

26 lipca 1988 roku zmarł w Warszawie  
 doc. dr hab. Jerzy STODÓLKIEWICZ  
 astronom  
 wieloletni prezes  
 Polskiego Towarzystwa Astronomicznego

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 11(179)

Czy kilogram pierza jest cięższy od kilograma ołowiu ? <i>doc. dr Tomasz Hofmokr</i>	str. 1
O funkcjach różniczkowalnych i hipotezie continuum <i>dr Piotr Zakrzewski</i>	str. 4
Zadania	str. 5
Numeryczna droga do solitonów <i>dr hab. Ryszard Kutner</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Szeregi zbieżne warunkowo <i>dr Zbigniew Sawoń</i>	str.10
Tropem komety Halleya <i>dr Krzysztof Ziolkowski</i>	str.12
Klub 44	str.14
Kącik prac uczniowskich	str.15
Drobniaki	str.16
Patrz w niebo	str.17

### W następnym numerze:

#### Grupy

„Delta”  
 matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
 miesięcznik popularny  
 Polskiego Towarzystwa  
 Matematycznego, Polskiego  
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
 Towarzystwa Astronomicznego  
 wydawany przy poparciu  
 Ministerstwa Edukacji Narodowej

#### Komitet Redakcyjny

dr Maciej Bryński  
 dr Bogdan Cichoński  
 dr Antoni L. Dawidowicz  
 dr Alicja Derkowska  
 doc.dr Jan A. Gaj  
 doc.dr Bolesław Gleichgewicht  
 doc.dr Tomasz Hofmokr – v-przewodniczący  
 doc.dr Tadeusz Jarzębowski  
 doc.dr Marcin Kubiak  
 mgr Andrzej Makowski  
 dr Zbigniew Plochocki  
 dr Jan Reimpala  
 prof.dr Konrad Rudnicki  
 prof.dr Grzegorz Sitarski  
 prof.dr Józef I. Smak  
 prof.dr Kazimierz Stępień  
 prof.dr Mieczysław Subotowicz  
 doc.dr Andrzej Szymachla  
 doc.dr Aniela Wolska  
 prof.dr Andrzej Woszczyk  
 prof.dr Wojciech Żakowski –  
 przewodniczący

#### WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty kwartalnej zł 210.- półrocznej zł 420.- rocznej zł 840.-

- dla osób prawnych – instytucji i zakładów pracy  
 — instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach.  
 — instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
- dla osób fizycznych – indywidualnych prenumeratorów:  
 — osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli  
 — osoby fizyczne zamieszkałe w miastach – siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
- Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”. Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1658-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.  
 Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:  
 — do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny.  
 — do dnia 1 każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 70.-

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga  
 dr hab. Jan Kalinowski – z-ca red. nac.  
 mgr Krystyna Kordos – sekr. red.  
 dr hab. Marek Kordos – red. nac.  
 dr Tomasz Kwast  
 mgr inż. arch. Mariola Łotysz – ilustr.  
 dr Andrzej Majhofer  
 mgr Anna Rudnik  
 dr Jerzy Ryll  
 mgr Joanna Udalska

Adres Redakcji  
 ul. Noakowskiego 14  
 00-666 Warszawa  
 tel. 25-56-39

Warszawskie Wydawnictwo Prasowe  
 RSW „Prasa-Książka-Ruch”  
 Al. Jerozolimskie 125/127  
 02-017 Warszawa  
 tel. centr. 28-52-31

Biuro Reklamy Prasowej i Ogłoszeń  
 ul. Poznańska 38  
 00-689 Warszawa  
 tel. 28-23-09

Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd:  
 2.50 ark. druk;

papier offsetowy V kl. 70 g.  
 Wydrukowano w Prasowych  
 Zakładach Graficznych  
 RSW „Prasa-Książka-Ruch”  
 w Łodzi, ul. Armii Czerwonej 28  
 Nr zam. 2889/88, U-78  
 Skład systemem TeX  
 wykonała redakcja.

# Czy kilogram pierza jest cięższy od kilograma ołowiu?

Doc. dr Tomasz HOFMOKL

Z powodu pomyłki arytmetycznej Newton doszedł do wniosku, że jest praktycznie niemożliwe doświadczalne wyznaczenie stałej grawitacji. Obliczył bowiem, że dwie kule o średnicy jednej stopy i o gęstości równej średniej gęstości Ziemi, umieszczone w odległości 1/4 cala i podlegające tylko sile wzajemnego przyciągania zetkną się dopiero po upływie miesiąca (poprawny wynik wynosi 5,5 minuty). Nawet cała góra nie wystarczy do wywołania jakiegokolwiek mierzalnego efektu. Zdanie tak wielkiego autorytetu, jakim był Newton, nie zachęcało do wykonywania pomiarów. Dopiero w 50 lat później francuski geofizyk, P. Bouger, wykonał pomiary odchylenia od pionu linki obciążonej ołowiem, umieszczonej w pobliżu ściany skalnej na stokach Chimborazo w Andach. Pierwsze pomiary laboratoryjne wykonane za pomocą wagi skręceń przez Henry'ego Cavendisha zostały opublikowane w 1798 r. Dopiero jednak pod koniec XIX wieku uznano wyższość precyzji pomiarów laboratoryjnych nad wynikami uzyskanymi metodami geofizycznymi.



## Rozwiązanie zadania M 523.

Każda liczba ze zbioru  $A$  jest postaci

$$(*) \quad k_1(1+2^{-n_1}) + \dots + k_m(1+2^{-n_m}),$$

gdzie  $k_1, \dots, k_m, n_1, \dots, n_m$  są naturalne. Rozpatrujemy zbieżny ciąg liczb postaci (\*). W szczególności jest on ograniczony przez pewną liczbę  $M$ , zatem dla każdego wyrazu ciągu mamy w przedstawieniu (\*)  $k_1 + \dots + k_m \leq M$ . Wynika stąd, że istnieje podciąg, dla którego  $k_1, \dots, k_m$  są takie same – istotnie, jest tylko skończenie wiele możliwych kombinacji tych liczb.

Ograniczmy się więc teraz do takiego podciągu. Dla uproszczenia nazwijmy go  $(x_r)$ . Mamy

$$x_r = k_1(1+2^{-n_1 \cdot r}) + \dots + k_m(1+2^{-n_m \cdot r}).$$

Rozpatrzmy ciąg  $(n_{1,r})_{r=1}^{\infty}$ . Są dwie możliwości: albo zawiera on podciąg rozbieżny do nieskończoności, albo jest ograniczony i wtedy zawiera podciąg stały. W obu wypadkach jednak można wybrać podciąg  $(r_j)$ , dla którego granica składnika

$$k_1(1+2^{-n_{1,r_j}})$$

jest dwójkowo wymierna. Powtarzając to rozumowanie dla kolejnych składników (tj. wybierając odpowiedni podciąg z podciągu) otrzymujemy podciąg wyjściowego ciągu, zbieżny do granicy dwójkowo-wymiernej, co kończy dowód.

Tytuł wydaje się całkowicie bezsensowny, przypomina stary i dobrze znany dowcip z ławy szkolnej. Moglibyśmy równie dobrze postawić pytanie „Co spada prędzej: pierze czy ołów?” mając na myśli, oczywiście, spadek w próżni, czyli w warunkach pozwalających zaniedbać opory ruchu. Bezsensowność takich pytań wynika z dobrze ugruntowanego przekonania, że masa bezwładna i masa grawitacyjna są tożsame. Co więcej, niektórzy z Was przypominają sobie słynne doświadczenia węgierskiego fizyka, barona Rolanda Eötvösa (1848 - 1919), który za pomocą skonstruowanej przez siebie wagi skręceń badał oddziaływanie grawitacyjne wywierane przez Ziemię na różne substancje. Przez wiele dziesiątków lat sytuacja była całkiem prosta – we wszystkich doświadczeniach przyciąganie grawitacyjne Ziemi okazywało się nie zależeć od składu chemicznego (czy atomowego) przyciąganej substancji. Być może tak jest naprawdę, ale tylko być może. Właśnie to „być może” skłoniło mnie do napisania tego artykułu. To, co chcę Wam opowiedzieć, będzie reportażem z fragmentu meczu „fizyka przeciwko przyrodzie” i to bez ostatecznego wyniku zmagają.

Użyłem wyrażenia reportaż, ale właśnie takie skojarzenie nasunęło mi się, gdy pod koniec 1987 roku w czasie rutynowego przeglądania czasopism zwróciłem uwagę na pojawiające się prace o tak zwanej piątej sile. Nic w tym jeszcze nie byłoby dziwnego, gdyby nie fakt, że jedne prace zaprzeczały wynikom innych prac. Można było nawet notować z miesiąca na miesiąc „stan meczu”: ile ukazało się prac za istnieniem piątej siły, a ile przeciwko tej hipotezie. Należy wspomnieć, że wszystkie prace, o których mówię, to prace eksperymentalne.

Pamiętamy z programu szkolnego prawo powszechnego ciężenia Newtona: dwa ciała o masach grawitacyjnych  $m_1$  i  $m_2$  przyciągają się z siłą  $F$  proporcjonalną do iloczynu mas i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu ich odległości  $r$  (współczynnik proporcjonalności  $G$  nosi nazwę stałej grawitacyjnej)

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

W ostatnich kilkunastu latach pomiary geofizyczne stałej  $G$  stały się na tyle dokładne, że można było je porównywać z wynikami doświadczeń laboratoryjnych. Okazało się, że między tymi pomiarami istnieje systematyczna różnica, na tyle niewielka, że chętnie uznaloby się ją za skutek nieznanymi błędów doświadczalnych. Tego nie można jednak zrobić, tym bardziej że istnieje dość zasadnicza różnica między pomiarami geofizycznymi i laboratoryjnymi. Te pierwsze operują odległościami od setek metrów do kilometrów, te drugie – najwyżej metrów. Stąd nasuwa się przypuszczenie, że to właśnie różnice odległości są odpowiedzialne za obserwowane różnice wyników.

Około 15 lat temu wielu badaczy zaczęło wysuwać hipotezę, że na odległościach dziesiątków do setek metrów można spodziewać się odstępstwa od newtonowskiego prawa grawitacji w postaci dodatkowej krótkozasięgowej siły. Nazwano ją piątą siłą, ponieważ gdyby istniała, byłaby przejawem nowego, piątego oddziaływania fundamentalnego (po czterech już znanych: grawitacyjnym, słabym, elektromagnetycznym i silnym). W pierwszym przybliżeniu potencjał grawitacyjny można przedstawić w postaci

$$V = \frac{G_{\infty} \cdot m}{r} \{1 + \alpha \cdot \exp(-r/\delta)\},$$

gdzie  $\delta$  jest zasięgiem piątej siły, a stała  $\alpha$  określa jej udział w stosunku do oddziaływania newtonowskiego.  $G_{\infty}$  jest stałą grawitacyjną na bardzo dużych odległościach ( $r \gg \delta$ ). Jeżeli zasięg oddziaływania jest dużo większy niż odległość mas przy laboratoryjnym wyznaczaniu stałej grawitacji  $G_{lab}$ , czyli gdy  $\delta \gg r$ , wtedy czynnik  $\exp(-r/\delta)$  jest bliski jedności i zależność  $G_{\infty}$  od  $G_{lab}$  przybiera przybliżoną postać:

$$G_{lab} = G_{\infty} \cdot (1 + \alpha).$$

Oznacza to, że pomiary laboratoryjne dają nieprawdziwą wartość stałej grawitacji. Propozycja zaiste rewolucyjna. Nie dość, że wprowadzamy nowe, nie znane dotychczas oddziaływanie elementarne, to żądamy, aby obliczyć jeszcze raz masy wszystkich ciał niebieskich, których wyznaczenie opiera się przecież na znajomości tej stałej. Nie warto więc czekać na „ostateczne” ustalenie, jak to jest z piątą siłą, ale uchwycić życie na gorąco i na przykładzie prac, które ukazały się w 1987 roku, prześledzić, co się w tej dziedzinie dzieje.

W styczniu 1987 ukazują się artykuł przeglądowy (1), w którym przedstawione są wyniki prac wykonywanych metodami geofizycznymi. Przyjrzyjmy się bliżej jednej z metod pomiarowych.

W miarę zagłębiania się w kierunku środka Ziemi oddziaływanie grawitacyjne ulega zmianie, gdyż w dowolnym punkcie pochodzi od całej masy Ziemi, która znajduje się poniżej tego punktu oraz od tej części Ziemi, która znajduje się ponad. Szybkość zmian przyspieszenia spadku swobodnego  $g$ , przy założeniu stałej gęstości Ziemi  $d$ , można zapisać w postaci:

$$\frac{dg}{dr} = -\frac{2g}{r} + 4\pi Gd.$$

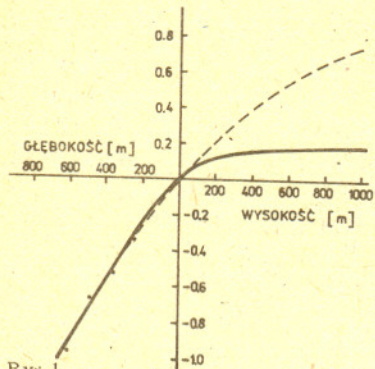
Dokonując pomiarów przyspieszenia ziemskiego  $g$  w głębokiej sztolni kopalni na różnych głębokościach możemy wyznaczyć stałą  $G$ . Wzór musi ulec, oczywiście, modyfikacji, aby uwzględnić niejednorodność budowy Ziemi. Najnowsze pomiary w sztolniach kopalni pochodzą z obszaru Mount Isa oraz Hilton w północno-zachodnim Queensland. Wartości przyspieszenia grawitacyjnego, zmierzone na różnych głębokościach, porównano z przyspieszeniem grawitacyjnym, obliczonym dla tej samej głębokości, przy założeniu, że stała grawitacji  $G = G_{tab}$ . Różnicę  $\Delta g$  wartości zmierzonej i obliczonej, wyrażoną w jednostkach miligalach ( $1 \text{ Gal} = 1 \text{ cm/s}^2$ ), pokazano na rysunku 1 w zależności od głębokości. Widać wyraźnie, że pomiary i obliczenia różnią się, ale można się też łatwo przekonać, że dane nie pozwalają jednoznacznie wyznaczyć zasięgu oddziaływania  $\delta$ . Krzywa ciągła jest wynikiem „dopasowania” z parametrami  $\alpha = -0,007656$ ,  $\delta = 200 \text{ m}$ , natomiast krzywa przerywana obliczona jest dla wartości parametrów  $\alpha = -0,010216$ ,  $\delta = 1000 \text{ m}$ .

Przeczytanie artykułu (1) właściwie przekonuje czytelnika, że „coś w tym jest”. W dodatku autorzy cytują wcześniejszą pracę (2) Fischbacha i współpracowników, w której po powtórny przeanalizowaniu wyników doświadczenia Eötvösa również stwierdzono istnienie krótkozasięgowej siły. „Kibice” piątej siły mogą być więc pełni optymizmu.

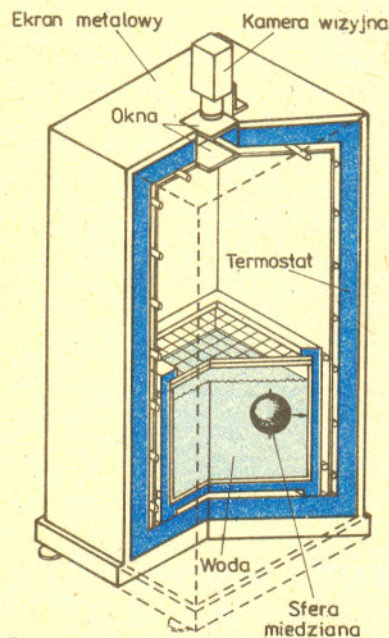
W marcu 1987 roku w tym samym numerze *Physical Review Letters* pojawiają się dwa artykuły (3,4). W pierwszym z nich opisano bardzo pomysłowy zestaw doświadczalny, w którym sprawdzano, czy istnieje różnica oddziaływania grawitacyjnego dwóch substancji o różnym stosunku liczby barionów na jednostkę masy – miedzi i wody. Urządzenie składające się z wydrążonej kuli miedzianej swobodnie pływającej w wodzie (patrz rys. 2) umieszczono nad brzegiem przepaści (161 m) w New Jersey nad rzeką Hudson. Naruszało to symetrię sił grawitacyjnych. Od strony przepaści było mniej materii i „nie miało co przyciągać”. Jeżeli wypadkowe oddziaływanie grawitacyjne otaczających mas skalnych inaczej działałoby na kulę niż na wodę, to kula powinna powoli płynąć w kierunku jednej ze ścianek. Takie zjawisko zaobserwowano. Kula poruszała się z przyspieszeniem  $(8,5 \pm 1,3) \cdot 10^{-8} \text{ cm/s}^2$  oddalając się od klifu. Autorzy dochodzą do wniosku, że wyniki doświadczenia są zgodne z istnieniem piątej siły, przy czym jeżeli zasięg  $\delta$  zawarty jest w granicach od 5 do 100 m, to  $\alpha \cdot \delta = 1,2 \pm 0,4 \text{ m}$ .

Jak widać, „kibice” piątej siły mogą zacierać ręce, ale tylko do czasu rzucenia okiem na następny, sąsiadujący artykuł. Autorzy drugiej pracy dochodzą do wniosku przeciwnego: nie zaobserwowano niczego, co mogłoby świadczyć o istnieniu piątej siły. Pomiary wykonywano inną metodą. Rysunek 3 ilustruje zasadę pomiaru. Wykorzystano w nim wagę skręceń umieszczoną na zboczach wzgórza w Laboratorium Fizyki Jądrowej Uniwersytetu w Seattle. Wagę skręceń obciążają dwa walce z miedzi i dwa walce z berylu (wyraźnie inny skład nukleonowy). Jeżeli siła działająca na beryl jest różna od siły działającej na miedź, to powinniśmy zaobserwować dodatkowy moment skracający. Całe urządzenie obracało się niezwykle powoli wokół osi pionowej dokonując jednego obrotu na tysiąc sekund. Moment skracający powinien zmieniać się sinusoidalnie w zależności od kąta  $\Phi$ , jaki tworzy układ z wybranym kierunkiem geograficznym. Wyniki pomiarów są przedstawione na rysunku 4. Krzywa ciągła pokazuje przewidywania dla wartości  $\alpha = 10^{-3}$  i  $\delta = 100 \text{ m}$ . Nawet najbardziej zagorzały „kibic” piątej siły nie powie, że wyniki podtrzymują tę hipotezę. Stan meczu 2:1 na korzyść piątej siły.

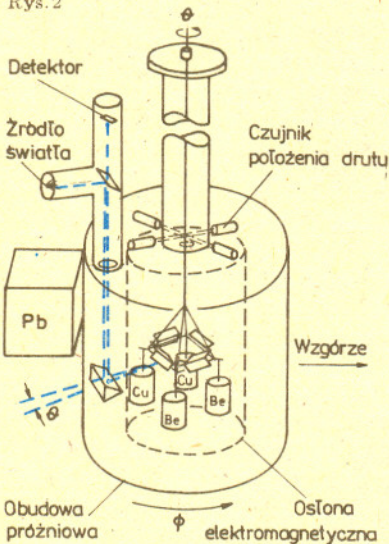
Dziesiątego sierpnia ukazuje się praca (5) pod tytułem *Test Galileusza piątej siły*. Powtórzono w nim słynne doświadczenie Galileusza, który badał spadek różnych ciał z krzywej wieży w Pizie. Eksperyment był podobny, tylko pomiar przyspieszenia ziemskiego, a raczej pomiar różnicy przyspieszeń, z jakimi spadają dwa różne materiały: miedź i uran, był przeprowadzony z maksymalną, osiągalną obecnie precyzją.



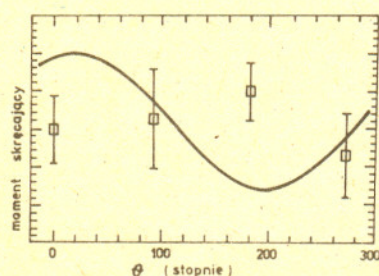
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

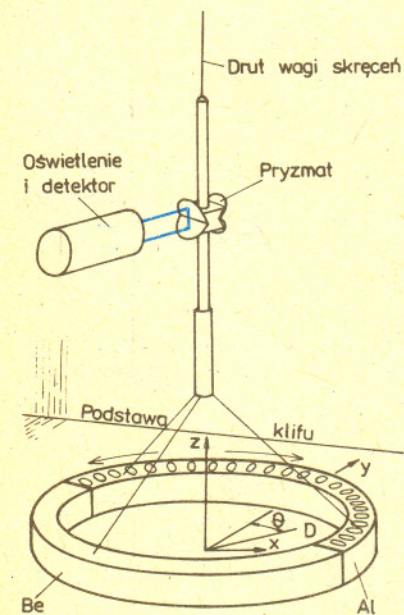
- (1) F.D. Stacey, G.J. Tuck, G.I. Moore, S.C. Holding, B.D. Goodwin. R. Zhou, *Reviews of Modern Physics* Vol 59(1987)157.
- (2) E. Fischbach, D. Sudarsky, A. Szafer, C. Talmadge, S.H. Arosen. *Physical Review Letters* 56(1986)3.
- (3,4) P. Thieberger. *Physical Review Letters* 58(1987) 1066 oraz C.W. Stubbs, E.G. Adelberger, F.J. Raab, J.H. Gundlach, B.R. Heckel, K.D. McMurry, H.E. Swanson. R. Watanabe, *Physical Review Letters* 58(1987)1070.
- (5) T.M. Niebauer, M.P. McHugh, J.E. Faller, *Physical Review Letters* 59(1987)609.
- (6) A.T. Hsui, *Science* 237(1987)881.
- (7) E.G. Adelberger, C.W. Stubbs, W.F. Rogers, F.J. Raab, B.R. Heckel, J.H. Gundlach, H.E. Swanson. R. Watanabe *Physical Review Letters* 59(1987)849.
- (8) P.E. Boynton, D. Crosby, P. Ekström, A. Szumilo. *Physical Review Letters* 59(1987)1385.

## Niech żałują ci, co nie byli

W dniach 14-19 lipca 1988 r. w Działdowie odbył się I Ogólnopolski Zlot Młodzieży Szkół Średnich - Miłośników Matematyki. Co prawda uczestnicy spoza Działdowa nie dopisali, ale impreza była niezwykle udana. Pokazała, że matematyka może być nauką przyjemną i że można się nią bawić także w czasie wakacji. Za zainicjowanie i zorganizowanie tak wspaniałej imprezy serdecznie dziękuję nauczycielowi matematyki z Liceum Ogólnokształcącego w Działdowie, panu magistrowi Piotrowi Szymaniakowi.

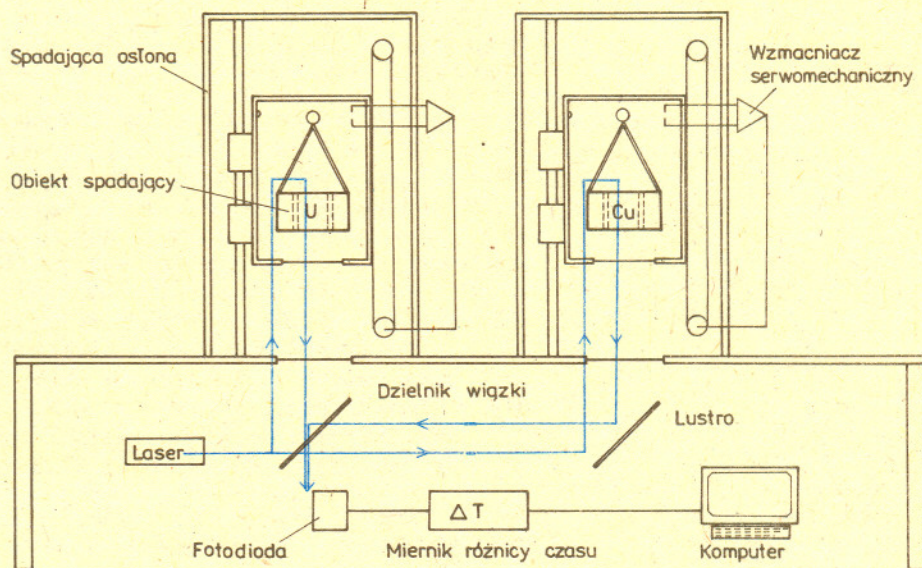
A wszystkim nastolatkom - Czytelnikom *Delty* gorąco radzę uważnie przeglądać numery *Delty*. Może wkrótce ukaże się ogłoszenie o następnym tego typu spotkaniu.

Jarosław WRÓBLEWSKI



Rys.6

Rysunek 5 pokazuje schematycznie układ laserowego interferometru, który pozwalał na pomiar bezwzględny przyspieszenia z dokładnością  $0,3 \mu\text{Gal}$ . Różnica przyspieszeń obiektu spadającego i uranowego wynosiła  $0,13 \pm 0,50 \mu\text{Gal}$ , co - tłumacząc na znane nam parametry dotyczące piątej siły - daje ograniczenie:  $\alpha \cdot \delta = 1,6 \pm 6,0 \text{ m}$ . Autorzy piszą: *ten zerowy wynik daje nowe ograniczenie na zasięg i moc proponowanej piątej siły*. Wynik meczu: 2:2.



Rys.5

W czasopiśmie *Science* pod datą 21 sierpnia ukazuje się artykuł (6), z którego przytoczymy kilka tylko zdań: *Donoszono, że wyznaczana geofizycznie z pomiarów grawimetrycznych w kopalniach australijskich stała grawitacji Newtona jest systematycznie o 1 do 2% większa niż wartość laboratoryjna. Dla sprawdzenia, czy w innym środowisku geologicznym obserwuje się podobny efekt, dokonano pomiarów grawimetrycznych w odwiertach w Michigan. Choćby wyniki nie pozwalają na sformułowanie ostatecznych wniosków z powodu dużych niepewności wyznaczenia masy w skałi geofizycznej, to są one na ogół zgodne z wynikami australijskimi. No i co? Wynik chyba remisowy. Stan meczu 2,5:2,5.*

Dwudziestego czwartego sierpnia ukazuje się praca (7), w której autorzy dyskutują różne możliwości wyjaśnienia sprzecznych wyników prac (3,4). Może dałoby się pogodzić oba eksperymenty, gdyby piąta siła zależała od liczby barionów i od liczby leptonów (na przykład elektronów). W pracy (3) używano wody i miedzi, a w pracy (4) miedzi i berylu. Może to tłumaczy sprzeczność wyników obu eksperymentów. Przeprowadzają więc doświadczenie zamieniając miedź na aluminium, ale wynik jest dalej negatywny. Szala zwycięstwa przechyla się na stronę przeciwników piątej siły - 2,5:3,5.

28 września ukazuje się praca (8), w której autorzy tak piszą o swoich pomiarach: *Nasz przyrząd jest podobny do układu Eötvösa w tym, że zawiera złożony dipol zawieszony na wadze skręceń. Zamiast jednak mierzyć małe statyczne katowe przemieszczenia osi dipola skierowanej równoległe do ściany klifu (prostopadle do siły zależnej od składu substancji), obserwujemy tę siłę ustawiając oś dipola prostopadle do ściany klifu i mierząc okres oscylacji o niewielkiej ( $30^\circ$ ) amplitudzie. Następnie porównujemy ten okres z okresem wyznaczonym przy przeciwnym ustawieniu osi. Sytuację eksperymentalną ilustruje rysunek 6. Z porównania tych wyników można obliczyć wielkość piątej siły. Uzyskany wynik jest zdecydowanie znaczący statystycznie w granicach czterech odchyień standardowych.*

A więc wynik meczu nierozstrzygnięty 3,5:3,5. Nie wiemy, czy piąta siła istnieje, czy nie i od czego zależy.

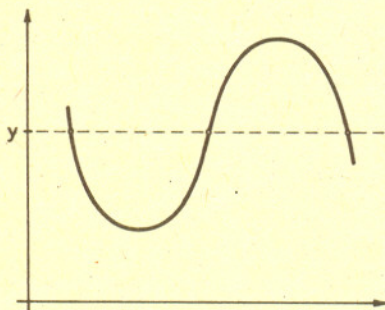
Na zakończenie można dodać, że grupa Boyntona zamierza przeprowadzić doświadczenie z pierścieniami (widocznymi na rysunku 6) z miedzi i polietyleniu i zaprosiła Stubbsa i Adelbergera do przeprowadzenia ich eksperymentów w tym samym miejscu, aby łatwiej było porównać rezultaty. Sądzę, że w ciągu kilku lat sprawa zostanie wyjaśniona. A jak, tego nikt nie wie.

# O funkcjach różniczkowalnych i hipotezie continuum

Dr Piotr  
ZAKRZEWSKI

Zobacz artykuł *O równoliczności zbiorów*, Delta 11(155)/1986.

Mamy tu na myśli system Zermelo i Fraenkla z aksjomatem wyboru (w skrócie ZFC).



Zbiór tych punktów  $y$  osi  $OY$ , dla których prosta przechodząca przez  $y$  i równoległa do osi  $OX$  przecina wykres funkcji  $f$  w „niewielu” punktach, jest „duży”, o ile  $f$  jest różniczkowalna.

Funkcja przyporządkowuje każdemu elementowi dziedziny dokładnie jeden element zbioru wartości. Intuicyjnie jest więc jasne, że zbiór wartości nie może mieć mocy większej niż zbiór argumentów.



Pierwszą funkcję przekształcającą prostą rzeczywistą  $\mathbf{R}$  na całą płaszczyznę skonstruował przed ponad stu laty Georg Cantor. Od tego czasu własności takich funkcji przyciągały uwagę wielu matematyków. Funkcja rzeczywista  $f$  o wartościach w płaszczyźnie może być w naturalny sposób utożsamiona z uporządkowaną parą funkcji  $\langle f_1, f_2 \rangle$ , jej współrzędnych, przyjmujących wartości rzeczywiste. Można więc mówić o ciągłości, różniczkowalności etc. funkcji  $f$  rozumiejąc przez to posiadanie tych własności przez obie jej współrzędne. Wiadomo więc na przykład, że odwzorowanie prostej na płaszczyznę może być ciągle, ale nie może być różniczkowalne.

W tym artykule zajmiemy się pytaniem następującym – czy istnieje funkcja przekształcająca prostą na płaszczyznę, taka, że w każdym punkcie co najmniej jedna z jej współrzędnych jest różniczkowalna? Problem sformułowany jest w języku analizy i od analizy można by oczekiwać jego rozwiązania. Rzeczywistość jest jednak inna: odpowiedzi na nasze pytanie nie daje nie tylko analiza, ale cała w ogóle matematyka oparta na przyjętym powszechnie za jej podstawę systemie aksjomatów teorii mnogości. Michał Morayne, młody matematyk wrocławski, udowodnił bowiem kilka lat temu, że istnienie szukanej przez nas funkcji jest równoważne słynnej hipotezie continuum! Sformułowana przez Cantora hipoteza continuum głosi, że każdy nieskończony podzbiór prostej jest bądź przeliczalny, bądź ma moc continuum. Wyniki Kurta Gödla (1940) i Paula J. Cohena (1963) pokazujące odpowiednio, że hipotezy continuum nie da się ani obalić, ani udowodnić w teorii mnogości, należą do największych osiągnięć matematyki XX wieku.

Co ma jednak wspólnego hipoteza continuum z funkcjami różniczkowalnymi? Punktem wyjścia do odpowiedzi na to pytanie jest następujące twierdzenie pochodzące od Stefana Banacha:

Jeśli funkcja  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  jest różniczkowalna na zbiorze  $A \subset \mathbf{R}$ , to zbiór wszystkich liczb  $y$ , dla których w zbiorze  $A$  istnieje co najwyżej przeliczalnie (tj. skończenie lub przeliczalnie) wiele takich  $x$ , że  $f(x) = y$ , ma moc continuum.

Powyższe twierdzenie pozwala na ujawnienie teoriomnogościowego charakteru rozważanego przez nas zagadnienia. Niech bowiem  $f = \langle f_1, f_2 \rangle$  będzie funkcją przekształcającą prostą na płaszczyznę i taką, że dla każdej liczby  $x$  istnieje  $f'_1(x)$  lub  $f'_2(x)$ . Oznaczmy przez  $D_i$  dla  $i = 1, 2$  zbiór punktów różniczkowalności funkcji  $f_i$ , a przez  $C_i$  zbiór wszystkich  $y \in \mathbf{R}$ , dla których istnieje co najwyżej przeliczalnie wiele takich  $x \in D_i$ , że  $f_i(x) = y$ . Skupmy naszą uwagę na zbiorze  $T = C_1 \times C_2$ . Ponieważ funkcja  $f$  jest „na”, to każdy element ze zbioru  $T$  jest postaci  $f(x)$  dla pewnego  $x \in \mathbf{R}$ . Jednocześnie wiemy, że  $\mathbf{R} = D_1 \cup D_2$ . Jeśli więc przez  $A'_i$  dla  $i = 1, 2$  oznaczymy zbiór wszystkich  $t \in T$ , takich, że  $t = f(x)$  dla pewnego  $x \in D_i$ , to będziemy mogli napisać, że  $T = A'_1 \cup A'_2$ . Weźmy teraz dowolną liczbę  $x_0$  i zapytajmy, ile jest w  $A'_1$  punktów o odciętej  $x_0$ . Otóż, jeśli  $\langle x_0, y \rangle$  jest jednym z nich, to z definicji zbioru  $A'_1$  wynika, że istnieje liczba  $z \in D_1$  taka, że  $x_0 = f_1(z)$  i  $y = f_2(z)$ . Takich liczb  $z$  może być jednak co najwyżej przeliczalnie wiele, bo  $x_0 \in C_1$ . Tym bardziej więc zbiór wszystkich punktów postaci  $f(z)$  jest co najwyżej przeliczalny. W analogiczny sposób można pokazać, że w zbiorze  $A'_2$  jest co najwyżej przeliczalnie wiele punktów o ustalonej rzędnej  $y_0$ . Zauważmy wreszcie, że na mocy cytowanego twierdzenia Banacha zbiory  $C_1$  i  $C_2$  mają moc continuum. Istnieją więc różnowartościowe funkcje  $h_1$  i  $h_2$  przekształcające zbiory  $C_1$  i  $C_2$ , odpowiednio, na  $\mathbf{R}$ . Funkcja  $h = \langle h_1, h_2 \rangle$  odwzorowuje wówczas wzajemnie jednoznacznie zbiór  $T$  na całą płaszczyznę, przy czym zbiory  $A'_1$  i  $A'_2$  przechodzą na pewne zbiory  $A_1$  i  $A_2$ . Zbiory te odgrywają, jak łatwo sprawdzić, taką rolę na płaszczyźnie, jaką zbiory  $A'_1$  i  $A'_2$  w zbiorze  $T$ . Mianowicie:

- (i) płaszczyzna jest sumą zbiorów  $A_1$  i  $A_2$ ,
- (ii) na każdej prostej pionowej jest co najwyżej przeliczalnie wiele punktów ze zbioru  $A_1$ , a na każdej prostej poziomej jest co najwyżej przeliczalnie wiele punktów ze zbioru  $A_2$ .

I tu dochodzimy do sedna: istnienie rozkładu płaszczyzny na dwa zbiory o powyższych własnościach jest, jak pokazał Waclaw Sierpiński, równoważne hipotezie continuum!

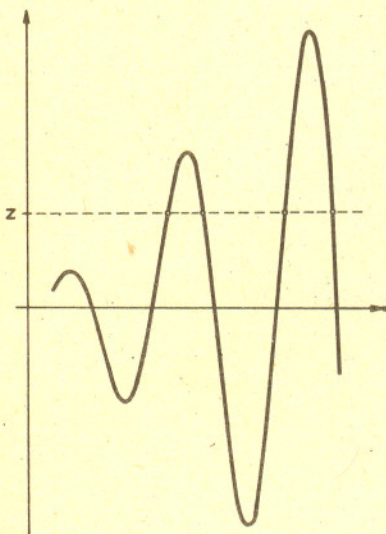
Powróćmy do twierdzenia Moraynego. Naszkicujemy tu dowód wynikania w jedną stronę. Przypuśćmy mianowicie, że hipoteza continuum jest fałszywa. Istnieje wówczas nieprzeliczalny podzbiór  $X$  osi odciętych nierównoliczny ze zbiorem  $\mathbf{R}$ , tj. mający od niego „mniej” elementów. Utwórzmy podzbiór  $Z$  płaszczyzny złożony ze wszystkich punktów leżących na pionowych prostych przechodzących przez zbiór  $X$ .

Zastanówmy się, jaka jest moc zbioru  $Z \cap A_1$ . Ponieważ przecięcie każdej prostej pionowej ze zbiorem  $A_1$  jest co najwyżej przeliczalny, więc zbiór  $Z \cap A_1$  jest sumą mniej niż continuum zbiorów co najwyżej przeliczalnych. Można dowiedzieć, że suma taka nie może mieć mocy continuum. Zrzutujmy teraz zbiór  $Z \cap A_1$  na oś rzędnych. Rzut ten tym bardziej nie może mieć mocy continuum (dlaczego?) i w szczególności na osi rzędnych istnieje liczba  $y$ , która do niego nie należy. Wynika stąd, że prosta pozioma  $L$  przechodząca przez  $y$  jest rozłączna ze zbiorem  $Z \cap A_1$ . Prosta  $L$  przecina więc zbiór  $Z$  wyłącznie w punktach należących do zbioru  $A_2$ . Z konstrukcji wynika jednak, że zbiór punktów przecięcia dowolnej prostej poziomej ze zbiorem  $Z$  jest równoliczny z  $X$ , a więc nieprzeliczalny. Otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem, że przecięcie zbioru  $A_2$  z każdą prostą poziomą jest co najwyżej przeliczalny.

Zakończyliśmy tym samym szkic dowodu pierwszej części twierdzenia Moraynego, czyli wykazaliśmy, że istnienie szukanej funkcji implikuje hipotezę continuum. Dowód implikacji przeciwnej wykorzystuje drugą, pozostawioną przez nas bez dowodu część cytowanego wyniku Sierpińskiego, że hipoteza continuum pociąga za sobą istnienie podzbiorów  $A_1$  i  $A_2$  płaszczyzny o własnościach (i) i (ii). Pokażemy zatem, jak za ich pomocą zdefiniować odpowiednią funkcję. Kładziemy najpierw:

$$f_1(x) = x \cdot \sin x \text{ dla } x \in (-1, \infty), \quad f_2(x) = x \cdot \sin x \text{ dla } x \in (-\infty, 1),$$

gdzie  $f_1, f_2$  mają być współrzędnymi definiwanej funkcji  $f$ . Dzięki takiemu określeniu w każdym punkcie co najmniej jedna z nich będzie różniczkowalna. Aby zbiorem wartości funkcji  $f$  była cała płaszczyzna, wystarczy zapewnić, by przekształcała ona przedział  $[1, +\infty)$  na zbiór  $A_1$ , a przedział  $(-\infty, -1]$  na zbiór  $A_2$ . Pokażemy, jak zrealizować pierwszy z tych celów, w przypadku drugiego postępowanie jest analogiczne. Weźmy więc dowolną liczbę  $z$  i niech  $X_z$  będzie zbiorem składającym się ze wszystkich liczb  $x$  z przedziału  $[1, \infty)$ , dla których  $x \cdot \sin x = z$ . Łatwo zauważyć, że  $X_z$  jest zbiorem przeliczalnym. Można go zatem przekształcić na co najwyżej przeliczalny z założenia zbiór wszystkich punktów ze zbioru  $A_1$  o odciętej  $z$ . Określmy więc funkcję  $f_2$  na zbiorze  $X_z$  tak, by to właśnie robiła. Sprawdzenie, że postępując w ten sposób dla wszystkich liczb  $z$ , zdefiniujemy poprawnie funkcję  $f_2$  na całym przedziale  $[1, \infty)$ , oraz że funkcja  $f = \langle f_1, f_2 \rangle$  przekształci ten przedział na zbiór  $A_1$ , pozostawiamy Czytelnikowi.



## Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

**M 523.** Niech  $A$  będzie najmniejszym zbiorem zawierającym liczby postaci  $1 + 2^{-n}$  dla  $n = 1, 2, \dots$  i zamkniętym ze względu na dodawanie. Udowodnić, że granica ciągu liczb  $z$   $A$  musi być dwójkowo-wymierna (czyli jest postaci  $k \cdot 2^{-n}$ , gdzie  $k, n$  są całkowite nieujemne).

Rozwiązanie na str. 1

**M 524.** Niech  $p$  będzie liczbą pierwszą. Przypuśćmy, że  $n!$  dzieli się przez  $p^k$ , ale nie dzieli się przez  $p^{k+1}$ . Udowodnić, że

$$k = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \frac{n}{p^j} \right].$$

Rozwiązanie na str. 11

**M 525.** Niech  $a, b, n$  będą naturalne. Przypuśćmy, że  $a^n - b^n$  dzieli się przez  $n$ . Udowodnić, że  $(a^n - b^n)/(a - b)$  również dzieli się przez  $n$ .

Rozwiązanie na str. 15

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

**F 256.** Prędkość rozchodzenia się sprężystych fal podłużnych wynosi  $\sqrt{\frac{k}{\rho}}$ , gdzie  $k$  nosi nazwę modułu ściśliwości, a  $\rho$  jest gęstością ośrodka. Na podstawie prawa Hooke'a dla sprężystych odkształceń objętościowych wykazać, że prędkość rozchodzenia się fali podłużnej można określić również jako  $\sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta \rho}}$ , gdzie  $\Delta p$  i  $\Delta \rho$  oznaczają zmianę ciśnienia i gęstości.

Rozwiązanie na str. 11

**F 257.** Na podstawie wyników poprzedniego zadania obliczyć prędkość rozchodzenia się fal podłużnych w atmosferze w warunkach normalnych. Zakładamy, że proces rozchodzenia się fali akustycznej w atmosferze jest procesem adiabatycznym, tj. zależność ciśnienia gazu od jego objętości wyraża się wzorem  $pV^\kappa = \text{const}$ ; dla powietrza w warunkach normalnych  $\kappa = 1,40$ .

Rozwiązanie na str. 11



# Numeryczna droga do solitonów

Dr hab. Ryszard Kutner

Termin „soliton” – w dosłownym tłumaczeniu „samotnik” – pojawił się po raz pierwszy w pracy N. J. Zabusky’ego i M. D. Kruskala w roku 1965 (praca *Interaction of „solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states* opublikowana w *Physical Review Letters* 15, str. 240). Autorzy znaleźli na drodze czysto numerycznej rozwiązanie równania Kortewega – de Vriesa, mające postać zlokalizowanego przestrzennie „garbu” przesuwanego się bez zmiany amplitudy i kształtu. Dwa takie rozwiązania, biegnące naprzeciw siebie, zachowują się jak duchy: przenikają się wzajemnie bez zmian kształtów.

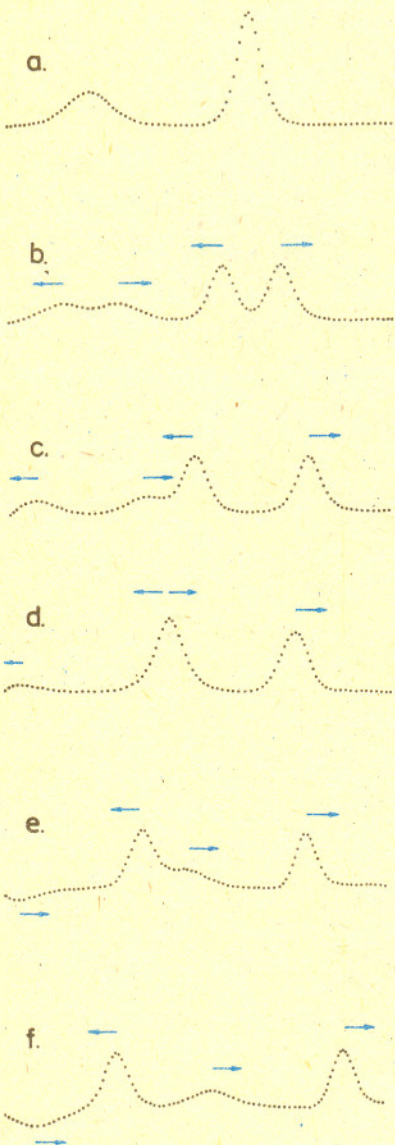
W poprzednim artykule (*Delta* 9/1988) omówiliśmy tzw. problem FPU, czyli zagadnienie ekwipartycji energii w jednowymiarowym łańcuchu, złożonym z drgających mas połączonych nieliniowymi (nie spełniającymi prawa Hooke’a) sprężynkami. Jak się okazało już po kilku latach, problem FPU otworzył prawdziwą puszkę Pandory z „nieliniowymi demonami”. O jednym z takich demonów – solitonie – opowiemy w tym artykule. Oczywiście, o solitonach mówiono i pisano już wiele – chcielibyśmy tu przedstawić przede wszystkim krótki program pozwalający „puszczać” solitony i badać ich własności za pomocą podręcznego mikrokomputera.

## Postawienie problemu

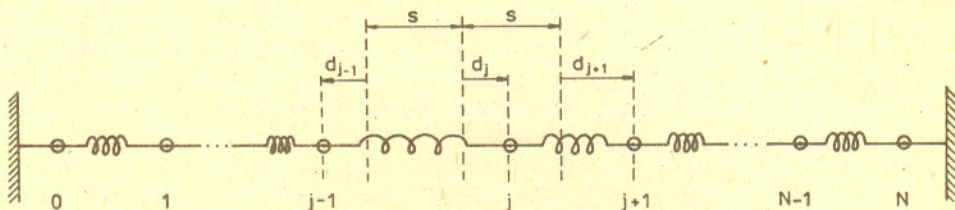
Będziemy kontynuowali wątek związany z jednowymiarowymi łańcuchami, zakładając tym razem, że siła, z jaką masa o numerze  $j + 1$  działa na masę  $j$  (rys.1), jest postaci:

$$F(d_{j+1} - d_j) = -a\{\exp[-b \cdot (d_{j+1} - d_j)] - 1\}$$

(masy o numerach  $j = 0$  i  $j = N$  są, jak widać, unieruchomione).



Rys.2. Seria charakterystycznych ujęć migawkowych (będących kopiami ekranu) pokazujących przede wszystkim zderzenie dwóch solitonów.



Rys.1

Łańcuch tego typu nosi nazwę sieci Tody. Moglibyśmy, rzecz jasna, przyjąć tak jak w poprzednim artykule, że  $F(d_{j+1} - d_j) = \frac{k}{s}(d_{j+1} - d_j) + \frac{k}{s}\alpha(d_{j+1} - d_j)^2$ . Sieć Tody ma jednak tę własność, że rozwiązania jej równań ruchu można wyrazić przez funkcje elementarne, a w granicznym przypadku ciągłego rozkładu mas równania ruchu przechodzą w równanie Kortewega – de Vriesa. Dla niewielkich wychyleń mas z położen równowagi w obu przypadkach siły są z dobrym przybliżeniem jednakowe (o ile założymy, że  $\frac{k}{s} = a \cdot b > 0$  i  $\alpha = -b/2$ ). Zapiszmy równania ruchu w najczęściej używanej postaci:

$$(1) \quad m \frac{d^2 y_j}{dt^2} = F(y_{j-1}) + F(y_{j+1}) - 2F(y_j),$$

gdzie  $y_j = d_j - d_{j-1}$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$  oraz  $y_0 = y_{N+1} = 0$ . Analogiczne równania ruchu dotyczą także drgań skrętnych dysków połączonych w łańcuchach nieliniowymi sprężynkami; mogą też być przepisane w języku charakterystycznym dla obwodów elektrycznych (tzw. równania Hiroty) lub zagadnień ekologicznych (tzw. równanie Volterry). Naszym celem jest teraz numeryczne rozwiązanie układu równań (1).

## „Puszczamy” solitony

Skorzystamy z metody, którą z powodzeniem stosowaliśmy poprzednio dla problemu FPU (tzw. metoda ekstrapolacji parabolicznej). Poszukujemy rozwiązania  $y_j$  w kolejnych chwilach odległych  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Algorytm nasz ma więc postać:

$$(2) \quad y_j(t_{n+1}) = 2y_j(t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{m} \{F(y_{j+1}(t_n)) + F(y_{j-1}(t_n)) - 2F(y_j(t_n))\} - y_j(t_{n-1}),$$

gdzie  $y_j(t_n)$  oznacza, oczywiście, wartości  $y_j$  w chwili  $t_n$ . Aby algorytm mógł wystartować, należy do układu równań (2) dołączyć odpowiednie warunki początkowe. Są one teraz bardziej skomplikowane niż w problemie FPU. W chwili początkowej wzbudzimy dwa solitony, tak jak to pokazano na rysunku 2a. Pionowo odłożona jest siła, z jaką masa o numerze  $j - 1$  działa na masę o numerze  $j$ , a masy znajdują się w punktach odpowiadających rzutom prostopadłym kropek rysunku na prostą poziomą. W tym miejscu Czytelnik mógłby zadać pytanie, dlaczego wykreślamy siłę, a nie wychylenie kolejnych mas z położen równowagi. Odpowiedź jest prosta – oczywiście – można również wykreślać wychylenia, tym bardziej że program prawie je oblicza, zdecydowaliśmy się jednak na pokazanie wartości siły, dla uzmysłowienia,

że ona także może rozchodzić się wzdłuż łańcucha w postaci solitonów. Zmodyfikowanie programu tak, aby wykrywał wychylenia, pozostawiamy jako ćwiczenie.

Proszę zauważyć, że znając wartości siły w chwili początkowej  $t_0 = 0$  dla każdego  $j$  możemy już odczytać potrzebne dalej wartości  $y_j(0)$ . W programie jest to wykonane w linii 400, w której zmienna  $u(j)$  oznacza właśnie wyjściową wartość  $y_j(0)$ . Do wyznaczenia potrzebnych nam jeszcze wartości  $y_j(t_1)$  (oznaczonej w programie jako  $y(j)$ ) korzystamy z tzw. prostej metody Eulera i znajdujemy prędkość (oznaczoną jako  $w(j)$ ) w połowie przedziału czasowego  $\Delta t$  (oznaczonego  $dt$ ). Następnie możemy napisać, że  $y(j) = u(j) + w(j) \cdot dt$ , co wykonuje się w linii 470.

Obliczając siłę w chwili początkowej korzystamy z dosyć skomplikowanego wyrażenia:

$$-F(y_j(0)) = a \cdot \{\exp(-by_j(0)) - 1\} = \frac{d^2}{dt^2} S_j \Big|_{t=0},$$

gdzie

$$S_j = \frac{m}{b} \ln \{ \cosh[k_1(j - j_1) - \beta_1 t] + B_w \cosh[k_2(j - j_2) - \beta_2 t] \}.$$

$$\beta_1 = 2\sqrt{\frac{ab}{m}} \sinh \frac{k_2}{2} \cosh \frac{k_2}{2}.$$

$$\beta_2 = 2\sqrt{\frac{ab}{m}} \sinh \frac{k_1}{2} \cosh \frac{k_2}{2}.$$

$$B_w = \cosh \frac{k_1}{2} \cosh \frac{k_2}{2}.$$

Wzór ten potwierdza fakt, że nie jest łatwo wzbudzić w ośrodku nieliniowym i dyspersyjnym pojedyncze solitony – muszą być spełnione specjalne warunki początkowe. W załączonym programie sytuacja początkowa jest przygotowywana między liniami 330 i 480. Zastosowano przy tym następujące oznaczenia:  $betj = \beta_j$ ,  $j = 1, 2$ ,  $FNS(\dots) = \sinh(\dots)$ ,  $FNC(\dots) = \cosh(\dots)$ ,  $z(j) = \frac{d^2}{dt^2} S_j \Big|_{t=0}$ , a pozostałe oznaczenia są identyczne jak w tekście artykułu.

Jedynie przygotowując sytuację początkową skorzystaliśmy ze specyficznych (danych wyżej) wzorów. W każdej następnej chwili rozwiązanie znajdowane jest za pomocą zamieszczonego algorytmu (2).

Trzeba zaznaczyć, że obserwujemy dwie pary solitonów, z których każda ma prędkości (oznaczone schematycznie strzałkami) skierowane przeciwnie. Szczególnie znaczące są ujęcia migawkowe przedstawione na rysunku 2 c – e. Jak widać, oba **solitony centralne wyszły ze zderzenia bez szwanku**. Przy okazji można zaobserwować odbicie najbardziej na lewo wysuniętego solitonu. Chcielibyśmy polecić dłuższą obserwację tego, co dzieje się w układzie. Sądzymy, że program dobrze nadaje się do samodzielnego eksperymentowania. Sugerujemy ponadto wykonanie kilku ćwiczeń, a mianowicie:

- napisanie programu (lub zmodyfikowanie naszego) symulującego ruch pojedynczego solitonu,
- to samo dla dwóch (a nie – jak u nas – czterech) solitonów,
- dołączenie podprogramu pokazującego, jak zmieniają się w czasie wychylenia atomów z położenia równowagi towarzyszące biegnącemu solitonowi (reprezentującym, jak już mówiliśmy, odpowiednią siłę),
- wprowadzenie okresowych, a nie – jak u nas – odbijających, warunków brzegowych.

Mamy nadzieję, że zachęciliśmy Czytelników do samodzielnego działania.

Na zakończenie pragniemy dodać, że historia solitonów zaczęła się, jak się powszechnie uważa, w 1844 roku, kiedy to ukazała się pierwsza dwustronicowa wzmianka opublikowana przez J. Scott-Russella w materiałach Królewskiego Towarzystwa w Edynburgu, dotycząca dziwnej fali czy też garbu. Owa dziwna lub raczej samotna fala została wzbudzona na wąskim kanale w Szkocji przez łódkę, która specyficznie, jakoś inaczej niż zwykle, uderzyła o wodę. Scott-Russell gonił konno tę falę przez kilka kilometrów wzdłuż kanału nie obserwując żadnych znaczących zmian jej kształtu i prędkości.

Opis ten jako żywo pasuje do tego, co dzisiaj już wiemy o solitonach. Wiedzę tę mogliśmy znacznie rozbudować właśnie dzięki zastosowaniu metod numerycznych oraz komputerów. Trzeba podkreślić, że wiedza o solitonach to nie jest tylko sztuka dla sztuki. Znalazła ona już swoje zastosowania np. w badaniu jednowymiarowych zjawisk zachodzących w plazmie, w kryształach, w ferromagnetykach, a także w zjawiskach meteorologicznych itp.

```

0010 REM ***** WYJŚCIE *****
0020 REM ***** SOLITONY *****
0030 REM ***** MARIANNA *****
0040 DIM w(128): REM Prędkości
0050 DIM u(128): REM Potencjał
0060 DIM y(128): REM Wychylenia
0070 DIM x(128): REM Potencjał
0080 DIM z(128): REM Wychylenia
0090 LET N=128: REM Liczba atomów
0100 LET m=1: REM Masa
0110 LET dt=0.05: REM Krok czasowy
0120 LET a=1: REM Element
0130 LET b=1: REM Element
0140 LET c=1: REM Element
0150 LET d=1: REM Element
0160 LET e=1: REM Element
0170 LET f=1: REM Element
0180 LET g=1: REM Element
0190 LET h=1: REM Element
0200 LET i=1: REM Element
0210 LET j=1: REM Element
0220 LET k=1: REM Element
0230 LET l=1: REM Element
0240 LET m=1: REM Element
0250 LET n=1: REM Element
0260 LET o=1: REM Element
0270 LET p=1: REM Element
0280 LET q=1: REM Element
0290 LET r=1: REM Element
0300 LET s=1: REM Element
0310 LET t=1: REM Element
0320 LET u=1: REM Element
0330 LET v=1: REM Element
0340 LET w=1: REM Element
0350 LET x=1: REM Element
0360 LET y=1: REM Element
0370 LET z=1: REM Element
0380 LET aa=1: REM Element
0390 LET bb=1: REM Element
0400 LET cc=1: REM Element
0410 LET dd=1: REM Element
0420 LET ee=1: REM Element
0430 LET ff=1: REM Element
0440 LET gg=1: REM Element
0450 LET hh=1: REM Element
0460 LET ii=1: REM Element
0470 LET jj=1: REM Element
0480 LET kk=1: REM Element
0490 LET ll=1: REM Element
0500 LET mm=1: REM Element
0510 LET nn=1: REM Element
0520 LET oo=1: REM Element
0530 LET pp=1: REM Element
0540 LET qq=1: REM Element
0550 LET rr=1: REM Element
0560 LET ss=1: REM Element
0570 LET tt=1: REM Element
0580 LET uu=1: REM Element
0590 LET vv=1: REM Element
0600 LET ww=1: REM Element
0610 LET xx=1: REM Element
0620 LET yy=1: REM Element
0630 LET zz=1: REM Element
0640 LET aaa=1: REM Element
0650 LET bbb=1: REM Element
0660 LET ccc=1: REM Element
0670 LET ddd=1: REM Element
0680 LET eee=1: REM Element
0690 LET fff=1: REM Element
0700 LET ggg=1: REM Element
0710 LET hhh=1: REM Element
0720 LET iii=1: REM Element
0730 LET jjj=1: REM Element
0740 LET kkk=1: REM Element
0750 LET lll=1: REM Element
0760 LET mmm=1: REM Element
0770 LET nnn=1: REM Element
0780 LET ooo=1: REM Element
0790 LET ppp=1: REM Element
0800 LET qqq=1: REM Element
0810 LET rrr=1: REM Element
0820 LET sss=1: REM Element
0830 LET ttt=1: REM Element
0840 LET uuu=1: REM Element
0850 LET vvv=1: REM Element
0860 LET www=1: REM Element
0870 LET xxx=1: REM Element
0880 LET yyy=1: REM Element
0890 LET zzz=1: REM Element
0900 LET aaa=1: REM Element
0910 LET bbb=1: REM Element
0920 LET ccc=1: REM Element
0930 LET ddd=1: REM Element
0940 LET eee=1: REM Element
0950 LET fff=1: REM Element
0960 LET ggg=1: REM Element
0970 LET hhh=1: REM Element
0980 LET iii=1: REM Element
0990 LET jjj=1: REM Element
1000 LET kkk=1: REM Element
1010 LET lll=1: REM Element
1020 LET mmm=1: REM Element
1030 LET nnn=1: REM Element
1040 LET ooo=1: REM Element
1050 LET ppp=1: REM Element
1060 LET qqq=1: REM Element
1070 LET rrr=1: REM Element
1080 LET sss=1: REM Element
1090 LET ttt=1: REM Element
1100 LET uuu=1: REM Element
1110 LET vvv=1: REM Element
1120 LET www=1: REM Element
1130 LET xxx=1: REM Element
1140 LET yyy=1: REM Element
1150 LET zzz=1: REM Element
1160 LET aaa=1: REM Element
1170 LET bbb=1: REM Element
1180 LET ccc=1: REM Element
1190 LET ddd=1: REM Element
1200 LET eee=1: REM Element
1210 LET fff=1: REM Element
1220 LET ggg=1: REM Element
1230 LET hhh=1: REM Element
1240 LET iii=1: REM Element
1250 LET jjj=1: REM Element
1260 LET kkk=1: REM Element
1270 LET lll=1: REM Element
1280 LET mmm=1: REM Element
1290 LET nnn=1: REM Element
1300 LET ooo=1: REM Element
1310 LET ppp=1: REM Element
1320 LET qqq=1: REM Element
1330 LET rrr=1: REM Element
1340 LET sss=1: REM Element
1350 LET ttt=1: REM Element
1360 LET uuu=1: REM Element
1370 LET vvv=1: REM Element
1380 LET www=1: REM Element
1390 LET xxx=1: REM Element
1400 LET yyy=1: REM Element
1410 LET zzz=1: REM Element
1420 LET aaa=1: REM Element
1430 LET bbb=1: REM Element
1440 LET ccc=1: REM Element
1450 LET ddd=1: REM Element
1460 LET eee=1: REM Element
1470 LET fff=1: REM Element
1480 LET ggg=1: REM Element
1490 LET hhh=1: REM Element
1500 LET iii=1: REM Element
1510 LET jjj=1: REM Element
1520 LET kkk=1: REM Element
1530 LET lll=1: REM Element
1540 LET mmm=1: REM Element
1550 LET nnn=1: REM Element
1560 LET ooo=1: REM Element
1570 LET ppp=1: REM Element
1580 LET qqq=1: REM Element
1590 LET rrr=1: REM Element
1600 LET sss=1: REM Element
1610 LET ttt=1: REM Element
1620 LET uuu=1: REM Element
1630 LET vvv=1: REM Element
1640 LET www=1: REM Element
1650 LET xxx=1: REM Element
1660 LET yyy=1: REM Element
1670 LET zzz=1: REM Element
1680 LET aaa=1: REM Element
1690 LET bbb=1: REM Element
1700 LET ccc=1: REM Element
1710 LET ddd=1: REM Element
1720 LET eee=1: REM Element
1730 LET fff=1: REM Element
1740 LET ggg=1: REM Element
1750 LET hhh=1: REM Element
1760 LET iii=1: REM Element
1770 LET jjj=1: REM Element
1780 LET kkk=1: REM Element
1790 LET lll=1: REM Element
1800 LET mmm=1: REM Element
1810 LET nnn=1: REM Element
1820 LET ooo=1: REM Element
1830 LET ppp=1: REM Element
1840 LET qqq=1: REM Element
1850 LET rrr=1: REM Element
1860 LET sss=1: REM Element
1870 LET ttt=1: REM Element
1880 LET uuu=1: REM Element
1890 LET vvv=1: REM Element
1900 LET www=1: REM Element
1910 LET xxx=1: REM Element
1920 LET yyy=1: REM Element
1930 LET zzz=1: REM Element
1940 LET aaa=1: REM Element
1950 LET bbb=1: REM Element
1960 LET ccc=1: REM Element
1970 LET ddd=1: REM Element
1980 LET eee=1: REM Element
1990 LET fff=1: REM Element
2000 LET ggg=1: REM Element
2010 LET hhh=1: REM Element
2020 LET iii=1: REM Element
2030 LET jjj=1: REM Element
2040 LET kkk=1: REM Element
2050 LET lll=1: REM Element
2060 LET mmm=1: REM Element
2070 LET nnn=1: REM Element
2080 LET ooo=1: REM Element
2090 LET ppp=1: REM Element
2100 LET qqq=1: REM Element
2110 LET rrr=1: REM Element
2120 LET sss=1: REM Element
2130 LET ttt=1: REM Element
2140 LET uuu=1: REM Element
2150 LET vvv=1: REM Element
2160 LET www=1: REM Element
2170 LET xxx=1: REM Element
2180 LET yyy=1: REM Element
2190 LET zzz=1: REM Element
2200 LET aaa=1: REM Element
2210 LET bbb=1: REM Element
2220 LET ccc=1: REM Element
2230 LET ddd=1: REM Element
2240 LET eee=1: REM Element
2250 LET fff=1: REM Element
2260 LET ggg=1: REM Element
2270 LET hhh=1: REM Element
2280 LET iii=1: REM Element
2290 LET jjj=1: REM Element
2300 LET kkk=1: REM Element
2310 LET lll=1: REM Element
2320 LET mmm=1: REM Element
2330 LET nnn=1: REM Element
2340 LET ooo=1: REM Element
2350 LET ppp=1: REM Element
2360 LET qqq=1: REM Element
2370 LET rrr=1: REM Element
2380 LET sss=1: REM Element
2390 LET ttt=1: REM Element
2400 LET uuu=1: REM Element
2410 LET vvv=1: REM Element
2420 LET www=1: REM Element
2430 LET xxx=1: REM Element
2440 LET yyy=1: REM Element
2450 LET zzz=1: REM Element
2460 LET aaa=1: REM Element
2470 LET bbb=1: REM Element
2480 LET ccc=1: REM Element
2490 LET ddd=1: REM Element
2500 LET eee=1: REM Element

```

Zamieszczony program w Basicu napisany został na mikrokomputer ZX Spectrum 48 K i jemu pokrewnie, ZX Spectrum +, Timex czy Elwro 800 Junior. Zalecamy pracę z kompilatorem TOBOS-FP lub nowszą jego wersją TOBOS-DYD. Program można także łatwo zaadaptować na inne komputery popularne na polskim rynku.



# delta mała delta

## Sonda o ścianę

Kiedy w gazetach codziennych pojawiły się doniesienia o przelotach amerykańskich sond kosmicznych w pobliżu wielkich planet, obok wzmianek o odkryciach nowych księżyców, pierścieni itp., pojawiły się również informacje o wykonywaniu przez te sondy tzw. manewru grawitacyjnego.

Ciało o małej masie w polu grawitacyjnym wielkiej masy (sonda w polu planety) spada na tę wielką masę. I spadając przyspiesza. Gdy spadek nie zaczyna się od zerowej prędkości, to może się zdarzyć, że mała masa nie upadnie na wielką, tylko minie ją z wielką prędkością. Oddalając się będzie przez pole wielkiej masy opóźniana. Nasuwa się tu pytanie, czy szybkość małej masy będzie po takim manewrze taka sama jak przed nim, a zmieni się tylko kierunek. Okazuje się, że na ogół nie tylko kierunek się zmienia. Mała masa

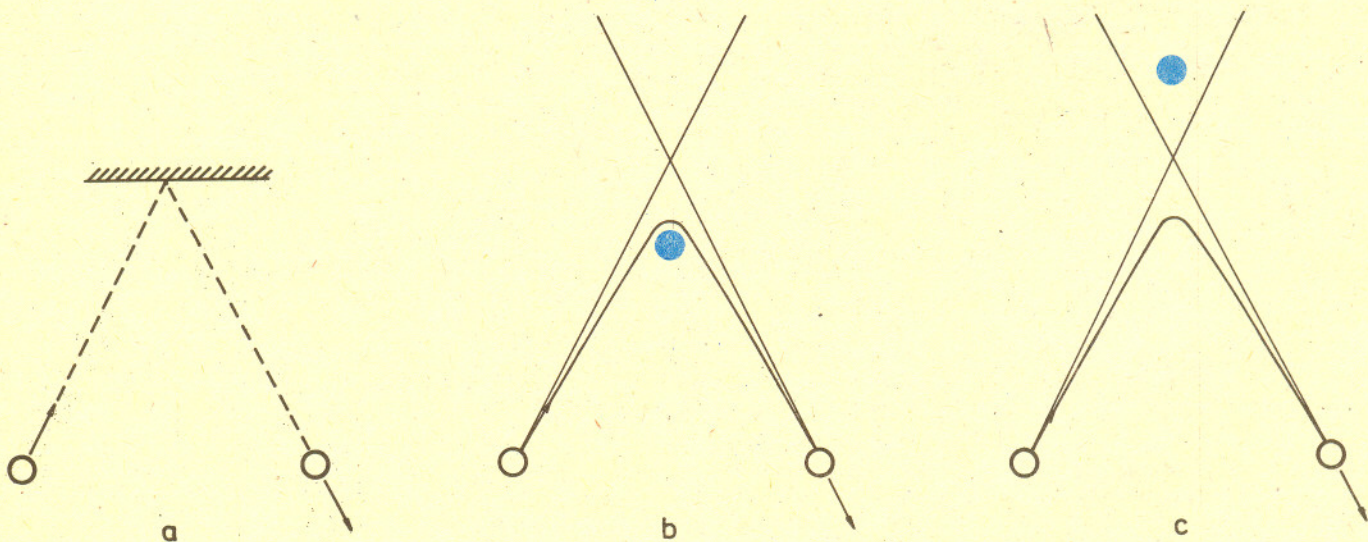
(sonda) może być przez wielką masę (planetę) sumarycznie przyspieszana bądź opóźniana, bo całe zjawisko nie jest na ogół symetryczne. I to wykorzystali planujący lot inżynierowie.

Nie będziemy tutaj bliżej analizować manewru grawitacyjnego, ale zajmiemy się podobnym zjawiskiem. Będziemy obserwowali zderzenie kuli z poruszającą się ścianą.

Jeżeli zderzają się centralnie i sprężyste dwie kulki: jedna o masie  $m$  i prędkości  $v$  i druga o masie  $M$  i prędkości  $V$ , to ich prędkości  $v_k$  i  $V_k$  po zderzeniu można obliczyć z (wyprowadzonych w szkole) wzorów

$$v_k = \frac{m - M}{m + M}v + \frac{2M}{m + M}V,$$

$$V_k = \frac{M - m}{M + m}V + \frac{2m}{M + m}v.$$



Zderzenia:

- zwyczajne ze ścianą,
- dwóch cząstek przyciągających się,
- dwóch cząstek odpychających się.

Widać, że bez względu na mechanizm samego zderzenia jego skutki mogą być identyczne.

Stosuje się to do kulki i ściany w ten sposób, że zakładamy, iż  $M + m \approx M$  jest dobrym przybliżeniem (czyli że kulka jest mała i istotnie odbija się od ściany, a nie rozбивa ściany). Skoro tak, to dla kulki i ściany mamy (proszę sprawdzić)

$$\mathbf{v}_k = -\mathbf{v} + 2\mathbf{V},$$

$$\mathbf{V}_k = \mathbf{V}.$$

Zatem ściana nie zmienia (praktycznie) swojego ruchu, natomiast szybkość kulki zmienia się o  $2V$  (szybkość to wartość bezwzględna prędkości; ponieważ  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{V}$  i zwrot  $\mathbf{v}$  jest przeciwny niż  $\mathbf{V}$ , więc

$$|-\mathbf{v} + 2\mathbf{V}| - |\mathbf{v}| = |-\mathbf{v}| + |2\mathbf{V}| - |\mathbf{v}| = |2\mathbf{V}| = 2V).$$

Oczywiście, byłoby przyjemniej wytłumaczyć tę zmianę szybkości bez pomocy wzorów. I można to zrobić. Z punktu widzenia obserwatora poruszającego się wraz ze ścianą kulka przed odbiciem ma prędkość  $\mathbf{v} - \mathbf{V}$ , a po odbiciu (zgodnie z naszym codziennym doświadczeniem, jeśli chodzi o kulki odbijające się od ścian) prędkość  $-\mathbf{v} + \mathbf{V}$ , czyli w układzie nieruchomego obserwatora  $-\mathbf{v} + 2\mathbf{V}$ . Otrzymaliśmy ten sam wynik – zwiększenie szybkości kulki – na znacznie prostszej drodze.

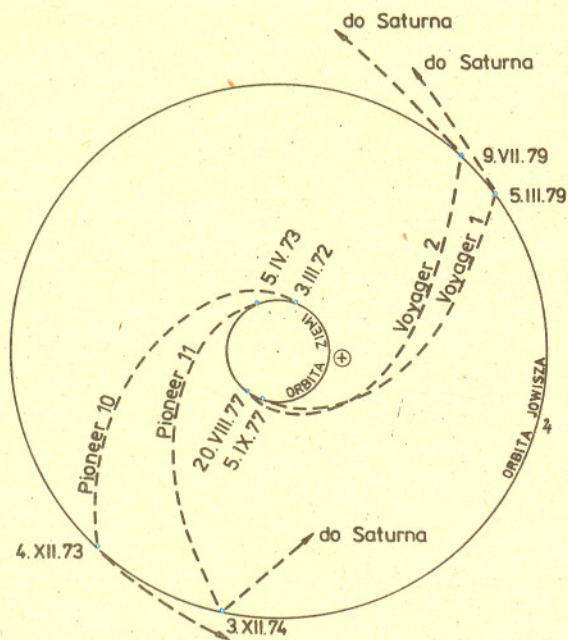


Proponuję teraz Czytelnikowi zbadanie w podobny sposób, jaka będzie zmiana szybkości kulki, gdy zderzenie nie będzie centralne i gdy ściana nie będzie się przesuwać prostopadle do swojej powierzchni. Tam, gdzie będzie to kłopotliwe, można ułatwić sobie zadanie przyjmując, że promień kulki jest bardzo, bardzo mały.

A teraz pytanie, czy można oddziaływanie kulka – ściana uważać za (choćby bardzo przybliżony) model oddziaływania sonda – planeta. Po pierwsze ten drugi układ nie jest inercjalny. Ale jeśli mówić o krótkim okresie (np. tydzień), nie jest to złe przybliżenie. Można tor planety na przestrzeni kilkuset tysięcy kilometrów (będący łukiem elipsy) zastąpić z powodzeniem odcinkiem. Tylko czy można znaleźć rozsądną analogię między odbiciem sprężystym a przyciąganiem grawitacyjnym?

I drugie pytanie. Tym razem o kulkę i ścianę. Czy tu nie zostało coś poplątane z zachowaniem energii i pędu? Bo przecież ze ścianą „nie stało się nic”, a kulka zmieniła zarówno energię, jak i pęd.

Małą Deltę przygotował Maciej KRZYŻANOWSKI



Schemat lotu Pioneera 11. Został on wysłany ku Jowiszowi tak, aby po „zderzeniu” z nim wszedł na orbitę prowadzącą go ku Saturnowi. Taki lot okrężną drogą wymagał zużycia przy starciu z Ziemi mniej energii, niż gdyby sonda wyruszyła bezpośrednio ku Saturnowi. Manewr taki wykonały również oba Voyagery.

Dr Zbigniew SAWOŃ

## FIZYCZNE NOWINKI

Redaguje dr hab. Andrzej KENNEL

### CZY ISTNIEJE METAL GEISTA ?

Czytelnicy *Lalki* Bolesława Prusa pamiętają zapewne, że w trakcie pobytu Wokulskiego w Paryżu odwiedził go wynalazca o nazwisku Geist i pokazał mu "stal lekką jak płatek bibulki". W dalszej części książki jest mowa o tym, że ów metal jest trzy, a nawet pięć razy lżejszy od wody; dyskutowane są również nadzieje na otrzymanie metalu lżejszego od powietrza. Czy wizja artystyczna Prusa może przypadkiem być bliska prawdy? Pewne światło na ten problem rzucają nowe, bardzo precyzyjne badania kryształów wodoru przeprowadzone w 1987 roku w Carnegie Institution w Waszyngtonie. Wodór, jak wiadomo, najbliższy spośród pierwiastków, jest bowiem najlepszym kandydatem na "metal Geista". Ponieważ w warunkach normalnych wodór jest gazem, więc badania kryształów wodoru wymagają bardzo niskich temperatur lub bardzo wysokich ciśnień. We wspomnianym eksperymencie użyto kowadeł diamentowych (Nowinki z VIII 1987). Wodór zamraża w temperaturze pokojowej przy ciśnieniu około 5,4 GPa. Otrzymane kryształki o objętości wyjściowej około 10 nl (nanolitrow) badane były za pomocą synchrotronowych promieni rentgena. Mimo szybkiego zmniejszania się pod ciśnieniem wielkości kryształów udało się po raz pierwszy przeprowadzić pomiary w funkcji ciśnienia (aż do 26,5 GPa) i wyznaczyć strukturę krystaliczną oraz równanie stanu wodoru. Wodór w tym zakresie ciśnień jest izolatorem i tworzy kryształy molekularne o strukturze heksagonalnej gęsto upakowania. Dla małych ciśnień parametry sieci są bardzo bliskie idealnej strukturze heksagonalnej. Ze wzrostem ciśnienia pojawia się anizotropia rzędu jednego procenta na 10 GPa. Gęstość kryształów wodoru przy ciśnieniu 5,4 GPa wynosi 0,25 g/cm<sup>3</sup> i wzrasta szybko z ciśnieniem osiągając przy 26,5 GPa wartość 0,42 g/cm<sup>3</sup>. Badania prowadzone przy wyższych ciśnieniach pozwoliły stwierdzić brak przejścia fazowego wodoru do innej struktury krystalicznej co najmniej do około 150 GPa. Natomiast otrzymane równanie stanu pozwala na przewidywanie przejścia w stan metaliczny przy ciśnieniu nie mniejszym niż 230 GPa. Zdaniem teoretyków metaliczny wodór może być metatrwały, tzn. będzie mógł istnieć przy ciśnieniu normalnym w temperaturze pokojowej (podobnie jak diament) i będzie mieć gęstość około 0,5 g/cm<sup>3</sup>. Warto dodać, że właśnie obecnością metalicznego wodoru we wnętrzu Jowisza próbuje się wyjaśnić istnienie silnego pola magnetycznego wokół tej planety. (Ciśnienie w środku Jowisza wynosi około 30 TPa.) Możemy więc stwierdzić ostatecznie, iż piękna wizja literacka Prusa jest, być może, bliska częściowego potwierdzenia. Wprawdzie metaliczny wodór będzie zapewne bardzo miękki, jednakże wiara Prusa w potęgę umysłu ludzkiego jest godna podkreślenia. Postęp współczesnej technologii jest rzeczywiście w bardzo dużej mierze związany z nowymi materiałami.

Z zaciekawieniem przeczytałem artykuł dr. Z. Marciniaka *Czy geometrzy znają wszystkie grupy* zamieszczony w *Delcie* 8/1987. Zawiera on agitację algebraika i geometry, mającą zachęcić Czytelnika do zapoznania się z grupą  $S_\infty$  tzw. „leniwych permutacji” zbioru liczb naturalnych  $\mathbb{N}$ , którą zwykle oznaczać się symbolem  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ . Chciałbym i ja – „facet” od analizy – zaangażować za inną podgrupą grupy  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ .

Sumę skończonej liczby składników można obliczać w dowolnej kolejności, wynik będzie ten sam. Inaczej jest przy nieskończonej liczbie składników. Weźmy na przykład szereg

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots,$$

w którym wyraz  $\frac{1}{2^n}$  występuje 2<sup>n</sup> razy na zmianę ze znakiem + i -. Suma takiego szeregu równa jest 0. Jeśli jednak przestawimy wyrazy tego szeregu

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

tak, by po dwóch wyrazach  $\frac{1}{2^n}$  ze znakiem + wystąpił jeden wyraz  $\frac{1}{2^{n-1}}$  ze znakiem -, to suma będzie równa  $\frac{1}{2}$ .

Riemann udowodnił, że jeśli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o wyrazach rzeczywistych jest zbieżny, ale

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty, \text{ to dla dowolnej liczby rzeczywistej } a \text{ można tak przestawić jego wyrazy,}$$

tzn. znaleźć taką permutację  $\sigma$  zbioru liczb naturalnych, że  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = a$ . Co więcej,

można znaleźć taką permutację  $\sigma$ , że  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$  jest rozbieżny.

Z drugiej strony, jeśli  $\sigma$  jest permutacją „leniwą”, czyli przestawiającą tylko skończenie wiele liczb naturalnych, to, oczywiście,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ . Powstaje pytanie:

Jak opisać permutacje  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  o własności:

jeśli  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny, to

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \text{ jest zbieżny,}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n ?$$

Własność ta nazywa się własnością Borela.

Łatwo zauważyć, że zbiór  $B$  permutacji o własności Borela jest grupą zawierającą  $S_\infty$  – grupę permutacji leniwych. Do  $B$  należą też inne permutacje, np. taka:  $\rho(2k) = 2k - 1$ ,  $\rho(2k - 1) = 2k$  dla  $k = 1, 2, \dots$ . Oczywiście  $\rho \notin S_\infty$  i  $\rho \in B$ . Dla dowolnego szeregu zbieżnego  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  mamy bowiem

$$\sum_{n=1}^{2k} a_{\rho(n)} = \sum_{n=1}^{2k} a_n \quad \text{ i } \quad \sum_{n=1}^{2k-1} a_{\rho(n)} = \sum_{n=1}^{2k-1} a_n + a_{2k} - a_{2k-1},$$

a więc  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=1}^k a_{\rho(n)} - \sum_{n=1}^k a_n \right| = 0$ . Tak samo można wykazać, że jeśli  $\sigma$  jest taką

permutacją, że dla pewnego  $N \in \mathbb{N}$  i dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}$  mamy  $|\sigma(n) - n| \leq N$ , to  $\sigma \in B$ . Ale znów nie są to wszystkie permutacje z grupy  $B$ . Na przykład permutacja  $\tau$  dana wzorem  $\tau(2^{2k}) = 2^{2k-1}$ ,  $\tau(2^{2k-1}) = 2^{2k}$  dla  $k = 1, 2, \dots$  oraz  $\tau(n) = n$  dla pozostałych liczb naturalnych, też należy do  $B$ , a nie ma podanej poprzednio własności.

Dla każdej permutacji  $\sigma$  zbioru liczb naturalnych zbiór  $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\}$  można zapisać jako sumę przedziałów  $[n_i, n_{i+1}]$  (gdzie  $[n, m] = \{k \in \mathbb{N} : n \leq k \leq m\}$ ). Najprostszy taki rozkład to

$$\{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\} = [\sigma(1), \sigma(1)] \cup \dots \cup [\sigma(n), \sigma(n)].$$

Na ogół można podać różne rozkłady tego zbioru. Oznaczmy przez  $\Delta_n(\sigma)$  najmniejszą liczbę przedziałów, na jakie można rozłożyć zbiór  $\{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$ . Łatwo sprawdzić, że np.  $\Delta_1(\rho) = 1$ ,  $\Delta_{2k}(\rho) = 1$ ,  $\Delta_{2k+1}(\rho) = 2$  dla  $k \geq 1$ .



**Rozwiązanie zadania F 256.** Prawo Hooke'a dla sprężystych odkształceń objętości wyraża się wzorem

$$\Delta p = -k \frac{\Delta V}{V_0},$$

gdzie  $\Delta p = p - p_0$  jest zmianą ciśnienia,  $\Delta V = V - V_0$  zmianą objętości wywołaną zmianą ciśnienia  $\Delta p$ ,  $k$  jest modulem ściśliwości. Moduł ściśliwości, zwany inaczej modulem sprężystości objętościowej, określa stosunek przyrostu ciśnienia wywieranego na ciało do względnej zmiany objętości wywołanej taką zmianą ciśnienia. Z określenia gęstości  $\rho = m/V$  wynika, że

$$\Delta \rho = -\frac{m}{V^2} \Delta V = -\rho \frac{\Delta V}{V}.$$

Z obu powyższych równań otrzymujemy

$$\frac{k}{\rho} = \frac{\Delta p}{\Delta \rho}.$$

Stąd otrzymujemy poszukiwane wyrażenie prędkości fali podłużnej przez ciśnienie i gęstość

$$v = \sqrt{\frac{k}{\rho}} = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta \rho}}.$$



**Rozwiązanie zadania M 524.**

Wystarczy zauważyć, że  $\left[\frac{n}{p}\right]$  liczb

ze zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  dzieli się przez  $p$ .

a z nich  $\left[\frac{n}{p^2}\right]$  dzieli się przez  $p^2$ ,

i ogólnie  $\left[\frac{n}{p^j}\right]$  dzieli się przez  $p^j$ .



**Rozwiązanie zadania F 257.**

Wstawiając do równania adiabaty  $pV^\kappa = \text{const}$  oraz  $V = m/\rho$  otrzymujemy

$$p = C\rho^\kappa,$$

gdzie stała  $C$  zawiera poprzednią stałą oraz masę  $m$ . Na podstawie powyższego równania obliczymy zmianę ciśnienia  $\Delta p$

$$\Delta p = C\kappa\rho^{\kappa-1}\Delta\rho = \kappa C\rho^\kappa \frac{\Delta\rho}{\rho} = \kappa p \frac{\Delta\rho}{\rho}.$$

Stąd otrzymujemy, że

$$\frac{\Delta p}{\Delta \rho} = \frac{\kappa p}{\rho}.$$

Wykorzystując wynik poprzedniego zadania oraz powyższe równanie znajdujemy wyrażenie na prędkość fal sprężystych w atmosferze

$$v = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}.$$

Daje to prędkość w powietrzu równą 332 m/s.

Borel udowodnił następującą charakteryzację permutacji z grupy  $B$ :

$\sigma \in B$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka stała  $M > 0$ ,

że  $\Delta_n(\sigma) \leq M$  dla  $n = 1, 2, \dots$

Naszkicuję teraz dowód powyższego twierdzenia, korzystając z Teorii Limesowości.

Niech  $\sigma$  będzie permutacją zbioru  $N$ , a  $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  szeregiem zbieżnym. Oznaczmy:

$$\mathcal{E}_k^n = \begin{cases} 1 & \text{gdy } k = \sigma(i) \text{ dla pewnego } i = 1, \dots, n, \\ 0 & \text{dla pozostałych } k, n. \end{cases}$$

oraz  $S_n^\sigma(x) = a_{\sigma(1)} + \dots + a_{\sigma(n)}$ .

Mamy wtedy  $S_n^\sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}_k^n a_k$ . Dla sumy tej stosujemy przekształcenie Abela i

$$\text{otrzymujemy } S_n^\sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{E}_k^n - \mathcal{E}_{k+1}^n) \cdot (a_1 + \dots + a_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{E}_k^n - \mathcal{E}_{k+1}^n) s_k,$$

gdzie  $s_k = a_1 + \dots + a_k$ . (Pamiętajmy, że wszystkie powyższe sumy są tak naprawdę skończone.)

Przekształceniem Abela nazywamy wzór

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n =$$

$$= (a_1 - a_2) b_1 + (a_2 - a_3)(b_1 + b_2) + \dots + (a_{n-1} - a_n)(b_1 + \dots + b_{n-1}) + a_n(b_1 + \dots + b_n)$$

Jeśli przyjmiemy  $0 = a_{n+1} = b_{n+1} = a_{n+2} = b_{n+2} = \dots$  to powyższy wzór możemy zapisać jako

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1})(b_1 + \dots + b_k).$$

Permutacja  $\sigma$  należy do  $B$  wtedy i tylko wtedy, gdy

(\*) dla każdego ciągu zbieżnego  $(s_k)_{k=1}^{\infty}$  odpowiadający mu ciąg  $(S_n^\sigma)_{n=1}^{\infty}$  jest też zbieżny i w dodatku ma tę samą granicę.

Ci Czytelnicy, którzy pamiętają mój artykuł o macierzach Toeplitza (*Delta* 8/1986), znają warunek równoważny warunkowi (\*) (patrz obok). W naszym przypadku mamy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}_k^n - \mathcal{E}_{k+1}^n = 0 \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

(\*\*)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{E}_k^n - \mathcal{E}_{k+1}^n) = 1.$$

Tak więc  $\sigma \in B$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba  $M > 0$ ,

że  $\sum_{k=1}^{\infty} |\mathcal{E}_k^n - \mathcal{E}_{k+1}^n| \leq M$ . Ale łatwo sprawdzić, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\mathcal{E}_k^n - \mathcal{E}_{k+1}^n| \leq 2 \Delta_n(\sigma),$$

co kończy dowód twierdzenia Borela.

Niech  $A = (a_{n,k})_{n,k=1,2,\dots}$  będzie macierzą nieskończoną. Mówimy, że  $A$  wyznacza metodę Toeplitza zachowującą zbieżność, jeżeli:

dla każdego zbieżnego ciągu  $x = (s_k)_{k=1}^{\infty}$  i dla każdego  $n$  zbieżny jest szereg  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} s_k = A_n(x)$

i istnieje  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) = A(x)$ .

Mamy twierdzenie.

Następujące warunki są równoważne

(i)  $A$  wyznacza metodę zachowującą zbieżność,

(ii) dla  $k = 1, 2, \dots$  istnieje  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,k} = \alpha_k$  i istnieje  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = \alpha$  oraz istnieje taka liczba

$M > 0$ , że  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}| \leq M$  dla  $n = 1, 2, \dots$

Wtedy ponadto

$$A(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k s_k + \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Zauważmy jeszcze, że tak naprawdę z uwagi na warunek (\*\*) udowodniliśmy nieco mocniejsze twierdzenie. Wykazaliśmy mianowicie, że jeśli dla dowolnego szeregu

zbieżnego  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$  jest zbieżny, to dla każdego szeregu zbieżnego  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

zachodzi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ .

Kometa Halleya już dawno zniknęła nam z oczu opuszczając sąsiedztwo Słońca (choć jeszcze ciągle jest obserwowana przez wielkie teleskopy), ale nadal budzi żywe zainteresowanie astronomów prowadząc coraz pewniej i głębiej na trop tajemnic świata komet i kosmogonii Układu Słonecznego. Czytelnicy *Delty* mieli już okazję wiele o niej się dowiedzieć (m.in. z tekstów opublikowanych w *Delcie* 3/1985), jednak wnikliwe badania przeprowadzone podczas jej ostatniego powrotu do Słońca dostarczyły tylu nowych danych, że trudno nie ponowić tu prezentacji słynnej komety w świetle najnowszych odkryć i lepszego dziś zrozumienia jej natury.

W pierwszej połowie marca 1986 roku flotyła statków kosmicznych (patrz tabela) przeleciała przez głowę komety Halleya dokonując ze stosunkowo niewielkiej odległości obserwacji jądra, pomiarów własności jego otoczenia plazmowego oraz analizy próbek materii przechwyconej na miejscu.

Sondy komety Halleya

Nazwa	Agencja organizująca misję	Data startu	Data zbliżenia do komety	Minimalna odległość od jądra (km)	Odległość heliocentr. (j.a.)	Prędkość mijania komety (km/s)
Vega 1	Interkosmos	15 XII 1984	6 III 1986	8890	0,79	79,2
Vega 2	Interkosmos	21 XII 1984	9 III 1986	8030	0,83	76,8
Giotto	Europejska Agencja Kosmiczna	2 VII 1985	14 III 1986	600	0,89	68,4
Suisei	Japoński Instytut Badań Kosmicznych	19 VIII 1985	8 III 1986	151 tys.	0,82	73,0
Sakigake	Japoński Instytut Badań Kosmicznych	8 I 1985	11 III 1986	6,99 mln	0,86	75,3

To pierwsze w dziejach sondowanie komety było wsparte zakrojoną na wielką skalę i rozciągniętą w czasie kampanią obserwacyjną z powierzchni Ziemi, a także śledzeniem komety spoza atmosfery ziemskiej przez działające już od dawna obiekty kosmiczne, a nawet sztucznego satelitę Wenus. Jakie wyniki przyniósł ten bezprecedensowy szturm na komety Halleya?

Zdjęcia uzyskane za pomocą sond Giotto i Vega umożliwiły rekonstrukcję obrazu jądra. Zgodnie z oczekiwaniami stanowi ono pojedynczą bryłę materii o nieregularnym kształcie przypominającym wydłużony ziemniak. Jego rozmiary są większe niż się spodziewano: wielka oś sięga 15 – 16 km, a mała 8 – 10 km. Powierzchnia jądra okazała się bardzo ciemna, jej zdolność odbijania promieniowania (albedo) nie przewyższa 4 procent. Do pewnego stopnia tłumaczy to stosunkowo wysoką temperaturę powierzchni, którą oszacowano na około 320 K. Powierzchnia jądra nie może więc być pokryta – jak pierwotnie sądzono – lodem wodnym, którego temperatura sublimacji wynosi 180 – 200 K, lecz warstwą pyłu lub jakąś trudniej topliwą i najprawdopodobniej cienką skorupą, pod którą dopiero znajduje się lód. Prawie wszystkich gaz i pył emitowany z jądra pochodzi z kilku pojedynczych źródeł będących najprawdopodobniej pęknięciami lub szczelinami w tej skorupie. Z pomiarów tempa jego produkcji udało się ocenić całkowitą ilość materii traconej przez jądro podczas jednego zbliżenia komety do Słońca na około  $5 \cdot 10^{11}$  kg. Próbując odpowiedzieć na pytanie, czy uzyskana w ten sposób wartość może wytłumaczyć (w ramach

przyjmowanego modelu tzw. sił niegrawitacyjnych) zaobserwowane wydłużanie się okresu orbitalnego komety o około 4 dni na obieg, stwierdzono, że obecna masa jądra powinna być równa około  $10^{14}$  kg, co przy jego objętości wynoszącej około  $500 \text{ km}^3$  daje gęstość zaledwie  $0,2 \text{ g/cm}^3$ . Czyżby więc jądro komety Halleya, będąc przecież w dużej części zbudowane z lodu, miało porowatą strukturę?

Parowanie gazów z jądra komety pod wpływem promieniowania słonecznego powoduje wystąpienie lekkiego odrzutu. Może on być skierowany w różne strony w zależności od tego, jak jądro komety wiruje, ale w każdym przypadku będzie powodował zakłócenia ruchu niemożliwe do przewidzenia na podstawie prawa grawitacji. Są to właśnie anomalie niegrawitacyjne. Podobne efekty może dawać odrywanie się drobnych fragmentów od wirującego jądra komety.

Porównanie obrazów jądra wykonanych w kilkudniowych odstępach za pomocą trzech sond kosmicznych potwierdziło wcześniejsze ustalenia dotyczące okresu jego obrotu. Zarówno wykonana współcześnie cyfrowa analiza zdjęć

komety z poprzedniego pojawienia się w 1910 roku, jak też periodyczność zmian struktury obłoku wodorowego otaczającego jądro stwierdzona za pomocą sondy Suisei wskazuje, że wynosi on 2,2 dnia. Wielkim zaskoczeniem są więc rezultaty naziemnych obserwacji fotometrycznych komety Halleya, wykonanych w marcu i kwietniu 1986 roku, z których wynika, że okres rotacji jądra jest równy 7,4 dnia. Wiarygodność tej ostatniej wartości potwierdziły także dane przekazane przez sondę wenusjańską Pioneer-Venus, która śledziła komety w pobliżu perihelium, gdy nie była ona widoczna z Ziemi. Powstałą kontrowersję próbuje się wyjaśnić np. przyjęciem teoretycznie możliwej rotacji wydłużonego jądra względem jego dłuższej osi z okresem 7,4 dnia i jednoczesnego obrotu precesyjnego tej bryły wokół osi nachylonej do osi rotacji pod kątem  $77^\circ$  w okresie 2,2 dnia. Problem rotacji jądra komety Halleya pozostaje jednak nadal otwarty.

O składzie chemicznym jądra można wnioskować jedynie na podstawie analizy wydobywających się z niego pyłów i gazów tworzących głowę komety. Trzeba jednak pamiętać, że o ile skład pierwiastkowy cząstek pyłu nie ulega w zasadzie zmianom z odległością od jądra, to w przypadku molekuł gazu sytuacja jest odwrotna: w miarę oddalania się od jądra pierwotne, czyli tzw. macierzyste molekuly w różnych łańcuchach reakcji chemicznych rozpadają się na prostsze i trwalsze związki oraz jonizują się.

Ważnym odkryciem okazało się stwierdzenie występowania w pyłe kometarnym bardzo wielu cząstek o najmniejszych

masach, jakie mogły być jeszcze rejestrowane przez odpowiednie detektory, tzn.  $10^{-17}$  g (największe cząstki, jakie zdołano zarejestrować, miały masy rzędu 1 g). Ich materia wykazała znaczną zawartość pierwiastków o małej liczbie atomowej, a w szczególności węgla (C), wodoru (H), tlenu (O) i azotu (N). Nazwano je cząstkami CHON dla podkreślenia podobieństwa ich składu do chemizmu meteorytów zwanych chondrytami węglistymi, uznanych za najbardziej pierwotną materię Układu Słonecznego. Odkrycie bogatych w węgiel cząstek CHON rozwiązało m.in. problem deficytu węgla w kometach. Dotychczasowe analizy widm wielu komet wskazywały bowiem na co najmniej trzykrotnie mniejszą zawartość węgla w gazie kometarnym niż gdziekolwiek indziej w Układzie Słonecznym. Zawartość innych pierwiastków stwierdzonych w pyłe, m.in. krzemu (Si), żelaza (Fe), magnezu (Mg), sodu (Na), siarki (S), jest zbliżona do ich średniej obfitości kosmicznej. C, H, O i N są podstawowym budulcem prostych molekuł organicznych, które z kolei mogą tworzyć substancje smołopodobne. Ich powstawaniem na powierzchni jądra można próbować tłumaczyć jego małe albedo.

Występowanie w gazie kometarnym zidentyfikowanych uprzednio związków chemicznych zostało niemal w pełni potwierdzone przez badania przeprowadzone w trakcie sondowania komety Halleya. Odkryto ponadto wiele nowych molekuł i jonów. Przede wszystkim trzeba podkreślić, że kometa Halleya jest w zasadzie pierwszą kometą, w której udało się wyraźnie stwierdzić istnienie molekuł  $H_2O$ . Dotychczasowe obserwacje – np. linii emisyjnych w widmach komet rodnika OH, którego molekułą macierzystą jest  $H_2O$  – wskazywały na nie jedynie pośrednio. Uzyskanie obecnie bezpośredniego dowodu na to, że głównym składnikiem jądra komety jest lód wodny, stanowi więc potwierdzenie ogólnej koncepcji lodowego jądra, sformułowanej w 1950 roku przez amerykańskiego astronoma Freda Whipple'a. Duże znaczenie ma także bezpośrednia detekcja molekuł dwutlenku węgla ( $CO_2$ ), którego obfitość oceniono jednak na zaledwie 2 – 3 procent zawartości wody. W jądrze musi on występować w postaci suchego lodu zmieszanego z lodem wodnym. Znacznie więcej – aż do 20 procent – znaleziono tlenku węgla (CO). CO i  $CO_2$  tłumaczą obserwowaną aktywność komety w dużych odległościach od Słońca, bowiem temperatura sublimacji suchego lodu jest dużo niższa niż lodu wodnego.

Do ciekawych wniosków doprowadziło odkrycie strumieni cyjanowych (CN) w głowie komety Halleya. Dostrzeżenie ich korelacji z niemożliwymi do zaobserwowania z Ziemi strumieniami pyłowymi cząstek CHON, o których była wyżej mowa, wydaje się wskazywać, że źródłem rodników CN są nie tylko molekuły wydobywające się z jądra komety, lecz także nowo odkryta populacja pyłu kometarnego. Gaz cyjanowy może się tworzyć w wyniku fotolizy związków organicznych węgla i azotu zawartych w cząstkach CHON. Potwierdza to zarówno spadek zawartości C, H, O i N w cząstkach pyłu w miarę ich oddalania się od jądra, jak też stwierdzenie, że tempo produkcji rodnika CN jest większe niż molekuły HCN, która była dotychczas uważana za jego główną molekułę macierzystą.

Jak wiadomo, ultrafioletowe promieniowanie Słońca oraz wiatr słoneczny jonizują gaz w głowie komety. Jednym

z najważniejszych odkryć wykonanych za pomocą sond Vega i Giotto była identyfikacja jonów  $H_3O^+$ , które – zgodnie z wcześniejszymi przypuszczeniami teoretycznymi – okazały się dominujące wśród jonów obszaru okółjądrowego. Spośród wielu innych jonów, których istnienie udało się wykazać, wymienimy:  $H_2O^+$ ,  $OH^+$ ,  $C^+$ ,  $CH^+$ ,  $O^+$ ,  $Na^+$ ,  $C_2^+$ ,  $S^+$ ,  $Fe^+$ . Szczególnie interesujące wydaje się stwierdzenie obecności bardzo wielu jonów węgla i niemal zupełnego braku jonów azotu. Warto zwrócić uwagę, że wyjątkowej obfitości jonów  $C^+$  nie da się wytłumaczyć jedynie fotojonizacją atomów węgla pochodzących z fotodysocjacji molekuł CO,  $CO_2$  i  $CH_4$ . Przypuszcza się więc, że atomy węgla są również uwalniane bezpośrednio z powierzchni jądra, a także z cząstek pyłu. Jest to jeszcze jeden przyczynek do rozwiązania zagadki deficytu węgla w kometach oraz małego albedo powierzchni jądra.

Wzajemne oddziaływanie materii kometarnej z wiatrem słonecznym jest badane i opisywane metodami fizyki plazmy. Spotkanie plazmy kometarnej z plazmą wiatru słonecznego charakteryzują przede wszystkim dwie podstawowe granice okalające od strony Słońca jądro komety. Pierwszą jest fala uderzeniowa, poza którą porusza się z prędkością naddźwiękową niezakłócona plazma wiatru słonecznego. Wewnątrz drugiej, zwanej powierzchnią kontaktową lub jonopauzą i rozprzestrzeniającej się znacznie bliżej jądra niż fala uderzeniowa, znajduje się jedynie plazma kometarna. Przestrzeń między nimi wypełniona jest mieszaniną jonów kometarnych i pochodzących ze Słońca.

W wyniku eksperymentów plazmowych, przeprowadzonych za pomocą sond kosmicznych, stwierdzono, że w przypadku komety Halleya słaba fala uderzeniowa, mająca postać rozmytej i silnie turbulენტnej strefy przejściowej, znajduje się w odległości około 1,1 mln km od jądra. Jonopauzę natomiast przecięła jedynie sonda Giotto podczas zbliżania się do jądra w odległości 4700 km i oddalając się od niego w odległości 3800 km (pozostałe sondy przeleciały zbyt daleko). Dane te potwierdziły w zasadzie wcześniejsze oszacowania teoretyczne. Ponadto zostały odkryte dwie inne powierzchnie nieciągłości, nie przewidywane wcześniej: jedna zarejestrowana w odległości około 150 tys. km od jądra i druga w odległości około 350 tys. km od niego.

Wewnątrz obszaru ograniczonego falą uderzeniową wiatr słoneczny – wiejący na zewnątrz z prędkością około 400 – 500 km/s – jest stopniowo wyhamowywany, a pole magnetyczne wzmocniane. Według pomiarów magnetometru sondy Giotto maksymalne natężenie pola magnetycznego wyniosło 57 nT w odległości 16 400 km od jądra przed największym zbliżeniem się do niego i 65 nT w odległości 8200 km po minięciu jądra. Dla porównania dodajmy, że na zewnątrz fali uderzeniowej natężenie pola magnetycznego wynosi 5 – 8 nT. Ważnym odkryciem było stwierdzenie, że pole magnetyczne nie przenika przez jonopauzę i na przestrzeni warstwy przejściowej o grubości kilkuset km spada do zera. Najbliższe sąsiedztwo jądra jest więc tzw. jamą magnetyczną.

Strukturę plazmowego otoczenia komety Halleya charakteryzują nie tylko wymienione granice, ale także różne zjawiska turbulენტne i oscylacje natężenia pola magnetycznego oraz innych parametrów plazmy generowane przez jony pochodzenia kometarnego. Niektóre

kometarne cząstki neutralne mogą bowiem oddalić się od jądra na znaczne odległości, zanim zostaną przez wiatr słoneczny pochwycone i zjonizowane. Detektory sond Vega i Giotto rejestrowały te tzw. "pick-up" jony aż do odległości 10 mln km, a satelita ICE „dostrzegł” je nawet w odległości 30 mln km od jądra komety Halleya. Jony te wzbudzają w plazmie wiatru słonecznego fale o niskiej częstotliwości, które były rejestrowane przez odpowiednie analizatory do odległości kilku mln km od jądra. Występowanie fal o wyższych częstotliwościach, wywołanych niestabilnościami plazmy związanymi z tymi

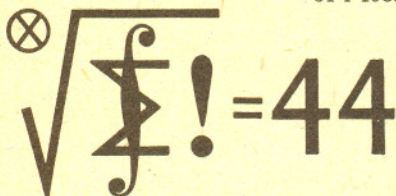
jonami, stwierdzono natomiast aż do odległości 30 mln km od jądra.

I wreszcie trzeba wspomnieć, że zarówno sondy Suisei i Sakigake, jak też i inne obiekty kosmiczne, które obserwowały komety Halleya, potwierdziły istnienie wokół niej obłoku wodorowego rozciągającego się aż do odległości mniej więcej 10 mln km od jądra. Zakończmy więc uwagę, że kometa Halleya znajdując się w pobliżu perihelium rozrasta się do rozmiarów przewyższających rozmiary samego Słońca.

## Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:

31 I 1989



Csołówka ligi zadaniowej „Klub 44 M”  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 169 (WT=1,35) i 170 (WT=2,26)  
z numeru 4/1988

Henryk Kasprzak	- Żary	44,91pkt
Andrzej Pawłowski	- Zabrze	44,46pkt
Krzysztof Jedziniak	- Katowice	43,60pkt
Adam Russel	- Krosna	42,55pkt
Kazimierz Serbin	- Sanok	40,12pkt
Adam Przeździecki	- Warszawa	38,50pkt

Panu Kasprzakowi, który wchodzi do Klubu 44 z numerem 56, gratulujemy znakomitego stylu: na uzyskane 44 punkty słożyły się rozwiązania 20 zadań, wszystkie bez wyjątku opracowane bezbłędnie i elegancko, wszystkie oceny maksymalne.

Panu Pawłowskiemu gratulujemy ukończenia czwartej już czterdziestocieropunktowej rundy.

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Deltę”

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0.1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a  $N$  - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Veterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1988.

### Zadania z matematyki nr 179, 180

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

179. Wyznaczyć wszystkie pary liczb rzeczywistych  $x, y \geq 0$  spełniające równanie

$$\sqrt[3]{x + \sqrt{xy} + y} = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}}{2}}$$

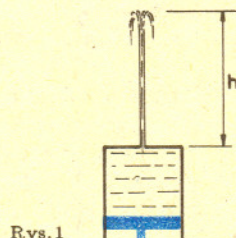
180. Figurę złożoną z trzech kwadratów jednostkowych, otrzymaną z kwadratu  $2 \times 2$  przez wycięcie naroża, nazwijmy trimino. Wykazać, że szachownicę  $2^n \times 2^n$ , z której wycięto jedno pole, można pokryć nie zachodzącymi na siebie płytkami trimino ( $n \geq 1$  jest dowolną liczbą naturalną).

Zadanie 180 zaproponował pan Werner Mních z Opola.

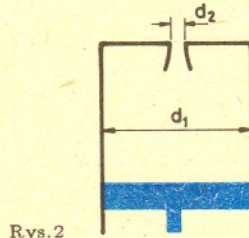
### Zadania z fizyki nr 77, 78

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

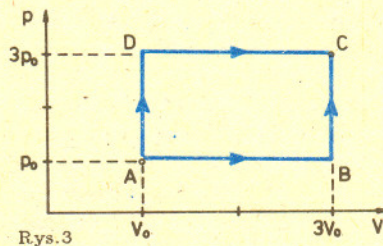
77. Obliczyć, jaką co najmniej siłą  $F$  trzeba działać na tłok strzykawki (rys.1), aby wylatujący z niej strumień wody wznosił się na wysokość  $h = 5$  m? Średnica tłoka wynosi  $d_1 = 30$  mm, a średnica otworu w ścianie, przez który wylatuje woda,  $d_2 = 1$  mm. Czy zaopatrzenie otworu w dyszkę jak na rysunku 2 (bez zmiany średnicy wylotowej  $d_2$ ) będzie miało wpływ na wartość siły  $F$  oraz na prędkość przesuwu tłoka?



Rys. 1



Rys. 2

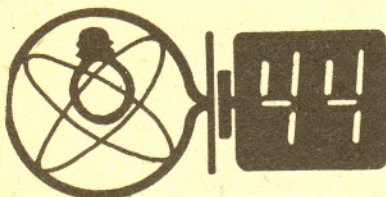


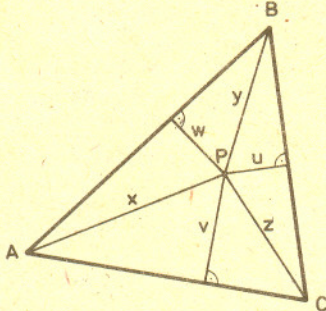
Rys. 3

78. Jeden kilomol jednoatomowego gazu doskonałego poddano przemianę ze stanu określonego ciśnieniem  $p_0$  i objętością  $V_0$  do stanu określonego parametrami  $3p_0$  oraz  $3V_0$  na dwa różne sposoby (rys.3):

- 1)  $A \rightarrow B \rightarrow C$ ,
- 2)  $A \rightarrow D \rightarrow C$ .

Obliczyć stosunek ciepła pobranego przez gaz w obu wariantach tej przemiany.





Rys.1

Kiedyś wiele trudności sprawiło mi takie zadanie:

Niech  $P$  będzie punktem wewnętrznym trójkąta  $ABC$ . Wykazać, że jeśli  $x, y, z$  są odległościami  $P$  odpowiednio od wierzchołków  $A, B, C$  a  $u, v, w$  – odległościami od boków  $BC, CA$  i  $AB$ , to (rys.1)

$$x + y + z \geq 2(u + v + w).$$

Długo nie mogłem rozwiązać tego zadania. W końcu jednak natrafiłem na ogólną metodę dowodzenia tego typu nierówności. Oto ona – najpierw ogólnie.

Obierzmy dodatkowo na półprostych  $AB^-$  i  $AC^-$  punkty  $B_1$  i  $C_1$  oraz oznaczmy jeden z kątów między prostymi  $AP$  i  $B_1C_1$  przez  $\alpha$ . Ze znanego wzoru na pole czworokąta otrzymujemy (rys.2)

$$\frac{1}{2}x \cdot B_1C_1 \cdot \sin \alpha = P_{AB_1PC_1} = P_{AB_1P} + P_{AC_1P} = \frac{1}{2}w \cdot AB_1 + \frac{1}{2}v \cdot AC_1.$$

Ponieważ  $\sin \alpha \leq 1$ , więc

$$(*) \quad x \cdot B_1C_1 \geq w \cdot AB_1 + v \cdot AC_1.$$

Stosując tę ogólną nierówność do przypadku  $B_1 = B$  i  $C_1 = C$  mamy

$$x \geq \frac{AB}{BC}w + \frac{AC}{BC}v.$$

Analogicznie uzyskujemy

$$y \geq \frac{AB}{AC}w + \frac{BC}{AC}u,$$

$$z \geq \frac{AC}{AB}v + \frac{BC}{AB}u.$$

Zsumowanie tych nierówności, niestety, nie daje nierówności dowodzonej.

Zastosujmy jednak nierówność  $(*)$  do sytuacji, gdy  $B_1$  i  $C_1$  są obrane tak, że  $AB_1 = AC$  i  $AC_1 = AB$ . Otrzymamy wtedy (rys.3)

$$x \geq \frac{AC}{BC}w + \frac{AB}{BC}v,$$

bo  $B_1C_1 = BC$ . Podobnie uzyskujemy

$$y \geq \frac{BC}{AC}w + \frac{AB}{AC}u,$$

$$z \geq \frac{BC}{AB}v + \frac{AC}{AB}u.$$

Zsumowanie tych nierówności daje już pożądaný wynik

$$x + y + z \geq \left(\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB}\right)u + \left(\frac{AB}{BC} + \frac{BC}{AB}\right)v + \left(\frac{AC}{BC} + \frac{BC}{AC}\right)w \geq 2(u + v + w),$$

gdyż dla dodatnich dowolnych  $p$  i  $q$  jest  $\frac{p}{q} + \frac{q}{p} \geq 2$ .

Czytelnicy zechcą spróbować dowieść w analogiczny sposób nierówności

$$ax + by + cz \geq 4S,$$

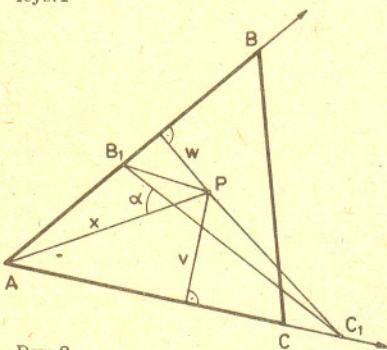
$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \leq \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w},$$

$$xyz \geq \frac{R}{2r}(u + v)(v + w)(w + u),$$

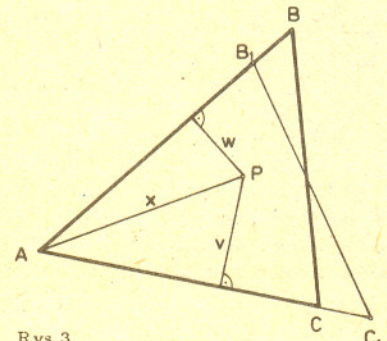
gdzie  $a = AB, b = AC, c = BC, S$  jest polem, a  $R$  i  $r$  to promienie okręgów opisanego i wpisanego w trójkąt  $ABC$ .

Oczywiście, można zapewne zaproponować i udowodnić jeszcze inne nierówności i to niekoniecznie dla trójkątów (a, powiedzmy, dla czworokątów).

Krzysztof HRYNIEWIECKI



Rys.2



Rys.3

**Rozwiązanie zadania M 525.**

Przyjmijmy  $d = a - b$  i założmy, że  $n$  dzieli się przez  $p^m$ , ale nie dzieli się przez  $p^{m+1}$ , gdzie  $p$  jest dzielnikiem pierwszym liczby  $n$ . Jeśli  $p$  nie jest dzielnikiem  $d$ , to w dalszym ciągu  $(a^n - b^n)/(a - b)$  dzieli się przez  $p^m$ . Zauważmy, że

$$\frac{a^n - b^n}{d} = \frac{(b + d)^n - b^n}{d} = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} b^{n-i} d^{i-1}.$$

Jeśli  $p$  jest dzielnikiem  $d$ , to każdy składnik tej sumy dzieli się przez  $p^m$ . Otóż  $\binom{n}{i}$  jest pewną wielokrotnością  $n$ , podzieloną przez  $i!$ , wystarczy więc udowodnić, że  $d^{i-1}$  dzieli się przez  $p$  w takiej potędze, przez jaką dzieli się  $i!$ . Skorzystamy ze wzoru z poprzedniego zadania:  $i!$  dzieli się

przez  $p^k$ , gdzie  $k = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \frac{i}{p^j} \right]$ . Czyli

$$k < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{i}{p^j} = \frac{i}{p-1} \leq i.$$

Zatem  $k \leq i - 1$ . Z drugiej strony  $p^{i-1}$  jest dzielnikiem  $d^{i-1}$ , co kończy dowód.



# Odrobiazgi

Zwykle moczenie zegarków nie wychodzi im na zdrowie. Ostatnio w USA wyprodukowano zegarki, które nie działają, gdy wyschną. Sekret tych zegarków polega na tym, że zamiast zwykłej baterii mają one dwa kawałki metalu: cynku i miedzi połączone materiałem porowatym. Jeżeli materiał jest wilgotny, to urządzenie działa jak zwykła baterijka. Wytwórca zegarków podaje, że można je moczyć w dowolnym płynie, chociaż ostrzega, że cukier zawarty w oranzadzie może zakłajstrować baterię.



Na pytanie o  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x$  większość studentów z pewnej grupy na uniwersytecie amerykańskim odpowiedziała: 230,2585. Istotnie, łatwo to „sprawdzić” za pomocą 8-cyfrowego kalkulatora:

$$\begin{aligned}\ln(9 \cdot 10^{99}) &= 230,15315, \\ \ln(9,9 \cdot 10^{99}) &= 230,24846, \\ \ln(9,99 \cdot 10^{99}) &= 230,25751, \\ \ln(9,999 \cdot 10^{99}) &= 230,25841, \\ \ln(9,9999 \cdot 10^{99}) &= 230,25850,\end{aligned}$$

a liczb większych od  $9,9999 \cdot 10^{99}$  „nie ma” (w kalkulatorze).



Radioastronomowie z USA budują obecnie system 10 anten radiowych rozmieszczonych od Wysp Dziewiczych do Hawajów. Będą one rozmieszczone w obszarze o rozmiarach około 8000 km, co pozwoli na uzyskanie zdolności rozdzielczej porównywalnej ze zdolnością rozdzielczą pojedynczej anteny o średnicy rzędu średnicy Ziemi. Budowa powinna być ukończona w 1992 r. W połowie lat 90. astronomowie mają zamiar poszerzyć system anten o nowe anteny umieszczone w przestrzeni kosmicznej.



Rozważmy dowolny graf planarny  $G$  (tj. dający się narysować na płaszczyźnie tak, by krawędzie przecinały się tylko w wierzchołkach) i zastanówmy się, czy idąc wzdłuż krawędzi grafu  $G$  można obejść wszystkie wierzchołki tak, by każdy odwiedzić dokładnie raz i wrócić do punktu wyjścia. Jeżeli jest to możliwe, to powiemy, że graf  $G$  ma cykl Hamiltona. Nie jest znana żadna „lokalna” charakterystyka takich grafów, wszystkie wskazuje na to, że taka charakterystyka nie istnieje. Od dawna jednak znany jest pewien interesujący warunek dostateczny. Mówi o tym twierdzenie Whitneya.

**Twierdzenie:** Maksymalny graf planarny bez rozcinających trójkątów ma cykl Hamiltona.

Należą się tu jeszcze dwa wyjaśnienia. Maksymalny graf planarny to taki, w którym dokończenie jakiegokolwiek krawędzi psuje planarność. Natomiast rozcinający trójkąt to taki fragment (trzy wierzchołki połączone krawędziami), że i wewnątrz jego, i na zewnątrz znajdują się wierzchołki grafu. Dodajmy jeszcze, że dla maksymalnego grafu planarnego wyznaczony przez dowolny trójkąt podział zbioru pozostałych wierzchołków jest taki sam, niezależnie od tego, jak graf narysujemy na płaszczyźnie.

Najbliższej Słońca podeszła Wielka Kometą Południowa 1887 I odkryta przez Juana Thome. Przeszła ona 23 tys. km nad powierzchnią Słońca. Znane są komety, które zderzyły się ze Słońcem. Pierwszą z nich była kometą 1979 XI Howard – Koomen – Michels zarejestrowana przez amerykańskiego satelitę wojskowego Solwind 30 VIII 1979.



W swojej książce *Z pewnością pan żartuje, panie Feynman* Feynman opisuje „żywy komputer”, który był używany w Los Alamos w czasie II Wojny Światowej do prac nad bombą atomową. Służył on do sprawdzania programów numerycznych, zanim odpowiednie urządzenie do realizacji tych programów było skonstruowane przez IBM. „Komputer” ten składał się z grupy pań siedzących w jednym pokoju, z których każda wykonywała tylko jedno działanie matematyczne przewidziane programem i wynik zapisany na kartce przekazywała następnej pani do wykonania kolejnej operacji. Feynman wspomina, że ten „komputer” był tak samo szybki (!), jak pierwsze maszyny IBM, z tą różnicą, że maszyny IBM nie męczyły się i mogły pracować na trzy zmiany.



Nawet najwięksi mogą być w błędzie. W 1778 r. Leonhard Euler sformułował hipotezę, że równanie  $x^4 + y^4 + z^4 = t^4$  nie ma rozwiązań dla całkowitych liczb  $x, y, z$  i  $t$ . Równanie Eulera jest uogólnieniem Wielkiego Twierdzenia Fermata. W zeszłym roku młody matematyk Noam Elkies z Uniwersytetu Harvarda wykazał, że równanie Eulera ma nieskończenie wiele rozwiązań. Trudność w znalezieniu chociażby jednego rozwiązania polegała na tym, że najmniejsze liczby całkowite spełniające to równanie, znalezione później przez Frye'a z Cambridge (Massachusetts) po 100 godzinach pracy komputera to  $x = 95\,800$ ,  $y = 217\,519$ ,  $z = 414\,560$ ,  $t = 422\,481$  (zauważmy, że  $t^4 \approx 3,18 \dots \cdot 10^{22}$ ).



Benjamin Zuckerman z Uniwersytetu Kalifornijskiego i Eric Becklin z Uniwersytetu Hawajskiego odkryli obiekt zwany brązowym karłem (większy od planety, a mniejszy od gwiazdy). Istnienie takich obiektów zostało przewidziane ponad 20 lat temu, ale ich odkrycie jest bardzo trudne, gdyż słabo świecą. Zuckerman i Becklin dokonali odkrycia analizując nadwyżkę promieniowania w zakresie  $2 - 5 \mu\text{m}$  w widmie promieniowania białego karła zwanego Giclas 29 - 38. Obserwowane spektrum można wytłumaczyć zakładając, że ciało o promieniu około 15% promienia Słońca i o temperaturze 1200 K krąży dookoła Giclas 29 - 38.



Isidor Rabi, profesor Columbia University w Nowym Jorku, tak wspomina swoje pierwsze spotkanie ze Schwingerem: *W 1935 roku (Schwinger miał wówczas 17 lat) Einstein, Rosen i Podolsky opublikowali słynną pracę dotyczącą podstaw mechaniki kwantowej. Studiowałem tę pracę, a moją metodą było zaprosić studenta i wyjaśnić mu treść pracy. Tym razem był to Lloyd Motz. Dyskutowaliśmy nad jakimś punktem, gdy Motz zauważył, że ktoś czeka za drzwiami; po chwili wprowadził chłopaka w krótkich spodniach. Kontynuowaliśmy naszą dyskusję, gdy dzieciak nam przerwał i rozstrzygnął wątpliwości. Dzięki pomocy Rabiego Schwinger w tym samym roku rozpoczął studia w Columbia University. W 1965 roku wraz z Richardem Feynmanem i Shinichiro Tomonagą Julian Schwinger otrzymał nagrodę Nobla za stworzenie elektrodynamiki kwantowej.*

W XVIII wieku została sformułowana empiryczna reguła Titiusa – Bodego, z której niezbitnie wynikało, że między orbitami Marsa i Jowisza powinna przebiegać orbita jeszcze jednej planety obiegającej Słońce w średniej odległości 2,8 jednostki astronomicznej. Wielu astronomów z rezerwą traktowało tę, nie mającą odbicia w żadnym prawie fizycznym, regułę. Miała ona jednak również licznych zwolenników przez lata bezskutecznie poszukujących „ukrywającego się” członka słonecznej rodziny. Nikt nie przypuszczał, że zamiast poszukiwanej planety istnieje ich całe mnóstwo – setki tysięcy maleńkich ciał – planetoid.

Do odkrycia pierwszej planetoidy doszło jednak zupełnie przypadkowo. W noc sylwestrową na przełomie lat 1800/1801 astronom włoski Giuseppe Piazzi dokonywał rutynowych obserwacji służących do układania katalogów gwiazd. Nieoczekiwanie dostrzegł nieznane ciało niebieskie, które już następnej nocy znacznie zmieniło położenie. Choroba zmusiła Piazzi do przerwania obserwacji. Gdy po kilku dniach usiłował ponownie odszukać tajemniczy obiekt, nie udało mu się. Podał jedynie swe odkrycie do powszechnej wiadomości nazywając zaobserwowane ciało Ceres – na cześć bogini urodzaju. Ponownie Ceres zaobserwowano w 1802 r. i dopiero wtedy po obliczeniu elementów orbity okazało się, że bardzo dobrze spełnia ona warunki orbity poszukiwanej planety. Problem stanowił jedynie fakt, że spodziewano się odkrycia znacznie większego obiektu. Został on jednak szybko rozwiązany – odkrycia kolejnych planetoid posypały się jak „z rękawa”.

Początkowo planetoid poszukiwano stosując dość uciążliwe metody wizualne. Obserwatorzy rysowali mapki widzianego przez lunetę obszaru nieba i porównywali je ze znanymi atlasami. Gdy na rysunku dostrzeżono obiekt, którego nie było w atlasie, pozostawało sprawdzić, czy zmienia on położenie wśród gwiazd. Jeśli okazywało się to prawdą, można było zaliczyć go w poczet planetoid i uzyskać prawo do nadania mu nazwy. Dzięki wytrwałości obserwatorów w drugiej połowie ubiegłego wieku odkryto w ten sposób ponad trzysta planetoid.

Duży postęp w tej dziedzinie spowodowało wprowadzenie w latach dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku metody fotograficznej. Można było skończyć z mozolnym rysowaniem mapek – wierny obraz obszaru nieba „podejrzanego” o istnienie na nim planetoidy uzyskuje się na kliszy fotograficznej. Mechanizm zegarowy prowadzi aparat fotograficzny w tempie odpowiadającym szybkości obrotu nieba. Dzięki temu gwiazdy są na kliszy widoczne w postaci punktów, planetoidy zaś (i wszystkie ciała zmieniające względnie szybko położenia na niebie) pozostawiają na kliszy ślad w postaci kreski. Dzięki zastosowanej metodzie liczba odkrywanych planetoid zaczęła szybko wzrastać.

Planetoidy, choć tak licznie reprezentowane w Układzie Słonecznym, są „trudnymi” obiektami obserwacyjnymi. Nie dość, że w większości przypadków mają bardzo małe jasności (niewielkie są ich rozmiary i tzw. albedo – zdolność odbijania światła słonecznego), płatają astronomom złośliwe figle, wymykając się nieoczekiwanie z pola widzenia lunet. Szczególnie wiele zamieszania

wprowadził Hermes. Jego odkrycie w dniu 28 X 1937 r. spowodowało pojawienie się w prasie sensacyjnych informacji o możliwości zderzenia z Ziemią. Do zderzenia, co prawda na szczęście nie doszło, jednak rzeczywiście planetoida ta zbliżyła się rekordowo – w momencie odkrycia znajdowała się zaledwie dwa razy dalej niż Księżyc. Wiadomość o odkryciu pobudziła wielu astronomów na całym świecie do obserwacji tego maleńkiego obiektu. Jednak, poza nocą, której został odkryty, nikt nie mógł go odnaleźć. Na podstawie wykonanych zdjęć nie można było nawet ustalić kierunku jego ruchu. Znowu astronomom pomógł przypadek – Hermesa udało się zidentyfikować na zdjęciach wykonanych (26, 27, 28 i 29 X 1937 r.) w celu obserwacji gwiazd zmiennych i rutynowego patrolowania nieba. Przekopane obserwacje okazały się bardzo cenne – na podstawie zdjęć ustalono, że gdy Hermes znajdował się najbliżej Ziemi, jego ruch był zupełnie wyjątkowy – przemierzał niebo w zawrotnym tempie 5° na godzinę, a więc w ciągu zaledwie sześciu minut pokonywał drogę odpowiadającą średnicy Księżyca. Niestety, bardzo szybko wymknął się spod kontroli astronomów. Na podstawie zbyt ubogich danych nie można było wyznaczyć jego orbity i dopiero w kilkadziesiąt lat po odkryciu udało się zaobserwować go ponownie. Znane są dziesiątki planetoid bezpowrotnie zagubionych wskutek niedostatecznej znajomości ich orbit.

Orbity kilku tysięcy innych planetoid znane są z dużą dokładnością. Dzięki temu można ustalić, kiedy warunki ich obserwacji są najlepsze – a są one najkorzystniejsze, podobnie jak w przypadku wszystkich planet górnych, w okolicy opozycji. Ze względu na eliptyczność orbit podobnie, jak Marsa, najlepiej obserwować je w czasie wielkich opozycji, gdy zbliżają się do Ziemi na najmniejsze odległości. Z wyjątkiem Vesty, osiągającej największą jasność 5,9 mag, wszystkie planetoidy są, niestety, poza zasięgiem dostrzegalności nieuzbrojonym okiem, choć może się zdarzyć, że któraś z nich, podobnie jak Hermes w 1937 r., nieoczekiwanie zbliży się do Ziemi i jasno zaświeci na niebie. Można również liczyć na szczęśliwy przypadek odkrycia nowej planetoidy, jaki zdarzył się niemieckiemu miłośnikowi astronomii G. Wittowi. 13 sierpnia bieżącego roku minęło dziewięćdziesiąt lat od momentu, gdy Witt zaobserwował Erosa. Co prawda, tej samej nocy został on również sfotografowany przez francuskiego astronoma A. Charloisa, który jednak przystąpił do opracowywania kliszy w trzy dni później – po wolnych od pracy sobocie, niedzieli i poniedziałku. Autorstwo odkrycia przypisano zatem Wittowi. Jak się później okazało, ślady Erosa były również widoczne na kliszach wykonanych w Harvard College Observatory od października 1893 r. do czerwca 1896 r. Nie zostały one jednak wcześniej odpowiednio zinterpretowane.

Osoby zainteresowane obserwacjami planetoid mogą odszukać ich efemerydy w rocznikach astronomicznych, a także w czasopiśmie I olskiego Towarzystwa Miłośników Astronomii – *Uranii*, gdzie opisywane są warunki widzialności jaśniejszych planetoid na każdy miesiąc.