



SPIS TREŚCI

NUMERU 4(172)

Manowce intuicji (II) <i>prof. dr Stanisław Hartman</i>	str. 1
Czy Słońce jest ciałem doskonale czarnym? <i>dr Tomasz Kwast</i>	str. 4
Zadania	str. 5
Patrz w niebo	str. 6
Ostrożnie z przybliżeniami	str. 7
Mała Delta	str. 8
O obrotach ciał niewielkich (II) <i>dr Jacek Dobaczewski</i> <i>dr hab. Witold Nazarewicz</i>	str. 10
Kącik prac uczniowskich	str. 13
Kto ma rację	str. 13
Klub 44	str. 14
Drobiazgi	str. 16
Przewrót w przemyśle stoczniowym	str. 17

W następnym numerze:
Zawężona sfera

„Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny
 miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa
 Matematycznego, Polskiego
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
 Towarzystwa Astronomicznego
 wydawany przy poparciu
 Ministerstwa Edukacji Narodowej

Komitet Redakcyjny
 dr Maciej Bryński
 dr Bogdan Cichocki
 dr Antoni L. Dawidowicz
 dr Alicja Derkowska
 doc. dr Jan A. Gaj
 doc. dr Bolesław Gleichgewicht
 doc. dr Tomasz Hofmokr — v-przewodniczący
 doc. dr Tadeusz Jarzębowski
 doc. dr Marcin Kubiak
 mgr Andrzej Mąkowski
 dr Zbigniew Plochocki
 dr Jan Rempala
 prof. dr Konrad Rudnicki
 prof. dr Grzegorz Sitariski
 prof. dr Józef I. Smak
 prof. dr Kazimierz Stepien
 prof. dr Mieczysław Subotowicz
 doc. dr Andrzej Szymacha
 doc. dr Aniela Wolska
 prof. dr Andrzej Woszczyk
 prof. dr Wojciech Zakowski —
 przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
 mgr inż. Krzysztof Biesaga
 mgr Krystyna Kordos — sekr. red.
 dr hab. Marek Kordos — red. nac.
 dr Tomasz Kwast
 mgr inż. arch. Mariola Łotys
 dr Andrzej Majhofer
 mgr Anna Rudnik
 dr Jerzy Ryll
 mgr Joanna Udalska

Adres Redakcji
 ul. Koszykowa 6a
 00-564 Warszawa
 tel. 21-19-85

Krajowe Wydawnictwo Czasopism
 RSW „Prasa—Książka—Ruch”
 ul. Noakowskiego 14
 00-666 Warszawa
 tel. centr. 25-72-91 do 93
 Biuro Reklam i Propagandy
 tel. 25-56-26
 Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd;
 2,50 ark. druk;
 papier offsetowy V kl. 70 g.
 Wydrukowano w Drukarni
 im. Rewolucji Październikowej
 Warszawa, ul. Mińska 65.
 Nr zam. 6025/12/88. U-69.

WARUNKI PRENUMERATY

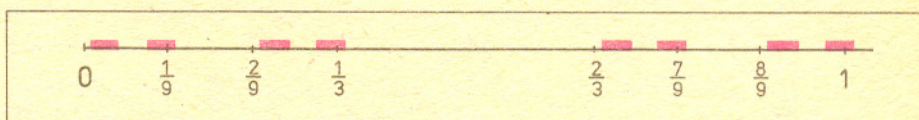
- Cena prenumeraty kwartalnej zł 210,— półrocznej zł 420,— rocznej zł 840,—
- dla osób prawnych — instytucji i zakładów pracy:
 - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach,
 - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
 - dla osób fizycznych — indywidualnych prenumeratorów:
 - osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli,
 - osoby fizyczne zamieszkałe w miastach — siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
 - Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w W-wie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zlecających indywidualnie i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.
- Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:
 — do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,
 — do dnia 1-go każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 70,—

Manowce intuicji (II)

Prof. dr Stanisław HARTMAN

Zajmiemy się pewnym ciekawym zbiorem miary 0. Podzielmy odcinek $[0, 1]$ na trzy równe części i wyrzucmy wewnątrz części środkowej, to jest przedział otwarty $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Następnie podzielmy każdą z pozostałych części na trzy równe części i wyrzucmy wewnątrz części środkowych, to jest przedziały otwarte $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ i $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Powtarzajmy tę operację w nieskończoność (oczywiście w myśli). Co pozostanie? Zbioru, który pozostanie, nie można uwidocznic na rysunku, ale rysunek może pomóc naszej wyobraźni. Oto „trzecie przybliżenie” tego zbioru.



Pozostaną na pewno końce usuniętych przedziałów otwartych. Napisane w systemie trójkowym wyglądają one tak: 0 ; $0,1 (= \frac{1}{3})$; $0,2 (= \frac{2}{3})$; 1 ; $0,01 (= \frac{1}{9})$; $0,02 (= \frac{2}{9})$; $0,21 (= \frac{7}{9})$;

$0,22 (= \frac{8}{9})$ itd. Zamiast $0,1$ możemy także napisać $0,0222\dots$, zamiast $0,01$ możemy napisać $0,00222\dots$ i tak dalej, to znaczy możemy występującą na końcu jedynekę zastąpić przez zero

i nieskończony ciąg dwójek, podobnie jak w systemie dziesiętnym można zamiast $0,1 (= \frac{1}{10})$

napisać $0,0999\dots$. A więc wszystkie liczby, które są końcami usuniętych przedziałów otwartych, możemy napisać w systemie trójkowym nie używając cyfry 1. W ich rozwinięciach występują od pewnego miejsca same zera (dla prawych końców) lub same dwójki (dla lewych końców). Istnieje więc w $[0, 1]$ nieskończenie wiele innych liczb, które można w tym układzie napisać bez cyfry 1, ponieważ każdy ciąg zer i dwójek wyraża taką liczbę. Te właśnie „bezydankowe” liczby pozostaną po wyrzuceniu wszystkich „środkowych” przedziałów, bo te środkowe to takie, których punkty mają w rozwinięciu trójkowym na którymś miejscu jedynekę, na przykład:

wyrzucone liczby między $\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{3}$ to te, w których rozwinięciu trójkowym występuje 1 na

pierwszym miejscu za przecinkiem, wyrzucone liczby między $\frac{1}{9}$ a $\frac{2}{9}$ i między $\frac{7}{9}$ a $\frac{8}{9}$ to liczby,

w których występują na początku cyfry 01 lub odpowiednio 21 i tak dalej. A zatem możemy scharakteryzować zbiór, który pozostanie po wszystkich „wyrzucaniach”, jako zbiór liczb w odcinku $[0, 1]$, które można w układzie trójkowym napisać bez cyfry 1. Nazywa się on zbiorem Cantora od nazwiska odkrywcy. Oznaczmy go przez C . Widać, że jest to bardzo „dziurawy” zbiór: w każdym odcinku leżącym w $[0, 1]$ istnieje odcinek wolny od punktów C .

Wykażemy, że zbiór C jest zbiorem miary 0. To bardzo proste. Wybierzmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$ i zacznijmy usuwać „środkowe” przedziały tak, jak to czyniliśmy przy konstrukcji zbioru

Cantora. Pierwszy krok polega na wyrzuceniu jednego przedziału długości $\frac{1}{3}$ (mianowicie przedziału $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$). Drugi krok to wyrzucenie 2 przedziałów długości $\frac{1}{9}$, n -ty krok to

wyrzucenie 2^{n-1} przedziałów długości $\frac{1}{3^n}$. W ciągu całej konstrukcji usuwamy w ten sposób

przedziały, których długości mają sumę $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1$. A więc dla pewnego n_0 będzie

$\sum_{n=1}^{n_0} \frac{2^{n-1}}{3^n} > 1 - \varepsilon$. Po n_0 krokach zostaje w $[0, 1]$ zbiór złożony z odcinków leżących między tymi, których wnętrza usunęliśmy, a suma długości tych pozostałych jest mniejsza od ε . Ale przecież pokrywają one łącznie cały zbiór C . Zatem zbiór Cantora istotnie może być pokryty ciągiem (nawet skończonym) odcinków o dowolnie małej sumie długości. To kończy dowód.

Nic tu nie przeczy intuicji. Najwyżej sam zbiór Cantora może się wydać niezwykły. Ale że taki rozrzedzony, dziurawy zbiór jest miary 0, to nas nie dziwi. Może jednak ktoś potrafi trochę zmienić konstrukcję zbioru Cantora tak, żeby pozostał zbiór nie będący miary 0, ale tak samo dziurawy, to jest taki, że każdy odcinek zawiera odcinek rozłączny z tym zbiorem.

Postawimy teraz następujące pytanie:

(P) Czy zbiór Cantora można pokryć ciągiem odcinków o dowolnie zadanych długościach (tak jak to jest dla zbiorów przeliczalnych)?

Odpowiedź brzmi: nie. Zatem istnieją zbiory miary 0 bez takiej właściwości. Oczywiście, muszą to być zbiory nieprzeliczone, a więc zbiór Cantora jest przykładem nieprzeliczonego zbioru miary 0. O istnieniu takich zbiorów pytaliśmy na końcu części I tego artykułu. Teraz naszym zadaniem jest uzasadnić odpowiedź „nie” na pytanie (P). W tym celu udowodnimy, że istnieje funkcja ciągła w przedziale $[0, 1]$ słabo rosnąca, tj. taka, że jeśli $x_2 > x_1$, to $f(x_2) \geq f(x_1)$, przyjmująca wartość stałą w każdym przedziale stycznym do zbioru Cantora (tak będziemy nazywać przedziały, które wyrzuciliśmy przy konstrukcji tego zbioru, bo to krócej i uprzejmiej), wartość 0 dla $x = 0$ i wartość 1 dla $x = 1$. Istnieniu takiej funkcji chciałoby się zaprzeczyć. Bo jakże to? Przedziały styczne mają w sumie długość 1, tak jak cały odcinek $[0, 1]$; w tych przedziałach naszej funkcji nie wolno rosnąć, bo ma mieć stałą wartość w każdym z nich, nie wolno jej w żadnym punkcie skoczyć w górę (na wzór funkcji część całkowita), bo jest ciągła, a jednak ma wzrosnąć od 0 do 1. Postaramy się zadać kłam intuicji — zbudujemy taką funkcję.

Zapiszmy każde x ze zbioru C w systemie trójkowym nie używając jedynek (tak można!). Otrzymamy ciągi zer i dwójek (za przecinkiem). Napiszmy teraz zamiast każdej dwójki właśnie jedynekę, dotychczas zabronioną. Każdy tak otrzymany ciąg zer i jedynek odczytajmy jako pewną liczbę napisaną w systemie dwójkowym. Tę liczbę przyjmijmy za wartość funkcji f

w punkcie x . Na przykład dla $x = \frac{1}{3} = 0,0222\dots$ mamy $f(x) = 0,0111\dots = \frac{1}{2}$.

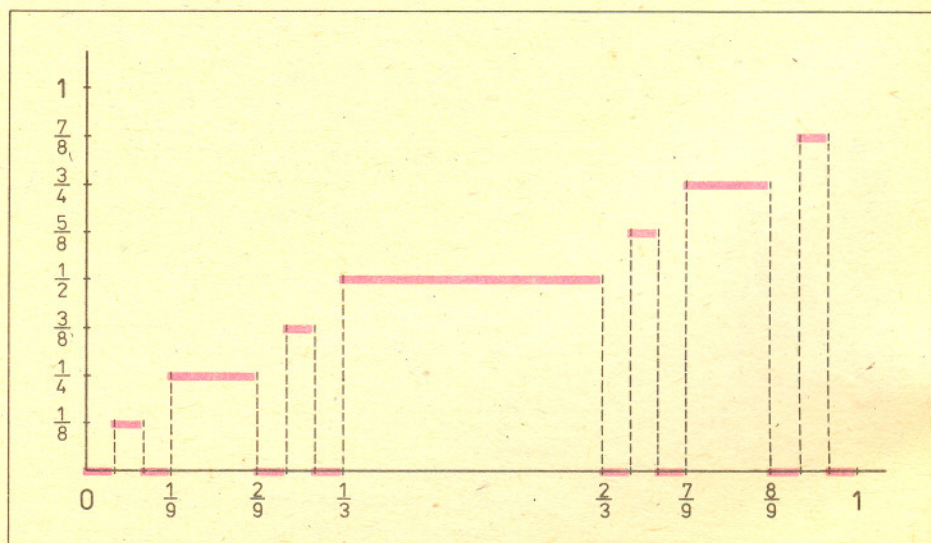
Określiśmy w ten sposób funkcję f w punktach zbioru C . Pozostaje określić ją w przedziałach stycznych do C . Otóż na obu końcach każdego takiego przedziału (a one należą do C) f ma tę samą wartość. Istotnie: lewy koniec ma zawsze w rozwinięciu trójkowym od pewnego miejsca same dwójki, a przed nimi zero. Prawy koniec tego przedziału ma zamiast tego zera dwójkę, a zamiast tych dwójek zera, np. $\frac{7}{9} = 0,20222\dots$, $\frac{8}{9} = 0,22000\dots$ Mamy więc

$$f\left(\frac{7}{9}\right) = 0,10111\dots = \frac{3}{4} \text{ (odczytujemy tę liczbę w systemie dwójkowym)}$$

$$\text{i } f\left(\frac{8}{9}\right) = 0,11000\dots = \frac{3}{4} = f\left(\frac{7}{9}\right).$$

Dokładnie tak samo „wychodzi” równość funkcji f na końcach dowolnego przedziału stycznego do C . Teraz uzupełniamy definicję funkcji f nadając jej w każdym punkcie dowolnego przedziału stycznego do C taką wartość, jaką przyjmuje na końcach tego przedziału. Oto

przebieg funkcji f w przedziałach stycznych długości $\geq \frac{1}{27}$:



Redaguje dr hab. Andrzej HENNEL

JAK CZŁOWIEK MOŻE ZOBACZYĆ JEDEN FOTON ?

Widzenie jest niezwykle fascynującym, bardzo złożonym zjawiskiem, którego wyjaśnienie wymaga zrozumienia całego szeregu procesów fizycznych, chemicznych, biologicznych i psychologicznych. Siatkówka ludzkiego oka zawiera bowiem dwa rodzaje detektorów światła. W ciągu dnia używamy około dwóch milionów mniej czułych czopków, które umożliwiają nam rozróżnianie barw. W ciemnościach wykorzystujemy z kolei około stu milionów bardzo czułych pręcików. Poszukiwania progu czułości pręcików wykonywane przez różnych badaczy doprowadziły do zdumiewającego wniosku. Stwierdzono bowiem, że w odpowiednich warunkach (długotrwałe przyzwyczajenie do ciemności) możliwe jest zaobserwowanie przez człowieka sygnału świetlnego kilku fotonów. Zjawisko to znane od kilkudziesięciu lat, nie było w pełni zrozumiałe. W ostatnich latach, bardzo interesujące eksperymenty przeprowadzone w USA, ZSRR i Japonii na komórkach ocznych pozwoliły na zrozumienie fizycznych i chemicznych podstaw łańcucha zjawisk rozpoczynającego się absorpcją jednego fotonu przez pręcik. Okazało się, że w "gotowym do działania" pręciku występuje tzw. ciemny prąd wywołany przepływem jonów sodu i potasu. Absorpcja jednego fotonu przez jedną ze stu milionów cząsteczek rodopsyny (purpury wzrokowej) znajdujących się w pręciku powoduje gwałtowną redukcję tego ciemnego prądu przez zablokowanie przepływu milionów atomów sodu przez membranę znajdującą się w komórce. Ten bardzo złożony proces chemiczny, polegający na rozpadzie setek molekul, nazywany jest "chemicznym fotopowielaniem". Z fizycznego punktu widzenia istotny jest fakt, że słaby sygnał (foton) jest w stanie zamknąć o wiele silniejszy przepływ (prąd jonów Na^+) i w konsekwencji doprowadzić do przekazania, poprzez układ nerwów, pewnego sygnału prądowego do mózgu. Natężenie tego prądu zostało zmierzone. W przypadku pręcika absorpcja jednego fotonu prowadzi do sygnału rzędu jednego pikoampera ($1 \text{ pA} = 10^{-12} \text{ A}$) trwającego około 0,3 sekundy. Jak łatwo obliczyć, oznacza to przepływ ładunku około $3 \cdot 10^{-13}$ kulomba, czyli około dwóch milionów ładunków elementarnych. W czopkach odpowiedni sygnał prądowy jest o dwa rzędy wielkości słabszy. Dla jednego fotonu szacuje się go na około dziesięć femtoamperów ($1 \text{ fA} = 10^{-15} \text{ A}$), a na dodatek jest on czterokrotnie krótszy. Oznacza to przepływ ładunku wynoszącego "tylko" około pięciu tysięcy ładunków elementarnych. Liczby te wyjaśniają doskonale różnicę w poziomie czułości (jak i szybkości reakcji) czopków i pręcików. Przy wolniejszej reakcji czopków człowiek nie byłby w stanie obserwować szybko poruszających się przedmiotów. Z kolei proces "zliczania fotonów" w pręcikach jest znacznie bardziej wydajny, ale za to kilkakrotnie wolniejszy. Przed badaczami mechanizmu widzenia stoi jeszcze wiele pytań. Bardzo interesujący jest na przykład problem separacji przez mózg słabych pikoamperowych sygnałów z zawsze obecnego szumu. Wspomniane powyżej pomiary są jednak istotnym krokiem na drodze ku poznaniu tajemnic wzroku.

Oczywiście, mamy $f(0) = 0$ i $f(1) = 1$. Funkcja f jest słabo rosnąca. Istotnie: w przedziałach stycznych pozostaje stała, a dla dwóch punktów $x_1, x_2 \in C$, $x_1 < x_2$, jeśli n jest pierwszym miejscem, na którym w rozwinięciu trójkowym x_1 i x_2 różnią się, to n -tą cyfrą liczby x_1 jest 0, a n -tą cyfrą x_2 jest 2. Wtedy liczby $f(x_1)$ i $f(x_2)$ różnią się w rozwinięciach dwójkowych także dopiero na n -tym miejscu i n -tą cyfrą liczby $f(x_1)$ będzie 0, a n -tą cyfrą liczby $f(x_2)$ będzie 1, zatem $f(x_2) > f(x_1)$.

Pozostaje wykazać ciągłość funkcji f . Aby wykazać ciągłość funkcji monotonicznej, wystarczy dla każdego punktu x_0 znaleźć choćby jeden ciąg (x_n^1) dążący do x_0 z lewej strony i jeden ciąg (x_n^2) dążący do x_0 z prawej strony tak, by było $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^1) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^2) = f(x_0)$. Jeżeli x_0 leży

poza C , a więc w jakimś przedziale stycznym, to nasza funkcja f ma w otoczeniu x_0 stałą wartość, więc jest w x_0 ciągła. Jeżeli x_0 należy do C , to x_0 przedstawia się w rozwinięciu trójkowym za pomocą zer i dwójek. Jeśli nadto x_0 nie jest prawym końcem przedziału stycznego, to dwójek jest w tym rozwinięciu nieskończenie wiele. Jeśli którąś z nich zamienimy na zero, dostaniemy liczbę mniejszą. Jeżeli tę dwójkę do zamiany będziemy wybierali coraz dalej, to otrzymamy ciąg punktów zbioru C zbieżny z lewej strony do x_0 . Wartości funkcji f w tych punktach będą się w swym rozwinięciu dwójkowym różniły od $f(x_0)$ tym, że na jednym miejscu, coraz dalszym, zamiast 1 wystąpi 0, a więc ich ciąg będzie dążył do $f(x_0)$. Znaczy to, że funkcja f jest ciągła w x_0 z lewej strony. Jeśli x_0 jest prawym końcem przedziału stycznego, to w pewnym otoczeniu x_0 z lewej strony wartość funkcji f jest taka jak w x_0 , a więc i wtedy mamy ciągłość w x_0 z lewej strony. Prawostronnej ciągłości funkcji f dowodzi się analogicznie (trzeba najpierw założyć, że x_0 nie jest lewym końcem przedziału stycznego i zamieniać coraz dalsze zera na dwójki).

Zbudowaliśmy w ten sposób funkcję spełniającą wszystkie żądane warunki. Wymyślił ją na początku naszego stulecia wielki matematyk francuski Henri Lebesgue (wymawia się to mniej więcej Lebeg z akcentem na drugim e i z dzwięcznym g na końcu). Odegrała ona dużą rolę w nauce o funkcjach i znana jest pod nazwą funkcji schodkowej Lebesgue'a. A teraz, korzystając z niej, dowiedzimy, że zbioru Cantora nie można pokryć ciągiem przedziałów o dowolnie zadanych długościach. Otóż funkcja f , jak każda funkcja ciągła na odcinku, ma taką własność, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że jeśli $|x_2 - x_1| < \delta$, to

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon. \text{ Niech } \varepsilon \text{ będzie równe najpierw } \frac{1}{4}, \text{ a odpowiednie } \delta \text{ oznaczmy przez } \delta_1.$$

Potem wybieramy $\varepsilon = \frac{1}{8}$, a odpowiednie δ niech się nazywa δ_2 . I tak dalej, to znaczy za n -tym

razem przyjmujemy $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+1}}$, a odpowiednie δ oznaczamy przez δ_n . Przypuśćmy, że zbiór C

można pokryć odcinkami długości $\delta_1, \delta_2, \dots$. Na przedziale długości δ_n funkcja wzrasta najwyżej

$$\text{o } \frac{1}{2^{n+1}}, \text{ a więc suma tych przyrostów nie przekracza } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}. \text{ Jednak, skoro te}$$

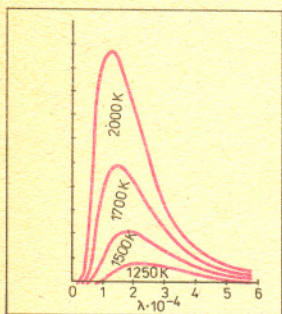
przedziały pokrywają cały zbiór C , to ta suma wynosi co najmniej 1, gdyż o tyle funkcja f wzrasta między punktem $x = 0$ a punktem $x = 1$, a w przedziałach stycznych do C nie wzrasta wcale — w każdym z nich jest stała. Ta sprzeczność dowodzi, że przedziałami długości δ_n nie można pokryć zbioru Cantora.

Z istnienia funkcji schodkowej Lebesgue'a wynika jeszcze jeden ciekawy wniosek oprócz tych, które wyciągnęliśmy z góry, mianowicie: zbiór Cantora jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych w $[0, 1]$. Istotnie, funkcja f przyporządkowuje (trudno się obejść bez tego niezgrabnego słowa) każdemu punktowi zbioru C liczbę rzeczywistą w $[0, 1]$ tak, że wszystkie te liczby zostają w ten sposób wyczerpane (bo otrzymujemy wszystkie rozwinięcia dwójkowe). Wynika stąd, że liczb w $[0, 1]$ jest co najwyżej tyle, ile punktów zbioru Cantora, a oczywiście nie jest ich mniej. Zobaczyliśmy więc, że z dwóch zbiorów nieprzeliczalnych równolicznych jeden może wyglądać na dużo większy od drugiego: cały odcinek jest równoliczny z „dziurawym” zbiorem C . Dla zbiorów przeliczalnych mieliśmy już wcześniej podobny przykład: gęsty zbiór liczb wymiernych i rzadki zbiór liczb naturalnych są równoliczne. Widać stąd, że licznosc (mówi się czasem „moc”) nieskończonego zbioru punktów nie mówi jeszcze wszystkiego o jego wielkości, gdyż można ją określać za pomocą innych jeszcze cech. W szczególności wyróżniliśmy pewien rodzaj zbiorów małych — to te, które można pokryć ciągiem odcinków o dowolnie małej sumie długości, czyli zbiory miary 0. Pokazaliśmy, że to nie to samo, co dać się pokryć ciągiem odcinków o dowolnych długościach — ta cecha przysługuje, jak wiemy, zbiorom przeliczalnym. Ale, dodajmy, istnieją także zbiory nieprzeliczalne dające się pokryć ciągiem odcinków o dowolnie zadanych długościach.

Najwyższy czas kończyć tę pogadankę, naładowaną pojęciami i tematycznie niejednorodną. Kto doczytał do końca, niech ochłonie na świeżym powietrzu.

Czy Słońce jest ciałem doskonale czarnym?

Dr Tomasz KWAST



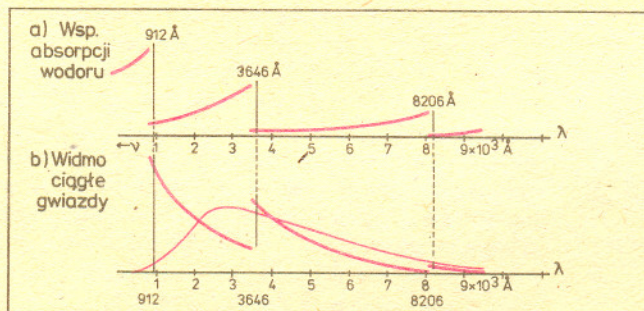
Rys. 1. Rozkład energii (widmo) ciała doskonale czarnego dla różnych temperatur. Dokładniej: każda krzywa przedstawia moc emitowaną z jednostki powierzchni ciała w jednostkowym przedziale długości fali. Zwracamy uwagę na znane cechy tych krzywych: im wyższa temperatura, na tym krótszej fali wypada maksimum widma (prawo Wiena) i tym większe jest pole powierzchni pod krzywą, czyli całkowita moc jednostki powierzchni ciała (proporcjonalna zresztą do czwartej potęgi temperatury — prawo Stefana-Boltzmannia).

Na lekcjach fizyki w szkole słyszeliśmy o pewnym fikcyjnym obiekcie zwanym „ciało doskonale czarne”. Mówiło się, że (z definicji) pochłania całe padające nań promieniowanie, promieniowanie zaś przezeń wyświecane ma specjalny rozkład widmowy określony prawem Plancka (rys. 1). Własności te były przypisywane różnym świecącym ciałom, w tym Słońcu i gwiazdom. Później, na studiach fizyki temat ten był omawiany dokładniej i dowiadaliśmy się, że ciało doskonale czarne to takie, w którym panuje „równowaga termodynamiczna” (r.t.). Oznacza to, że w każdej chwili tyle samo (średnio) cząstek czy fotonów leci w lewo co w prawo, w górę co w dół, tyle samo zachodzi pochłonięć kwantów co ich emisji, tyle samo jonizacji co rekombinacji itd., krótko mówiąc — wszelkie procesy mikroskopowe są dokładnie „zrównoważone”. W takim obiekcie ruchy cząstek rządzone są prawem Maxwella, obsadzenie poziomów energetycznych prawem Boltzmannia, stan jonizacji prawem Sahy, a rozkład widmowy wypełniającego ten obiekt promieniowania — jak się rzekło — prawem Plancka. Ponadto, i jest to ogromnie ważne, występująca w tych prawach temperatura jest w stanie r.t. jednakowa dla nich wszystkich.

Tu można zaraz zauważyć, że stan r.t., jeżeli nawet jest gdzieś realizowany, to nie może być widzialny. Zobaczenie bowiem takiego obiektu jest możliwe tylko wtedy, gdy część jego promieniowania wydostanie się na zewnątrz, a wtedy nie ma już doskonałego „równoważenia się” procesów mikroskopowych. W szczególności zatem Słońce nie może być ciałem doskonale czarnym, z banalnego powodu: bo świeci. I nie chodzi tu o potoczny sens tych słów: skoro świeci, to nie jest czarne. Chodzi o to, że przy powierzchni Słońca fotony w większości wylatują na zewnątrz, a więc nie ma pełnej równowagi, a więc ciało takie z definicji nie jest ciałem doskonale czarne w sensie fizycznym. Wobec tego może przynajmniej jego promieniowanie jest w przybliżeniu zgodne z prawem Plancka? Spróbujmy to rozważyć.

W najprostszym modelu zewnętrznych warstw gwiazdy przyjmujemy, że gwiazda ma „powierzchnię”, tzw. fotosferę, a wszystko co jest ponad nią to atmosfera. Fotosferę Słońca po prostu widać — na niej są granule, plamy i ona daje wrażenie ostrego brzegu tarczy naszej gwiazdy. Część promieniowania wybiegającego z fotosfery (niechby nawet o widmie planckowskim) zostaje przechwycona przez gaz atmosfery — głównie, jak wiadomo, wodór, mianowicie w tych miejscach widma ciągłego, gdzie energia kwantu jest równa różnicy energii jakichś dwóch poziomów energetycznych atomu wodoru. Inaczej mówiąc, wskutek przejść między poziomami energetycznymi współczynnik absorpcji wodoru ma przy pewnych częstościach (długościach fali) ostre maksima, a zatem widmo promieniowania przenikającego warstwę wodoru musi mieć w tych samych miejscach ostre minima — są to linie absorpcyjne.

Ale możliwe są również przejścia elektronów w atomach wodoru z rozmaitych poziomów do stanu niezwiązanego, czyli jonizacje. Domyślamy się, że promieniowanie o długiej fali (czyli niskoenergetyczne) praktycznie nie jest w stanie atomu zjonizować, a jeśli już, to z poziomów odpowiednio wysokich. Promieniowanie coraz bardziej krótkofalowe może jonizować wodór z poziomów coraz niższych, wreszcie promieniowanie o fali równej 912 Å i krótszej może jonizować wodór nawet z poziomu podstawowego. Dlatego wykres współczynnika absorpcji ciągłej wodoru ma tak charakterystyczną zębatą postać (rys. 2a). Rzecz jasna, widmo ciągłe



Rys. 2. Schematyczny przebieg zależności współczynnika absorpcji ciągłej dla wodoru (a) i wynikający z tego kształt widma ciągłego gwiazdy z atmosferą wodorową (b) i o typie zbliżonym do A0. Cienka linia to widmo ciała doskonale czarnego o tej samej temperaturze (10 500 K).

gwiazdy wodorowej również musi być zębata, z tą różnicą, że odpowiednie zęby będą skierowane w.dół (rys. 2b). Na rysunku tym zaznaczono cieńszą linią rozkład Plancka dla temperatury 10 500 K (taką temperaturę powierzchniową mają gwiazdy typu A0), obie krzywe zaś są tak wyskalowane, by pola pod nimi były jednakowe. W ten sposób mamy zapewnione, że jednostka powierzchni gwiazdy i powierzchni ciała doskonale czarnego o tej samej temperaturze mają jednakową moc całkowitą.

Zgodzimy się więc chyba, że nazywanie gwiazd ciałami doskonale czarnymi jest małą przesadą, albo — jak kto woli — pobożnym życzeniem. Założenie takie przyjmuje się, jeżeli naprawdę nic lepszego nie można zrobić, np. gdy trzeba coś szybko oszacować. Dlatego w dokładniejszych obliczeniach zakłada się, że wprawdzie ruchy cząstek, obsadzenie poziomów i stan jonizacji są takie jak w r.t., lecz rozkład promieniowania niekoniecznie. Mówimy wtedy, że w atmosferze gwiazdy panuje lokalna równowaga termodynamiczna. Oczywiście i to jest przybliżeniem i całe zagadnienie w zależności od potrzeb można dalej uściślać. W ogóle w przyrodzie występują prawie wyłącznie stany odległe od r.t. Np. pokój o temperaturze powietrza 300 K jest przeniknięty albo promieniowaniem słonecznym o temperaturze 6000 K, albo światłem żarówki o temperaturze 2000 K, korona słoneczna o temperaturze gazów około miliona kelwinów jest przeniknięta też promieniowaniem słonecznym, ośrodek międzygwiazdowy może być bardzo gorący (szybkie ruchy cząstek), a praktycznie wcale nie świeci (wskutek wysokiego rozrzedzenia), laser w temperaturze pokojowej może mieć ujemną temperaturę obsadzeń poziomów energetycznych (tzw. inwersja obsadzeń), Księżyc pozornie świeci światłem słonecznym (w każdym razie ma słoneczne widmo optyczne), ale temperatura jego powierzchni jest rzędu 400 K itd. Przykładów takich można by podawać bez liku, a dowodzą one znaną skądinąd fakt, że przyroda jest bardziej skomplikowana, niż nam się z początku wydaje.



Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 502. Udowodnić następującą cechę podzielności przez 19. Odrzucamy ostatnią cyfrę i podwojoną dodajemy do otrzymanej w ten sposób liczby. Operację tę powtarzamy, dopóki nie otrzymamy liczby dwucyfrowej. Otrzymana liczba jest podzielna przez 19 wtedy i tylko wtedy, gdy badana liczba jest podzielna przez 19.

Rozwiązanie na str. 6

M 503. Niech h_1 i h_2 będą wysokościami trójkąta, a r promieniem okręgu wpisanego. Wykazać, że

$$\frac{1}{2r} < \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} < \frac{1}{r}.$$

Rozwiązanie na str. 6

M 504. Należy zmierzyć długość dwóch kijów (jeden z nich jest wyraźnie dłuższy od drugiego). Można wykonać dwa pomiary. Błąd pomiaru jest zmienną losową X o wartości oczekiwanej $EX = 0$ i odchyleniu standardowym $\sqrt{D^2X} = \sigma$. Czy istnieje lepsze wyjście, niż pomiar długości każdego kija z osobna?

Rozwiązanie na str. 13

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

F 242. Wyznaczyć moc spirali elektrycznej suszarki do włosów przyjmując, że suszarka daje 72 kg/godz powietrza ogrzanego o 50°C.

Rozwiązanie na str. 7

F 243. Ogrzane w pobliżu powierzchni Ziemi powietrze unosi się do góry, rozszerzając się przy tym z powodu spadku ciśnienia. Rozszerzaniu towarzyszy ochłodzenie, ponieważ proces jest w przybliżeniu adiabatyczny (można zaniedbać wymianę ciepła z otoczeniem). Zjawisko to jest przyczyną powstawania chmur. Wyznaczyć spadek temperatury powietrza na każde 100 m wysokości.

Rozwiązanie na str. 6

W obu zadaniach należy przyjąć: średnią masę molową powietrza równą 29 g/mol, molowe ciepło właściwe powietrza przy stałym ciśnieniu równe 29,3 J/mol · K, a także założyć, że powietrze jest gazem doskonałym.

Rozwiązanie zadania M 502. Wystarczy zauważyć, że

$$\left[\frac{n}{10} \right] + 2 \left(n - 10 \left[\frac{n}{10} \right] \right) = 2n - 19 \left[\frac{n}{10} \right]$$

([x] oznacza część całkowitą liczby x).



Rozwiązanie zadania M 503. Oznaczmy przez S pole trójkąta, a, b — długości boków, na które opuszczono wysokość, c — długość trzeciego boku. Wystarczy wykazać, że

$$\frac{2S}{2r} < \frac{2S}{h_1} + \frac{2S}{h_2} < \frac{2S}{r},$$

ale $\frac{S}{r} = \frac{a+b+c}{2}$, $\frac{2S}{h_1} = a$, $\frac{2S}{h_2} = b$,

zatem powyższa nierówność jest równoważna z

$$\frac{a+b+c}{2} < a+b < a+b+c,$$

odejmując c od każdej ze stron otrzymujemy

$$\frac{a+b-c}{2} < a+b-c < a+b,$$

co jest prawdą, gdyż $a+b-c > 0$ i $c > 0$. To kończy dowód.



Rozwiązanie zadania F 243. W czasie przemieszczania się z obszaru o ciśnieniu P_1 do obszaru o ciśnieniu P_2 jeden mol powietrza wykonuje pracę przeciwko sile zewnętrznego ciśnienia (porównaj rozwiązanie zadania F 242) równą

$$P_2 V_2 - P_1 V_1 = R(T_2 - T_1) = R \Delta T,$$

gdzie ΔT jest poszukiwanym obniżeniem temperatury, a V_1 objętością jednego mola w temperaturze T_1 . Ponadto wznoszący się mol powietrza wykonuje pracę równą μgh przeciwko sile ciężkości. Ponieważ nie ma wymiany ciepła, cała praca wykonywana jest kosztem energii wewnętrznej gazu $\Delta U = C_v(T_1 - T_2)$, skąd

$$C_v(T_1 - T_2) = R(T_2 - T_1) + \mu gh.$$

A więc spadek temperatury wraz ze wzrostem wysokości wynosi

$$\Delta T = \mu gh / (C_v + R) = \mu gh / C_p \approx 1 \text{ K}.$$

W pogodną noc na niebie dostrzegamy gołym okiem zaledwie około trzech tysięcy gwiazd. Zaledwie, bowiem stanowi to nikły procent znanych, tzn. osiągniętych przez teleskopy (do 24 mag) obiektów. W dzisiejszych czasach sprawa odszukiwania i identyfikacji gwiazd jest stosunkowo prosta. Każda z nich, o jasności powyżej ~ 10 mag, ma swoją „etykieta” w postaci dokładnie określonych współrzędnych (rektascensji α i deklinacji δ). Każda ma swoje miejsce w katalogu (czasem nawet niejednym). Bardzo rozpowszechnione jest oznaczanie gwiazd ich numerami z katalogu Bonner Durchmusterung (BD). Powstał on na podstawie obserwacji wykonanych w połowie XIX wieku pod kierownictwem niemieckiego astronoma F. W. Argelandera. Gwiazdy są tam uszeregowane w pasach deklinacyjnych co 1° według wzrastającej rektascensji i poznaczane numerami w każdym pasie. Cóż nam jednak mówi numer BD – $16^\circ 1591$? Któż by się domyślił, że chodzi tu o najjaśniejszą gwiazdę nieba — Syriusza?

Do obserwacji amatorskich wystarczają w zasadzie oznaczenia tradycyjne — polegające na określaniu położenia danej gwiazdy względem innych jasnych obiektów. Gwiazdy wyróżniające się blaskiem mają na ogół nazwy własne — w większości pochodzenia arabskiego. Pierwsza zasada oznaczania gwiazd widocznych gołym okiem w danej konstelacji pochodzi od J. Bayera. W sporządzonym przez niego atlasie (1603 r.) gwiazdy każdego gwiazdozbioru oznaczone są literami greckimi, mniej więcej w kolejności malejącej jasności. Gwiazdy, dla których zabrakło liter z alfabetu greckiego, oznaczone są literami łacińskimi. Jednak nie w każdym przypadku zasada ta została zastosowana konsekwentnie. W niektórych gwiazdozbiorach, jak np. w Wielkiej Niedźwiedzicy, kolejnymi literami ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta$) oznaczone są gwiazdy dla podkreślenia charakterystycznego kształtu — od „kół tylnych” Wielkiego Wozu do końca „dyszla”.

Już w połowie XIX wieku, wskutek wzrostu liczby odkryć gwiazd zmiennych, zaistniała potrzeba wprowadzenia dla nich osobnych oznaczeń. Do dziś korzystamy z dość skomplikowanej metody wprowadzonej przez Argelandera.

Posługując się atlasem Bayera, stwierdził on, że ostatnią literą użytą tam do oznaczania gwiazd było q . Zaproponował więc, aby każdą pierwszą odkrytą w danym gwiazdozbiore zmienną oznaczać literą R , drugą S i tak aż do Z — a więc aby do oznaczania ich symboli wykorzystywać duże litery łacińskie od R do Z . Argelander nie spodziewał się, jak wiele gwiazd zmiennych trzeba będzie wkrótce nazwać. Dziś, wobec znajomości około 30 000 takich obiektów nikomu nie przyszłoby do głowy oznaczanie ich symbolami literowymi.

Jednak, choć szybko okazało się, że nie wystarczy liter (zauważmy, że w ten sposób można oznaczyć zaledwie 9 gwiazd zmiennych w jednym gwiazdozbiore), sposób Argelandera został konsekwentnie rozszerzony. Gdy zabrakło pojedynczych liter, kolejne zmienne oznaczano RR aż do RZ , potem $SS \dots SZ$, i tak aż do ZZ . Dawało to łącznie możliwość nazwania pięćdziesięciu czterech zmiennych w jednym gwiazdozbiore.

Łatwo się domyślić, że i to wkrótce nie wystarczyło. Wtedy cofnięto się do początku alfabetu i po zmiennej ZZ następną została AA . Dalszych 280 zmiennych można było oznaczyć zgodnie z tą zasadą. (We wszystkich kombinacjach pomija się literę J , gdyż łatwo pomylić ją z I .) Gdy jednak okazało się, że oznaczenia dla 334 zmiennych w jednym gwiazdozbiore to jeszcze wciąż mało, wreszcie odstąpiono od metody. Aby nie komplikować bardziej i tak już dość zawilego systemu, zdecydowano się trzysta trzydziestą piątą zmienną w danym gwiazdozbiore oznaczać po prostu symbolem $V335$. Przynajmniej nie ma obawy, że kiedyś zabraknie oznaczeń. Do każdego oznaczenia dodaje się trzyliterowy skrót łacińskiej nazwy gwiazdozbioru (w pełnym brzmieniu jest to dopełniacz nazwy łacińskiej). Gwiazdą o największym numerze katalogowym jest $V4133$ *Sgr*.

Nie można więc powiedzieć, aby zasady oznaczania gwiazd zmiennych były eleganckie. Jako użytkownicy katalogów, a nie ich twórcy, mogliśmy się tym zaledwie nie przejmować, gdyby nie fakt, że zasady te nie są również do końca konsekwentne. Zmienne, które wcześniej były oznaczone literami greckimi, nie otrzymały nowych nazw. W szczególności zachowały nazwy własne najbardziej znane zmienne, takie jak np. Algol (β *Persei*) czy Mira (*o Ceti*).

Czytelnicy *Delt*y zapewne niejednokrotnie spotkali się również z nazwami grup gwiazd brzmiącymi podobnie jak nazwy systemu Argelandera. Gwiazdą typu RR *Lyr* czy W *UMa* może być dowolna zmienna, niekoniecznie z gwiazdozbioru Lutni albo Wielkiej Niedźwiedzicy. Podobnie algolami, mirydami nazywa się zmienne o własnościach zbliżonych do własności Algola czy Miry. Nazwy takie powstają na ogół od nazwy własnej gwiazdy, a nie gwiazdozbioru. Tu jednak również nie ma pełnej konsekwencji. Cefeidy są zmiennymi typu δ Cefeusza (nie ma ona nazwy własnej), a nie — jak mógłby ktoś przypuszczać — rojem meteorów, których nazwy powstają właśnie od nazw gwiazdozbiorów. Gdyby w Cefeuszu znajdował się radiant meteorów (co, na szczęście, nie jest prawdą), wyłącznie na piśmie można by nazwę jego odróżnić od cefeid (nazwy radiantów meteorów, w przeciwieństwie do nazw grup zmiennych piszemy dużą literą).

Ostrożnie z przybliżeniami

Rozwiązanie zadania F 242. Niech przed i za spiralą ciśnienie i temperatura wynoszą odpowiednio P_1, T_1 i P_2, T_2 . Zmiana energii wewnętrznej jednego mola powietrza jest równa $\Delta U = C_v(T_2 - T_1)$, gdzie C_v jest ciepłem właściwym przy stałej objętości. Następujące po sobie porcje powietrza przepychające „nasz” mol gazu przy ciśnieniu P_1 wykonują nad nim pracę $A_1 = P_1 V_1 = RT_1$, gdzie V_1 jest objętością jednego mola powietrza przed nagrzewającą spiralą; R — stała gazowa.

Analogicznie przy ciśnieniu P_2 gaz wykonuje pracę $A_2 = P_2 V_2 = RT_2$, gdzie V_2 jest objętością jednego mola gazu za spiralą. Całkowita praca wykonana przez gaz wynosi:

$$A = A_2 - A_1 = R(T_2 - T_1) = R\Delta T.$$

Na podstawie pierwszej zasady termodynamiki ciepło dostarczone do gazu jest równe

$$Q = \Delta U + A = (C_v + R)\Delta T.$$

Stąd określimy moc spirali

$$M = (C_v + R)m_t \Delta T / \mu = C_p m_t \Delta T / \mu \approx 10^3 \text{ W},$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, iż ciepło molowe przy stałym ciśnieniu wynosi $C_p = C_v + R$ (m_t jest wydajnością przepływu, a μ średnią masą molową powietrza).

Nasz Czytelnik, pan Paweł Paszko, proponuje metodę przybliżonego obliczania wartości funkcji cosinus. Oznacza on przez h funkcję $h(t) = 2t^2 - 1$, natomiast przez h_n jej n -krotne złożenie.

Wtedy $\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = h\left(\cos \frac{x}{2}\right) = h\left(h\left(\cos \frac{x}{4}\right)\right) = \dots = h_n\left(\cos \frac{x}{2^n}\right)$. Korzystając teraz z przybliżonego wzoru

$$(1) \quad \cos y \approx 1 - \frac{y^2}{2!}$$

otrzymuje

$$(2) \quad \cos x \approx h_n\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2^n}\right)^2\right).$$

Wzór ten jest według naszego Czytelnika wygodniejszy do obliczeń niż wzór Taylora:

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ i np. dla $n = 5, x = \frac{\pi}{3}$ daje przy użyciu najprostszego

kalkulatora 8-cyfrowego wynik $\cos \frac{\pi}{3} \approx 0,49996\dots$ zamiast 0,5. Sprawdźmy, jakie przybliżenie powinien dawać wzór (2).

Funkcja h przekształca odcinek $[-1, 1]$ w siebie i $h'(x) = 4x$. Zatem dla dowolnych $s, t \in [-1, 1]$ mamy $|h(t) - h(s)| \leq 4|t - s|$ i

$$(3) \quad |h_n(t) - h_n(s)| \leq 4^n |t - s|.$$

Ze wzoru Taylora wynika, iż $\left|\cos y - \left(1 - \frac{y^2}{2}\right)\right| < \frac{y^4}{24}$. A zatem na mocy (3)

$$(4) \quad \left|\cos x - h_n\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2^n}\right)^2\right)\right| \leq 4^n \left|\cos \frac{x}{2^n} - \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2^n}\right)^2\right)\right| \leq 4^n \cdot \left(\frac{x}{2^n}\right)^4 \cdot \frac{1}{24} = \frac{x^4}{4^n \cdot 24}.$$

Tak więc rzeczywiście wzór (2) daje przybliżenie funkcji cosinus. Zobaczmy jednak co stanie się, gdy spróbujemy obliczyć $\cos \frac{\pi}{3}$ dla $n = 7$. Otrzymujemy (też na 8-cyfrowym kalkulatorze)

$\cos \frac{\pi}{3} \approx 0,5008\dots$ Dokładność pogorszyła się i zupełnie nie zgadza się z dotychczasową teorią.

Błąd nie powinien przekraczać $\left(\frac{\pi}{3}\right)^4 \cdot \frac{1}{4^7 \cdot 24} \leq 0,000004$. Oto wyjaśnienie kłopotów.

Niech $0 < a < \frac{1}{4}$. Wtedy funkcja h przekształca przedział $[1 - a, 1]$ w $[1 - 4a, 1]$ (bo

$h(1 - a) > 1 - 4a$) i $h_n: \left[1 - \frac{1}{2 \cdot 4^n}, 1\right] \rightarrow \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Jeśli $\frac{1}{2} \leq a < b \leq 1$, to $h(b) - h(a) > 2(b - a)$.

Tak więc jeśli $a, b \in \left[1 - \frac{1}{2 \cdot 4^k}, 1\right]$, to

$$|h_{k+1}(a) - h_{k+1}(b)| \geq 2^{k+1}|b - a|.$$

Nierówność ta pokazuje, że mały błąd popełniony przy podstawieniu argumentu funkcji h_n może spowodować bardzo duży błąd wartości funkcji. Nie ma więc sensu stosować wzoru (2) dla zbyt dużych n . Jeśli używamy kalkulatora 8-cyfrowego, to podstawiając w (2) wartość

$\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2^n}\right)^2\right)$ popełniamy błąd nie większy niż $5 \cdot 10^{-8}$. Oznaczmy przez b_n maksymalny błąd wartości funkcji h_n przy błędzie argumentu mniejszym niż $5 \cdot 10^{-8}$. Z (3) mamy $b_n \leq 4^n \cdot 5 \cdot 10^{-8}$. Jeśli rozpatrujemy $x \in \left[-2^k \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt[4]{120}, 2^k \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt[4]{120}\right]$, to stosując wzór przybliżony (2) popełniamy na mocy (4) błąd nie większy niż

$$\frac{(2^k \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt[4]{120})^4}{4^k \cdot 24} = 4^k \cdot 5 \cdot 10^{-8}$$

i nie warto stosować wzoru (2) dla $n > k$. Tak więc dla $2^k \cdot 0,0331 \leq |x| < 2^{k+1} \cdot 0,0331$ stosujemy wzór (2) dla $n = k$ i otrzymujemy wynik z dokładnością lepszą niż $4^k \cdot 10^{-7}$. Oczywiście może się zdarzyć, że otrzymana dokładność będzie dużo lepsza.

delta

Nareszcie

Hugo Steinhaus jest autorem hasła „matematyk zrobi to lepiej”. Jego wielką zasługą było (między innymi) stworzenie samodzielnej dyscypliny badawczej — zastosowania matematyki — i budowa silnego zespołu uczonych zajmujących się tą dyscypliną.

Oczywiście jego hasło nie przekazuje prawdy o matematykach. Są rzeczy, których matematyk nie zrobi lepiej. Na przykład słabe są wyniki matematyków w tzw. kantach. Słabo też sobie poczynają, gdy chcą coś załatwić w jakimś urzędzie czy instytucji. Doskonałym tego przykładem są ich poczynania w sprawie niejako samego Steinhausa dotyczącej.

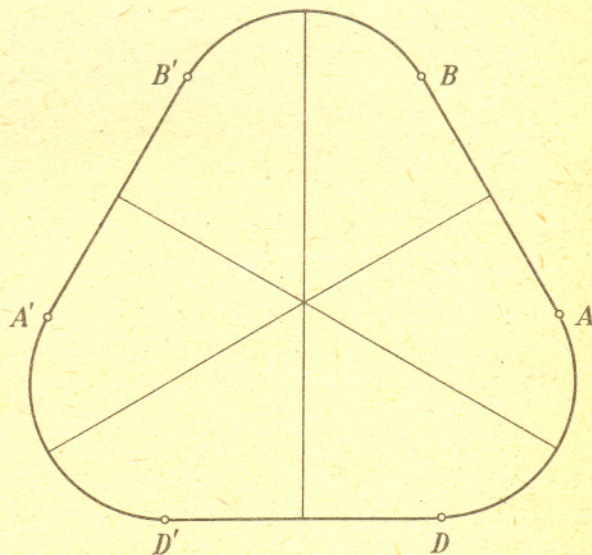
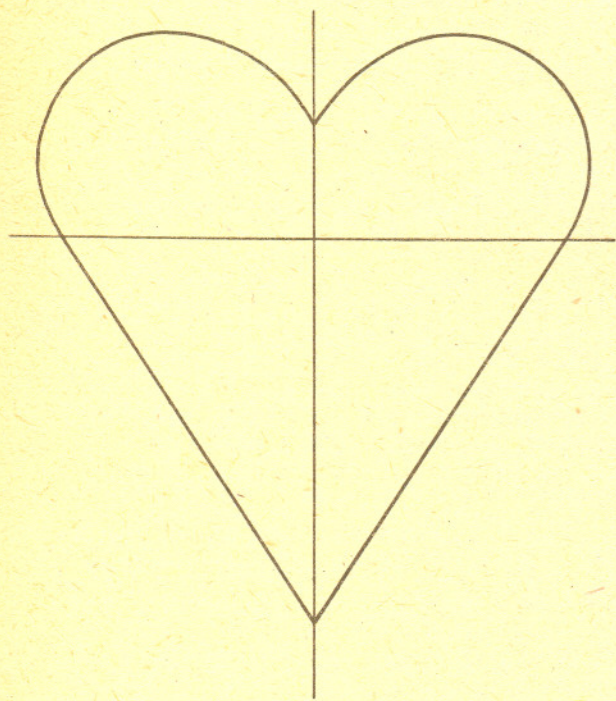
Hugo Steinhaus jest autorem najlepszej w światowym dorobku książki przedstawiającej sposób patrzenia i myślenia matematyków szerokiemu ogółowi. Ta książka to *Kalejdoskop matematyczny*. Ma ona bardzo wiele wydań w różnych językach i w różnych krajach.

Są (o dziwo) również wydania po polsku, w którym to języku ukazało się jej pierwsze wydanie. Piszemy „o dziwo”, bo poprzednie jej polskie wydanie ukazało się w 1956 roku (tak jest — ponad 30 lat temu). I gdy anglo-, czy rosyjskojęzyczni czytelnicy wciąż otrzymywali jej nowe wydania, Polacy (zdolni poligłoci, jak wiadomo) tylko z importu mogli się w nią zaopatrywać.

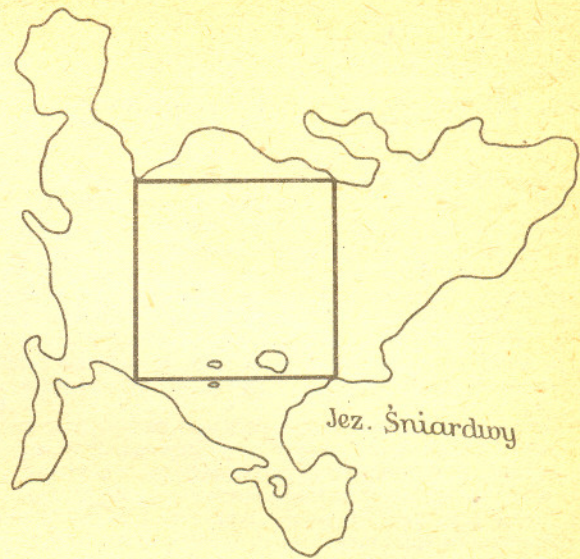
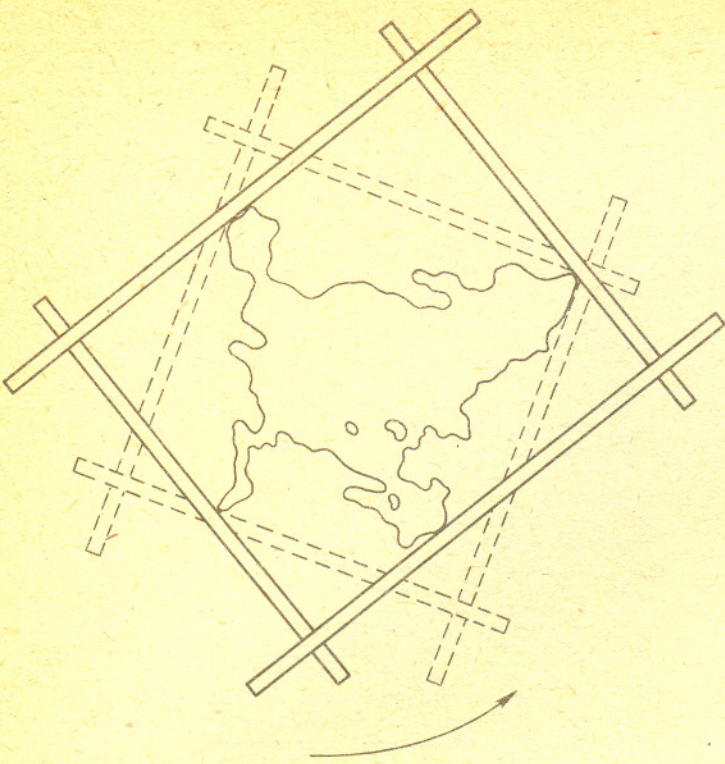
Tutaj jakoś inni umieli lepiej niż matematycy zadbać o ukazywanie się innych książek. Dopiero z racji obchodów stulecia urodzin Steinhausa i matematycy zdołali się dopchać do planu wydawniczego, co przez poprzednie ćwierćwiecze jakoś im się nie udawało. Ale jeszcze w tym roku będzie!

Nie będziemy pisać żadnej recenzji. Przytaczamy tylko trzy fragmenty i życzymy pomyślnych łowów na tę książkę (łowów — bo gdzież tam *Kalejdoskopowi* do nakładu kryminałów).

Delta



Koło ma tę własność, że drąg o przekroju kołowym, z materiału jednorodnego i lżejszego od wody, może się utrzymać bez ruchu na wodzie bez względu na to, jak go obrócimy koło osi. Tu narysowane kontury mają tę samą własność, gdy dobierzemy materiał o gęstości $1/2$; są to linie tak obliczone, że każda cięciwa, która połowi ich obwód, połowi także ich pole. Z tego widać, że własność równoczesnego połowienia pola i obwodu nie jest wcale przywilejem kół.



Mając obszar ograniczony krzywą, jak na przykład jezioro Śniardwy, możemy opisać na nim kwadrat. Łatwo się o tym przekonać biorąc naprzód parę stycznych równoległych i drugą taką parę prostopadłą do pierwszej, a potem obracając całą ramkę dokoła konturu. Po obrocie o 90° para listew poziomych stanie się pionowa i na odwrót. Jeżeli więc odległość pary równoległych listew była większa niż drugiej pary, to po obrocie stanie się mniejsza, musi być zatem moment, kiedy te odległości się zrównają, a wtedy właśnie styczne utworzą kwadrat.

Znacznie trudniej udowodnić, że w każdy kontur zamknięty można wpisać kwadrat; jednak rzeczywiście tak jest.



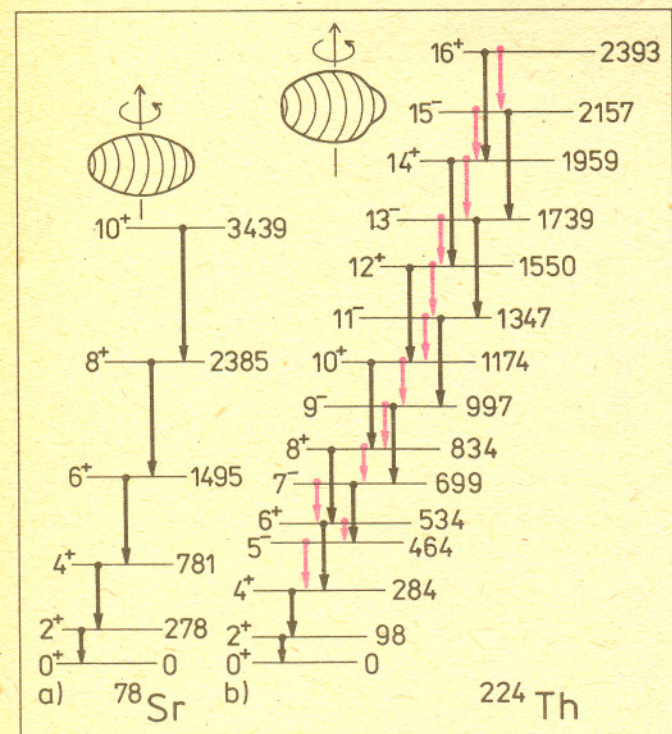
Spękania mułu na brzegu rzeki, gdy go wysuszy słońce, lub glazury na kafkach wydają się zupełnie przypadkowe. Przy bliższym obejrzeniu widać, że kąty są zbliżone do prostych. To da się wytłumaczyć, jeżeli przyjmiemy, że spękania są wynikiem kurczenia się warstwy mułu. Linia pęknięcia musi być według zasad mechaniki taka, żeby praca potrzebna do rozerwania warstwy była możliwie mała. Ta praca jest proporcjonalna do wielkości przekrojów, które powstają przez rozerwanie, i linie pęknięć muszą mieć taki przebieg, który możliwie zmniejsza wielkość przekrojów. W materiale jednorodnym ten warunek daje kąty proste. Zmienna grubość warstwy tłumaczy zakrzywienie linii (dlaczego?).

Dr Jacek DOBACZEWSKI
Dr hab. Witold NAZAREWICZ

W poprzednim artykule (*Delta* 2/1988) zajmowaliśmy się obrotami układów makroskopowych i molekuł. Stwierdziliśmy, że wirujące ciała naładowane wysyłają promieniowanie elektromagnetyczne, co dla obiektów mikroskopowych odpowiada emisji pojedynczych fotonów noszących energię i moment pędu ruchu obrotowego. Przekonaliśmy się też, że analizując emitowane promieniowanie można stwierdzić, jaką symetrię mają drobiny atomowe i jakie są ich rozmiary. Badając widma rotacyjne możemy zatem „podglądać” układy kwantowe tak małe, że nigdy nie byliśmy w stanie ich zbadać za pomocą najlepszych mikroskopów.

Takimi obiektami, około 100 tysięcy razy mniejszymi niż cząsteczki, są jądra atomowe. Fizycy dysponują obecnie urządzeniami pozwalającymi przyspieszać jądra atomowe (a właściwie wielokrotnie zjonizowane atomy) do bardzo wysokich prędkości. Kiedy taki szybki pocisk uderza w inne jądro atomowe, oba jądra mogą złączyć się w jedną całość tworząc jądro pierwiastka o liczbie atomowej równej sumie liczb atomowych jąder wchodzących do reakcji. Łatwo można sobie wyobrazić, jak bardzo „niespokojne” jest takie nowo powstałe jądro atomowe. Jego powierzchnia drga gwałtownie, nukleony w środku poruszają się dość chaotycznie, a całość obraca się z dużym momentem pędu. Czasem takie konwulsje kończą się rozpadem złożonego obiektu na dwa jądra zupełnie inne niż te, które dały mu początek. Czasem zaś wystarczy, by z powierzchni jądra „wyparowało” kilka nukleonów, a jądro złożone ochładza się i stabilizuje. Parujące nukleony nie są jednak w stanie wynieść z jądra zbyt dużego momentu pędu i w rezultacie jądro wyhamowuje swój szybki obrót wielokrotnie emitując kwanty promieniowania gamma. Mierząc energie emitowanych kwantów i ich multipolowość (moment pędu) można otrzymać, w sposób zupełnie analogiczny jak w fizyce atomowej, jądrowe pasma rotacyjne.

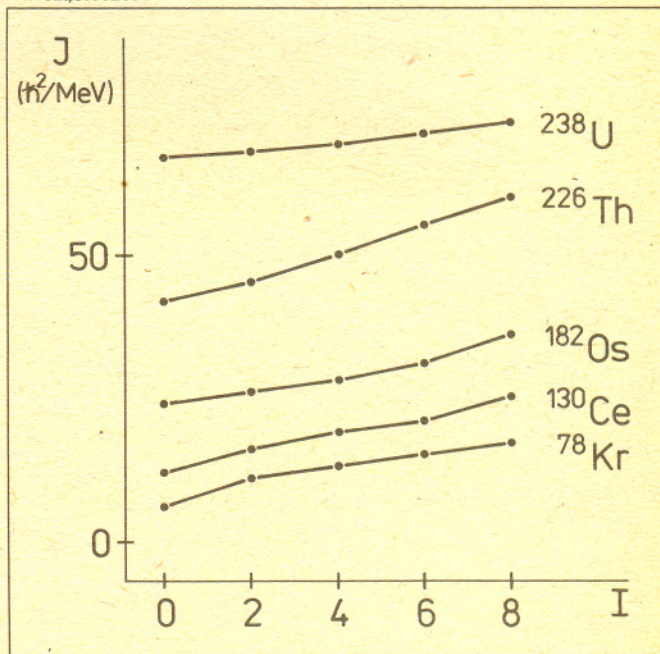
Na rysunkach 1a i 1b przedstawione są widma rotacyjne jąder ^{78}Sr oraz ^{224}Th .



Rys. 1. Pasma rotacyjne jądra (a) ^{78}Sr oraz (b) ^{224}Th . Energie stanów podane są w kiloelektronowoltach ($1 \text{ keV} \approx 1,6 \cdot 10^{-16} \text{ J}$) po prawej stronie kreski reprezentujących poziomy energetyczne. Po lewej stronie podana jest liczba kwantowa momentu pędu (a „+” lub „-” oznacza dodatnią lub ujemną parzystość). Kolorowe i czarne strzałki w paśmie ^{224}Th oznaczają odpowiednio dipolowe i kwadrupolowe przejścia elektromagnetyczne.

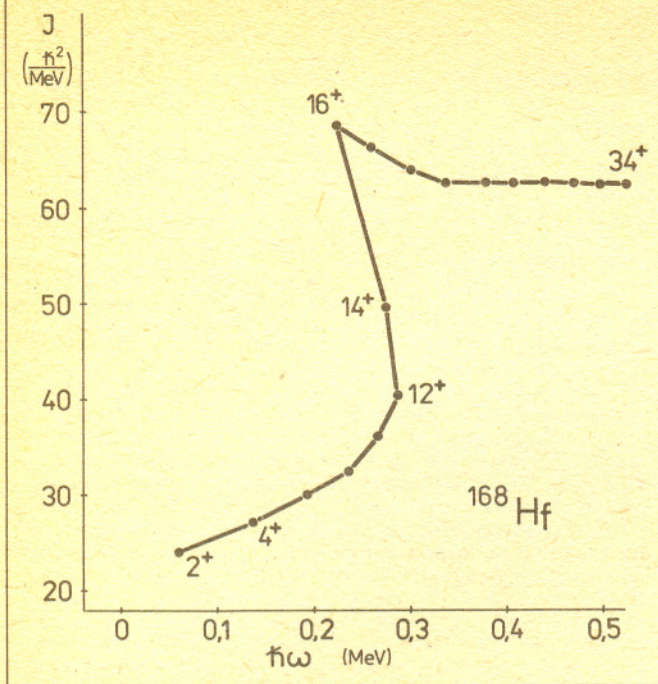
Czego możemy dowiedzieć się o budowie tych jąder analizując ich pasma rotacyjne? Popatrzmy najpierw na pasmo jądra ^{78}Sr . Momenty pędu zmieniają się w tym paśmie co 2 jednostki \hbar , a więc jądro nie ma momentu dipolowego. Jest tylko jedno pasmo rotacyjne, a więc jądro ma oś symetrii obrotowej — tak jak omawiane w poprzednim artykule cząsteczki liniowe. Wystąpienie takiego pasma rotacyjnego sugeruje więc, że jądro ^{78}Sr ma kształt elipsoidy obrotowej. W paśmie rotacyjnym jądra ^{224}Th momenty pędu zmieniają się zarówno o jedną, jak i o dwie jednostki \hbar , a więc ma ono moment dipolowy i kwadrupolowy. Najbardziej prawdopodobnym wytłumaczeniem tego faktu jest hipoteza o „gruszkowatym” kształcie tego jądra. Dla takiego kształtu jądra protony nie muszą mieć środka masy w tym samym punkcie przestrzeni co neutrony i pojawia się różny od zera moment dipolowy układu. W przeciwieństwie do cząsteczek atomowych jądra mające moment dipolowy są białymi krukami wśród wszystkich jąder atomowych.

Odległości między atomami w cząsteczce są sztywno określone przez siły elektromagnetyczne. Obrót cząsteczki nie może na nie wpłynąć w zasadniczy sposób, a więc moment bezwładności cząsteczki prawie wcale nie zależy od prędkości kątowej obrotu. Nieco inaczej jest w przypadku jąder atomowych. Na rysunku 2 pokazana jest zależność momentów bezwładności, wyznaczonych ze wzoru $J = \hbar I / \omega$, od liczby kwantowej momentu pędu. Widzimy, że obrót powoduje stopniowy wzrost momentów bezwładności tych jąder. Wzrost ten tłumaczyć możemy istnieniem siły odśrodkowej powodującej zwiększanie się deformacji jądra oraz słabymi zmianami jego struktury wewnętrznej. Widzimy też, że momenty bezwładności jąder są rzędu $10^{-54} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, a prędkości kątowe aż około 10^{19} obrotów na sekundę, czyli miliard razy większe niż częstości obrotu cząsteczek. Wynika stąd, że powierzchnia jądra porusza się z liniową prędkością rzędu 100 km/s , a więc około 10 000 razy szybciej niż skrajne atomy w cząsteczce!



Rys. 2. Zależność momentów bezwładności wybranych jąder atomowych od momentu pędu. Momenty bezwładności podane są w jednostkach \hbar^2/MeV używanych zwyczajowo w fizyce jądrowej. Megaelektronowolt (MeV) jest jednostką energii równą około $1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$, a więc znając stałą Plancka $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ możemy obliczyć, że $1 \hbar^2/\text{MeV} = 6 \cdot 10^{-56} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Jest wiele jąder, które wykazują przedziwne zachowanie przy zwiększającej się prędkości kątowej obrotu. Rysunek 3 przedstawia moment bezwładności w paśmie rotacyjnym jądra ^{168}Hf . Jak widać, moment ten rośnie aż do momentu pędu 12 \hbar , po czym następuje coś bardzo dziwnego: częstość obrotu maleje, a moment

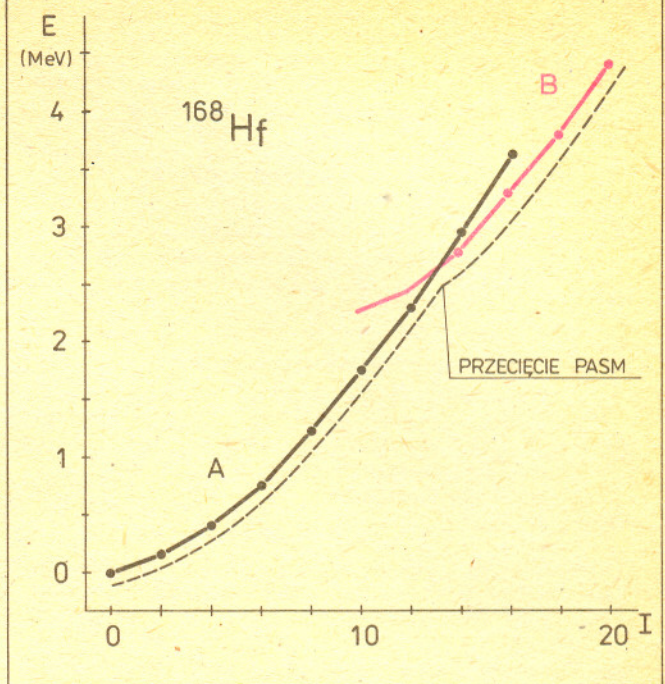


Rys. 3. Zależność momentu bezwładności jądra ^{168}Hf od prędkości kątowej obrotu ($J = \hbar I/\omega$). Prędkości kątowej obiektu mikroskopowego nie możemy, oczywiście, zmierzyć w sposób bezpośredni. Możemy ją natomiast pośrednio wyznaczyć znając zależność energii od liczby kwantowej momentu pędu $E(I): \hbar\omega \approx dE/dI \approx (E(I) - E(I-2))/2$ i tego wzoru użyto, by wykreślić ten rysunek. Punkty na krzywej oznaczają dyskretne wartości liczby kwantowej I .

ędu i moment bezwładności rosną. To niezwykle zachowanie się momentu bezwładności nosi nazwę przegięcia wstecznego (ang. *backbending*), którą to nazwę wymyślono, by ująć w słowa zachowanie się momentu bezwładności w zależności od częstości obrotu. Wyjaśnienie tego efektu zawarte jest na rysunku 4, gdzie przedstawiliśmy zależność energii dwóch pasm rotacyjnych od liczby kwantowej momentu pędu. Poniżej $I = 12$ energie pasma A są niższe niż pasma B , a powyżej tej wartości liczby kwantowej momentu pędu sytuacja się odwraca. Mówimy, że pasma te „przecinają się” dla $I \approx 12$. Energie w obu pasmach nieźle zgadzają się ze wzorem rotacyjnym $E = \hbar^2 I(I+1)/2J$ (patrz poprzedni artykuł), a momenty bezwładności rosną słabo ze zwiększającym się momentem pędu i są mniejsze w paśmie A niż w paśmie B . Zauważmy, że jeśli jądro wysyłając kolejne kwanty promieniowania gamma spowalnia swój obrót, to w wyniku otrzymamy pasmo zaznaczone na rysunku 4 linią przerywaną. Oczywiście jest więc, że w obszarze przecięcia pasm musi nastąpić gwałtowna zmiana częstości obrotu, gdyż jądro przechodzi wtedy z jednego pasma rotacyjnego na drugie. Wyjaśnia to zagadkę przegięcia wstecznego, ale rodzi nową: skąd bierze się pasmo rotacyjne B o własnościach tak różnych od własności pasma A ?

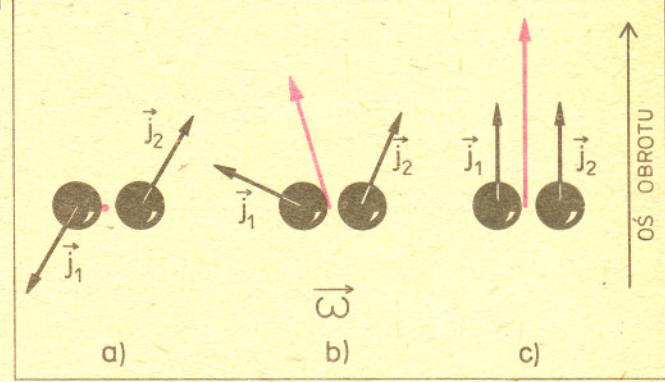
Aby wyjaśnić naturę pasma B , musimy wniknąć nieco głębiej w wewnętrzną strukturę jądra atomowego. Ponieważ siły jądrowe mają bardzo krótki zasięg, więc nukleony w jądrze zachowują się nieco podobnie do molekuł cieczy, czyli poruszają się prawie swobodnie w środku jądra, a na jego powierzchni odczuwają siłę podobną do napięcia powierzchniowego, która nie pozwala im jądra opuścić. Ruch ich przypomina ruch elektronów (w atomie) w polu elektrostatycznym jądra. Pojawiają się więc powłoki jądrowe zupełnie podobne do powłok elektronowych. Nukleony tworzące jądro atomowe obsadzają kolejne powłoki tak, jak elektrony obsadzają swoje powłoki w atomie. Jest jednak między tymi układami pewna zasadnicza różnica. O ile siły kulombowskie działające między elektronami są odpychające, to siły jądrowe powodują przyciąganie i łączenie się nukleonów w pary. Okazuje się, że takie pary usiłują dobrać się w ten sposób, by wypadkowy moment pędu każdej pary był równy zeru. Jeden nukleon w parze wiruje więc w jedną stronę, a drugi w stronę przeciwną.

Przypuśćmy teraz, że naszą parę nukleonów umieszczamy w obracającym się jądrze atomowym. Na każdy z nukleonów tej pary będzie wtedy działać siła Coriolisa — ta sama siła, która powoduje podmywanie wschodnich brzegów wielkich rzek syberyjskich i która pozwala namacalnie stwierdzić ruch obrotowy Ziemi w doświadczeniu z wahadłem Foucaulta. Siła ta będzie



Rys. 4. Zależność energii od liczby kwantowej momentu pędu dla dwóch pasm rotacyjnych w jądrze ^{168}Hf . Pasma A (czarna krzywa) i pasmo B (krzywa kolorowa) przecinają się w pobliżu $I = 12$. Wysyłając kolejne kwanty promieniowania pasma jądro będzie obniżało swoją energię wzdłuż zaznaczonej na rysunku linii przerywanej.

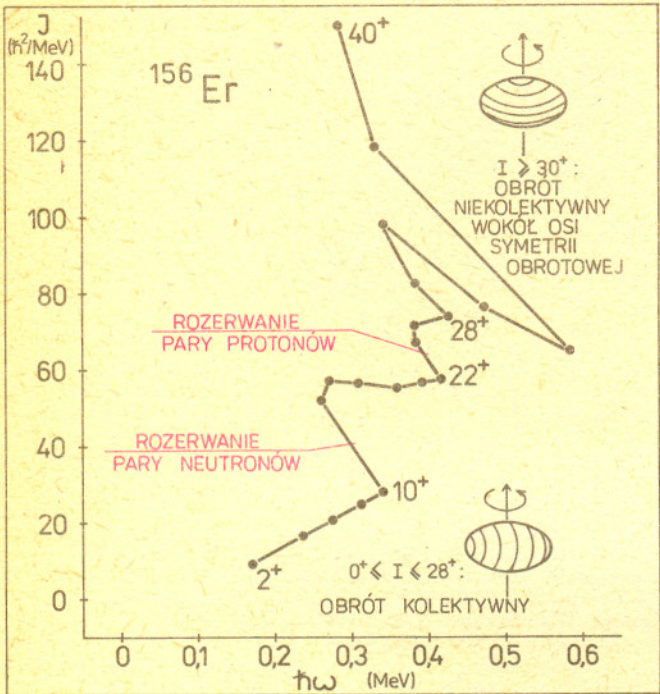
usiłowała ustawić oba momenty pędu nukleonów naszej pary równoległe do momentu pędu jądra, czyli rozerwać parę tworząc z niej dwa niezależne nukleony o wypadkowym momencie pędu różnym od zera (patrz rys. 5). Pasma rotacyjne B — to, które było przyczyną występowania zjawiska przegięcia wstecznego — jest właśnie pasmem rotacyjnym jądra z jedną parą rozerwaną. Aby pasmo takie miało stosunkowo niskie energie i mogło przyciągać się z pasmem A , w którym nie ma par rozerwanych, całkowity moment pędu takiej pary po rozerwaniu musi być duży. W jednych jądrach taka para istnieje, a w innych nie, co zależy od struktury powłokowej jąder i jest przyczyną tak różnych zachowań jąder przy szybkim obrocie.



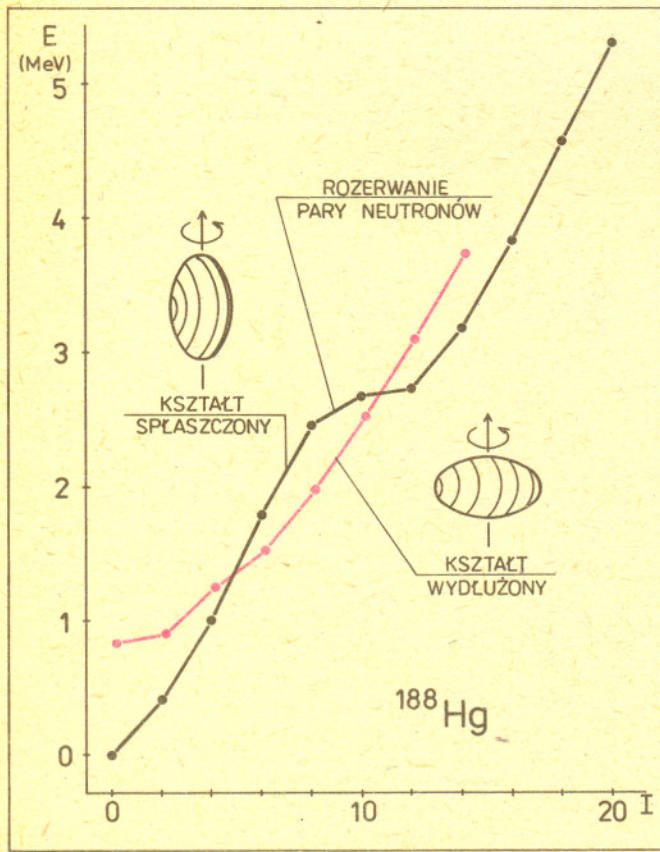
Rys. 5. Schematyczne przedstawienie wpływu obrotu jądra na momenty pędu nukleonów. Gdy jądro nie obraca się (a), to nukleony łączą się w parę o przeciwnych momentach pędu. Siła Coriolisa działająca na nukleony w obracającym się jądrze (b) powoduje, że momenty pędu nukleonów (strzałki czarne) usiłują ustawić się wzdłuż momentu pędu jądra (strzałka kolorowa). Przy szybkim obrocie jądra (c) jedna z par może ulec całkowitemu rozerwaniu, a momenty pędu jej nukleonów ustawią się wtedy równoległe do całkowitego momentu pędu.

Nie wyczerpuje to jeszcze bogactwa możliwych struktur pasm rotacyjnych. Na rysunku 6 widzimy wyniki doświadczeń otrzymane dla jądra ^{156}Er . Poniżej momentu pędu $30\hbar$ jądro to zachowuje się w sposób, który już nie jest dla nas niczym zaskakującym: widzimy dwa przecięcia pasm dla $I = 10$ i $I = 22$ odpowiadające rozerwaniu jednej pary neutronów i jednej pary protonów. Dla wyższych momentów pędu zaczyna się dziać coś dziwnego. Czym można wytłumaczyć tak nieregularne zmiany momentu bezwładności przy rosnącej częstości obrotu? Okazuje

się, że dla $I < 30$ jądro ^{156}Er ma kształt cygara obracającego się wokół osi prostopadłej do osi symetrii obrotowej. Natomiast dla $I > 30$ przyjmuje ono kształt dysku i wtedy moment pędu jest całkowicie złożony z momentów pędu wielu porozrywanych par nukleonów. Stąd też pochodzą nieregularności pasma rotacyjnego związane z takim „niekolektywnym” obrotem.



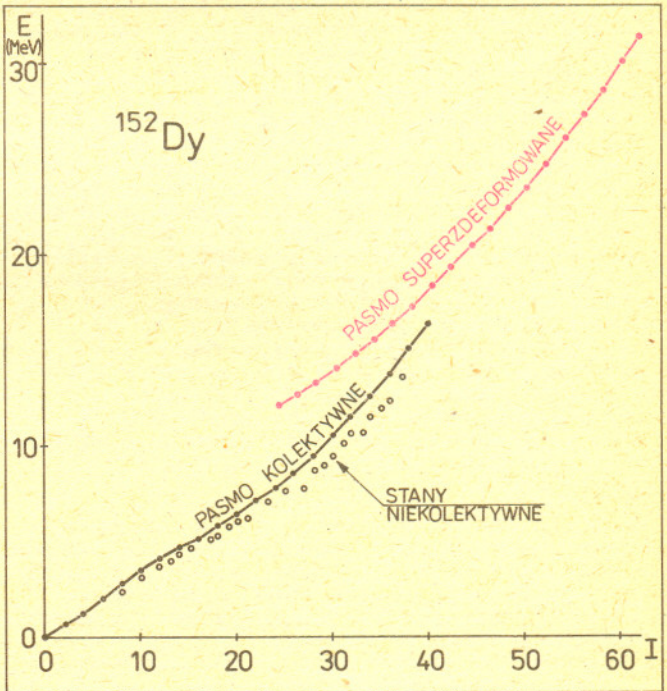
Rys. 6. Zależność momentu bezwładności jądra ^{156}Er od prędkości kątowej obrotu. Dla liczby kwantowej momentu pędu $I < 30$ jądro to ma kształt cygara obracającego się wokół osi prostopadłej do osi symetrii obrotowej, w którym rozerwaniu ulega para neutronów ($I = 12$) i protonów ($I = 22$). Powyżej $I = 30$ jądro to przybiera kształt dysku, a jego moment pędu utworzony jest z momentów pędu wielu porozrywanych par nukleonów.



Rys. 7. Zależność energii od liczby kwantowej momentu pędu w pasmach jądra ^{188}Hg .

Inny charakter ma pasmo rotacyjne jądra ^{188}Hg (rys. 7). Jądro to ma w stanie podstawowym kształt lekko spłaszczonej kuli, co prowadzi do pasma rotacyjnego odpowiadającego obrotowi wokół osi o najmniejszym momencie bezwładności. Niezależnie od tego obserwujemy pasmo o znacznie większym momencie bezwładności przecinające się z pierwszym już dla $I \approx 4$. Okazuje się, że drugie pasmo odpowiada obrotowi jądra o kształcie cygara wokół osi prostopadłej do jego osi symetrii obrotowej. Jądro ^{188}Hg może więc istnieć równocześnie w stanach o różnym kształcie. Niezależnie od takiego współistnienia kształtów widzimy „normalne” przegięcie wsteczne w paśmie odpowiadającym kształtowi spłaszczonemu dla $I \approx 10$.

Całkiem niedawno odkryto jeszcze jeden typ struktury pasma rotacyjnego. Jądro ^{152}Dy (rys. 8) aż do $I = 40$ ma nieregularne niekolektywne pasmo rotacyjne odpowiadające kształtowi spłaszczonemu. Jednocześnie występuje niezwykle regularne pasmo boczne o ogromnym momencie bezwładności. Tak duży moment bezwładności sugeruje olbrzymią deformację tego jądra — wydaje się, że ma ono w paśmie tym kształt cygara o długości dwa razy większej niż jego grubość! Zachowanie się tego jądra przy szybkim obrocie przypomina... zachowanie się gwiazdy. Astronomowie od dawna wiedzieli o tak zwanej niestabilności Jacobiego. Polega ona na tym, że gwiazda kurcząc się obraca coraz szybciej i będąc najpierw kulą przyjmuje następnie kształt coraz bardziej spłaszczonego dysku wirującego wokół osi symetrii obrotowej, by nagle zmienić się w cygaro wirujące wokół osi prostopadłej do jego osi symetrii obrotowej, a w końcu rozerwać się tworząc układ dwu gwiazd wirujących wokół wspólnego środka masy. Podobnie jest z jądrem ^{152}Dy — przewiduje się, że dla momentów pędu około $80\hbar$ powinno ono rozszczepić się na dwa niezależne fragmenty. Fizycy poznali więc już prawie cały zakres momentów pędu dostępnych temu jądro...



Rys. 8. Zależność energii od liczby kwantowej momentu pędu w pasmach jądra ^{152}Dy . Oprócz pasma odpowiadającego obrotom niekolektywnym przy kształcie spłaszczonym (czarne kółka) oraz „normalnego” pasma obrotu kolektywnego dla kształtu wydłużonego (linia czarna) obserwujemy pasmo odpowiadające obrotowi jądra o gigantycznej deformacji, kiedy ma ono kształt cygara o osi długiej, dwukrotnie większej niż oś krótka.

Badanie szybko obracających się jąder atomowych jest potężnym narzędziem poznawania ich budowy i struktury. Za jego pomocą udało się uzyskać potwierdzenia naszych wyobrażeń o tym, w jaki sposób nukleony układają się w przestrzeni tworząc najbardziej gęstą „grudkę” materii, z której złożony jest nasz świat i my sami. Czy narzędzie to zostało już zużyte do końca? Należy w to wątpić. Dostarczy jeszcze ono fizykom wielu informacji i wielu niespodzianek...



Rozwiązanie zadania M 504. Tak. Ustawiając odpowiednio kije można zmierzyć sumę oraz różnicę ich długości. Jeśli w wyniku pomiarów otrzymamy liczby s i r , to uznamy, że

dłuższy kij ma długość $\frac{1}{2}(s+r)$, krótszy zaś $\frac{1}{2}(s-r)$. Oznaczmy przez d i k rzeczywiste długości kijów. Mamy $s = d+k+X$, $r = d-k+Y$, gdzie X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi, $EX = EY = 0$, $D^2X = D^2Y = \sigma^2$. Stąd

$$\frac{1}{2}(s+r) = d + \frac{1}{2}(X+Y),$$

$$\frac{1}{2}(s-r) = k + \frac{1}{2}(X+Y).$$

Błąd pomiaru jest zmienną losową $\frac{1}{2}(X+Y)$.

Z niezależności X i Y wynika, że

$$D^2\left(\frac{1}{2}(X+Y)\right) = \frac{1}{4}(D^2X + D^2Y) = \frac{\sigma^2}{2}.$$

Odchylenie standardowe błędu wynosi więc $\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$. Taki wynik wymagałby przeprowadzenia dwóch pomiarów długości każdego kija.

Gry

Zacznijmy od przykładów.

Przykład 1: A i B grają w następującą grę. Biorą liczbę naturalną n i jeden z graczy odejmuje od niej jedną z liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Drugi z graczy odejmuje jedną z tychże liczb od wyniku otrzymanego przez przeciwnika i tak na przemian. Wygrywa ten, kto poda w wyniku liczbę 0. Jaka jest strategia w tej grze? To proste. Musimy, o ile to możliwe, podawać przeciwnikowi liczby podzielne przez 10. Jeśli początkowe warunki gry (liczba n) pozwolą nam podać mu liczbę zakończoną zerem, to w odpowiedzi dostaniemy liczbę z ostatnią cyfrą różną od zera i znów podamy liczbę z zerem na końcu. W ten sposób napiszemy w końcu liczbę 0 i wygramy.

Przykład 2: Zasady podobne, z tym że od liczby, którą podał nam przeciwnik, możemy odjąć jej dzielnik pierwszy lub liczbę 1. Dobra strategia nie jest tu od razu widoczna, ale jest zaskakująco prosta. Musimy podawać przeciwnikowi liczby podzielne przez 4. Rzeczywiście, dając przeciwnikowi liczbę podzielną przez 4 otrzymamy w odpowiedzi liczbę niepodzielną przez 4 (bo nie można odejmować wielokrotności liczby 4), a więc: albo liczbę postaci $4k+1$ i wtedy podamy $4k = 4k+1-1$, albo liczbę postaci $4k+2$ i wtedy podamy $4k = 4k+2-2$, albo liczbę postaci $4k+3$ i wtedy podamy $4k+3-p$, gdzie p jest dzielnikiem pierwszym liczby $4k+3$ dającym z dzielenia przez 4 resztę 3 (taki dzielnik zawsze istnieje), czyli możemy znowu dać w odpowiedzi liczbę podzielną przez 4.

Te dwa przykłady pokazują, jak można tworzyć nowe gry. Wystarczy umówić się, jakie liczby można odejmować od jakich i gra gotowa. Znalazienie strategii w takiej grze to zbadanie, które liczby są wygrywające (w pierwszym przykładzie są to liczby podzielne przez 10, a w drugim podzielne przez 4).

I kolejny temat pracy konkursowej mamy gotowy: wymyślić i zbadać kilka tego typu gier.

J. W.



Kto ma rację

Wśród zadań na pisemnym egzaminie wstępnym na matematykę było też następujące:

Zbiór $N = \{1, 2, \dots, 2n\}$ podzielono losowo na dwa podzbiory n -elementowe. Obliczyć prawdopodobieństwo p zdarzenia, że 1 i 2 znalazły się równocześnie w jednym z podzbiorów.

Po egzaminie podstuchałem taką, mniej więcej, rozmowę.

- Z rachunku to mam chyba dobrze.
- Ja chyba też. Ile ci wyszło?

$$\frac{2 \binom{2n-2}{n}}{\binom{2n}{n}}$$

- To mi co innego. Jak robiłeś?
- Wszystkich możliwych podziałów jest oczywiście tyle, ile jest sposobów wyboru n -elementowego podzbioru X ze zbioru N ,

a więc $\binom{2n}{n}$. Zdarzeniu sprzyja ten wybór, dla którego $\{1, 2\} \subset N \setminus X$ lub $\{1, 2\} \subset X$. Pierwszy z tych warunków oznacza, że $X \subset \{3, 4, \dots, 2n\}$ i mamy tu $\binom{2n-2}{n}$ możliwości.

Teraz $\{1, 2\} \subset X$ oznacza, że $N \setminus X \subset \{3, 4, \dots, 2n\}$, czyli

znowu jest $\binom{2n-2}{n}$ możliwości. W efekcie $p = \frac{2 \binom{2n-2}{n}}{\binom{2n}{n}}$.

— Chyba dobrze. Ja liczyłem „od przeciwnego”, czyli znajdowałem najpierw prawdopodobieństwo tego, że 1 i 2 są w różnych podzbiorach. Tak jak i u ciebie myślimy o wybieraniu n -elementowych podzbiorów. Wszystkich wyborów mamy $\binom{2n}{n}$. Zdarzeniu sprzyja wybór takiego podzbioru X , że $1 \in X$ i $2 \notin X$ lub $2 \in X$ i $1 \notin X$. Znaczący więc, że jeden element zbioru X pochodzi ze zbioru $\{1, 2\}$, pozostałe zaś (jest ich $n-1$) ze zbioru $\{3, 4, \dots, 2n\}$. Mamy więc $2 \binom{2n-2}{n-1}$ takich możliwości. Stąd

$$\text{dostajemy, że } p = 1 - \frac{2 \binom{2n-2}{n-1}}{\binom{2n}{n}}.$$

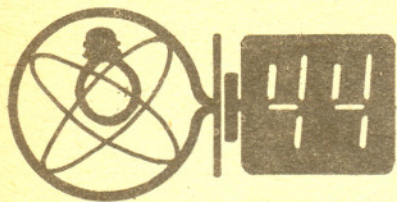
— ...

Rozmowa toczyła się dalej, aż do wyjaśnienia, kto ma rację.

R. Sz.

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 1988

Skrót regulaminu

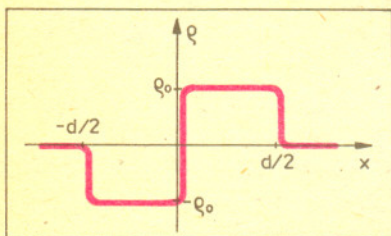


Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4-3 S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotnie członkostwo — to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1988.

Zadania z fizyki nr 67, 68

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

67. W najprostszym półprzewodnikowym złączu p—n istnieje przestrzenny rozkład ładunku, w przybliżeniu taki, jak na rysunku; x jest tu odległością od „środkowej płaszczyzny” złącza, d — grubością obszaru złącza, ρ — gęstością ładunku. Przyjmując, że stała dielektryczna półprzewodnika wynosi ϵ , przedstawić zależność natężenia pola elektrycznego od współrzędnej x .



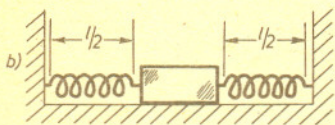
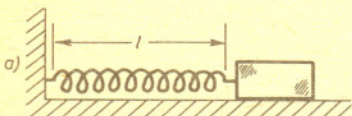
68. Wyznaczyć stosunek średnich gęstości Słońca i Ziemi, korzystając wyłącznie z poniższych danych:

promień Ziemi — $6,4 \cdot 10^6$ m,
przyspieszenie ziemskie — $9,8$ m \cdot s $^{-2}$,
średnica kąтова Słońca oglądanego z Ziemi — $9,3 \cdot 10^{-3}$ rad,
1 rok $\approx 3,2 \cdot 10^7$ s.

Rozwiązania-zadań z fizyki z numeru 12/1987

Przypominamy treść zadań:

59. Rysunek przedstawia dwa układy drgające (a) i (b) z klockiem poruszającym się pod wpływem działania sprężyny (sprężyn) po poziomej prostej. W układzie (b) zastosowano sprężynę z układu (a) — o długości swobodnej l , rozciągniętą na dwie jednakowe części o długości swobodnej $l/2$. Obliczyć stosunek częstotliwości drgań swobodnych tych układów przy założeniu, że masy klocków są jednakowe. Masę sprężyn oraz tarcie klocków o podłożu należy zaniedbać. Czy wynik zmieni się i jak, jeśli sprężyna zostanie rozcięta na dwie niejednakowe części?



60. Rozpatrzmy nieskończony solenoid mający n zwojów na jednostkę długości, przez który płynie prąd o natężeniu I ; niech wewnętrzna średnica solenoidu będzie równa D . We wnętrzu solenoidu znajduje się rdzeń o przenikalności magnetycznej μ w postaci nieskończonego walca o średnicy d . Znaleźć natężenie pola magnetycznego wewnątrz rdzenia oraz w obszarze wewnątrz solenoidu, poza rdzeniem. Porównać tę ostatnią wielkość z natężeniem pola magnetycznego wewnątrz solenoidu bez rdzenia. Przeprowadzić jakościowe porównanie dla przypadku skończonej długości solenoidów i rdzenia.

59. Oznaczmy przez k współczynnik sprężystości sprężyny o długości l (równy wartości bezwzględnej stosunku siły sprężystości przy pewnym wydłużeniu do tego wydłużenia). Część tej sprężyny, o długości l' , będzie miała współczynnik sprężystości kl/l' .

Okres drgań swobodnych układu (a) określa wzór $T_a = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$, ich częstotliwość jest więc

$$\nu_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

W układzie (b) każda ze sprężyn ma współczynnik sprężystości $2k$. Wypadkowa stała sprężystości układu sprężyn jest równa sumie stałych sprężystości obu sprężyn, wynosi więc $4k$.

Częstotliwość drgań swobodnych tego układu jest równa $\nu_b = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4k}{m}}$.

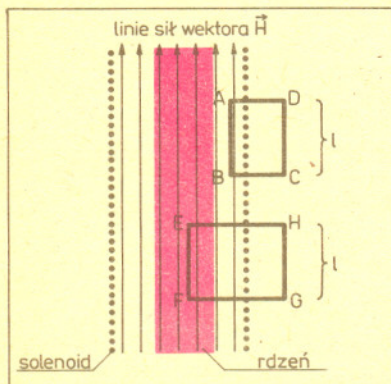
W rezultacie $\frac{\nu_b}{\nu_a} = 2$.

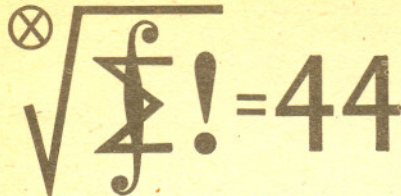
W przypadku rozcięcia sprężyny na niejednakowe części l_1 i l_2 ich współczynniki sprężystości będą $k_1 = kl/l_1$ oraz $k_2 = kl/l_2$. Stosunek częstotliwości wyniesie $\frac{\nu_b}{\nu_a} = \frac{l}{\sqrt{l_1 l_2}}$.

Łatwo sprawdzić, że jest on najmniejszy dla $l_1 = l_2$.

60. Z nieskończonego solenoidu linie sił pola magnetycznego nie wychodzą na zewnątrz. Jako model takiego solenoidu możemy przyjąć solenoid w kształcie torusa o średnicy znacznie większej od średnicy solenoidu. Fragment toroidalnego solenoidu może być dowolnie zbliżony do walca, dotyczy to również rdzenia (oś rdzenia powinna być równoległa do osi solenoidu). Rozpatrzmy dwa kontury zaznaczone na rysunku. Składowa wektora natężenia pola magnetycznego H wzdłuż konturu jest różna od zera tylko na odcinkach równoległych do osi solenoidu znajdujących się w jego wnętrzu (AB i EF). Oznaczając wartość natężenia pola magnetycznego wewnątrz solenoidu przez H mamy na podstawie prawa Ampère'a $Hl = nIl$ niezależnie od tego, czy kontur przechodzi przez rdzeń czy też nie. Wynika stąd natężenie pola $H = nI$, takie samo wewnątrz rdzenia, jak i poza nim. Gdyby rdzenia nie było, natężenie pola magnetycznego wewnątrz solenoidu byłoby takie samo.

W przypadku solenoidów o skończonej długości linie sił pola magnetycznego wychodzą na zewnątrz. Powoduje to zmniejszenie natężenia pola magnetycznego wewnątrz solenoidu w porównaniu z nieskończonym solenoidem (wystarczy przeanalizować opisane wyżej kontury, uwzględniając nieznikające pole magnetyczne na zewnątrz solenoidu).





Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

169. Dany jest wielościan wypukły. W każdym wierzchołku schodzą się co najmniej 4 krawędzie. Dowiedz, że co najmniej 8 ścian to trójkąty.

170. a) Niech Z będzie takim podzbiorem płaszczyzny, że
 (1) nie istnieje prosta zawierająca zbiór Z ,
 (2) odległość między każdymi dwoma punktami zbioru Z jest liczbą naturalną.
 Udowodnić, że Z jest zbiorem skończonym.
 b) Dla dowolnie zadanej liczby naturalnej $n \geq 3$ podać przykład n -punktowego podzbioru płaszczyzny o własnościach (1) i (2).

Zadanie 170 zaproponował pan Marcin Mazur z Białegostoku.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/1987

Przypominamy treść zadań:

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"
 po uwzględnieniu ocen rozwiązań
 zadań 157 /WT=3,83/ 1 158 /WT=1,89/
 z numeru 10/1987

Mirosław Mikucki	- Augustów	44,57pkt
Konrad Pióro	- Warszawa	43,95pkt
Tadeusz Jósefczyk	- Poznań	43,15pkt
Piotr Wach	- Katowice	41,59pkt
Krzysztof Jedziniak	- Katowice	39,85pkt
Adam Ruszel	- Krosno	38,97pkt

Pan M. Mikucki - numer 52 w Klubie 44 M.

161. Zaproponować określenie jednego działania (dwuargumentowego) w zbiorze liczb rzeczywistych, za pomocą którego można (z użyciem liczb 0 i 1) wyrazić cztery działania arytmetyczne.

162. Wyznaczyć wszystkie pary m, n liczb całkowitych nieujemnych takie, że liczby $\sqrt{m+\sqrt{n}}$ oraz $\sqrt{n+\sqrt{m}}$ są obie całkowite.

161. Wymogom zadania czyni zadość na przykład operacja

$$a * b = \begin{cases} \frac{1}{a-b} & \text{gdy } a \neq b \\ 0 & \text{gdy } a = b \end{cases}$$

Odejmowanie i dodawanie wyrażają się przez $*$ w sposób oczywisty:

$$a - b = (a * b) * 0, \quad a + b = a - (0 - b) = (a * ((0 * b) * 0)) * 0$$

(wzory słuszne dla wszystkich a, b). Jeszcze prościej wyraża się branie odwrotności:

$$\frac{1}{a} = a * 0 \quad (\text{dla wszystkich } a \neq 0).$$

Pozostaje dowieść, że mnożenie wyraża się przez $*$. To zaś wynika z napisanych wyżej formuł i z następujących tożsamości:

$$(1) \quad a^2 = \begin{cases} a - \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{a-1}} & \text{dla } a \neq 0, a \neq 1 \\ 0 & \text{dla } a = 0 \\ 1 & \text{dla } a = 1 \end{cases} \quad - \frac{a}{2} = \begin{cases} \frac{1}{-\frac{1}{a} - \frac{1}{a}} & \text{dla } a \neq 0 \\ 0 & \text{dla } a = 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad ab = - \frac{((a-b)^2 - a^2) - b^2}{2} \quad (\text{dla wszystkich } a, b).$$

Dowód jest w tym momencie w zasadzie zakończony; nie ma konieczności wykonywania wszystkich podstawień. Może jednak ciekawe będzie spostrzeżenie, że na przykład prawe strony równości (1) (w przypadku, gdy $a \neq 0, 1$) zapiszą się jako

$$(3) \quad (a * ((a * 0) * (a * 1))) * 0, \quad (0 * a) * (a * 0).$$

Tożsamość (2) — po uwzględnieniu równości wcześniejszych — prowadzi do wzoru

$$(4) \quad ab = \begin{cases} A & \text{jeśli } a \neq 0, a \neq 1, b \neq 0, b \neq 1, a * b \neq 0, a * b \neq 1 \\ B & \text{jeśli } a \neq 0, a \neq 1, b \neq 0, b \neq 1, a * b = 1 \\ C & \text{jeśli } a \neq 0, a \neq 1, b \neq 0, b \neq 1, a * b = 0 \\ a & \text{jeśli } b = 1 \\ b & \text{jeśli } a = 1 \\ 0 & \text{jeśli } b = 0 \\ 0 & \text{jeśli } a = 0 \end{cases}$$

gdzie A oraz B są wyrażeniami wypisanymi na tylnej okładce tego numeru, C zaś oznacza napis (3). Formułę dla ilorazu a/b (dla $b \neq 0$) otrzymamy z (4) zastępując wszędzie b przez $(b * 0)$.

162. Przypuśćmy, że liczby całkowite $m, n \geq 0$ spełniają podany warunek. Liczby \sqrt{m}, \sqrt{n} są więc całkowite. Można przyjąć, że $m \leq n$. Oczywiście para $(m, n) = (0, 0)$ jest rozwiązaniem zadania. Zakładajmy w dalszym ciągu, że $n > 0$. Mamy nierówność:

$$\sqrt{n+\sqrt{m}} - \sqrt{n} \leq \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}+\sqrt{n}}} < \frac{1}{2}.$$

Wyrażenie po lewej stronie jest liczbą całkowitą nieujemną i wobec otrzymanej nierówności musi być zerem, a to znaczy, że $m = 0$. Zadany warunek przybiera postać żądania, by liczby $\sqrt[4]{n}$ i \sqrt{n} były całkowite. Stąd odpowiedź: para (m, n) jest rozwiązaniem zadania wtedy i tylko wtedy, gdy jedna z liczb m, n jest równa zero, a druga jest czwartą potęgą liczby całkowitej.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 P"
 po uwzględnieniu ocen rozwiązań
 zadań 55 /WT=1,94/ 1 56 /WT=3,21/
 z numeru 10/1987

Dzierżyszaw		
Lipniacki	- Lublin	36,22pkt
Bogusław Mikielewicz	- Brodnica	31,59pkt
Janusz Osada	- Legnica	24,07pkt
Roman Musiał	- Katowice	21,98pkt
Andrzej Eilmes	- Gorlice	20,82pkt
Piotr Korczyński	- Warszawa	19,76pkt
Piotr Baża	- Toruń	19,31pkt

Z powodu nieumieszczenia w "Delcie" nr 2/1988 czołówki ligi fizycznej nie został odnotowany fakt wejścia do Klubu 44 P z numerem ósmym pana Jacka Stelmacha z Zabrze.



Według obserwacji wykonanych przez Voyagera 2 Hyperion, jeden z satelitów Saturna, jest zbliżony do elipsoidy o osiach $200 \times 240 \times 350$ km. Niepodobna natomiast określić jego prędkości rotacji. Wygląda na to, że okres jego obrotu waha się nieregularnie w granicach od 10 dni do nieskończoności. Przyczyną jest zapewne zmienne oddziaływanie nań ze strony Saturna i Tytana (największego satelity Saturna).



Równanie $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = m^2$ ma w liczbach naturalnych tylko dwa rozwiązania: (1, 1) i (24, 70). Natomiast suma kolejnych sześciątów (od jedynki) jest zawsze kwadratem. Konkretnie $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$. Suma pierwszych potęg, czyli $1 + 2 + \dots + n$, jest kwadratem dla nieskończenie wielu n . Jakie to liczby?



Wyraźne echo słyszymy tylko wtedy, gdy fala odbita powraca do nas co najmniej po czasie potrzebnym na wymówienie jednej sylaby, tj. po około 0,2 s. Odpowiada to odległości przeszkody odbijającej dźwięk większej niż 34 m. Przy mniejszych odległościach już dla jednej sylaby fala odbita powraca w czasie jej wymawiania, co daje efekt tzw. pogłosu. Gdy ściany dobrze odbijają dźwięk, pogłos może trwać bardzo długo, np. w bazylikańskim kościele w Pizie czas pogłosu sięga 20 s.



Nie jest łatwo stwierdzić obecność pola magnetycznego u białego karła — efekt Zeemana (rozszczenie linii widmowych w silnym polu magnetycznym) jest bowiem skutecznie zakłócany przez poszerzenie linii wskutek silnej grawitacji i szybkiej rotacji gwiazdy. Dlatego bezpośrednio mierzalne są obecnie pola magnetyczne dopiero powyżej kilku milionów gaussów. W gwiazdozbiornie Smoka w odległości 13 pc leży biały karzeł o numerze katalogowym GrW + 70°8247 z polem magnetycznym sięgającym 350 MGs. Jest to o rząd wielkości więcej niż u innych gwiazd tego rodzaju.



Pierwsza fotografia barwna, wykonana w 1861 roku przez Jamesa Clerkę Maxwella, przedstawia fragment szkockiego tartanu (kraty). Maxwell naświetlił trzy płyty fotograficzne kolejno przez filtry: czerwony, zielony i niebieski. Uzyskane zdjęcia wyświetlone na ekranie przez te same filtry dały barwny obraz. Po pewnym czasie okazało się jednak, że używane przez Maxwella płyty fotograficzne były zupełnie nieczułe na kolor czerwony! Dopiero sto lat później w Laboratorium Badawczym Kodaka wyjaśniono, iż czerwona część fotografii uzyskał Maxwell dzięki odbijanemu przez czerwony barwnik tartanu promieniowaniu ultrafioletowemu.

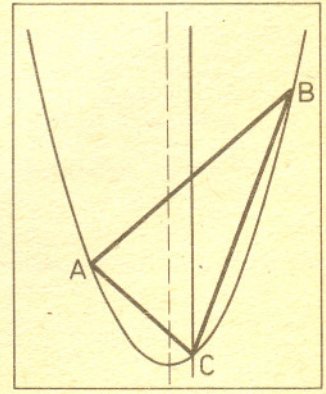
Do obracającej się sfery przymocowano oś drugiej identycznej sfery (to znaczy nie tylko tych samych rozmiarów, ale też złożonej z tych samych punktów). Druga sfera obraca się jednostajnie na swojej osi z prędkością równą prędkości pierwszej sfery, ale w przeciwną stronę. Jeśli osie obrotu pierwszej i drugiej sfery nie pokrywają się ani nie są prostopadłe, to dowolny punkt równika drugiej sfery zakreśla w przestrzeni zakrzywioną ośmkę, będącą przecięciem sfery (obojętnie której) z pewnym walcem (o jakim promieniu?). Rzecz została udowodniona przez Eudoksosa podczas jego studiów w Akademii Platona. A cały ten model został skonstruowany dla objaśnienia ruchu Jowisza na niebie (było to 500 lat przed Ptolemeuszem).



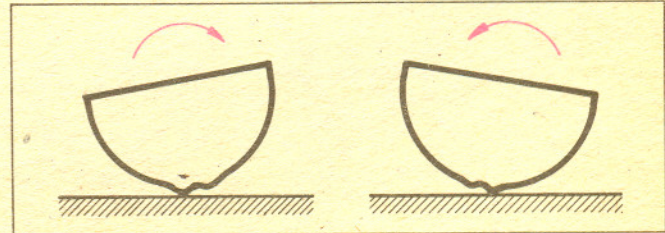
Są poważne przesłanki za tym, że również Neptun ma pierścień. Kilkakrotnie obserwowano spadek jasności gwiazd, w pobliżu których Neptun przechodził. Ocenia się, że pierścień ma szerokość do 20 km i promień 76 000 km. Jednak pierścień powinien zazwyczaj przesłonić gwiazdę dwukrotnie (chyba że stycznie o nią się „ociera”), co nie zawsze zauważano. Przypuszcza się w związku z tym, że jest on niejednorodny i miejscami po prostu zbyt cienki lub rzadki, by spowodować zauważalny spadek jasności zasłanianej gwiazdy. W sierpniu 1989 r. będzie tam Voyager 2 i wtedy dowiemy się, jak jest naprawdę.



Jeśli przez środek cięciwy AB paraboli poprowadzimy prostą równoległą do jej osi i prosta ta przetnie parabolę w punkcie C , to pole trójkąta ABC będzie równe $\frac{3}{4}$ pola ograniczonego przez parabolę i cięciwę. Ciekawe, że wynik nie zależy ani od wyboru paraboli, ani od wyboru cięciwy. A jeszcze ciekawsze, że dostrzegł to i udowodnił już Archimedes.



W niektórych pracowniach fizycznych można jeszcze znaleźć tzw. przyrząd Trevelyana. Jest to metalowa sztabka o przekroju przedstawionym na rysunku.

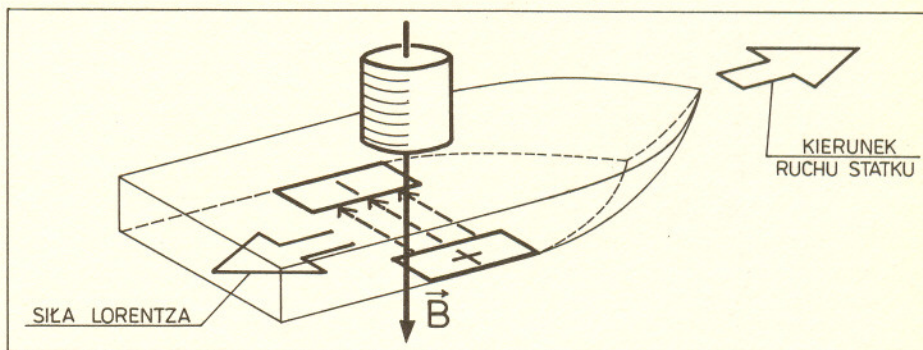


Po silnym rozgrzaniu należy ją położyć na ołowianej blasze. Przechylona w lewo sztabka rozgrzewa powierzchnię ołowiu, który rozszerzając się w miejscu styku powoduje przechylenie sztabki w prawo itd. Stygnięciu towarzyszy wyraźny dźwięk. Podobne dźwięki można czasami usłyszeć podczas stygnięcia metalowych przedmiotów.

Przewrót w przemyśle stoczniowym

Odkrycie nadprzewodnictwa w wysokich temperaturach wzbudziło ogromne zainteresowanie możliwymi zastosowaniami nowych materiałów. Poza „oczywistymi” pomysłami użycia nowych nadprzewodników do przesyłania i magazynowania energii elektrycznej rozważane są m.in. projekty budowy pociągów unoszących się na „poduszce” magnetycznej oraz statków poruszających się dzięki istnieniu siły Lorentza. Oba te pomysły powstały przed odkryciem wysokotemperaturowego nadprzewodnictwa, ale ich realizacja była bardzo kosztowna (zastosowanie ciekłego helu do chłodzenia), a uzyskiwane parametry eksploatacyjne budowanych urządzeń były mało atrakcyjne.

Idea działania statku „napędzanego” siłą Lorentza jest bardzo prosta. Schemat takiego statku przedstawia rysunek.



Łódź napędzana siłą Lorentza

Silny magnes (cewka z nadprzewodnika) wytwarza pionowe pole magnetyczne. W dnie statku, wzdłuż jego burt, umieszczone są elektrody. Wytworzenie różnicy potencjałów między elektrodami powoduje przepływ prądu w (słonej) wodzie morskiej prostopadle do osi statku. Na przewodnik z prądem (wodę) w polu magnetycznym działa siła Lorentza prostopadła do kierunku pola i kierunku prądu. W przypadku jak na rysunku odpycha ona wodę w kierunku rufy statku. Pole magnetyczne działa więc tu jak „wiosło”.

W 1980 roku model statku o długości 3,6 m, skonstruowany przez profesora Saji z Kobe, osiągnął prędkość 2,5 km/h. W roku 1990 ma być wodowany eksperymentalny statek o długości 25 m i wyporności 150 t.

A. M.



Nikt i nic (poza prawem zachowania energii) nie zabrania, by istniało *perpetuum mobile*. A ponieważ prawo zachowania energii nie ma mocy prawnej (tylko tak się nazywa), więc czemużby *perpetuum* miało nie istnieć. Tym bardziej że konstruktorów takiego urządzenia jest wielu. Wszyscy jednak wiemy, jakie kłody rzucano konstruktorom pod nogi do niedawna. My również, w redakcji, odrzucaliśmy wielokrotnie nadsyłane nam projekty.

Pora jednak z tym skończyć. Na okładce przedstawiamy ideę jednej z otrzymanych przez nas konstrukcji. Na pewno jest dobra — przecież dwa lata przeleżała na redakcyjnych półkach. Fakt, że jej autora znamy jedynie z pseudonimu „1—9—6—9—2—0...”, którym sygnował swoje listy, najlepiej świadczy, że w minionym okresie bycie konstruktorem nie tylko nie było opłacalne, lecz nawet mogło być niebezpieczne.

A oto zasada działania Samoczynnego Urządzenia Grawitacyjnego. Urządzenie uruchamia się przez lekkie pchnięcie ramienia R dźwigni D_0 w górę. Uderzenie w iglicę I_1 zwalnia cięższe ramię dźwigni D_1 , po której zaczyna się staczać kulka K_1 . Kulka spadając na ramię R nadaje mu ruch w dół, który za pośrednictwem zębatego Z i trybu T przenosi się na koło urządzenia W . Ruch zębatego powoduje także podniesienie dźwigni O , dzięki czemu, po zatrzymaniu się ramienia R , możliwy jest jego powrót do pierwotnego położenia. Ruch wsteczny zębatego nie powoduje obrotu koła w przeciwną stronę dzięki zapadce B i konstrukcji trybu T . Podnoszące się ramię R uderza w iglicę kolejnej dźwigni D_2 , przy czym kulka K_1 , której energia została już wykorzystana, wraca do koła W . Cykl się zamkna. Dopracowanie szczegółów konstrukcji urządzenia nie powinno stanowić dla zdolnego mechanika większej trudności.