tj. punktów, których wszystkie współrzędne są liczbami całkowitymi. Niech K będzie sześcianem jednostkowym o wierzchołkach w punktach kratowych i niech będzie dany dowolny punkt kratowy P . Udowodnić, że spośród ośmiu odległości punktu P od wierzchołków sześcianu K co najmniej cztery są liczbami niewymiernymi.

Zadanie 166 zaproponował pan Werner Mnich z Opola.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/1987

Przypominamy treść zadań:

157. Wielokąt W ma pole S i obwód d . Dowiedz, że W zawiera koło o promieniu $> S/d$.
 158. Dane liczby rzeczywiste $x_1 \leq \dots \leq x_n$, $\sum x_i = 0$. Dowiedz, że $\sum x_i^2 \leq -n x_1 x_n$ i ustal, kiedy zachodzi równość.

... i leżących pomiędzy dwusiecznymi kątów A i B . Pole tego zbioru równa się $r \cdot$ (długość AB) + (dwa przyczyнки przy końcach). Jeśli kąt przy wierzchołku (np. A) jest $< \pi$, musimy odjąć trójkąt prostokątny o wysokości r i kącie $A/2$; ma on pole większe niż zawarty w nim wycinek koła o polu $(r^2/4)(\pi - A)$. Jeśli kąt przy wierzchołku (np. B) jest $\geq \pi$, musimy dodać wycinek koła o rozwarości kątowej $(B - \pi)/2$, o polu $(r^2/4)(B - \pi)$. Łącznie więc, pełna powierzchnia tych zbiorów jest ograniczona przez $r \cdot$ obwód $- (r^2/2)$ (suma kątów zewnętrznych) $= r \cdot$ obwód $- \pi r^2$, a ponieważ z założenia suma tych zbiorów zawiera cały wielokąt, widzimy, że pole $\leq r \cdot$ obwód $- \pi r^2$. Skoro to jest prawda dla wszystkich r przekraczających maksymalny promień koła wpisanego, zatem S/d jest dolnym ograniczeniem długości tego promienia.

oparty generalnie na tym samym pomysle „brania pasków wzdłuż boków”) jest — nie będziemy tego ukrywać — dość zawiły. Przedstawimy go Czytelnikom w odrębnym artykule w drugiej połowie roku. Może uda się komuś z Czytelników znaleźć rozwiązanie niezbyt skomplikowane, a przy tym bezbłędne. Prosimy wówczas o przysłanie; oczywiście już nie w ramach konkursu ligowego (zresztą, w chwili, gdy piszemy te słowa, nie wiemy jeszcze, co znajduje się w korespondencji od uczestników ligi). Jeśli przysłane rozwiązanie okaże się istotnie prostsze czy nawet tylko istotnie różne od znalezionej przez nas, chętnie je wydrukujemy. Problem wydaje nam się na tyle ciekawy, że warto do niego powracać.

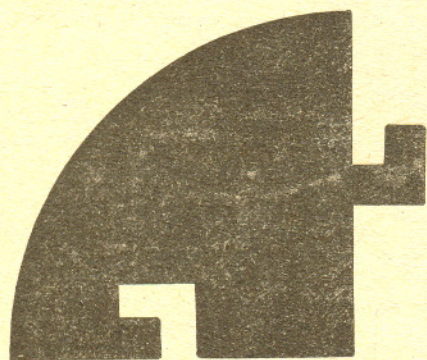
Liczymy na to, że uda nam się zachęcić uczniów do szerszego niż dotychczas udziału w konkursie, a co najważniejsze — pomóc w wyborze interesującego tematu pracy konkursowej. Przypominamy, że Konkurs Prac Uczniowskich z Matematyki jest organizowany corocznie, a szczegółowy regulamin ukazał się w "Delcie" 2/1987, ukaże się także w "Delcie" 2/1988.

7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac oraz nauczycielom — opiekunom prac przed końcem roku szkolnego.
8. Finałisti i nauczyciele opiekujący się ich pracami otrzymują od Zarządu Głównego PTM zaproszenie do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.
9. Finał polega na wygłoszeniu (nie na odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia Sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne fundowane przez Ministerstwo Edukacji i Narodowej.
11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.
12. Wyniki konkursu i skróty zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.
13. Komisję Konkursu oraz Jury Konkursu powołuje Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delt*.

delta

Od tyłu jest prosto

Najpierw „od przodu”. Jak podzielić figurę z rysunku 1 na dwie jednakowe? A jak podzielić na dwie jednakowe figurę z rysunku 2? Zadania te nie wydają się bardzo proste.

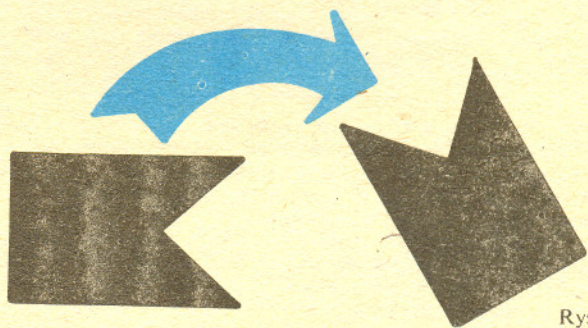


Rys. 1



Rys. 2

Zamiast je rozwiązywać spróbujmy najpierw zastanowić się, jak układać takie zadania. Pomysł nasuwa się od razu. Bierzemy byle jaką figurę i przekształcamy ją izometrycznie (to znaczy bez zmiany jakiejkolwiek odległości) tak, by jej otrzymany drugi egzemplarz nie nakładał się na pierwotną figurę bardziej niż brzegiem.



Rys. 3

Suma pierwotnej figury i jej obrazu dzieli się w sposób oczywisty na dwie figury. Jeśli jest to sytuacja z rysunku 3, to żadnego zadania nie ma — podział jest widoczny na pierwszy rzut oka. Zadanie „robi się” dopiero wtedy, gdy obie części mają większy kawałek brzegu wspólny, a my nie zaznaczymy, gdzie jest brzeg, a gdzie wewnątrz figury. Nasze doświadczenie wzrokowe łatwo podpowiada nam podział wtedy, gdy użyta izometria jest przesunięciem lub symetrią. Gorzej, gdy użyjemy obrotu lub symetrii z poślizgiem. Właśnie te gorsze sytuacje przedstawiają rysunki 1 i 2.



Rys. 4. Figura uzyskana z takiej samej figury pierwotnej jak na rysunku 3.

Ale jak zabrać się do rozwiązywania zadania, a nie do jego układania? Wydaje się, że najlepiej wyróżnić w brzegu figury, którą mamy podzielić, jakiś charakterystyczny fragment i do tego taki, który powtarza się dwa razy. Następnie należy określić, jaka izometria f nakłada te wybrane fragmenty brzegu. Gdy taką izometrię znajdziemy, musimy ją „przepołówić”, to znaczy znaleźć rozwiązanie równania

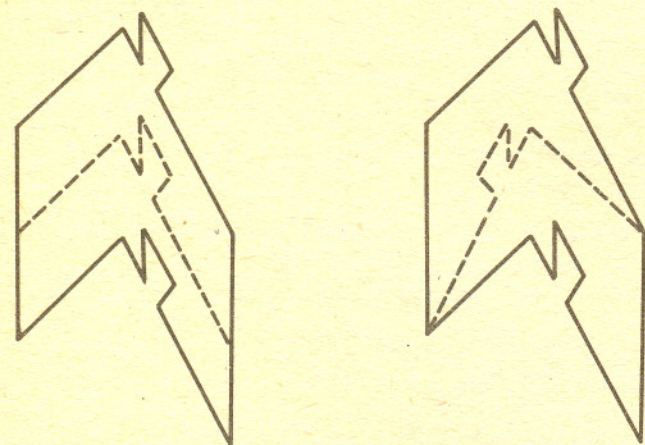
$$f = gg,$$

gdzie g oznacza szukaną izometrię.

Ale co dalej? Poddajmy teraz wyróżniony fragment brzegu znalezionemu przekształceniu g . Uzyskana linia dzieli figurę na dwie jednakowe lub przynajmniej (jeśli wzięliśmy zbyt mały fragment brzegu) wskazuje, jak taki podział ma wyglądać.

Naturalne wyróżnienie obu boków „z haczykami” figury z rysunku 1 wskazuje nam, że f jest obrotem o 90° względem „rogu” figury. Rozwiązaniem naszego równania jest wobec tego obrót o 45° względem tego samego punktu.

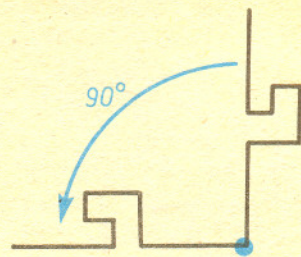
Ciekawa sytuacja powstaje wówczas, gdy nasze równanie ma dwa rozwiązania. Tak jest w przypadku figury z rysunku 2. Nasuwające się uznanie za f przesunięcia powoduje, że jako g możemy wziąć zarówno przesunięcie (o wektor o połowę zmniejszony), jak też i symetrię z poślizgiem. W tym konkretnym przypadku tylko ta druga możliwość nadaje się do podzielenia figury. Ale nietrudno zmodyfikować rysunek tak, by były możliwe oba podziały (rys. 8).



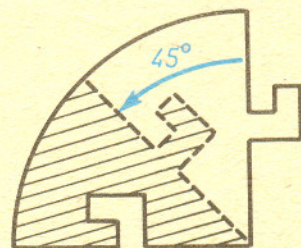
Rys. 8



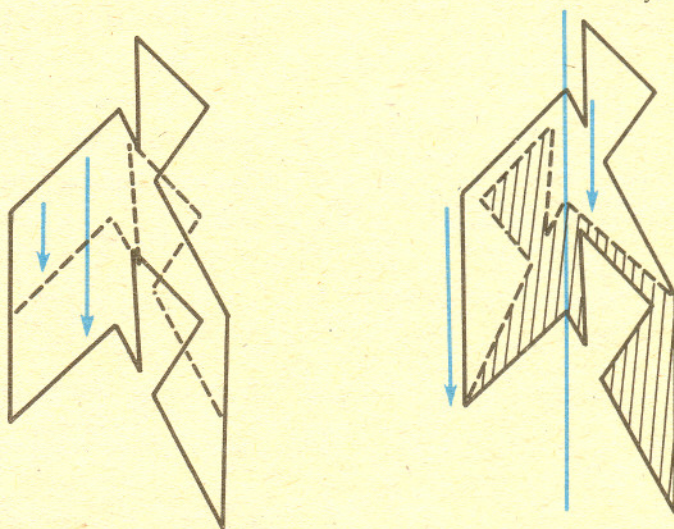
Rys. 9



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7. Linia przerywana na rysunku lewym nie wyznacza podziału figury, bo wybiega poza nią.

I powstaje szereg pytań. Czy równanie $f = gg$ (dla f nie będącego identycznością) może mieć więcej niż dwa rozwiązania? Czy figura może się dać podzielić na dwie jednakowe na większą od dwóch, ale skończoną, liczbę sposobów (bo nikt przecież nie żąda, by użyć zaproponowanego tutaj sposobu)? Jak poznać, że figura nie da się podzielić na dwie jednakowe? Po czym poznać, że figurę można podzielić na nieskończenie wiele sposobów (wystarczy np. by miała środek symetrii, ale czy innych nie ma)? Pozostawiając te pytania Czytelnikom zwróćmy uwagę na fakt, że znalezienie odpowiedniego fragmentu brzegu (aby dała się zastosować zaproponowana metoda) może nastęrczać trudności. Figura z rysunku 9 daje się podzielić na dwie jednakowe i to naszą metodą — ale jak wskazać dwa fragmenty brzegu, które trzeba nałożyć? Dla wszystkiego odpowiedź jest zamieszczona w tym numerze.

CO NOWEGO W KWAZIKRYSTAŁACH ?

Kwazikrystały są to kryształy o "niezozwolonej" przez prawa klasycznej krystalografii symetrii. Jako pierwsze odkryto kwazikrystały o symetrii pięciokrotnej zbudowane z 14% manganu i 86% aluminium (patrz artykuł w Delcie nr 8 z 1986 r.), a później z innych stopów metali przejściowych. W 1985 roku Leonid Benderski z Uniwersytetu w Baltimore (Maryland, USA) wykonał serię badań stopów manganu i glinu za pomocą mikroskopu elektronowego o wysokiej zdolności rozdzielczej. Udowodnił on, iż ze wzrostem koncentracji manganu kwazikrystały o symetrii pięciokrotnej "przechodzą" w kwazikrystały o osi dziesięciokrotnej. Następnie mieszana grupa z Politechniki w Zurychu (Szwajcaria) i Uniwersytetu w Nagoya (Japonia) znalazła badając stopy niklu i chromu pewne dowody na istnienie kwazikrystałów o symetrii dwunastokrotnej. Z kolei do badań włączyli się uczeni z Laboratorium Mikroskopii Elektronowej Chińskiej Akademii Nauk w Pekinie, którzy najpierw potwierdzili fakt istnienia kwazikrystałów o symetrii dziesięciokrotnej. Ostatnio zaś ogłosili o odkryciu kolejnego, nowego gatunku kwazikrystałów o symetrii osmiokrotnej (Warto dodać, że możliwość istnienia takich kwazikrystałów była w 1986 roku postulowana w pracach teoretycznych.) Są to znów stopy metali przejściowych o składach $Cr_2Ni_3Si_2$ oraz $V_{15}Ni_{10}Si$. Otrzymywano je w postaci cienkich warstw przez gwałtowne schładzanie rozplynionych metali i krzemu. Następnie próbki były badane przy użyciu dyfrakcji elektronów oraz mikroskopu elektronowego o wysokiej zdolności rozdzielczej (około 0.25 nm). Otrzymane widma dyfrakcyjne wykazują bardzo wyraźnie symetrię osmiokrotną. Tzn. są identyczne po obrocie o kąt $2\pi/8$ czyli 45° . Z kolei obrazy otrzymane w transmisyjnym mikroskopie elektronowym wykazują brak symetrii periodycznej, co jest wspólną cechą wszystkich kwazikrystałów. Obrazy te mogą być natomiast symulowane za pomocą nieperiodycznej sieci otrzymanej z kwadratów oraz rombów o identycznym jak kwadraty boku i kącie 45° . Łatwo narysować sobie taką sieć i przekonać się, że istnieją w niej punkty o symetrii osmiokrotnej. Obecnie jedynie sławny chemik i krystalograf, laureat nagrody Nobla, Linus Pauling w dalszym ciągu konsekwentnie twierdzi, że kwazikrystały nie istnieją i usiłuje wyjaśnić istniejące dane eksperymentalne przez występowanie w nich tzw. wielokrotnych zbliżnięć. Natomiast większość krystalografów i fizyków ciała stałego przekonana dużą ilością faktów eksperymentalnych, jak i analiz teoretycznych "pogodziła się" z faktem realnego istnienia kwazikrystałów. Zapewnić więc w nowych podręcznikach z fizyki kwazikrystały znajdują należne sobie miejsce.

Fakt ten wynika wprost z definicji h oraz z określenia odpowiednich działań.

Istotną rolę w naszych czarach odgrywać będzie następujące

Twierdzenie. Niech a będzie dowolną liczbą rzeczywistą i niech $k \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$h\left(\binom{x+a}{k}\right) = \begin{cases} \frac{(-1)^{a+k+1}}{k \binom{k-1}{a}}, & \text{jeśli } a \in \{0, 1, \dots, k-1\} \\ \binom{a}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{a-j}, & \text{jeśli } a \notin \{0, 1, \dots, k-1\}. \end{cases}$$

A oto dowód. Z definicji symbolu Newtona mamy

$$\binom{x+a}{k} = \frac{1}{k!} [x+a] \cdot [x+(a-1)] \cdot \dots \cdot [x+(a-k+1)].$$

Zauważmy, że po wykonaniu mnożeń w iloczynie dwumianów $(x+a_1) \cdot (x+a_2) \cdot \dots \cdot (x+a_k)$ otrzymamy wielomian, którego współczynnik przy x jest sumą k iloczynów postaci $a_1 \cdot \dots \cdot a_{j-1} \cdot a_{j+1} \cdot \dots \cdot a_k$ ($j = 1, 2, \dots, k$) — niech Czytelnik sprawdzi to dla $k = 2, 3$ i 4 . Rozważmy teraz dwa przypadki:

Przypadek I — któraś z liczb a_1, \dots, a_k , np. a_1 , jest zerem. Wtedy wszystkie iloczyny zawierające czynnik a_1 są równe 0 i współczynnik przy x redukuje się do jednego iloczynu

$a_1 \cdot \dots \cdot a_{l-1} \cdot a_{l+1} \cdot \dots \cdot a_k$. W szczególności dla rozważanego przez nas wielomianu $\binom{x+a}{k}$, przy założeniu, że $a \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ mamy

$$c_1 = \frac{1}{k!} a \cdot (a-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot \dots \cdot (a-k+1) = \frac{1}{k!} a! \cdot (k-a-1)! \cdot (-1)^{a-k+1} = \frac{(-1)^{a+k+1}}{k \binom{k-1}{a}}.$$

Przypadek II — każda z liczb a_1, \dots, a_k jest różna od 0. Wspomnianą wyżej sumę iloczynów możemy w tym przypadku przekształcić następująco

$$\sum_{j=1}^k a_1 \cdot \dots \cdot a_{j-1} \cdot a_{j+1} \cdot \dots \cdot a_k = \sum_{j=1}^k \frac{a_1 \cdot \dots \cdot a_{j-1} \cdot a_{j+1} \cdot \dots \cdot a_k}{a_j} = a_1 \cdot \dots \cdot a_k \sum_{j=1}^k \frac{1}{a_j}.$$

Stąd dla naszego wielomianu $\binom{x+a}{k}$ mamy

$$c_1 = \frac{1}{k!} a \cdot (a-1) \cdot \dots \cdot (a-k+1) \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{a-j} = \binom{a}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{a-j}.$$

To kończy dowód naszego twierdzenia.

Z twierdzenia tego widać, że zakłęcie h przemienia każdorazowo wyrażenie kombinatoryczne $\binom{x+a}{k}$ w wyrażenie również kombinatoryczne. Teraz, gdy jesteśmy już wtajemniczeni w działanie zakłęcia h , możemy przystąpić do robienia sztuczek. Weźmy jako rekwiżyt tożsamość (4). Zaklinając lewą stronę równości (4) otrzymujemy

$$h\left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \binom{x}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} h\left(\binom{x}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k \binom{k-1}{0}} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k},$$

a zaklinając stronę prawą (4) dostajemy

$$h\left(\binom{x+n}{n} - 1\right) = h\left(\binom{x+n}{n}\right) - h(1) = \binom{n}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n-1} - 0 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}.$$

W efekcie otrzymaliśmy następującą, zupełnie niepodobną do (4) tożsamość kombinatoryczną:

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Jeśli w równości (4) podstawimy $x-1$ w miejsce x (wszak (4) jest równością wielomianów), to otrzymamy następującą tożsamość wyjściową

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \binom{x-1}{k} = \binom{x+n-1}{n} - 1.$$

Czyniąc teraz hokus-pokus, otrzymujemy tożsamość

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} = \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

(szczegóły pozostawiam Czytelnikowi).

Czytelnik może też sprawdzić, że z (5) można wyczarować tożsamość

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} = (n+1) \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Np. dla $n = 4$ zachodzi równość

$$1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = 5 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right).$$

Takich zastosowań funkcji h (bo czymże jest h , jak nie funkcją?) jak te powyższe można wskazać jeszcze wiele.



Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 496. Udowodnić, że prostopadłościenny ser szwajcarski można rozciąć na wielościany wypukłe w taki sposób, by w każdym z nich znalazła się dokładnie jedna dziura (dziury są kuliste).

Rozwiązanie na str. 10

M 497. Niech $x > 0$ będzie liczbą niewymierną. Udowodnić, że między każdą parą kolejnych liczb naturalnych znajduje się dokładnie jeden wyraz jednego z ciągów

$$1 + x, \quad 2(1 + x), \quad 3(1 + x), \dots$$

$$1 + \frac{1}{x}, \quad 2\left(1 + \frac{1}{x}\right), \quad 3\left(1 + \frac{1}{x}\right), \dots$$

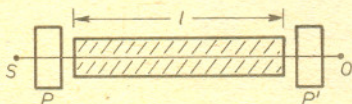
Rozwiązanie na str. 14

M 498. Na nieskończonej szachownicy ustawiono pionki w taki sposób, że każdy ma co najmniej pięciu sąsiadów (przyjmujemy, że każde pole ma osiem pól sąsiednich). Udowodnić, że pionków jest nieskończenie wiele.

(Włodzimierz Smoleński)

Rozwiązanie na str. 10

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI



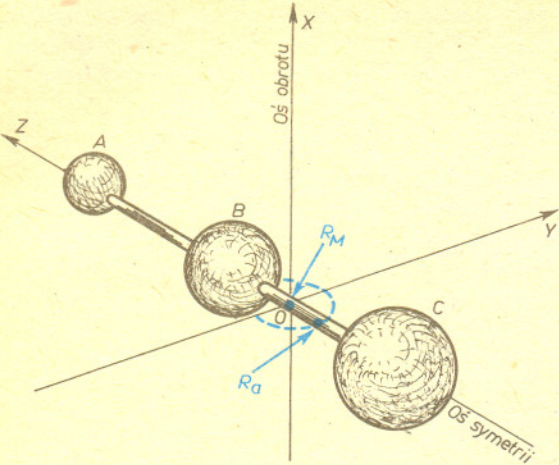
F 238. Między dwa polaryzatory P i P' (patrz rysunek), których osie (kierunki polaryzacji światła przepuszczanego przez pryzmaty) tworzą kąt 45° , wstawiona jest rurka o długości $l = 0,5$ m wypełniona dwusiarczkiem węgla CS_2 . Zewnętrzne pole magnetyczne o indukcji B skierowane jest równoległe do osi rurki. Jakie powinny być zwrot i wartość wektora B , aby jak największy strumień światła docierał z punktu S do punktu O ? Co się stanie, gdy zamienimy położenia źródła światła S i punktu obserwacji O bez zmiany pozostałych elementów układu? Stała opisująca zależność kąta skręcenia płaszczyzny polaryzacji światła w CS_2 od długości drogi światła i natężenia pola magnetycznego (stała Verdet) wynosi $V = 42' \cdot 10^3 \text{ T}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

Rozwiązanie na str. 17

F 239. Jądro atomu wodoru (proton) i jądro atomu deuteru przyciągają elektron z taką samą siłą. Czy widma obu atomów będą takie same?

Rozwiązanie na str. 14

Dr Jacek DOBACZEWSKI
Dr hab. Witold NAZAREWICZ



Rys. 1. Trzy kulki A, B i C połączone sztywnymi prętami stanowią makroskopowy model molekuly liniowej. Oś symetrii tego układu (oś z na rysunku) jest, oczywiście, jego osią główną. Pozostałe dwie osie główne (x i y) są prostopadłe do osi symetrii i przecinają ją w środku masy R_M . Jeśli środek ładunku R_Q układu nie pokrywa się ze środkiem masy, to obrót wokół osi x (jak na rysunku) spowoduje efektywny ruch ładunku wypadkowego po okręgu.

* Patrz M. Kopernik *O obrotach sfer niebieskich* (pierwsza część ukazała się w ubiegłym roku nakładem Ossolineum).



Wszyscy wiemy, że Ziemia się kręci*. Wirować mogą też mniejsze ciała, jak na przykład grające bąki, jojo, hula-hoop oraz latające talerze. Czy możemy jednak zaobserwować wirującą molekułę? atom? jądro atomowe? A jakże — możemy. Obroty ciał niewielkich mają jednak swoje cechy szczególne, jakich próżno by szukać w makroświecie. Zapytacie, jakie? Zaraz, zaraz, najpierw przypomnijmy sobie, jak opisuje się obroty ciał „zwykłych”.

Obrót ciała charakteryzują trzy wielkości fizyczne: prędkość kątowna ω , moment pędu I i moment bezwładności J . Układ współrzędnych możemy zawsze wybrać w taki sposób, aby składowa I_x momentu pędu zależała tylko od składowej x prędkości kątowej i aby tak samo było dla składowych y i z (układ osi głównych):

$$(1) \quad I_x = J_x \omega_x, \quad I_y = J_y \omega_y, \quad I_z = J_z \omega_z.$$

Liczby J_x , J_y i J_z nazywamy głównymi momentami bezwładności ciała sztywnego. Energię ruchu obrotowego możemy obliczyć ze wzoru:

$$(2a) \quad E_{obr} = \frac{I_x^2}{2J_x} + \frac{I_y^2}{2J_y} + \frac{I_z^2}{2J_z} = \frac{1}{2} J_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} J_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} J_z \omega_z^2,$$

który w przypadku $J_x = J_y = J_z = J$ sprowadzi się do

$$(2b) \quad E_{obr} = I^2/2J.$$

Ruch ciała sztywnego — nawet wtedy, gdy nie działają na nie żadne siły — może być bardzo skomplikowany. Pewne wyobrażenie o jego złożoności możemy uzyskać wprawiając w ruch obrotowy podrzucający w rękę przedmiot. Ruch ten wygląda „prosto”, gdy uda nam się wprawić ciało w obrót wokół jednej z jego osi głównych. Wtedy oś obrotu nie zmienia swojego kierunku w przestrzeni, a wektory prędkości kątowej i momentu pędu są równoległe. Jeśli ciało ma trzy różne główne momenty bezwładności $J_x > J_y > J_z$, to nie będzie się ono trwale obracać wokół osi o pośrednim momencie bezwładności J_y — obrotami stabilnymi mogą być tylko obroty wokół osi o najmniejszym i największym momencie bezwładności.

Zajmijmy się teraz ciałami, dla których dwa główne momenty bezwładności są identyczne, a trzeci jest inny (ciała takie nazywa się bąkami symetrycznymi). Przyjmijmy, że $J_x = J_y > J_z$. Rysunek 1 przedstawia ciało, które jest bąkiem symetrycznym. Są to trzy kulki A, B i C połączone sztywnym prętem. Ośią główną tego ciała będzie, oczywiście, jego oś symetrii OZ położona wzdłuż pręta oraz dowolne dwie osie prostopadłe leżące w płaszczyźnie prostopadłej do OZ. Początek układu współrzędnych umieściliśmy w środku masy ciała oznaczonym na rysunku przez R_M . Załóżmy również, że kulki naładowane są ładunkami Q_A , Q_B i Q_C . Na osi OZ zaznaczyliśmy środek ładunku tego ciała, R_Q .

Mógłby się ktoś zapytać, po co „komplikować” nasz przykład przez dodanie ładunków elektrycznych. Jakie to ma znaczenie?

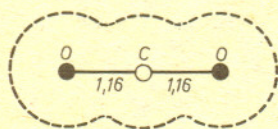
Jak wiadomo, ładunek elektryczny (lub układ ładunków) poruszający się z przyspieszeniem wysyła falę elektromagnetyczną. Częstotliwość tej fali zależy od ruchu ładunku, natomiast rozkład kątowny promieniowania określony jest przez rozkład przestrzenny ładunków źródłowych. Najprostszym przykładem jest promieniowanie dipolowe wysyłane przez ładunek drgający wzdłuż prostej lub przez elektrony w antenie (dipol elektryczny). Skomplikowany układ ładunków może wysyłać promieniowanie o bardzo złożonym charakterze (kwadrupolowe, oktopolowe i in.). Jeśli obracające się ciało jest naładowane, będzie, oczywiście, emitowało falę elektromagnetyczną, gdyż ładunki elektryczne znajdujące się w ciele poruszają się z przyspieszeniem. Z promieniowaniem związana jest energia pola elektromagnetycznego, która wysyłana jest w przestrzeń. Zgodnie z zasadą zachowania energii ciało będzie stopniowo traciło energię ruchu obrotowego, będzie hamowane przez promieniowanie. W tym miejscu bystry Czytelnik może zadać pytanie: a co się stanie z momentem



Rozwiązanie zadania M 497. Część całkowitą liczby a będziemy oznaczać przez $[a]$. Zauważmy, że żaden z wyrazów obu ciągów nie jest liczbą całkowitą. Niech n będzie liczbą naturalną. Jest $[n/(1+x)]$ wyrazów pierwszego ciągu mniejszych od n i $[n/(1+\frac{1}{x})]$ wyrazów drugiego ciągu mniejszych od n . Jednakże

$$\frac{n}{1+x} + \frac{n}{1+\frac{1}{x}} = \frac{n}{1+x} + \frac{nx}{1+x} = n.$$

Liczby $n/(1+x)$ i $n/(1+\frac{1}{x})$ mają niezerowe części ułamkowe, których suma na mocy powyższej równości wynosi 1. Zatem $[n/(1+x)] + [n/(1+\frac{1}{x})] = n-1$, czyli jest $n-1$ wyrazów obu ciągów mniejszych od n i $n-1$ wyrazów mniejszych od $n+1$, co kończy dowód.



Rys. 2. Molekuła dwutlenku węgla CO_2 . Odległości między jądrami podane są na rysunku w angstromach. Linia przerywana zaznaczono schematycznie rozmiar obszaru zajmowanego przez elektrony molekuł. Małe kulki reprezentujące jądra atomowe są, oczywiście, na rysunku dużo za duże.



Rozwiązanie zadania F 239. Atom deuteru ma jądro dwa razy cięższe od jądra atomu wodoru. Jeśli przyjmujemy, że elektron porusza się wokół nieruchomego jądra, to oba widma powinny być identyczne. W rzeczywistości elektron i jądro poruszają się wokół wspólnego środka masy. Poziomy energetyczny takiego układu są identyczne z poziomami energetycznymi ciała o ładunku równym ładunkowi elektronu e i masie

$$\mu = \frac{Mm}{M+m},$$

gdzie M — masa jądra, m — masa elektronu. Energia fotonu wypromieniowanego przy przejściu ze stanu opisanego liczbą kwantową n_1 do stanu n_2 ($n_1 > n_2$) wynosi

$$E_{n_1 n_2} = \frac{\mu e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right),$$

gdzie ϵ_0 — przenikalność dielektryczna próżni, h — stała Plancka. Widma obu atomów będą więc różne.

pędu? Przecież jeśli na ciało nie działa zewnętrzny moment sił, moment pędu bąka nie powinien ulec zmianie. Nie uwzględniliśmy jednak tego, że z falą elektromagnetyczną też związany jest moment pędu. A zatem wysyłane promieniowanie zabiera zarówno energię, jak i moment pędu bąka. I nie ma paradoksu.

Wróćmy teraz do przykładu z rysunku 1. Wprawmy nasze ciało w obrót wokół osi OX i spójrzmy na nie z kierunku wyznaczonego przez oś OY . Co widzimy? Oto wokół pewnego nieruchomego punktu w przestrzeni (R_M) drga punkt R_Q , w którym jest umieszczony wypadkowy ładunek $Q = Q_A + Q_B + Q_C$. Jaki efekt musi się pojawić? Oczywiście, układ będzie emitował promieniowanie elektromagnetyczne. Ponieważ promieniowanie to pochodzi od obracającego się dipola elektrycznego, będzie to promieniowanie dipolowe. Rozpatrzmy teraz sytuację, gdy masy, ładunki i odległości między nimi są takie, że środek masy i środek ładunku znajdują się w tym samym punkcie. Teraz nie ma już wirującego dipola elektrycznego. Układ wygląda raz jak ładunek skupiony blisko punktu $R_Q = R_M$ (wtedy, gdy pręt ustawiony jest w naszym kierunku), a raz jak ładunek rozłożony po obu stronach tego punktu (wtedy, gdy pręt jest ustawiony prostopadłe do kierunku, z którego patrzymy). Wygląda to zupełnie jak pulsowanie ładunku na bok i do środka. Taki zmienny rozkład ładunku będzie również źródłem fali elektromagnetycznej — będzie emitował tzw. promieniowanie kwadrupolowe.

Przejdźmy teraz do świata drobin i molekuł. Są one układami atomów związanych siłami elektromagnetycznymi, które utrzymują atomy składowe w określonych wzajemnych odległościach. Dla przykładu rozważmy cząsteczkę dwutlenku węgla CO_2 . Ma ona budowę liniową, przy czym atom węgla znajduje się między atomami tlenu i w stanie równowagi położony jest dokładnie w środku masy cząsteczki (rys. 2). Ze względu na symetrię układu moment dipolowy tej cząsteczki jest w stanie równowagi dokładnie równy zeru. Odległości między atomami tlenu a atomem węgla wynoszą $1,16 \text{ \AA}$ ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$), są więc małe i do rozważanego układu trzeba stosować prawa mechaniki kwantowej opisującej układy mikroskopowe. Okazuje się, że energia ruchu obrotowego kwantowego bąka wyraża się wzorem podobnym do wzoru (2b). Jedyna różnica polega na tym, że moment pędu układu mikroskopowego jest skwantowany, czyli może przyjmować tylko pewne szczególne wartości:

$$(3) \quad I^2 \rightarrow I_{kw}^2 = I(I+1) \hbar^2 \quad \text{dla } I = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie \hbar jest stałą Plancka ($\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$), natomiast liczbę całkowitą I nazywamy liczbą kwantową momentu pędu. Energię obrotową cząsteczki możemy więc przedstawić w następujący sposób:

$$(4) \quad E_{obr}(I) = \frac{\hbar^2}{2J} I(I+1).$$

Zbiór dyskretnych stanów (poziomów) rotacyjnych tworzy pasmo rotacyjne. Zgodnie ze wzorem (4) różnica energii kolejnych stanów pasma:

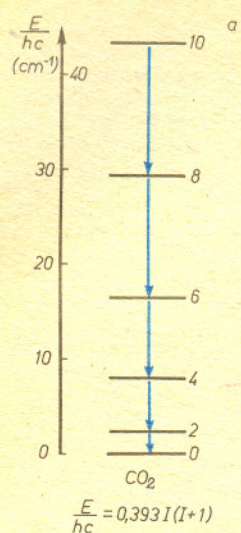
$$(5a) \quad E_{obr}(I) - E_{obr}(I-1) = 2I \frac{\hbar^2}{2J},$$

lub

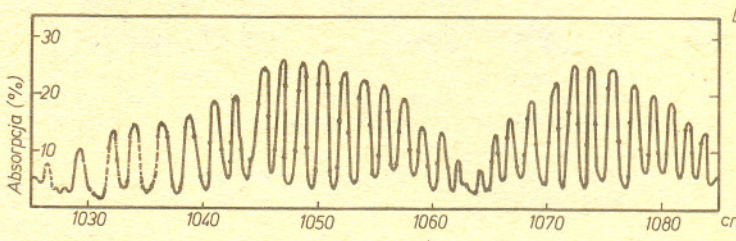
$$(5b) \quad E_{obr}(I) - E_{obr}(I-2) = 2(2I-1) \frac{\hbar^2}{2J},$$

jest liniową funkcją liczby kwantowej momentu pędu I . Układ kwantowy przechodząc z danego poziomu na poziom niższy emituje kwant promieniowania elektromagnetycznego. Energia tego kwantu musi być dokładnie równa różnicy energii między poziomami, a moment pędu kwantu musi być dokładnie równy różnicy momentów pędu dwu poziomów. W kwantowej teorii pola elektromagnetycznego falę elektromagnetyczną możemy opisać jako zbiór cząstek, fotonów. Foton ma energię $\hbar\omega$, pęd $\hbar\omega/c$ oraz moment pędu, który jest wielokrotnością \hbar . Najmniejszy moment pędu fotonu równy jest \hbar i foton taki nazywamy fotonem dipolowym. Fotony o momencie pędu $2\hbar$ nazywa się fotonami kwadrupolowymi, o momencie pędu $3\hbar$ — oktopolowymi, itd.

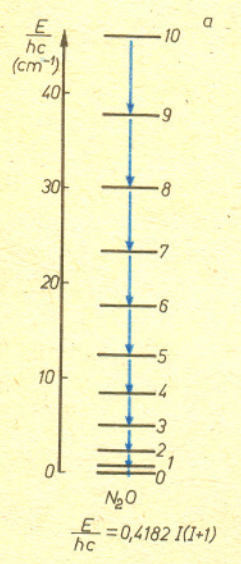
Analizując promieniowanie emitowane z gazowego dwutlenku węgla możemy zaobserwować kwanty o określonych energiach i określonych momentach pędu i z tych obserwacji „ułożyć” całe pasmo rotacyjne. Wyniki takiego pomiaru przedstawione są na rysunku 3a. Jak widzimy, pasmo rotacyjne składa się wyłącznie ze stanów o parzystych momentach pędu. Energie emitowanych kwantów promieniowania przedstawione są na rysunku 3b. Ze znakomitą dokładnością rosną one liniowo wraz ze wzrostem momentu pędu — upewnia nas to o tym, że znaleźliśmy prawdziwe pasmo rotacyjne. Dwutlenek węgla emituje wyłącznie kwanty o momencie pędu $2\hbar$. Dlatego momenty pędu stanów w paśmie zmieniają się co 2, a stanów o nieparzystym momencie pędu po prostu nie ma. Przypomnijmy sobie naszą analizę układu kul na precie —



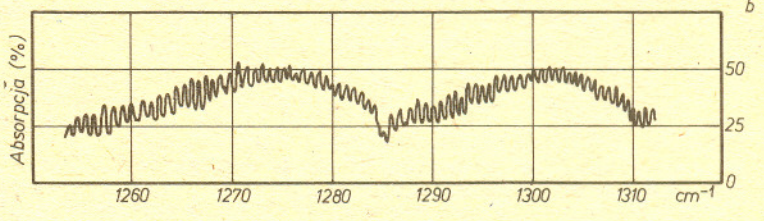
Rys. 3. Pasmo rotacyjne gazowego dwutlenku węgla CO₂ (a) otrzymane z jego widma absorpcyjnego (b).



Cząsteczka CO₂ jest białym krukiem w świecie molekuł — większość z nich ma w równowadze niezerowe momenty dipolowe. Dla przykładu popatrzmy na wyniki pomiaru promieniowania tlenku azotu N₂O (rysunki 4a i 4b). Pasmo rotacyjne zawiera teraz poziomy o wszystkich liczbach kwantowych I ; różnice momentów pędu między kolejnymi poziomami są równe 1, a więc każdy z kwantów promieniowania musi unosić moment pędu $1\hbar$. Cząsteczki N₂O emitują więc promieniowanie dipolowe, a zatem mają w równowadze niezerowy moment dipolowy. Jest tak dlatego, że w cząsteczce tlenku azotu atomy azotu są po tej samej stronie atomu tlenu (rys. 5).

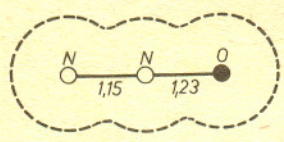


Rys. 4. Pasmo rotacyjne gazowego N₂O (a) otrzymane z widma absorpcyjnego (b).



Dotychczas mówiliśmy tylko o obrotach wokół osi prostopadłej do osi symetrii. Układ prętów i kul makroskopowych, o jakim mówiliśmy na początku, może się, oczywiście, obracać również i wokół swojej osi symetrii. Można by więc oczekiwać podobnego ruchu w przypadku układu mikroskopowego. Natrafiamy tu jednak na poważny problem związany z niemożnością odróżnienia cząsteczki liniowej od takiej samej cząsteczki obróconej o jakiś kąt wokół osi symetrii. W przypadku układu prętów i kul rozróżnienia takiego możemy dokonać; na przykład stawiając pędzikiem małą kropczekę na jednej z kul układu i obserwując jej położenie. Cząsteczki liniowe mają idealną symetrię obrotową i z punktu widzenia mechaniki kwantowej ruch obrotowy wokół ich osi symetrii po prostu nie istnieje. Natomiast każde odstępstwo od liniowości cząsteczki prowadzi do pojawienia się kilku pasm rotacyjnych.

Znając energie emitowanych kwantów i wartość stałej Plancka możemy wyznaczyć momenty bezwładności rozmaitych molekuł. Dla naszych cząsteczek CO₂ i N₂O wynoszą one odpowiednio $0,72 \cdot 10^{-45} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ oraz $0,67 \cdot 10^{-45} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, a więc są bardzo małe. Nie oznacza to jednak, że cząsteczki obracają się wolno! Aby przy tak małym momencie bezwładności móc zgromadzić „aż” jednostkę \hbar momentu pędu, muszą one wykonywać około 10^{10} obrotów na sekundę, co przy ich małych rozmiarach wymaga, by skrajne atomy poruszały się z całkiem sporą prędkością kilkunastu metrów na sekundę. Z jeszcze większymi prędkościami kątowymi wirują jądra atomowe!



Rys. 5. Molekuła tlenku azotu.

Czytelnicy piszą

75812394
- 49321857
26490537
+ 73509462
99999999

Rozważmy następujące zadanie: od danej liczby parzystocyfrowej, której pierwsza cyfra jest większa od ostatniej, odejmijmy liczbę powstałą z wyściowej przez zapisanie jej cyfr w odwrotnym porządku. Do otrzymanej w ten sposób liczby dodajmy liczbę z niej powstałą znów przez zapisanie jej cyfr w odwrotnym porządku (jeśli różnica miała mniej cyfr niż liczba, z której startowaliśmy, to dopisujemy jej na początku 0 i dopiero „odwracamy”). Okazuje się, że jeśli zaczynaliśmy od liczby $2n$ -cyfrowej, to w 45^n przypadkach nasze postępowanie da w wyniku liczbę $2n$ -cyfrową składającą się z samych dziewiątek. Wynik taki otrzymamy, jeżeli tylko liczba, od której rozpoczęliśmy, spełnia następujące warunki (a_i oznacza i -tą od końca cyfrę danej liczby)

$$a_{2n} > a_1, a_{2n-1} < a_2, a_{2n-2} > a_3, \dots, a_{n+1} > a_n, \text{ jeśli } n \text{ nieparzyste,}$$

$$\text{a } a_{n+1} < a_n, \text{ gdy } n \text{ parzyste.}$$

Jeśli zaś liczba nie spełnia powyższych warunków, to opisane postępowanie prowadzi do liczby, w której zapisie nie występują cyfry 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Wynik ten wraz z dowodem przekazał nam pan Tadeusz Boncler. Sądźmy, że publikowanie dowodu zepsułoby Czytelnikom przyjemność, jaką będzie przeprowadzenie go samodzielnie.

DROBIAZGI

Jedyną instytucją Watykanu zajmującą się badaniami w dziedzinie nauk fizycznych jest założone w 1891 roku przez papieża Leona XIII Watykańskie Obserwatorium Astronomiczne.



Liczby kardynalne to obiekty matematyczne odpowiadające liczebności zbiorów: dwóm zbiorom odpowiada ta sama liczba kardynalna wtedy i tylko wtedy, gdy są one równoliczne. Na liczbach kardynalnych można rachować (dodawać, mnożyć, potęgować) — np. sumą dwóch liczb kardynalnych, odpowiadających rozłącznym zbiorom A i B , jest liczba kardynalna odpowiadająca zbiorowi $A \cup B$. Najbardziej znanymi liczbami kardynalnymi są liczby naturalne. Można je wyróżnić spośród innych liczb kardynalnych właśnie za pomocą dodawania: liczba kardynalna a jest naturalna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a + a \neq a.$$

Zauważmy, że 0 — liczba kardynalna odpowiadająca zbiorowi pustemu — nie spełnia tego warunku. Dlatego też większość matematyków nie uważa zera za liczbę naturalną.



Badanie własności mikroobwodów elektronicznych wymaga stosowania bardzo krótkich impulsów elektrycznych. W laboratorium IBM w Zurychu opanowano technikę wytwarzania rekordowo krótkich impulsów trwających pół pikosekundy ($5 \cdot 10^{-13}$ s).



Dzięki ogromnej ilości światła dochodzącej ze Słońca można przy jego obserwacjach stosować obiektywy o niezwykle długich ogniskowych otrzymując w ten sposób dużą skalę obrazu Słońca. Bardzo długi teleskop byłby jednak bardzo niewygodny w użyciu, dlatego teleskop słoneczny jest z reguły nieruchomy (rolę tubusa spełnia często tunel prowadzący w głąb Ziemi), a światło słoneczne kierowane jest doń przez układ dwóch płaskich lusterek, tzw. celostat. Największy tego rodzaju teleskop znajduje się w obserwatorium na *Kitt Peak* (Arizona) i ma ogniskową 90 m.



Wodór neutralny w stanie podstawowym nie powinien — na zdrowy rozum — wysłać żadnego promieniowania, ponieważ stan podstawowy ma energię najniższą z możliwych dla danego atomu. Jednak w stanie podstawowym wodoru możliwe są dwa ustawienia spinów protonu i elektronu: równoległe i antyrównoległe, przy czym w pierwszym przypadku energia całego atomu jest odrobinę wyższa niż w drugim. Przejściu między tymi poziomami odpowiada emisja (lub absorpcja) kwantu o długości fali 21 cm. Dlatego neutralny, chłodny wodór można obserwować metodami radioastronomicznymi. Istnienie promieniowania wodorowego o fali 21 cm przewidział teoretycznie holenderski astronom H.C. van de Hulst w 1945 r. Obserwacje tego promieniowania ogromnie przyczyniły się do poznania budowy naszej Galaktyki.

W wielu przypadkach prawa opisujące zjawiska fizyczne są równoważne pewnej zasadzie wariacyjnej, to znaczy zasadzie określającej, że pewna wielkość fizyczna przyjmuje wartość minimalną lub maksymalną dla rzeczywistego przebiegu zjawiska. Na przykład: w stanie równowagi układu mechanicznego wartość energii potencjalnej jest ekstremalna (dla minimum jest to równowaga trwała); przy zadanym rozkładzie ładunku potencjał elektrostatyczny $\varphi(r)$ ma taki rozkład, że wielkość

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 \int (\nabla \varphi)^2 dV - \int \rho(r) \varphi(r) dV$$

ma wartość minimalną (ϵ_0 — jest przenikalnością dielektryczną próżni, $\rho(r)$ gęstością ładunku); prąd płynie przez przewodnik w taki sposób, że ciepło wydzielone w jednostce czasu ma wartość minimalną Tak sformułowane prawa są punktem wyjścia wielu metod znajdowania rozwiązań przybliżonych. Określamy wówczas pewną klasę „funkcji próbnych” o szczególnie prostej postaci, zbliżonej przy tym do spodziewanego rozwiązania (np. postaci rozkładu potencjału $\varphi(r)$) i wśród nich znajdujemy taką, która odpowiada minimum z zasady wariacyjnej. O ile nie wybraliśmy zbyt wąskiej klasy funkcji, to tak znalezione rozwiązanie dobrze przybliża rozwiązanie ogólne.



Istnieją prostokąty, które można podzielić na skończoną liczbę różnych kwadratów (najmniejsza ich liczba to 9). Natomiast prostopadłościanu nie można podzielić na różne sześciiany.



Średnia energia kinetyczna protonów we wnętrzu Słońca ($\approx 1,3$ keV) jest nieporównanie mniejsza od energii odpychania kulombowskiego ($\approx 0,48$ MeV) podczas zbliżenia ich na odległość, przy której mogą zacząć działać siły jądrowe. Czy w związku z tym temperatura we wnętrzu Słońca nie jest zbyt niska, by mogły zachodzić tam procesy jądrowe? Odpowiedź przeczącą daje mechanika kwantowa, której prawom podlegają cząstki mikrokosmosu, a więc i protony w gwiazdach. Bariera potencjału, stanowiąca przeszkodę nie do przebycia dla cząstki klasycznej, staje się przepuszczalna — zachodzi tu efekt tunelowy. Choć prawdopodobieństwo przeniknięcia przez barierę potencjału dla pojedynczej cząstki wynosi w procesie tego rodzaju zaledwie 10^{-9} na sekundę i tak możemy spodziewać się kilkuset tysięcy takich procesów w ciągu godziny, skoro we wnętrzu Słońca w reakcjach biorą udział setki miliardów protonów.



Która z liczb $\sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}}$, $\sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{16 - 2\sqrt{29}} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}$ jest większa? Wystarczy w tożsamości (dla $c^2 \geq d$)

$$\sqrt{c + \sqrt{d}} = \sqrt{\frac{c + \sqrt{c^2 - d}}{2}} + \sqrt{\frac{c - \sqrt{c^2 - d}}{2}}$$

wziąć $c = 22$, $d = 20$ i następnie sprawdzić (podnosząc obie strony do kwadratu), że

$$\sqrt{5} + \sqrt{11 - 2\sqrt{29}} = \sqrt{16 - 2\sqrt{29}} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}.$$

Tak więc dwie początkowe liczby są równe.

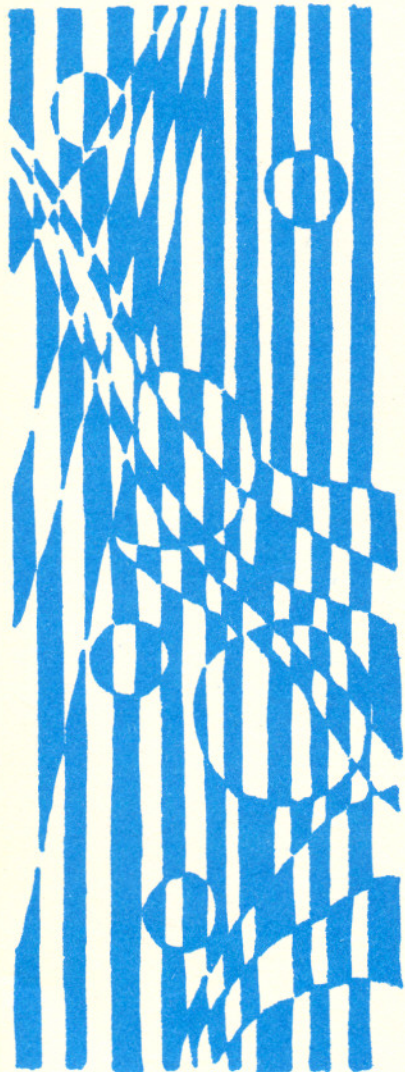




Rozwiązanie zadania F 238. Płaszczyzna polaryzacji światła rozchodzącego się w rurce z CS_2 ulegnie skręceniu o kąt $\theta = V \cdot B \cdot l$. Kierunek obrotu płaszczyzny polaryzacji jest taki jak kierunek prądu elektrycznego wytwarzającego pole B ; dla obserwatora w punkcie O skręcenie nastąpi w stronę prawą, gdy pole skierowane jest od O do S . Strumień światła docierający do O jest maksymalny, gdy po przejściu przez CS_2 światło spolaryzowane jest równoległe do osi polaryzatora P' , a więc gdy kąt $\theta = 45^\circ$. Odpowiednia wartość pola B wynosi wówczas

$$B = \frac{\theta}{V \cdot l} = 0,13 \text{ T.}$$

Kierunek obrotu płaszczyzny polaryzacji zależy od zwrotu wektora B . Światło wychodzące z punktu O nie dotrze do S (jeśli zwrot i wartość pola B pozostanie bez zmian), gdyż będzie spolaryzowane prostopadle do osi polaryzatora P . Układ opisany w zadaniu jest więc „wentylem optycznym” przepuszczającym światło tylko w jednym kierunku.



Miłośnicy astronomii nie powinni mieć trudności w odnalezieniu na niebie jednej z najbardziej osobliwych gwiazd zmiennych — ϵ Aurigae. Leży ona w bliskim sąsiedztwie bardzo jasnej gwiazdy — *Capelli* (Kozy) i wraz z dwiema słabszymi gwiazdkami (η i ζ Aurigae) tworzy mały trójkąt zwany Koźłętami. W maksimum blasku ϵ Aurigae jest najjaśniejsza wśród Koźłąt (3,5 mag), podczas gdy w minimum — najśłabsza (4,3 mag). Okres zmian jej blasku jest bardzo długi — ponad 27 lat — nie są więc możliwe amatorskie obserwacje zmienności. Warto jednak wiedzieć, jak astronomowie tłumaczą jej szczególne zachowanie, bowiem przez kilkadziesiąt lat sprawiała im niemało kłopotów.

Podczas ostatniego zaćmienia, które trwało od lata 1982 roku do wiosny 1984 roku, przeprowadzono szereg cennych obserwacji, które przyczyniły się do powstania modelu tej gwiazdy. Oto jak się on przedstawia:

Główna gwiazda jest nadolbrzymem typu widmowego F, 120 000 razy jaśniejszym od Słońca. Tak duża moc promieniowania stawia ją wśród najjaśniejszych gwiazd w Galaktyce. Przy swej ogromnej jasności nie jest zbyt gorąca (typ widmowy F), a więc jej rozmiary muszą być kolosalne — średnicę szacuje się na 2 j.a. Gdyby znalazła się w miejscu Słońca, pochłonięłaby trzy najbliższe planety, w tym Ziemię.

Do ciągłych, choć stosunkowo niewielkich zmian jej blasku przyczyniają się pulsacje (o okresie 3 miesiące), a także błyski na powierzchni trwające po kilka minut. Prawdopodobnie gwiazdę otacza gazowy pierścień świecący dzięki promieniowaniu odbitemu od jego powierzchni.

Duża masa (15–30 M_\odot) jest przyczyną szybkich (w skali czasu życia gwiazd) zmian ewolucyjnych. Choć zaledwie parę milionów lat temu opuściła ciąg główny, przeszła już fazę czerwonego olbrzyma i może wkrótce skurczyć się do stadium białego karła lub innej zwartej gwiazdy.

Duża jasność i masa głównej gwiazdy układu ϵ Aurigae oraz jej silnie zaawansowany stan ewolucyjny sprawiają, że jest ona rzadkością wśród gwiazd, jest jednak całkowicie „pospolita” w porównaniu ze swym ciemnym towarzyszem.

To, że jest on ciemny, wiemy w oczywisty sposób z faktu, że wywołuje zaćmienia. Jest zapewne rozległy, bowiem zaćmienia trwają długo — ponad rok. Zaburzenia, które wywołuje w ruchu orbitalnym nadolbrzyma, wskazują, że powinien być to obiekt dość masywny — o masie rzędu kilkunastu M_\odot . Zasadniczy problem dla astronomów stanowiło stworzenie modelu obiektu łączącego wszystkie te cechy. Do rozwiązania zagadki przyczyniły się obserwacje dokonane w zakresie podczerwieni za pomocą satelity IRAS. Wynika z nich, że podczas zaćmienia przed tarczą nadolbrzyma przesuwa się chłodne ciało o temperaturze ~ 500 K. Nie jest to gwiazda, ale dysk, którego rozmiary szacuje się na 9 j.a. średnicy i 1 j.a. grubości. W ciągu 27,1 lat okrążyła on środek masy układu po niemal kołowej orbicie o promieniu ~ 25 j.a. Sam dysk nie mógłby jednak oprzeć się działaniu ogromnej siły grawitacyjnej nadolbrzyma. Wygląda na to, że coś masywnego znajduje się w jego centrum. To „coś”, niedostępne bezpośrednim obserwacjom, powinno promieniować mało energii, bo inaczej nawet całkowicie zasłonięte przez dysk, pobudzałoby go do świecenia, czego nie obserwuje się. Początkowo przypuszczano, że jest to czarna dziura, jednak wobec braku potwierdzenia w postaci promieniowania rentgenowskiego i ultrafioletowego hipotezę tę odrzucono. W tej sytuacji jedyny, zgodny z obserwacjami, model przewiduje istnienie w centrum dysku dwóch gwiazd głównego, każda o masie 8 M_\odot .

Cały układ zawiera więc trzy gwiazdy, dwa dyski i prawdopodobnie jako całość otoczony jest chmurą gazu. W dodatku żaden z dysków nie jest równoległy do płaszczyzny orbity układu. Pierścień wokół nadolbrzyma jest silnie nachylony, znacznie jednak ciekawsze efekty obserwacyjne wywołuje niewielkie nachylenie dysku otaczającego układ podwójny. Podczas ostatniego zaćmienia zaobserwowano pojaśnienie układu w centralnej fazie zjawiska, poprzednio — w 1956 roku — pojaśnienie było znacznie słabsze, a w 1928 roku nie obserwowano go w ogóle. Te fakty obserwacyjne interpretuje się właśnie jako powolną (o okresie około 1000 lat) zmianę orientacji (precesję) dysku, wskutek czego gwiazdy w jego centrum są czasem zupełnie niewidoczne, innym znów razem, przy większym nachyleniu dysku, można zarejestrować promieniowanie pochodzące bezpośrednio od nich. Astronomowie przewidują, że do następnego zaćmienia dysk przechyli się jeszcze bardziej, a więc silniej niż ostatnio wzrośnie na parę miesięcy jasność układu podczas centralnej fazy zaćmienia.

Spoglądając nocą na tę niepozorną gwiazdkę — ϵ Aurigae — nie domyślilibyśmy się, jak złożona jest jej budowa, ile ciekawych procesów zachodzi w tym układzie. Nie należy jednak sądzić, że astronomowie widzą go „bezpośrednio” tak, jak np. na naszym rysunku na okładce. To, co zostało opisane wyżej, to tylko model, który, jak w przypadku tysięcy innych gwiazd, powstaje na podstawie obserwacji natężenia ich promieniowania, jego polaryzacji czy wyglądu widma. Wszystkie gwiazdy, nawet w najpotężniejszych teleskopach, są obiektami punktowymi, trzeba więc rzetelnej wiedzy (i dużej fantazji, rzecz jasna), by pogodzić wszelkie dane obserwacyjne w modelach nierzadko bardzo skomplikowanych. Kolejne generacje astronomów, stosując nowoczesne techniki obserwacyjne, będą weryfikowały poprawność modelu ϵ Aurigae. Do najbliższego zaćmienia w 2010 roku zostało jeszcze sporo czasu, może więc Ty, Czytelniku, będziesz miał swój udział w rozwiązywaniu tajemnic tego osobliwego układu.

mgr Joanna UDALSKA

