

SPIS TREŚCI

NUMERU 12(180)

O klasyfikacji grup skończonych <i>dr Zbigniew Marciniak</i>	str. 1
Symetrie i prawa zachowania <i>dr Andrzej Majhofer</i>	str. 4
Barwy kryształu <i>doc. dr Jerzy Ginter</i>	str. 6
Grupy Liego <i>doc. dr Wojciech Wojtyński</i>	str. 7
Mała Delta	str. 9
Zwykle izometrie zwyklej płaszczyzny <i>dr hab. Marek Kordos</i>	str.10
Patrz w niebo	str.11
Grupy gwiazd <i>dr Tomasz Kwast</i>	str.12
Zadania	str.13
Klub 44	str.14
Drobiazgi	str.16
Krzyżówka i szarada	str.17

W następnym numerze:

Delta na komputerze



„Delta”
 matematyczno-fizyczno-astrofizyczny
 miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa
 Matematycznego, Polskiego
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
 Towarzystwa Astronomicznego
 wydawany przy poparciu
 Ministerstwa Edukacji Narodowej

Komitet Redakcyjny

dr Maciej Bryński
 dr Bogdan Cichoński
 dr Antoni L. Dawidowicz
 dr Alicja Derkowska
 doc.dr Jan A. Gaj
 doc.dr Bolesław Gleichgewicht
 doc.dr Tomasz Hofmokr – v-przewodniczący
 doc.dr Tadeusz Jarzębowski
 doc.dr Marcin Kubiak
 mgr Andrzej Mąkowski
 dr Zbigniew Płochocki
 dr Jan Rempala
 prof.dr Konrad Rudnicki
 prof.dr Grzegorz Sitariski
 prof.dr Józef I. Smak
 prof.dr Kazimierz Stepien
 prof.dr Mieczysław Subotowicz
 doc.dr Andrzej Szymacha
 doc.dr Aniela Wolska
 prof.dr Andrzej Woszczyk
 prof.dr Wojciech Żakowski –
 przewodniczący

WARUNKI I CENY PRENUMERATY NA 1989 ROK

Zgłoszenia na prenumeratę:
 w terminie

- do dnia 10 listopada br. na pierwszy kwartał, pierwsze półrocze oraz cały rok, 1989,
- do dnia 1 każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty

przyjmują:

- Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch” od osób prawnych – instytucji i zakładów pracy zlokalizowanych w miastach będących siedzibą tych Oddziałów,
- urzędy pocztowe nadawczo-odbiorcze właściwe dla miejsca zamieszkania prenumeratora – przyjmują zamówienia od indywidualnych prenumeratorów (osoby fizyczne), zamieszkałych w miastach, gdzie znajdują się siedziby Oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”,
- urzędy pocztowe i doręczyciele w miejscowościach, gdzie nie ma Oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich – przyjmują zgłoszenia zarówno od indywidualnych prenumeratorów (osoby fizyczne), jak i dla instytucji oraz zakładów pracy zamieszkałych i mieszczących się na tych terenach.

Ceny prenumeraty:

kwartalnej 210 zł
 półrocznej 420 zł
 rocznej 840 zł

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę – przyjmuje Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw RSW „Prasa-Książka-Ruch” ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, PKO BP Oddział w Warszawie Nr 1658-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

Cena 1 egzemplarza zł 70,-

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga
 dr hab. Jan Kalinowski – z-ca red. nac.
 mgr Krystyna Kordos – sekr. red.
 dr hab. Marek Kordos – red. nac.
 dr Tomasz Kwast
 mgr inż. arch. Mariola Łotysz – ilustr.
 dr Andrzej Majhofer
 mgr Anna Rudnik
 dr Jerzy Ryll
 mgr Joanna Udalska

Adres Redakcji

ul. Noakowskiego 14
 00-666 Warszawa
 tel. 25-56-39

Warszawskie Wydawnictwo Prasowe
 RSW „Prasa-Książka-Ruch”
 Al. Jerozolimskie 125/127

02-017 Warszawa
 tel. centr. 28-52-31

Biurowisko Reklamowe i Ogłoszeń
 ul. Poznańska 38
 00-689 Warszawa
 tel. 28-23-09

Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.,
 2,50 ark. druk.,

papier offsetowy V kl. 70 g.
 Wydrukowano w Prasowych

Zakładach Graficznych

RSW „Prasa-Książka-Ruch”

w Łodzi, ul. Armii Czerwonej 28

Nr zam. Nr zam. 3287/88, U-69

Skład systemem TeX
 wykonała redakcja.

O klasyfikacji grup skończonych

Dr Zbigniew MARCINIAK

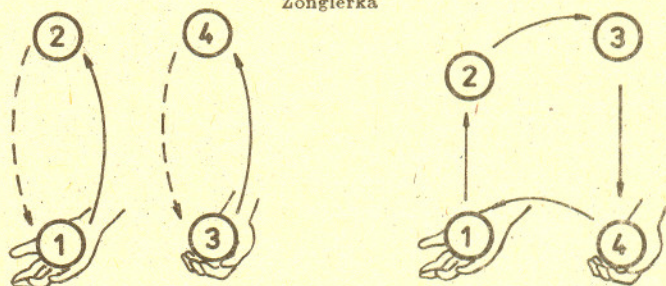
Na jakiej podstawie jesteśmy skłonni uznać pewne przedmioty za bardziej symetryczne od innych?

Możemy postąpić np. tak: dla każdej z oglądanych figur F rozważmy zbiór $Sym(F)$ wszystkich ruchów sztywnych (izometrii euklidesowych), które nakładają F na F . Ten z przedmiotów uznamy za bardziej symetryczny, którego zbiór symetrii $Sym(F)$ jest „bogatszy”, tj. ma więcej elementów. Nawet jeśli figura F jest pozbawiona wszelkiej symetrii, to i tak zbiór $Sym(F)$ jest niepusty: przekształcenie identycznościowe nakłada F na F . Jest oczywiste, że składając przekształcenia należące do zbioru $Sym(F)$, a także odwracając przekształcenie z $Sym(F)$, nadal pozostaniemy w tym zbiorze.

Jeśli X nie jest figurą geometryczną, lecz po prostu zbiorem pewnych przedmiotów, to rozważanie izometrii nie ma sensu, ale zbiór $Per(X)$ wszystkich wzajemnie jednoznacznych przekształceń X na X (zwanym permutacjami) ma te same własności, które zauważyliśmy wyżej dla zbiorów symetrii.

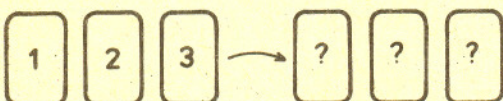
Oto przykłady permutacji:

Żonglerka



Ta permutacja jest łatwa...

... a ta trudna do wykonania.



Gra w 3 karty: Która permutacja zmyli widza?

Wspólne własności zbiorów symetrii i zbiorów permutacji można wysłowić jak następuje. Dany jest zbiór G z działaniem \cdot (u nas składanie przekształceń), które ma następujące własności:

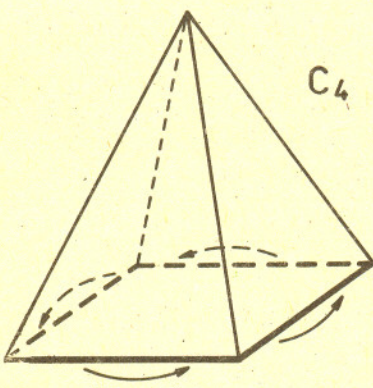
- G zawiera element e neutralny ze względu na działanie \cdot :
$$e \cdot a = a \cdot e = a \text{ dla dowolnego } a \in G.$$
- Każdy element $a \in G$ ma w zbiorze G element odwrotny a' :
$$a \cdot a' = a' \cdot a = e.$$
- Działanie \cdot jest łączne:
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \text{ dla dowolnych } a, b, c \in G.$$

Zbiór G , wyposażony w działanie \cdot spełniające powyższe aksjomaty, nazywamy grupą. Na ogół działanie grupowe nazywa się mnożeniem, a element neutralny – jedyneką (na wzór grupy moltiplicatywnej dodatnich liczb rzeczywistych). Panuje też zwyczaj nazywania działania dodawaniem, a elementu neutralnego zerem, gdy chcemy krótko zasygnalizować, iż grupa jest przemienne (tj. $a \cdot b = b \cdot a$ dla dowolnych $a, b \in G$).

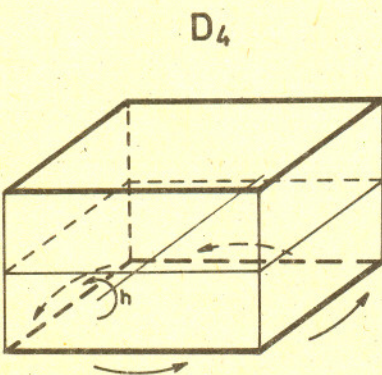
Wszystkie rozważane dalej grupy będą skończone, tzn. zbiór G będzie miał zawsze skończenie wiele elementów (liczbę elementów grupy nazywamy rzędem grupy i oznaczamy $|G|$). Np. jeśli zbiór X składa się z n kolejnych liczb: $1, 2, \dots, n$, to grupa $Per(X)$ ma, jak nietrudno obliczyć, $n!$ elementów. Grupę tę oznaczamy S_n .

Ciekawych przykładów grup skończonych dostarczają nam wielościany w przestrzeni trójwymiarowej. Oznaczmy przez $O(W)$ grupę tych obrotów przestrzeni, które przeprowadzają wielościan W na siebie. Gdy W_1 jest ostrosłupem prawidłowym nieforemnym, którego podstawą jest n -kąt foremny, to grupa $O(W_1)$ ma n elementów i składa się z obrotów ostrosłupa wokół jego osi. Nosi ona nazwę grupy cyklicznej C_n .

Gdy W_2 jest graniastosłupem (ale nie sześcianem), którego podstawą jest ten sam n -kąt foremny, to jego grupa obrotów $O(W_2)$ ma $2n$ elementów: n „starych” obrotów podstawy oraz n nowych obrotów, będących złożeniem starych obrotów z półobrotem h , stawiającym graniastosłup „do góry nogami”. Grupa $O(W_2)$ nosi nazwę grupy diedralnej D_n (grupy dwuścianu).

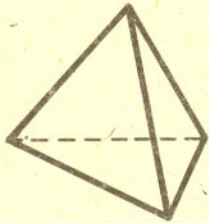


C_4

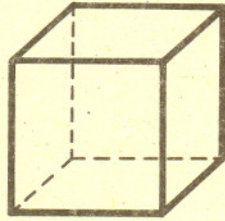


D_4

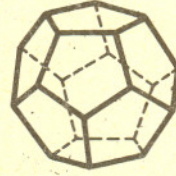
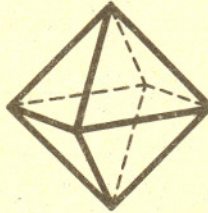
Grupy cykliczne C_n i diedralne D_n tworzą dwie nieskończone serie typowych grup obrotów przestrzeni 3-wymiarowej. Oprócz nich mamy jeszcze trzy grupy wyjątkowe, związane z bryłami platońskimi. Dla czworościanu dostajemy 12-elementową grupę T . Dla sześcianu i dla ośmiościanu foremego mamy grupę 24-elementową, oznaczaną tradycyjnie przez O . Wreszcie dla dwunastościanu i dla dwudziestościanu foremego mamy grupę I o 60 elementach. (Zachęcam Czytelników do odszukania tych wszystkich obrotów dla każdej z brył.)



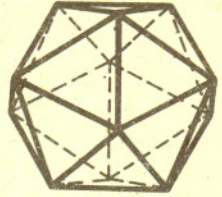
$$|T| = 12$$



$$|O| = 24$$



$$|I| = 60$$



Zauważmy, że grupa O ma 4! elementów, podobnie jak grupa S_4 . Może to ta sama grupa, tyle że w „geometrycznym przebraniu”?

Dwie grupy G_1, G_2 uznamy za takie same (izomorficzne), jeśli istnieje wzajemnie jednoznaczne przekształcenie $f: G_1 \rightarrow G_2$, które zachowuje mnożenie:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \text{ dla dowolnych } x, y \in G.$$

Nietrudno dowieść, że grupa O jest istotnie izomorficzna z grupą S_4 . W tym celu należy zauważyć, że każdy obrót sześcianu permutuje zbiór czterech przekątnych, przechodzących przez jego środek. Co więcej, każdy obrót sześcianu jest wyznaczony przez tę permutację jednoznacznie.

Nie należy jednak sądzić, że każde dwie grupy, które mają tyle samo elementów, są izomorficzne. Np. grupy S_3 i C_6 mają po 6 elementów, ale są różne: w C_6 mnożenie jest przemienne, a w S_3 – nie (sprawdź!).

Głównym zadaniem teorii grup skończonych jest ich pełna klasyfikacja.

Grupa $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ jest w pełni opisana przez swoją tabelkę mnożenia, która podaje wynik pomnożenia każdego dwóch jej elementów. Tabela ta jest więc kwadratem o boku n . Takich tabel jest skończenie wiele. Dla małych liczb n możemy je wszystkie bez trudu wypisać, ale dla dużych n zadanie robi się kłopotliwe: większość tabel nie chce spełniać aksjomatów grupy! Trzeba więc szukać innych sposobów.

Inną możliwość stwarza następujące twierdzenie Cayleya: każda grupa skończona rzędu n jest podgrupą w grupie permutacji S_n . (Mnożenie z lewej strony przez $g \in G$ miesza elementy grupy G , określając w ten sposób ich permutację.)

Dla klasyfikacji grup rzędu n należałoby opisać wszystkie podgrupy w grupie S_n . Niestety, jest to również zadanie beznadziejne dla dużych n . Twierdzenie Cayleya daje nam jednak możliwość wygodnego reprezentowania grup skończonych za pomocą liczb, np. w pamięci komputera.

Właściwa droga do klasyfikacji grup rozpoczyna się od następującego odkrycia: niektóre grupy skończone są zbudowane z dwóch grup o mniejszej liczbie elementów. Aby znaleźć taki rozkład dla grupy G , wystarczy wskazać w niej podgrupę normalną H , tj. taki podzbiór $H \subset G$, który:

1. jest podgrupą, tzn. H wraz z mnożeniem pochodzącym z G spełnia aksjomaty grupy, oraz
2. dla dowolnych elementów $x \in G$ i $h \in H$ element xhx' pozostaje w H (warunek normalności).

Jeśli $H \neq \{e\}$ i $H \neq G$, to G jest zbudowana z pary grup. Jedną z nich jest sama H , a drugą – tzw. grupa ilorazowa G/H , która ma dokładnie $|G|/|H|$ elementów.

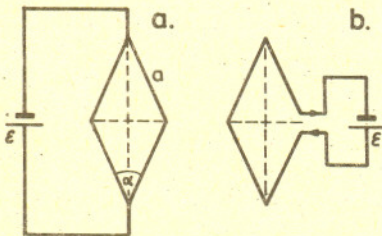
Uznamy, że badanie takiej grupy G zostało zredukowane do zbadania mniejszych grup H i G/H . Pozostaje jednak problem opisu tych grup G , które nie mają podgrup normalnych H różnych od $\{e\}$ i G . Takie grupy nazywamy grupami prostymi.

Które z grup opisanych wyżej były proste? Grupa cykliczna C_n jest prosta tylko wtedy, gdy n jest liczbą pierwszą. Grupy diedralne nie są proste: zawierają podgrupy normalne C_n . Grupy permutacji S_n także nie są proste: zawierają one podgrupy normalne A_n , składające się ze wszystkich permutacji parzystych.



Rozwiązanie zadania F 258.

A) Środek rombu jest środkiem symetrii tego obwodu. Sposób podłączenia tego obwodu do źródła prądu sprawia, że każdemu elementowi jednego boku możemy przyporządkować odpowiedni element boku równoległego, który będzie wytwarzać pole o tej samej wartości, ale przeciwnie skierowane. Oznacza to, że indukcja w środku rombu jest równa zeru.



B) W przypadku drugiego sposobu podłączenia (rys.) pola magnetyczne wytworzone przez poszczególne boki zsumują się dając w środku rombu pole różne od zera. Indukcję pola w punkcie O , jaką dają pojedynczy bok, oznaczmy przez B' . Całkowita indukcja w tym punkcie wyniesie $B = 4B'$. Na podstawie prawa Biota – Savarta możemy obliczyć natężenie pola magnetycznego w punkcie O , pochodzące od jednego z boków:

$$H' = \frac{I}{4\pi r} (\sin \angle AOD + \sin \angle DOB),$$

ponieważ $\angle AOD = \alpha/2$, $\angle DOB = \alpha$, $r = a\sqrt{3}/4$, więc

$$H' = \frac{I}{2\pi\sqrt{3}a} (\sqrt{3} + 1).$$

Znając opór drutu $R = \rho 4s/S$ obliczymy natężenie prądu w obwodzie:

$$I = \frac{\epsilon}{R} = \frac{\epsilon S}{4\rho a}.$$

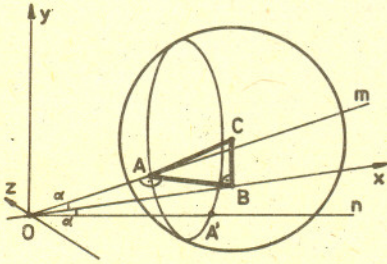
Stąd

$$B = \mu_0 4B' = \frac{\mu_0 \epsilon S}{2\pi \rho a^2} (\sqrt{3} + 1) / \sqrt{3}.$$



Rozwiązanie zadania M 528.

Ustalmy początek układu współrzędnych w punkcie przecięcia prostych m , n , oś x – jako dwusieczną kąta między prostymi, oś z – w płaszczyźnie wyznaczonej przez proste m , n (które przecinają się pod kątem 2α).



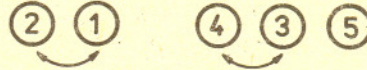
Środek kuli ma współrzędne $C = (x, y, 0)$. A jest punktem styczności sfery z prostą m , B – rzutem prostokątnym C na płaszczyznę xz .

W takim razie $AC^2 = CB^2 + BA^2$; oznaczając przez R promień kuli, mamy $AC = R$, $CB = y$, $BA = x \sin \alpha$, stąd

$$R^2 = y^2 + x^2 \sin^2 \alpha,$$

a to jest równanie elipsy.

Permutacja miesza naturalną kolejność liczb; np. $\sigma \in S_5$ może przekształcać 12345 w 21435. Liczby te możemy ponownie uporządkować, zamieniając miejscami niektóre pary liczb sąsiednich. Jeśli liczba tych zamian jest parzysta, to permutacja też nazywa się parzysta. Taka jest np. permutacja σ z powyższego przykładu:



Zadanie: wykaż, że grupa T obrotów czworościanu foremego jest izomorficzna z grupą A_4 .

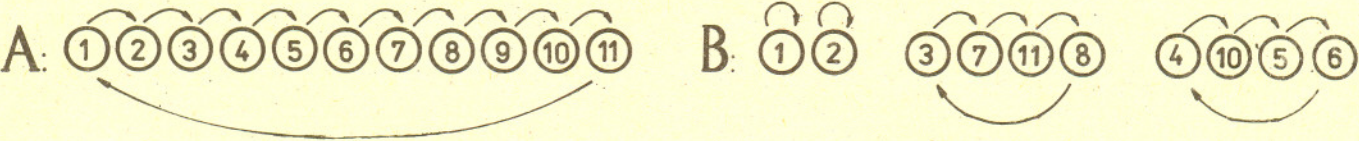
Można udowodnić, że dla $n \geq 5$ grupa A_n jest prosta. Mamy więc już dwie nieskończone serie grup prostych: C_p , gdzie p – liczba pierwsza, oraz A_n dla $n \geq 5$. Odkryto jeszcze 16 innych serii skończonych grup prostych. Podobnie jak seria A_n została wykryta w grupach permutacji S_n , tak te nowe serie zostały wykryte za pomocą grup macierzy.

Macierz dla algebraika to po prostu kwadratowa tablica składająca się z liczb. Najważniejszą cechą macierzy jest to, że je można mnożyć. Dla geometrii – macierz to bardzo ekonomiczny sposób zakodowania przekształcenia afinicznego (zachowującego proste) przestrzeni n -wymiarowej, które zachowuje punkt $(0, 0, \dots, 0)$. W tej interpretacji mnożenie macierzy dokładnie odpowiada składaniu przekształceń, a zbiór macierzy odpowiadających przekształceniom odwracalnym tworzy grupę – $GL(n, \mathbb{R})$. Jest to grupa Liego – o nich też możesz poczytać w tym numerze *Delty*.

Oczywiście, grupa $GL(n, \mathbb{R})$ jest nieskończona. Weźmy więc zamiast nieskończonego zbioru liczb rzeczywistych skończony zbiór reszt $F_q = \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$ dla ulubionej liczby pierwszej q . Liczby ze zbioru F_q można, podobnie jak liczby rzeczywiste, dodawać i mnożyć biorąc zawsze wynik modulo q . Rozważając macierze o współczynnikach ze zbioru F_q otrzymujemy grupę skończoną $GL(n, q)$. Wspomniane wyżej grupy 16 nowych serii powstają z grup $GL(n, q)$ przez proste operacje algebraiczne. Są one ściśle związane z tzw. prostymi grupami Liego i dlatego noszą wspólną nazwę grup skończonych typu Lie.

Wszystkie grupy proste, wspomniane dotąd, uchodzą za typowe. Oprócz nich istnieją jeszcze tzw. grupy sporadyczne, odkrywane ad hoc i nie mieszczące się w żadnym schemacie. Były one znajdowane pojedynczo, w ciągu kilku dziesięcioleci.

Znamy obecnie 26 grup sporadycznych. Każda z nich ma swoją nazwę, zwykle pochodzącą od nazwiska jej odkrywcy-konstruktor. Mamy więc 5 grup Mathieu: M_{11} , M_{12} , M_{22} , M_{23} , M_{24} – zostały odkryte w 1860 r., z których najmniejsza M_{11} ma 7 920 elementów, a największa – M_{24} : 244 823 040 elementów. Grupę M_{11} można reprezentować w komputerze jako podgrupę permutacji 11 liczb, generowaną przez dwa elementy:



Dalej mamy 4 grupy Janko: J_1 – 1966 r., J_2 , J_3 – 1969 r., J_4 – 1980 r.; grupy Higmana-Simsa: HS – 1968 r., McLaughlina: Mc – 1969 r., Suzuki: Suz – 1969 r., Rudvalisa: Ru – 1973 r., Helda: He – 1969 r., Lyonsa: Ly – 1972 r., O’Nana: ON – 1976 r., trzy grupy Conwaya: $.1$, $.2$, $.3$ – 1969 r., trzy grupy Fishera: $M(22)$, $M(23)$ i $M(24)'$ – 1971 r. oraz w końcu cztery grupy Griessa: F_5 , F_3 , F_2 , F_1 – 1976 r.

Największą spośród grup sporadycznych jest grupa F_1 , która ma

$$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 = 808\,017\,424\,794\,512\,875\,886\,459\,904\,961\,710\,757\,005\,754\,368\,000\,000\,000\,000 \text{ elementów.}$$

Początkowo nosiła ona nazwę potwora (*monster*), ale gdy jej odkrywca, R. Griess, znalazł jej ładną interpretację geometryczną, przemianował ją na przyjaznego olbrzyma (*friendly giant*). Grupa ta została odkryta jako podgrupa w grupie macierzy stopnia 196 883.

W lutym 1981 roku specjaliści uznali, że dowód twierdzenia o klasyfikacji grup prostych został zakończony – innych grup prostych nie ma! Twierdzenie to jest efektem pracy setek matematyków. Jego dowód składa się z wielu fragmentów, rozrzuconych w około 500 pracach zajmujących łącznie około 10 000 stron druku. Oczywiście, prace nad uproszczeniem dowodu trwają.



Rozwiązanie zadania M 527.

W końcu dostajemy los, który albo wygrywa, albo przegrywa. Ze względu na symetrię prawdopodobieństwo otrzymania każdego z takich losów jest takie samo. Zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi $k/(n-m)$, czyli jest takie jak w sytuacji, w której usunięto by wszystkie losy uprawniające do następnego ciągnięcia. Znajdują się one w różnych loteriach wyłącznie w celach propagandowych.

W artykule omawiamy tzw. symetrie kinematyczne, natomiast wspomniany w przykładzie fakt, że podczas ruchu w polu potencjalnym typu

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{k}{r}$$

zachowany jest wektor $\mathbf{v} \times \mathbf{L} - k\frac{\mathbf{r}}{r}$, związany z innym typem symetrii, tzw. symetriami dynamicznymi.



Rozwiązanie zadania F 259.

Z symetrii przedstawionego układu wnioskujemy, że $I_{BD} = 0$, $I_{CD} = I_{BC} = I_0/2$, gdzie I_0 jest natężeniem prądu wpływającego do obwodu. Możemy to stwierdzić w następujący sposób. Punkty doprowadzenia prądu - C i G są wyróżnione w tym układzie. A zatem jedyną symetrią układu, tzn. taką transformacją, po której dokonaniu własności fizyczne układu (wszystkie lub ich część) pozostają bez zmiany, będzie odbicie względem osi przechodzącej przez punkty C i G. Rozpatrując nasz obwód przed i po dokonaniu takiej transformacji widzimy, że obraz punktu B pokrywa się z punktem D. Ponieważ własności fizyczne przed i po dokonaniu transformacji mają być takie same, to potencjały punktów B i G są jednakowe. Oznacza to, że $I_{BD} = 0$. Takie same też muszą być natężenia $I_{CD} = I_{BC} = I_0/2$. Dla prądów płynących w odcinkach AB i BE możemy napisać:

$$I_{AB}/I_{BE} = R/2R, \quad I_{AB} + I_{BE} = I_0/2,$$

$$I_{AB} = I_0/6, \quad I_{BE} = I_0/3.$$

Ponieważ ilość wydzielonego ciepła wynosi $Q = RI^2$, to stosunki wydzielonego ciepła wynoszą:

$$Q_{BD} : Q_{BC} : Q_{CD} : Q_{AB} : Q_{BE} = 0 : 9 : 9 : 1 : 4.$$

Jeśli opór odcinka BD jest równy zeru, a opór odcinka CD - 2R, to odpowiednie stosunki prądów wyniosą:

$$I_{BC} : I_{CD} = 2R : R, \quad I_{BC} + I_{CD} = I_0$$

$$I_{BC} = 2I_0/3, \quad I_{CD} = I_0/3;$$

$$I_{AB} : I_{BE} = R : 2R, \quad I_{AB} + I_{BE} = I_0/2,$$

$$I_{AB} = I_0/6, \quad I_{BE} = I_0/3.$$

Otrzymujemy na tej podstawie

$$Q_{BD} : Q_{BC} : Q_{CD} : Q_{AB} : Q_{BE} = 0 : 16 : 8 : 1 : 4.$$

Znajomość praw zachowania ogromnie upraszcza znajdowanie odpowiedzi na wiele pytań dotyczących ruchu układu. Pozwala ona uniknąć rozwiązywania równań ruchu i np. do znalezienia prędkości końcowej ciała spadającego swobodnie z wysokości h nie musimy nawet wiedzieć, że porusza się ono ruchem jednostajnie przyspieszonym, jeżeli tylko wiemy, jak zależy energia potencjalna ciała od wysokości (i oczywiście, że suma energii kinetycznej i potencjalnej jest stała). Co więcej, ponieważ do sformułowania praw zachowania potrzebne są jedynie dość ogólne cechy układu, więc często pozwalają one odpowiedzieć na wiele pytań również w przypadkach, gdy szczegółowa postać równań ruchu nie jest nam w ogóle znana. Potrafimy na przykład znaleźć prędkości końcowe ciał po zderzeniu centralnym doskonale sprężystym jedynie na podstawie prawa zachowania pędu i energii kinetycznej, a w przypadku ruchu w polu siły $\mathbf{F} = -\frac{k}{r^3}\mathbf{r}$ znajomość dwóch wektorów stałych w czasie ruchu (co łatwo sprawdzić):

$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ i $\mathbf{C} = \mathbf{v} \times \mathbf{L} - k\frac{\mathbf{r}}{r}$ (\mathbf{v} - prędkość ciała, m - jego masa), pozwala już wyznaczyć tor ruchu $\mathbf{r} = \frac{|\mathbf{L}|^2}{m(k + |\mathbf{C}| \cos \Theta)}$ (kąt Θ mierzony jest od wektora \mathbf{C}).

Jak widać, warto zastanowić się, jakie własności układu pozwalają stwierdzić, które wielkości będą zachowywane w czasie jego ruchu (czy ogólniej - ewolucji czasowej). Prześledźmy proste przykłady znajdowania takich wielkości. Odpowiednie prawo powinno mieć postać: pochodna względem czasu pewnej wielkości równa się zeru, a do jego wyprowadzenia powinniśmy posłużyć się równaniami ruchu. Załóżmy więc, że badamy ruch cząstki o masie m , w którym działającą siłę można otrzymać jako gradient pewnej funkcji (energii potencjalnej) $U(x_1, x_2, x_3, t)$, to znaczy

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i}.$$

Równania ruchu mają więc postać:

$$m \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i}.$$

Pomnóżmy te równania przez \mathbf{v}_i , wtedy mamy:

$$m\mathbf{v}_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\mathbf{v}_i \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i}.$$

Lewą stronę możemy zastąpić wyrażeniem $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 \right)$. Zsumujmy teraz równania:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \right] = - \left[\frac{dx_1}{dt} \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{dt} \frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{dx_3}{dt} \frac{\partial U}{\partial x_3} \right].$$

Jeśli $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$, czyli U nie zależy jawnie od czasu, to prawa strona ostatniej równości jest po prostu szybkością zmian U w czasie ruchu cząstki - lub inaczej

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 + U \right] = 0$$

podczas ruchu. Otrzymaliśmy zasadę zachowania energii. I drugi przykład: badamy ruch cząstek o masach m_i ; założmy, że energia potencjalna związana z oddziaływaniem cząstki i na cząstkę j zależy tylko od różnic ich współrzędnych

$$U(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j),$$

wówczas siła \mathbf{F}_{ij} , z jaką cząstka j działa na cząstkę i , dana jest przez

$$(\mathbf{F}_{ij})_x = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad (\mathbf{F}_{ij})_y = -\frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad (\mathbf{F}_{ij})_z = -\frac{\partial U}{\partial z_i},$$

a więc $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$, jak być powinno. Odpowiednie równania ruchu mają postać (zakładamy, że nie działają żadne inne siły)

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_j \mathbf{F}_{ij}.$$

Po ich zsumowaniu stronami otrzymujemy $\frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \mathbf{v}_i \right) = \sum_{ij} \mathbf{F}_{ij} = 0$.

Otrzymaliśmy zasadę zachowania całkowitego pędu.

Niezależność energii potencjalnej od czasu oznacza, że niezależnie od chwili rozpoczęcia ruchu jego przebieg będzie taki sam, o ile rozpocznie się z tego samego miejsca i z tą samą prędkością początkową. Natomiast założenie, że siły zależą jedynie od różnic

LODOWY TRANZYSTOR

Kryształy lodu są bardzo interesującymi obiektami badań dla fizyki ciała stałego. Są to słabo związane kryształy molekularne, w których cząsteczki H₂O tworzące kryształ mają dużą swobodę i na przykład stale kręcą się z częstością $\omega = 10^6 \text{ s}^{-1}$. Przerwa energetyczna między pasmami walencyjnym i przewodnictwa wynosi w lodzie około 10,9 eV (dziesięć razy więcej niż w krzemie), co oznacza praktycznie całkowity brak przewodnictwa elektronowego. Natomiast energia aktywacji defektów w kryształach lodu jest stosunkowo niewielka i wynosi poniżej 1 eV. Dzięki temu uważa się, że to defekty struktury krystalicznej są odpowiedzialne za przewodnictwo elektryczne lodu. W ostatnich latach badania własności fizycznych lodu prowadzone w Instytucie Fizyki Ciała Stałego Akademii Nauk ZSRR w Czernogolowce (dystrykt moskiewski) w sposób istotny rozszerzyły naszą wiedzę o tym materiale. Stwierdzono, że prąd elektryczny płynący przez lód umieszczony pomiędzy metalowymi elektrodami pozostaje nie zmieniony nawet przez wiele dni, natomiast bardzo łatwo go można zmieniać za pomocą oświetlenia. Zaproponowany model przewiduje, że nośnikami prądu w lodzie są jony H₃O⁺ oraz OH⁻ powstające poprzez przeniesienie jednego z protonów w okolicę sąsiedniego atomu tlenu. Ciekawy jest fakt, iż ładunki tych jonów nie są bynajmniej całkowitymi wielokrotnościami ładunku elementarnego, lecz ułamkami ($\pm 0,62$). Po zetknięciu się z elektrodami i wymianie z nimi elektronu powstają z kolei jony H₃O⁻ oraz OH⁺, które zaczynają ruch w kierunku przeciwnym. Ich ładunki są również ułamkami ładunku elementarnego ($\pm 0,38$). Ruchliwość tych nośników prądu jest bardzo mała $\mu = 10^{-2} - 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{Vs}$ i jej pomiar metodą tradycyjną (tzw. efektu Halla) nie jest możliwy. W związku z tym fizycy radzieccy wspólnie ze współpracownikami z uniwersytetów w Birmingham (Anglia) i Hokkaido (Japonia) zaproponowali nową metodę pomiarową. Mianowicie, skonstruowano tranzystor polowy, którego integralną częścią była płytka lodu. Na utlenionej powierzchni płytki krzemowej napyłkono zostały złote elektrody, na tym umieszczona została płytka lodu, którą z drugiej strony przykrywała elektroda ze stopu miedzi i srebra. Wszystkie pomiary przeprowadzano w temperaturze -33°C . Badania przeprowadzone z tym lodowym tranzystorem pozwoliły na potwierdzenie przedstawionego wyżej modelu oraz pomiar koncentracji i ruchliwości nośników prądu w kryształach lodu.

współrzędnych, prowadzi do wniosku, że przebieg ruchu nie zmieni się, jeśli w chwili początkowej układ jako całość zostanie przesunięty w inny obszar przestrzeni (o ile zachowamy względne położenia i prędkości). W naszych przykładach założenie niezmienniczości układu względem przesunięcia w czasie doprowadziło do prawa zachowania energii, a niezmienniczości względem przesunięć przestrzennych – do prawa zachowania pędu. Czy istnieje związek między prawami zachowania i istnieniem przekształceń nie zmieniających układu (jego symetrii)? Tak, taki związek istnieje, należy jednak dokładnie określić, jakie cechy układu mają pozostawać nie zmienione. Gdybyśmy bowiem w drugim z naszych przykładów założyli, że niezależnie od położenia mas na każdą z nich działa taka sama siła zewnętrzna, to, oczywiście, nasz układ nadal „wyglądałby” tak samo po przesunięciu w przestrzeni, jednak składowa pędu wzdłuż kierunku działania zewnętrznej siły nie byłaby już stałą ruchu (układ jako całość poruszałby się w tym kierunku ze stałym przyspieszeniem!).

Ogólne twierdzenie wiążące symetrie układu i prawa zachowania podała w 1918 r. Emmy Noether (1882 – 1935) – korzystała przy tym z faktu, że równania ruchu można otrzymać z zasady najmniejszego działania (o zasadzie najmniejszego działania pisaliśmy w *Delcie* 6/1985). Zgodnie z tą zasadą rzeczywisty ruch, od chwili t_1 do t_2 , układu opisywanego współrzędnymi q_1, \dots, q_n (mogą to być położenia, kąty jak w przypadku obrotu bryły sztywnej itp.) przebiega tak, że wielkość

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \frac{dq_1}{dt}, \dots, \frac{dq_n}{dt}, t) dt,$$

nazywana działaniem, przyjmuje wartość minimalną. Funkcja \mathcal{L} (lagranżjan) zawiera pełną informację o układzie i w przypadku ruchu w polu sił potencjalnych ma postać

$$\mathcal{L} = T - U,$$

gdzie T jest energią kinetyczną, a U energią potencjalną układu. Możemy teraz sformułować twierdzenie Noether:

Każdej jednoparametrowej rodzinie przekształceń postaci

$$\bar{q}_i = \tilde{q}_i(q_1, \dots, q_n, t; \alpha), \quad \bar{t} = t(q_1, \dots, q_n, t; \alpha),$$

(gdzie: $\tilde{q}_i(q_1, \dots, q_n, t; 0) = q_i$, $\tilde{t}(q_1, \dots, q_n, t; 0) = t$) nie zmieniających wartości całki działania odpowiada jedna stała ruchu.

Dowód twierdzenia zawiera przepis obliczania wielkości zachowywanej. W przypadku niezmienniczości względem przesunięć w czasie ($\bar{t} = t + \tau$) wielkością tą jest energia zdefiniowana jako:

$$E = \sum_i q_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}, \quad \text{gdzie } \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$$

(warto sprawdzić, że wielkość ta odpowiada wielkości zdefiniowanej w pierwszym z naszych przykładów), niezmienniczości względem przesunięcia odpowiada zachowanie składowej pędu równoległej do kierunku przesunięcia, a niezmienniczości względem obrotów – składowej momentu pędu wzdłuż osi obrotu.

Dotychczas zajmowaliśmy się przykładami dotyczącymi mechaniki. Twierdzenie Noether obowiązuje w każdym przypadku, gdy równania ruchu można otrzymać z zasady wariacyjnej, a więc „działa” we wszystkich niemal teoriach fizycznych. Co więcej, gdy rozszerzamy teorię, twierdzenie mówi, jaką wielkość nazwać całkowitą energią, pędem, momentem pędu itd. Jeżeli na przykład uwzględnimy fakt, że oddziaływanie cząstek naładowanych odbywa się poprzez oddziaływanie z polem elektromagnetycznym, to twierdzenie Noether pozwoli znaleźć przepis obliczania energii i pędu pola. Twierdzenie Noether jest więc jednym z najważniejszych i najwygodniejszych narzędzi fizyka teoretyka.

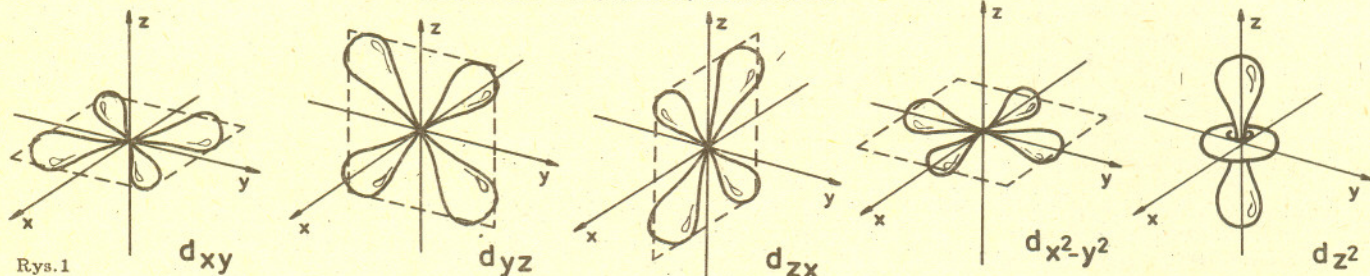
Poza wymienionymi wcześniej symetriami czasoprzestrzennymi rozpatruje się również symetrie „wewnętrzne”. Najprostszym przykładem jest niezmienniczość równania Schrödingera (to równanie też można otrzymać z zasady wariacyjnej) względem zmiany fazy funkcji falowej układu, czyli transformacji obrotu w płaszczyźnie zespolonej i odpowiadające jej zachowanie liczby cząstek. Podobny charakter mają prawa zachowania ładunków: elektrycznego, leptonowego, barionowego...

Problemem interesującym fizyka jest zbadanie wszystkich niezależnych praw zachowania obowiązujących w badanym układzie, a więc również wszystkich symetrii układu. Zbiór symetrii układu tworzy grupę z działaniem grupowym będącym złożeniem przekształceń – symetrie ciągle, a takimi się tutaj interesowaliśmy, tworzą grupę Liego.

Przy omawianiu układu okresowego w nauce chemii rozważa się grupę „metali przejściowych” od skandiu ($Z=20$) do miedzi ($Z=29$). Atomy lub jony tych pierwiastków mają niecałkowicie zapełnioną powłokę $3d$. Wiemy również doskonale, że metale przejściowe tworzą bardzo wiele barwnych związków. Wystarczy przypomnieć niebieski siarczan miedzi, pomarańczowy dwuchromian potasu czy nadmanganian potasu – prawie czarny jako kryształ, czerwono-fioletowy w roztworze wodnym. Wiadomo poza tym, że niewielka domieszka atomów metali przejściowych w bezbarwnym kryształ może wywołać intensywne zabarwienie. Przykładem jest rubin, znany zarówno jako naturalny kamień szlachetny, jak i syntetyczny – wykorzystywany do budowy jednego z typów lasera. Rubin jest to kryształ korundu Al_2O_3 , w którym czerwone zabarwienie wywołuje domieszka chromu (czysty korund jest bezbarwny).

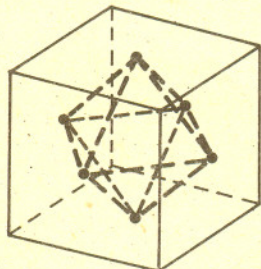
Można zadać pytanie, czy istnieje związek między budową atomów metali przejściowych a zabarwieniem ich związków. Może za barwne efekty odpowiedzialna jest niezapełniona powłoka $3d$? To na pozór absurdałne pytanie ma odpowiedź twierdzącą! Co więcej, istnieje bezpośredni związek omawianych zjawisk z zagadnieniami symetrii kryształu – otoczenia domieszki.

Rozważmy dla uproszczenia atom lub jon metalu przejściowego, który ma jeden elektron na powłoce $3d$. Jest pięć różnych orbitali $3d$.



Rys.1

Jeżeli atom (jon) znajdowałby się w próżni, wszystkie one byłyby zupełnie równoważne, odpowiadałaby im taka sama energia elektronu. Sytuacja jednak zmienia się, jeżeli jon metalu przejściowego zostanie wbudowany do kryształu. Rozważmy przypadek, kiedy miałby on sześciu sąsiadów, umieszczonych tak, jak to przedstawia rysunek 2. Widać, że sąsiedzi wyznaczają regularny ośmiościan. Lokalna symetria układu jest wysoka – faktycznie najwyższa ze wszystkich możliwych w kryształach.



Rys.2

Oczywiście, jest ona jednak znacznie niższa niż pełna obrotowa symetria jonu w próżni. To obniżenie symetrii powoduje, że nie wszystkie z pięciu orbitali d mają identyczne energie. Przypuśćmy, że sześciu najbliższych sąsiadów naszego jonu to jony ujemne. Działają one odpychająco na elektrony. A zatem korzystnie energetycznie dla elektronu jest „trzymać się” od tych sąsiadujących jonów „z daleka”. Zauważmy, że dla orbitali d_{xy} , d_{yz} , d_{zx} gęstość prawdopodobieństwa znalezienia elektronu w bezpośrednim sąsiedztwie ujemnego sąsiada jest równa zeru (rys.3a). Natomiast dla orbitali $d_{x^2-y^2}$ oraz d_{z^2} jest ona różna od zera (dla orbitala d_{z^2} przedstawia to rys.3b). A zatem pięć równoważnych w próżni orbitali $3d$ rozpadają się na dwie grupy: trzy orbitale d_{xy} , d_{yz} , d_{zx} , którym odpowiada energia mniejsza, oraz dwa orbitale $d_{x^2-y^2}$ i d_{z^2} , którym odpowiada energia większa (rys.4). Różnica energii Δ jest zwykle równa paru elektronowoltom. Odpowiadać to więc może fotonom obszaru widzialnego (zakres 1,7 – 3,1 eV). W temperaturze pokojowej elektron $3d$ w atomie przebywa na jednym z trzech równoważnych stanów dolnych. Foton może go przenieść na jeden z dwóch równoważnych poziomów górnych. Z opisaną sytuacją mamy do czynienia w alunie tytanowo-cezowym $CsTi(SO_4)_2 \cdot 12 H_2O$. Każdy z jonów Ti^{3+} ma po jednym elektronie d . W kryształach każdy jest otoczony przez sześć cząsteczek wody H_2O , ułożonych w środkach ścian sześciokąta – tak, jak to przedstawia rysunek 2. Obserwuje się absorpcję światła przez omawiany związek, związaną z przejściami między „rozszczepionymi” stanami powłoki $3d$. Występuje w niej jedna (dość szeroka) linia z maksimum około 2,5 eV, czyli w obszarze niebiesko-zielonym widma.

a.

b.

Rys.3

Rys.4

Rys.5

Gdyby lokalna symetria kryształu w otoczeniu jonu metalu przejściowego była niższa, liczba różnych energii stanów $3d$ mogłaby wzrosnąć. Na przykład – gdybyśmy ścisnęli omawiany kryształ alunu wzdłuż osi pionowej, cząsteczki wody wyznaczałyby dwupiramidę o podstawie kwadratowej, zamiast regularnego ośmiościanu (wysokość uległaby zmniejszeniu). Spowodowałoby to dodatkowe rozszczepienie stanów $d_{x^2-y^2}$ i d_{z^2} , a także odszczepienie stanu d_{xy} od stanów d_{yz} i d_{zx} (rys.5). Sytuacja poprzednio równoważnych stanów stałaby się fizycznie różna. Z tego, co powiedzieliśmy, wynika, że po pierwsze – jeżeli mamy niższą symetrię, można obserwować więcej linii absorpcyjnych. Po drugie zaś – że badanie absorpcji światła w kryształach poddawanych „jednoosiowemu” ścisnieniu może dostarczyć interesujących informacji na temat stanów elektronowych zawartych w nich jonów metali przejściowych.

W ogromnej większości przypadków mamy do czynienia z atomami (jonami) metali przejściowych, które mają więcej niż jeden elektron na powłoce $3d$, więc i opis struktury energetycznej stanów elektronowych i możliwych przejść absorpcyjnych staje się bardziej złożony.

Doc. dr Wojciech WOJTYŃSKI

Grupy te pojawiły się około roku 1870 za sprawą pracującego w Niemczech norweskiego matematyka Sophusa Lie. Chciał on zastosować do równań różniczkowych metody podobne do tych, jakie stworzył dla badania rozwiązalności równań algebraicznych Evariste Galois. Jego nadzieje w tej mierze ziściły się tylko częściowo, jednak klasa grup odkryta przy tych badaniach okazała się ważniejsza od problemu, którego rozwiązaniu miała służyć.

Początkowo bardzo geometryczna i lokalna teoria grup Liego dzięki pracom Engela, Killinga i Cartana uzyskała głęboki sens algebraiczny stając się jednym z podstawowych narzędzi globalnej geometrii różniczkowej. W latach trzydziestych zaczęła się, trwająca do dzisiaj, inwazja metod teorii grup Liego w fizyce. Obecnie grupy Liego są jednym z podstawowych pojęć współczesnej matematyki.

Znaczenie grup Liego wynika z następujących okoliczności:

- (A) Warunki, jakim ma odpowiadać grupa Liego, nie są bardzo ograniczające – istnieje dużo grup Liego.
- (B) Pomimo owego „liberalizmu” warunki te wymuszają bardzo specjalną strukturę algebraiczną pozwalającą na szczegółowy i konkretny opis.
- (C) Wszystkie naturalne i ważne grupy, mające „charakter geometryczny”, są grupami Liego.

Z tych powodów grupy Liego umożliwiają w wielu sytuacjach (punkt (A)) ujęcie ilościowe (oferując rodzaj „współrzędnych” – punkt(B)) z pozoru bardzo niesprecyzowanych sytuacji. Głębsza analiza (której tu, niestety, nie możemy przeprowadzić) pokazuje, że grupy Liego są obiektami o bardzo regularnej strukturze, której często „w zastanej sytuacji” zupełnie nie widać. Co więcej, do wykrycia tej struktury (za sprawą teorii grup Liego) wystarczą proste kryteria. A świat, jak się okazuje (punkt (C)), jest zbudowany bardziej regularnie, niż to na pierwszy rzut oka widać. Grupy Liego stanowią instrument pozwalający tę ukrytą regularność ująć w ścisłe formuły.

Artykuł ten nie będzie ścisłym i metodycznym wykładem teorii grup Liego – skoncentrujemy się na ukazaniu na przykładach wymienionych wyżej aspektów (A), (B) i (C).

Zacniemy od nieformalnej definicji: grupy Liego to takie grupy, które można lokalnie (czyli po podzieleniu na odpowiednio małe fragmenty) utożsamić (dla każdego fragmentu z osobna) z fragmentem przestrzeni \mathbf{R}^n (przy ustalonym n) i, w efekcie tego utożsamienia, opisywać za pomocą współrzędnych. We współrzędnych tych działanie grupowe wyraża się za pomocą funkcji różniczkowalnych, tzn. współrzędne elementu będącego wynikiem działania na elementach x i y są funkcjami różniczkowalnymi współrzędnych tych elementów.

A oto przykłady, które powinny zasugerować, że definicja ta spełnia warunek (A).

Przykład 1. Niech G będzie zbiorem wszystkich przekształceń \mathbf{R}^1 w \mathbf{R}^1 , które spełniają warunek

$$(1) \quad \frac{g(x_1) - g(x_2)}{g(x_2) - g(x_3)} = \frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3}$$

dla parami różnych $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}^1$.

Zauważmy, że dla dwóch przekształceń $g_1, g_2 \in G$ także ich złożenie należy do G . Zauważmy też, że gdy $x_2 \neq x_3$, to również $g(x_2) \neq g(x_3)$ – zatem każde przekształcenie $g \in G$ jest różnowartościowe. Przez proste sprawdzenie stwierdzamy, że do zbioru G należą wszystkie przesunięcia, tj. przekształcenia postaci $x \rightarrow x - b$. Więc dla dowolnego przekształcenia g , należącego do G , również przekształcenie $g_0(x) = g(x) - g(0)$ należy do G . W ten sposób dowolne przekształcenie $g \in G$ okazało się złożeniem przekształcenia g_0 , które ma własność $g_0(0) = 0$ i przesunięcia: $g(x) = g_0(x) - g(0)$. Podstawiając dla g_0 w formule (1) $x_2 = 0$ otrzymamy $\frac{g_0(x_1)}{-g_0(x_3)} = \frac{x_1}{-x_3}$, a więc $g_0(x_1) = \frac{g_0(x_1)}{x_3} \cdot x_1$. Ustalmy $x_3 \neq 0$ i oznaczmy $\frac{g_0(x_3)}{x_3} = a$. Zatem $g_0(x) = ax$, przy czym $a \neq 0$ (dlaczego?). Ostatecznie, przyjmując $b = g(0)$, widzimy, że dowolne przekształcenie $g \in G$ ma postać

$$(2) \quad g(x) = ax + b, \quad \text{gdzie } a \neq 0 \text{ i } a, b \in \mathbf{R}^1.$$

Przekształcenia należące do G okazały się wzajemnie jednoznaczne (przekształcenie odwrotne do g wyraża się wzorem $g^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$). Zatem G jest grupą. Przyporządkowując przekształceniu danemu wzorem (2) parę liczb (a, b) otrzymujemy wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie grupy G w zbiór $A = \{(a, b) \in \mathbf{R}^2 : a \neq 0\}$. Oznaczając przekształcenie (2) przez $g_{(a,b)}$ mamy

$$g_{(a,b)} g_{(c,d)}(x) = a(cx + d) + b = (ac)x + (ad + b),$$

co w zbiorze A odpowiada działaniu

$$(a, b)(c, d) = (ac, ad + b).$$

Przykład 2. Niech G będzie zbiorem wszystkich izometrii \mathbf{R}^2 (tj. przekształceń nie zmieniających odległości). Jak wiadomo (choćby ze szkoły), izometrie tworzą grupę.

Podobnie jak poprzednio wyróżnimy wśród nich przesunięcia $x \rightarrow x - b$ (teraz $x, b \in \mathbf{R}^2$) i każdej izometrii g przyporządkujemy przekształcenie g_0 zachowujące 0 dane wzorem $g_0(x) = g(x) - g(0)$.

Ponieważ izometrie przeprowadzają środek odcinka na środek odcinka, więc dla dowolnego $g \in G$ i $a, b \in \mathbf{R}^2$ mamy

$$(3) \quad g\left(\frac{1}{2}(a + b)\right) = \frac{1}{2}(g(a) + g(b)),$$

W szczególności, biorąc $b = 0$, mamy $g_0\left(\frac{1}{2}a\right) = \frac{1}{2}g_0(a)$, skąd przez indukcję otrzymujemy $g_0\left(\frac{1}{2^n}a\right) = \frac{1}{2^n}g_0(a)$ dla $n = 1, 2, \dots$. Z kolei zauważmy (jak?), że z (3) wynika

$$(4) \quad g_0(a + b) = g_0(a) + g_0(b),$$

co łącznie daje $g_0\left(\frac{k}{2^n}a\right) = \frac{k}{2^n}g_0(a)$, dla $k, n = 0, 1, 2, \dots$

Ponieważ, dla ustalonego a , przekształcenie $t \rightarrow g_0(ta)$ jest ciągle, więc otrzymujemy stąd

$$(5) \quad g_0(\lambda a) = \lambda g_0(a), \quad \text{dla każdego } \lambda \in \mathbf{R}^1.$$

Własności (4) i (5) dowodzą, że przekształcenie g_0 jest wyznaczone przez swoje wartości dla $e_1 = (1, 0)$ i $e_2 = (0, 1)$. Istotnie, wobec $x = (x_1, x_2) = x_1 e_1 + x_2 e_2$, mamy $g_0(x) = x_1 g_0(e_1) + x_2 g_0(e_2)$. Zauważmy też, że znajomość $g_0(e_1)$ wyznacza $g_0(e_2)$ z dokładnością do znaku (dlaczego?). Patrząc na e_1 i e_2 jak na zaczepione w 0 wektory stwierdzamy, że izometria g_0 jest albo obrotem, albo złożeniem odbicia względem osi wyznaczonej przez e_1 i obrotu.

Zbierając razem te wszystkie spostrzeżenia otrzymujemy

$$(6) \quad g(x) = g_0(x) + g(0) = r \epsilon(x) + b,$$

gdzie $b = g(0)$, ϵ jest odbiciem w pierwszej osi lub identyfikacją, a r – obrotem wokół 0 przeprowadzającym e_1 na $g_0(e_1)$.

Jak łatwo zauważyć, zbiór wszystkich izometrii \mathbf{R}^2 dzieli się w sposób naturalny na dwie części: zbiór tych izometrii, które w rozkładzie (6) mają ϵ będące identyfikacją (nazywa się je izometriami parzystymi) i zbiór tych izometrii, w których ϵ jest odbiciem. Dalej zajmiemy się dla uproszczenia tylko tym pierwszym zbiorem, który, jak można sprawdzić, jest grupą – oznaczmy ją przez G' .

Każde przekształcenie z G' jest więc postaci

$$(7) \quad g(x) = r(x) + b.$$

Nasuwa się oczywista parametryzacja G' – każdemu przekształceniu przyporządkowujemy kąt obrotu i wektor przesunięcia. Odwzorowujemy w ten sposób G' w \mathbf{R}^3 (bo wektor ma dwie współrzędne). Aby to odwzorowanie było wzajemnie jednoznaczne, musimy ograniczyć się do kątów z przedziału $(0; 2\pi)$. Wówczas dowolnemu $g \in G'$ jest przyporządkowana trójka (α, b_1, b_2) , gdzie α to kąt obrotu r ze wzoru (7), a $(b_1, b_2) = b$ – przekształcenie to oznaczmy $g_{(\alpha, b_1, b_2)}$. I znów, jak w przykładzie 1, możemy znaleźć obraz składania przekształceń grupy G' w zbiorze parametrów $B = \{(\alpha, b_1, b_2) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq \alpha < 2\pi\}$. Jeśli umówimy się, że dodawanie kątów będziemy przeprowadzali z dokładnością do 2π , to

$$\begin{aligned} g_{(\alpha, b_1, b_2)} g_{(\beta, c_1, c_2)}(x) &= r_\alpha(r_\beta(x) + (b_1, b_2)) + (c_1, c_2) = \\ &= r_\alpha r_\beta(x) + r_\alpha((b_1, b_2)) + (c_1, c_2) = \\ &= r_{\alpha+\beta}(x) + (b_1 \cos \alpha - b_2 \sin \alpha + c_1, b_1 \sin \alpha + b_2 \cos \alpha + c_2), \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} (\alpha, b_1, b_2)(\beta, c_1, c_2) &= \\ &= (\alpha + \beta, b_1 \cos \alpha - b_2 \sin \alpha + c_1, b_1 \sin \alpha + b_2 \cos \alpha + c_2). \end{aligned}$$

Przykład 3. Niech G będzie grupą ruchów bryły sztywnej wokół jej nieruchomego środka ciężkości (fizycy powiedzieliby: G jest przestrzenią konfiguracyjną dla ruchów bryły wokół środka ciężkości). Można wykazać, że każdy ruch z grupy G jest obrotem wokół pewnej osi (przechodzącej przez środek ciężkości). Pozwala to na sparametryzowanie grupy G .

Każdy nieidentycznościowy obrót wyznacza swoją oś obrotu jako zbiór wszystkich punktów stałych. Ustaimy zwrot tej osi tak, by kąt obrotu był dodatni (zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej) i zawarty w przedziale $(0; \pi)$. W ten sposób (w ustalonym układzie współrzędnych o początku w środku ciężkości bryły) każdemu nieidentycznościowemu obrotowi $g \in G$ przyporządkować możemy wektor jednostkowy v osi obrotu i liczbę $\varphi \in (0; \pi)$. Zauważmy, że pary (v, π) i $(-v, \pi)$ odpowiadają temu samemu obrotowi. Ale zamiast pary (v, φ) możemy wziąć wektor $\varphi \cdot v$. Dołączając do tak otrzymanych wektorów jeszcze wektor 0, jako odpowiadający przekształceniu identyfikacyjnemu, otrzymujemy odwzorowanie grupy G w kulę $K \subset \mathbf{R}^3$ o środku w 0 i promieniu π , w której utożsamia się parę punktów antypodycznych (końce średnic) ograniczającej ją sfery. Odwrotnie, każdemu punktowi $a \in K$ odpowiada obrót o kąt równy odległości a od 0 i (jeśli $a \neq 0$) o osi wyznaczonej przez wektor $0a$.

Postaramy się teraz zasugerować istnienie struktury, o której mowa w warunku (B).

Przykład 4. Niech G będzie grupą dodatnich liczb rzeczywistych z mnożeniem jako działaniem grupowym. Grupa ta dana jest bezpośrednio jako fragment \mathbf{R}^1 , jest więc grupą Liego w sensie naszej definicji. Mimo to wprowadzimy jej parametryzację przyporządkowując (dodatniej) liczbie x , rozumianej jako element grupy G , liczbę $\log_{10} x$, rozumianą jako element \mathbf{R}^1 . W wyniku tego przekształcenia (ponieważ $\log_{10}(xy) = \log_{10} x + \log_{10} y$) działanie grupowe w G przechodzi na dodawanie parametrów.

Oczywiście w ogólnej sytuacji nie ma możliwości uzyskania utożsamienia fragmentu grupy G zawierającego element neutralny z fragmentem \mathbf{R}^n zawierającym zero w ten sposób, by działanie grupowe tłumaczyło się po prostu na dodawanie odpowiednich wektorów \mathbf{R}^n – dodawanie takie jest bowiem przemienne, a grupa G niekoniecznie. Można jednak uzyskać takie utożsamienie, że w obrębie poszczególnych prostych przechodzących przez zero dodawaniu wektorów odpowiada mnożenie odpowiadających im elementów grupy. Traktując takie utożsamienie jako odwzorowanie F z \mathbf{R}^n do G otrzymamy warunek

$$(8) \quad F((t_1 + t_2)x) = F(t_1x) \cdot F(t_2x) \text{ dla } x \in \mathbf{R}^n.$$

Definiując teraz, dla ustalonego $x \in \mathbf{R}^n$, funkcję $f_x : \mathbf{R} \rightarrow G$ wzorem $f_x(t) = F(tx)$ możemy przepisać (8) w postaci

$$(9) \quad f_x(t_1 + t_2) = f_x(t_1) \cdot f_x(t_2).$$

W przypadku parametryzacji z przykładu 4 funkcja tak otrzymana ma postać $f_x(t) = 10^{t \cdot x} = (10^x)^t$, jest więc funkcją wykładniczą. W związku z tą sytuacją każdą parametryzację o własności (8) nazywamy odwzorowaniem wykładniczym. Funkcje o własności (9) nazywamy grupami jednoparametrowymi. Obraz takiej funkcji jest bowiem sam grupą Liego, lokalnie identyczną (jako grupa) z \mathbf{R}^1 z dodawaniem jako działaniem grupowym.

Przykład 5. Niech dane będzie naczynie (zbiór) N wypełnione cieczą. Niech G będzie grupą ruchów tej cieczy. Nie chcemy tu precyzować, jakiego typu ruchy nas interesują. Podamy natomiast przykład rodziny ruchów tworzących grupę jednoparametrową.

Wyobraźmy sobie, że na cząsteczki cieczy działa jakieś pole sił w ten sposób, iż prędkość chwilowa każdej cząsteczki przepływającej przez ustalony punkt jest taka sama w każdym momencie (tak np. może płynąć woda w potoku). Określone w ten sposób pole prędkości jest przykładem pola wektorowego, które wyobrażamy sobie jako rodzinę strzałek, a mówiąc językiem mniej naiwnym, każdemu punktowi przyporządkowana jest trójka liczb – współrzędne zaczepionego w tym punkcie wektora. Zatem pole wektorowe to trzy funkcje liczbowe określone na zbiorze N . Określmy rodzinę przekształceń φ_t zbioru N – parametr t będziemy interpretowali jako czas. Wartość przekształcenia φ_t w punkcie x określimy jako położenie w chwili t cząsteczki, która w chwili 0 znajdowała się w punkcie x . Czytelnik zechce sam uzasadnić formułę

$$(10) \quad \varphi_{t_1+t_2}(x) = \varphi_{t_1}(\varphi_{t_2}(x)).$$

Oznacza ona, że odwzorowanie $t \rightarrow \varphi_t$ jest grupą jednoparametrową.

To, że parametryzacja wykładnicza istnieje dla każdej grupy Liego, jest pierwszym podstawowym wynikiem teorii grup Liego (tzw. pierwsze twierdzenie Liego).

Przykład 6. Parametryzacja grupy G z przykładu 1 nie jest wykładnicza (tj. nie spełnia warunku (8)). Czytelnik zechce sprawdzić, że w przypadku omawianej grupy wykładnicza jest parametryzacja

$$(u, v) \rightarrow g\left(a^n, \frac{a^n - 1}{n} \cdot v\right), \text{ gdzie } (u, v) \in \mathbf{R}^2.$$

Parametryzacja ta dotyczy tylko części grupy G składającej się z odwzorowań $x \rightarrow ax + b$ przy $a > 0$.

Przykład 7. Proszę sprawdzić, że dla grupy omawianej w przykładzie 3, dla każdego wektora v funkcja $t \rightarrow (v, t)$ jest jednoparametrową grupą w G . W szczególności wprowadzona w przykładzie 3 parametryzacja jest wykładnicza.

Wprowadzenie wykładniczej (kanonicznej) parametryzacji jest pierwszym krokiem w badaniu grup Liego. Krok drugi (znacznie trudniejszy) polega na określeniu na przestrzeni \mathbb{R}^n (której fragment wokół zera stanowi zbiór parametrów przy parametryzacji kanonicznej) działania algebraicznego, związanego z działaniem grupowym w G , które przyporządkowuje parze wektorów (\mathbf{a}, \mathbf{b}) trzeci wektor, zwany ich iloczynem (lub nawiasem) Liego i oznaczany $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. W przypadku grupy z przykładu 3 odpowiednią

przestrzenią jest \mathbb{R}^3 , a nawiasem Liego wektorów jest ich iloczyn wektorowy.

Przestrzeń \mathbb{R}^n z nawiasem Liego nazywa się wtedy algebra Liego grupy G . Jej struktura algebraiczna koduje całkowitą informację o lokalnej strukturze G (tj. o tym, jaka jest grupa G w otoczeniu jedynek). Analiza możliwych postaci algebr Liego pozwala więc lokalnie opisać odpowiadające im grupy. Taki jest wierzchołek góry lodowej zwanej teorią grup Liego.



Pętelki na torusie

Mamy torus i mamy lepka, rozciągliwą nić. Słowo „lepka” oznacza, że raz przyłożona do torusa już się od niego oderwać nie może. Może się natomiast dowolnie na nim przemieszczać. I owijamy torus tą nicią. Np. 3 razy przez otwór, potem 2 razy dookoła całego torusa, potem 5 razy przez otwór, ale w przeciwną stronę i 3 razy dookoła całego w tę samą stronę co poprzednio.

Interesują nas tylko takie owinięcia, w których koniec nitki jest połączony z jej początkiem. Na takich owinięciach będziemy rachować. Podstawową sprawą przy rachowaniu jest odpowiedź na pytanie, jakie obiekty są równe. Za jednakowe (czyli równe) owinięcia będziemy uważali takie, które można nałożyć przez przemieszczanie nici na torusie.

Dodawac owinięcia będziemy w naturalny sposób: po wykonaniu jednego owinięcia nie łączymy jeszcze jego początku z końcem, tylko koniec traktujemy jako początek drugiego owinięcia, wykonujemy je i dopiero jego koniec łączymy z początkiem pierwszego.

Pytanie o własności dodawania owinięć wydaje się trudne, a okazuje się, że są one dokładnie takie jak własności dodawania „po współrzędnych” par liczb całkowitych:

$$(k, l) + (m, n) = (k + m, l + n).$$

Gdyby udało się nam to udowodnić, to znaczyłoby to między innymi, że podany na początku przykład owinięcia jest równy takiemu: 2 razy przez otwór w przeciwną stronę, a potem 5 razy dookoła całego torusa. Bo te liczby to właśnie są oddzielnie zliczane obiegami przez otwór i oddzielnie – dookoła całości.

Widać wobec tego, jak się zabrać do dowodu – wystarczy udowodnić, że owinięcie (1 raz przez otwór, 1 dookoła i znów 1 przez otwór) jest równoważne owinięciu (2 przez otwór i 1 dookoła). Gdy te trzy owinięcia stanowią całą pętelkę, sprawa jest oczywista – wystarczy zacząć liczyć od „i znów”. Nam jednak potrzebna jest możliwość zamiany kolejności owijania również wtedy, gdy te owinięcia stanowią fragment bardziej skomplikowanej pętelki. Ale to też jest proste do sprawdzenia – rysunek na okładce.

Tak więc wykazaliśmy, że grupa owinięć torusa jest izomorficzna z grupą par liczb całkowitych.

Płynie stąd (i w ogóle z podobnych owijkowych rozważań na różnych powierzchniach) szereg wniosków topologicznych, ale to już inna historia.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS



Sądzi się często, że rzeczy doskonale znane, takie, z którymi stykamy się na co dzień, nie mogą kryć w sobie żadnych zaskakujących faktów. Tymczasem na ogół jest wręcz przeciwnie. Choćby izometrie płaszczyzny euklidesowej – przesunięcia, obroty, symetrie i to, co się uzyska z ich złożenia. Jest ich wielkie mnóstwo i trudno się spodziewać, by dowolnie wybrane dwie spośród nich, powiedzmy φ i ψ , miały być związane jakąś jedną, z góry daną, zależnością. Okazuje się jednak, że taka zależność istnieje – została podana np. w artykule W. Guzickiego i P. Zakrzewskiego w *Delcie* 5/1987 –

$$(1) \quad \varphi^2 \psi^2 \varphi^{-2} \psi^{-2} \varphi^{-2} \psi^2 \varphi^4 \psi^{-2} \varphi^{-2} \psi^2 \varphi^{-2} \psi^{-2} \varphi^2 = id.$$

Prosta to ta równość nie jest, ale w ogóle samo jej istnienie zaskakuje. Postaramy się tę równość udowodnić.

Sto pięćdziesiąt lat temu matematyk francuski Michel Chasles (czyt. szal) stwierdził, że – każda izometria płaszczyzny euklidesowej może być uzyskana ze złożenia nie więcej niż trzech symetrii osiowych,

– izometriami płaszczyzny euklidesowej są tylko przesunięcia, obroty i symetrie z poślizgiem.

Drugie z tych zdań jest znane jako twierdzenie Chaslesa. Orzeka ono, że jakkolwiek nie składalibyśmy izometrii, to ostateczny efekt będzie przekształceniem jednego z tych trzech rodzajów.

Wypada tu może wyjaśnić, co to takiego symetria z poślizgiem (w szkole średniej uczono o tym tylko 18 roczników licealistów). Symetria z poślizgiem to złożenie symetrii osiowej z przesunięciem równoległym do osi. Złożenie takie jest dlatego obdarzone osobną nazwą, że jest wszystko jedno, co wykonamy najpierw, a co potem – symetrię czy przesunięcie. Szczególnym przypadkiem symetrii z poślizgiem jest symetria osiowa – odpowiada to zerowemu przesunięciu.

Zestawiając oba przytoczone ustalenia Chaslesa możemy uzyskać następane informacje o izometriach:

- złożenie każdej parzystej liczby symetrii osiowych daje się zredukować do złożenia dwóch takich symetrii,
- złożenie dwóch symetrii osiowych o osiach równoległych jest przesunięciem o podwojony wektor łączący te osie i prostopadły do nich,
- złożenie dwóch symetrii osiowych o osiach przecinających się jest obrotem o podwojony kąt między tymi osiami,
- złożenie każdej nieparzystej liczby symetrii osiowych daje się zredukować do złożenia trzech takich symetrii i jest symetrią z poślizgiem.

Pierwsze i ostatnie z tych zdań dają łącznie spostrzeżenie, że kwadrat każdej izometrii płaszczyzny jest przesunięciem lub obrotem.

Przy obrocie o kąt α nie tylko proste przechodzące przez środek obrotu, lecz wszystkie proste zmieniają swój kierunek o α . Aby się o tym przekonać, wystarczy skorzystać z twierdzenia o kątach mających odpowiednie ramiona prostopadłe.

Spostrzeżenie to pozwala na wyciągnięcie bardzo ogólnego wniosku:

złożenie obrotów (o dowolnych środkach) o kąty $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ jest przesunięciem, gdy $\alpha := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 2k\pi$ i obrotem o α – w przeciwnym przypadku.

Istotnie – tylko dla przesunięcia kierunek żadnej prostej nie ulega zmianie.

Wszystko to pozwala już na dowód równości (1). Jeśli się ma podejrzenie, że jakaś równość podobna do niej zachodzi (lub jeśli się przyjmie hipotezę, że tak jest), można ją znaleźć.

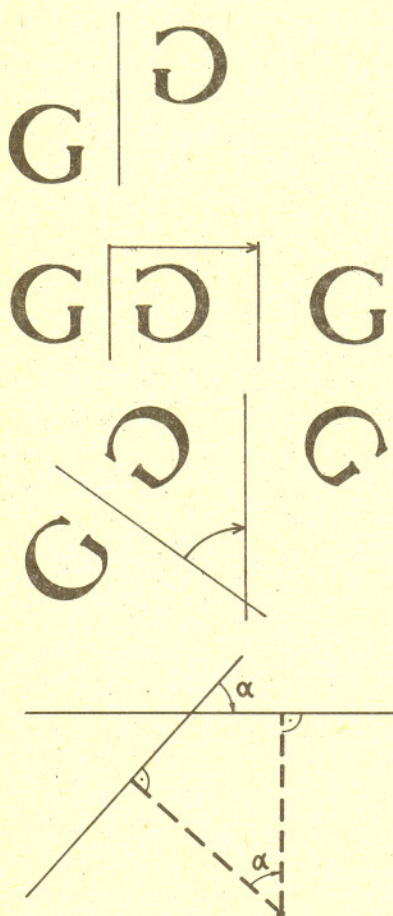
Weźmy więc jakieś dowolne dwie izometrie φ i ψ . Druga potęga każdej z nich jest, jak wiemy, albo przesunięciem, albo obrotem. Zatem każda z kombinacji postaci

$$(2) \quad \xi^{-1} \eta^{-1} \xi \eta$$

utworzona przez podstawienie w miejsce η przekształceń φ^2 lub φ^{-2} , a w miejsce ξ – ψ^2 lub ψ^{-2} jest przesunięciem (wystarczy zsumować kąty).

Z kolei, gdy w (2) zarówno η , jak i ξ są przesunięciami, to otrzymujemy identyczność. Istotnie: ponieważ przesunięcia są przemienne, więc

$$\xi^{-1} \eta^{-1} \xi \eta = \xi^{-1} \xi \eta^{-1} \eta = id \cdot id = id.$$





Zatem, aby otrzymać (1) wystarczy w (2) w miejsce η podstawić φ^2 , a w miejsce $\xi - \psi^{-2}$ otrzymując

$$\psi^2 \varphi^{-2} \psi^{-2} \varphi^2,$$

a następnie odpowiednio φ^{-2} i ψ^{-2} , co da

$$\psi^2 \varphi^2 \psi^{-2} \varphi^{-2}$$

i do tych przekształceń ponownie zastosować (2). Da to, w myśl powyższych uwag, równość

$$\begin{aligned} id &= (\psi^2 \varphi^2 \psi^{-2} \varphi^{-2})^{-1} (\psi^2 \varphi^{-2} \psi^{-2} \varphi^2)^{-1} (\psi^2 \varphi^2 \psi^{-2} \varphi^{-2}) (\psi^2 \varphi^{-2} \psi^{-2} \varphi^2) = \\ &= (\varphi^2 \psi^2 \varphi^{-2} \psi^{-2}) (\varphi^{-2} \psi^2 \varphi^2 \psi^{-2}) (\psi^2 \varphi^2 \psi^{-2} \varphi^{-2}) (\psi^2 \varphi^{-2} \psi^{-2} \varphi^2) = \\ &= \varphi^2 \psi^2 \varphi^{-2} \psi^{-2} \varphi^{-2} \psi^2 (\varphi^2 (\psi^{-2} \psi^2) \varphi^2) \psi^{-2} \varphi^{-2} \psi^2 \varphi^{-2} \psi^{-2} \varphi^2 = \\ &= \varphi^2 \psi^2 \varphi^{-2} \psi^{-2} \varphi^{-2} \psi^2 \varphi^4 \psi^{-2} \varphi^{-2} \psi^2 \varphi^{-2} \psi^{-2} \varphi^2, \end{aligned}$$

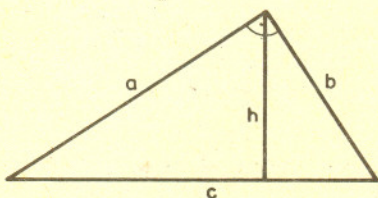
czyli równość (1). Aby przeprowadzić te rachunki, trzeba tylko zauważyć, że dla dowolnych przekształceń ξ i η jest

$$(\xi \eta)^{-1} = \eta^{-1} \xi^{-1}.$$

Tym sposobem równość (1) została udowodniona. Dowód okazał się krótki i, co więcej, opierał się tylko na informacji, że „jakaś taka” równość ma miejsce. Czy naprawdę tylko? Skąd mogliśmy wiedzieć, że akurat tak należy postępować? Ja tę metodę zaczerpnąłem z ogólnego pojęcia rozwiązalności grup – ale to już inna historia.

Na zakończenie pytanie dla Czytelników – czy równość (1), w której występuje 28 przekształceń, jest najkrótszą równością wiążącą dowolne dwie izometrie płaszczyzny?

Rozwiązanie zadania M 526.



Przy oznaczeniach jak na rysunku mamy $ab = ch$. Nierówność

$$a + b < c + h$$

jest równoważna z

$$a^2 + b^2 + 2ab < c^2 + h^2 + 2hc,$$

czyli

$$0 < h^2,$$

co jest oczywiste.

Patrz w niebo

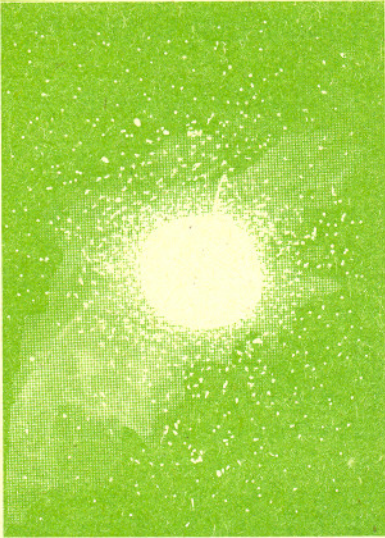
Gwiazdy nie lubią żyć w samotności. Mimo że dla wielu osób stwierdzenie to nie jest oczywiste (choćby przez proste skojarzenie z pozbawionym towarzysza Słońcem), faktem jest, że wśród gwiazd przeważają układy podwójne, potrójne i w ogóle wielokrotne. Zresztą gwiazdy nie tylko nie lubią samotnie żyć, nie lubią również samotnie powstawać. Panującemu dawniej przekonaniu, że gwiazdy powstają pojedynczo, przeczą dane obserwacyjne. Z powodu niezwykle małego prawdopodobieństwa chwycenia (oczywiście za pośrednictwem pola grawitacyjnego) jednej gwiazdy przez drugą, obserwowano by miliony razy mniej układów wielokrotnych niż to jest w istocie. Istnieją również bardziej bezpośrednie dowody obserwacyjne na to, że gwiazdy powstają w grupach. Mianowicie, stosunkowo rzadko występujące wśród ogółu gwiazd olbrzymie typów O i B oraz obiekty typu *T Tauri* (teoria ewolucji przewiduje, że jedne i drugie są gwiazdami młodymi) tworzą miejscami luźne zbiorowiska, których nie można uznać za przypadkowe fluktuacje w rozmieszczeniu gwiazd na niebie. Zbiorowiska te, zwane asocjacjami, są właśnie miejscem narodzin gwiazd. Hipotezę taką wysunął w końcu lat 40. naszego wieku radziecki astrofizyk W.A. Ambarcumian. Za jej słusznością przemawia fakt, że asocjacje są utworzone z obiektów młodych, a także ich związek z mgławicami gazowo-pyłowymi, z których powstają nowe gwiazdy. Asocjacje są rozproszone po ramionach spiralnych Galaktyki, co między innymi przyczyniło się do poznania budowy tych ramion. Szczególnie bogate w gwiazdy asocjacje występują w gwiazdozbiorach Oriona i Perseusza.

Wiele cech łączy asocjacje z bardziej złożonymi układami gwiazd – gromadami otwartymi – i właściwie trudno określić ścisłą granicę między tymi obydwoma grupami. W wielu przypadkach trudno stwierdzić, czy mamy do czynienia z gromadą otwartą, czy też liczną i zwartą asocjacją. Często bywa, że gromady otwarte gwiazd stanowią jądra asocjacji. Gromady otwarte również „zamieszkuja” przede wszystkim ramiona spiralne Galaktyki. Z punktu widzenia obserwacji amatorskich gromady są jednak znacznie wdzięczniejszymi obiektami. Któż nie zna Plejad! Nie sposób nie zauważyć na niebie tej zwartej gromadki sześciu gwiazd (od trzeciej do piątej wielkości gwiazdowej). Warto jednak przyjrzeć się im dokładniej – w sprzyjających

warunkach atmosferycznych i korzystnym usytuowaniu Plejad (odpowiednio wysoko nad horyzontem, np. teraz – zima) bystry obserwator może doliczyć się w sumie kilkunastu gwiazd w tej gromadzie. Plejady stanowią również wspaniały obiekt dla niewielkich lunet amatorskich. Nieco mniej efektowna jest najbliższa gromada otwarta – Hiady. Zarówno Hiady, jak i Plejady leżą w gwiazdozbiorze Byka, przy czym Hiady znajdują się w okolicy najjaśniejszej jego gwiazdy – Aldebarana (sam Aldebaran do Hiad nie należy).

Zasadniczo odmienne od wymienionych wyżej zbiorowisk gwiazd są gromady kuliste. Inna jest ich budowa – znacznie większa liczebność gwiazd, większa gęstość przestrzenna, charakterystyczny kulisty kształt z silną koncentracją ku środkowi. W przeciwieństwie do asocjacji i większości gromad otwartych gromady kuliste składają się przede wszystkim z najstarszych gwiazd naszej Galaktyki. Inne jest również ich rozmieszczenie. Gromady kuliste występują w tzw. halo (składowej sferycznej) wokół dysku Drogi Mlecznej. Odmienne rozmieszczenie w Galaktyce powoduje ciekawe konsekwencje w obserwowanych ruchach gromad. Gromady otwarte i asocjacje wraz ze Słońcem i większością gwiazd z jego otoczenia uczestniczą w ruchu obiegowym wokół masywnego centrum Galaktyki. Ruchy obiektów tego typu są dla nas powolne, ponieważ sami wraz z całym Układem Słonecznym poruszamy się w podobny sposób. Te zaś gwiazdy (i ich układy), które w rotacji dysku galaktycznego nie uczestniczą, wydają się nam szybkie. Gromady kuliste zaliczają się właśnie do tej grupy. Oczywiście, badanie ruchów gromad nie leży w zakresie możliwości obserwacji amatorskich. Można jednak poświęcić trochę uwagi obserwacjom samych gromad kulistych. Najbardziej efektowną wśród nich jest w *Centauri*. Jednak jej obserwacje mogą planować tylko osoby, które wybierają się w dalszą podróż na południe (przynajmniej w okolicę zwrotnika Raka), gdyż w naszych szerokościach geograficznych nie jest widoczna. Warto zwrócić uwagę na gromady kuliste M13 i M92 – obydwie w gwiazdozbiorze Herkulesa, który jeszcze o tej porze roku jest widoczny we wczesnych godzinach wieczornych po zachodniej stronie nieba. Jasności obydwu tych gromad są na granicy dostrzegalności gołym okiem, więc użycie lornetki może znacznie uatrakcyjnić obserwacje.

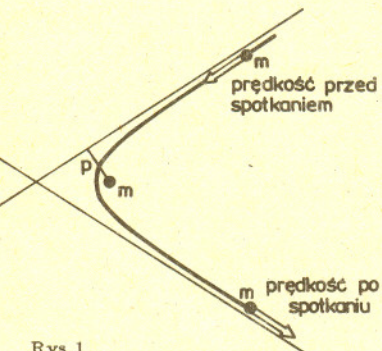
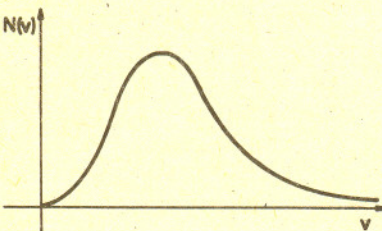
mgr Joanna UDALSKA



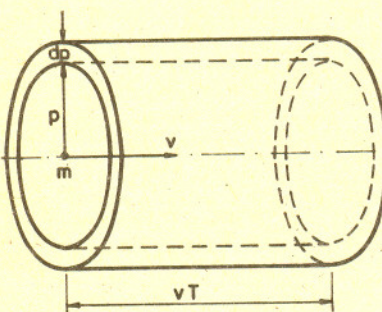
Dla układu cząstek o jednakowych masach w równowadze termodynamicznej funkcja rozkładu Maxwella określa liczbę cząstek (gwiazd) poruszających się z prędkościami z przedziału $v \div v+dv$. Ma ona postać

$$f(v)dv = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\alpha v^2} v^2 dv,$$

gdzie $\alpha = \frac{3}{2v^2}$, a kreska oznacza wartość średnią. Orientacyjny kształt funkcji f przedstawia wykres.



Rys.1



Rys.2

Pojęcie grupy gwiazd jest pełne sprzeczności. Grupy gwiazd istnieją, o czym łatwo przekonać się spojrzawszy przez lunetę w niebo, tymczasem nie spełniają one niezbędnych aksjomatów, np. w grupie gwiazd nie ma żadnego elementu odwrotnego. Dlaczego więc grupy gwiazd istnieją?

Pożartowaliśmy, ale ostatnie pytanie jest pytaniem niebanalnym, bowiem każda grupa gwiazd (obojętne, czy jest nią asocjacja, gromada otwarta, kulista, czy wręcz galaktyka) powinna się kiedyś rozproszyć. Mianowicie wskutek bliskich spotkań gwiazdy na siebie działają losowo, w wyniku czego gromada ulega „mieszanu” i dąży do stanu równowagi. Jednym z tego przejawów jest „maxwellizacja” rozkładu prędkości gwiazd, zjawisko w pełni analogiczne do zachodzącego w gazie zamkniętym w naczyniu. Ale układ gwiazdowy nigdy nie ma ścianek, dlatego gwiazdy, które przypadkiem osiągnęły prędkość przekraczającą prędkość ucieczki z gromady, mogą ją opuścić. Tak więc każdy układ gwiazdowy nieustannie traci gwiazdy i nieustannie usiłuje odtworzyć „szybki koniec” rozkładu prędkości, a ścisły stan równowagi jest z zasadniczych przyczyn nieosiągalny.

Trwałość gromady zależy właśnie od tempa, w jakim zachodzi odtwarzanie rozkładu Maxwella. Miarą tego tempa jest tzw. czas relaksacji, czyli w gruncie rzeczy czas, po którym gromada się wymiesza. Precyzyjnie jest on definiowany rozmaicie – mówi się o zmianach porównywalnych z początkowymi parametrami ruchu (prędkości, energii, kierunku itp.). Okazuje się, że wszystkie te podejścia prowadzą do bardzo zbliżonych wyników. Tu spróbujemy obliczyć (stosując liczne uproszczenia), po jakim czasie suma kwadratów zmian prędkości średniej gwiazdy (zmian doznawanych przy każdym spotkaniu z inną gwiazdą) osiągnie wartość równą kwadratowi prędkości. Dodajmy, że chodzi tu, oczywiście, o prędkość gwiazdy względem innej gwiazdy, a nie względem całego układu gwiazdowego (np. wynikającą z jego rotacji).

Krok 1. Przyjmijmy, że w jednym spotkaniu o parametrze zderzenia p (rys.1) prędkość gwiazdy zmienia się o tyle, ile wynosi druga prędkość kosmiczna v w odległości p (masy gwiazd m uznajemy za jednakowe, G oznacza stałą grawitacji):

$$\Delta v = \frac{v^2}{v} = \frac{2Gm}{pv}.$$

Przyznaję, że jest to naciągnięte, ale wynik ten można uzyskać uczciwie, choć żmudnie. Co więcej, spotkania gwiazd na ogół zachodzą w dużej odległości (duże p , ponieważ układy gwiazdowe są raczej „rzadkie”). Dlatego prędkość v niewiele różni się od prędkości w nieskończoności i może być również rozumiana jako typowa prędkość względna.

Krok 2. Obliczmy skutek wielu spotkań doznanych przez gwiazdę w czasie T . Liczba spotkań o parametrze zderzenia $p \div p + dp$ jest równa liczbie gwiazd (o gęstości przestrzennej n) w walcowej warstwie o tych promieniach i długości vT (rys.2), czyli $2\pi p dp v T n$. Zatem suma kwadratów zmian prędkości przy wszelkich parametrach zderzenia wynosi

$$\sum (\Delta v)^2 = \int_{p_{min}}^{p_{max}} (\Delta v)^2 2\pi p v T n dp = 8\pi G^2 m^2 \frac{1}{v} n T \int_{p_{min}}^{p_{max}} \frac{dp}{p} = 8\pi G^2 m^2 \frac{1}{v} n T \ln \frac{p_{max}}{p_{min}}.$$

Krok 3. Z definicji T nazwiemy czasem relaksacji, gdy $\sum (\Delta v)^2$ stanie się równa v^2 . Stąd

$$T = \frac{v^3}{8\pi G^2 m^2 n \ln(p_{max}/p_{min})}.$$

Krok 4. Pozbywamy się p_{max} , p_{min} i v zastępując je przez bardziej „namacalne” wielkości. Jako p_{max} można przyjąć charakterystyczny rozmiar R całej gromady: $p_{max} = R$. Za p_{min} uznajmy taki parametr zderzenia, gdy przyspieszenie ze strony właśnie napotkanej gwiazdy jest równe przyspieszeniu ze strony całej gromady

$$\frac{Gm}{p_{min}^2} = \frac{GM}{R^2}, \quad \text{skąd} \quad p_{min} = \frac{R}{\sqrt{N}},$$

gdzie $M = Nm$ jest masą całej gromady liczącej N gwiazd, przy czym $N = \frac{4}{3}\pi R^3 n$.

Twierdzenie o wiriale głosi, że w stacjonarnym układzie wielu cząstek suma energii potencjalnej i podwojonej energii kinetycznej jest równa zeru. Stąd można wyprowadzić zależność użytą w kroku 4. Założenie stacjonarności można osłabić, a samo twierdzenie stosuje się zarówno do układów gwiazdowych, jak i układów mikrocząstek, takich jak gaz w naczyniu lub pojedyncza gwiazda.

W rezultacie

$$\ln \frac{p_{max}}{p_{min}} = \frac{1}{2} \ln N.$$

Wreszcie na mocy twierdzenia o wiriale przyjmujemy, że $v^2 = GM/2R$. Po tych wszystkich podstawieniach dostajemy wreszcie

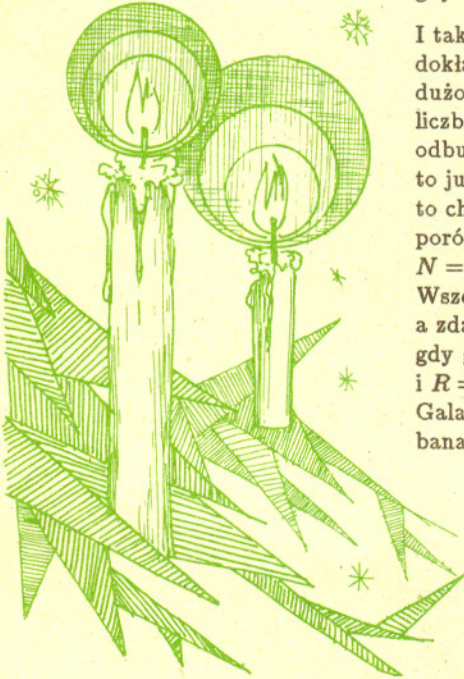
$$T = \frac{1}{6\sqrt{2}} \sqrt{\frac{NR^3}{Gm}} \frac{1}{\ln N}$$

w jednostkach MKS, lub

$$T = 7,3 \cdot 10^5 \sqrt{NR^3} / \log N \text{ lat,}$$

gdy R wyrazimy w parsekach, a wszystkie gwiazdy mają masę równą masie Słońca.

I tak mamy odpowiedź na nasze pytanie. Nie jest nawet szczególnie ważne, ile dokładnie gwiazd ma prędkość przekraczającą prędkość ucieczki z gromady (byle nie za dużo – nawiasem mówiąc przy rozkładzie Maxwella liczba ta wynosi 0,0074 całkowitej liczby gwiazd). Istotne jest, że jeżeli te gwiazdy uciekną, to rozkład Maxwella zostanie odbudowany po czasie T . Biorąc N i R dla realnych układów gwiazdowych można to już łatwo obliczyć. Dla Plejad $N = 300$, $R = 3,5$ pc i wtedy $T = 3 \cdot 10^7$ lat. Jest to charakterystyczne dla wszystkich gromad otwartych – rozpraszają się one w czasie porównywalnym z jednym obrotem Galaktyki. Natomiast dla typowej gromady kulistej $N = 10^5$, $R = 100$ pc i wtedy $T = 4,6 \cdot 10^{10}$ lat, co jest porównywalne z wiekiem Wszechświata. Gromady kuliste mieszają się więc bardzo powoli, są bardzo trwałe, a zdążyły się do dziś zrelaksować, ponieważ powstały dawno, w innych warunkach, gdy gęstość Wszechświata była większa. Wreszcie sama Galaktyka ma $N = 2 \cdot 10^{11}$ i $R = 15\,000$ pc, dla niej więc $T = 5,3 \cdot 10^{16}$ lat, co jest już z niczym nieporównywalne. Galaktyka jest bardzo daleka od stanu równowagi, od zrelaksowania, o czym świadczy banalny fakt, że ma ona bardzo skomplikowaną budowę.



Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 526. Udowodnić, że w trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych jest mniejsza od sumy długości przeciwprostokątnej i opuszczonej na nią wysokości. Rozwiązanie na str. 11

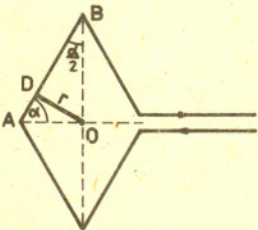
M 527. W loterii jest n losów, z czego k wygrywa, a m daje prawo do wyciągnięcia następnego losu. Jaka jest szansa wygranej? Rozwiązanie na str. 3

M 528. Kula toczy się po dwóch przecinających się prostych. Udowodnić, że środek kuli porusza się po łuku elipsy. Rozwiązanie na str. 3

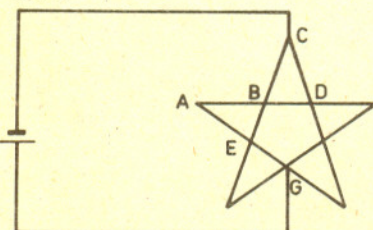
Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

F 258. Z przewodzącego drutu o oporze właściwym ρ i polu przekroju S wykonano obwód w kształcie rombu o boku a i kącie ostrym $\alpha = 60^\circ$. Obwód podłączono do źródła prądu o sile elektromotorycznej ϵ na dwa sposoby – patrz rysunek 1 a i b. Obliczyć natężenie B indukcji magnetycznej w środku rombu. Rozwiązanie na str. 2

F 259. Z odcinków drutu o jednakowym oporze R wykonano obwód przedstawiony na rysunku 2, który podłączono do źródła prądu w punktach C i G . Znaleźć stosunek ilości ciepła wydzielającego się w odcinkach drutu BD , BC , CD , AB i BE w ciągu tego samego czasu. Czy zmieniają się te stosunki, jeżeli opór odcinka BD będzie równy zeru, a odcinka CD równy $2R$? Rozwiązanie na str. 4

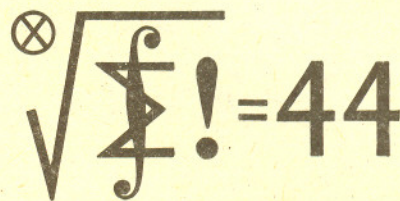


Rys.1



Rys.2

Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 1989



Zadania z matematyki nr 181, 182

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

181. Na płaszczyźnie dany jest okrąg k oraz rozłączna z nim prosta l . Rozważamy wszystkie okręgi o środkach na prostej l , styczne zewnętrznie do k . Czy istnieje poza prostą l punkt, z którego wszystkie odcinki zawarte w l , będące średnicami rozważanych okręgów, są widoczne pod jednakowym kątem?

182. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n o następującej własności: dla dowolnych nieujemnych liczb a_1, \dots, a_n o sumie równej 1 można rozbić ciąg $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \dots)$ na n podciągów tak, by suma szeregu utworzonego z wyrazów i -tego podciągu była równa a_i ($i = 1, \dots, n$).

Zadanie 182 zaproponował pan Jan Ciach z Ostrowca Świętokrzyskiego.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 8/1988

Przypominamy treść zadań

173. Czy szereg postaci $\sum \epsilon_n n^{-1}$, gdzie $\epsilon_n \in \{+1, -1\}$, $\lim(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n)n^{-1} = 0$, może być rozbieżny?

173. W szeregu anharmonicznym

$$(1) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

zmienimy niektóre minusy na plusy. Częstość zmian będzie na tyle duża, że powstanie szereg rozbieżny, a jednocześnie na tyle mała, że spełniony będzie warunek podany w zadaniu.

Dla dowolnej liczby naturalnej $r \geq 1$ przyjmijmy $k_r = \lfloor \log_2 r \rfloor$:

$$k_1 = 0, \quad k_2 = k_3 = 1, \quad k_4 = k_5 = k_6 = k_7 = 2, \quad \dots$$

Wykażemy najpierw rozbieżność szeregu

$$(2) \quad \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{rk_r}$$

Mamy nierówność

$$\sum_{r=2}^n \frac{1}{rk_r} > \sum_{r=2}^{2^{k_n}-1} \frac{1}{rk_r} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2^{k_n-1}} + \dots + \frac{1}{2^{k_n}-1}\right) \frac{1}{k_{n-1}}$$

Suma ułamków w każdym nawiasie przekracza $1/2$. Zatem n -ta suma częściowa szeregu (2) jest większa od

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k_{n-1}}\right),$$

a to dąży do nieskończoności. Tak więc szereg (2) jest rozbieżny.

Niech

$$M = \{rk_r : r = 2, 3, 4, \dots\} = \{2, 3, 8, 10, 12, 14, 24, 27, \dots\}.$$

Weźmy pod uwagę szereg

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{n},$$

gdzie
$$\epsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \\ 1 & \text{dla } n \text{ parzystych, gdy } n/2 \in M, \\ -1 & \text{dla } n \text{ parzystych, gdy } n/2 \notin M. \end{cases}$$

174. Dowieść, że dla x, y, z wymiernych, $x \neq y \neq z \neq x$, liczba $(y-z)^{-2} + (z-x)^{-2} + (x-y)^{-2}$ jest kwadratem liczby wymiernej.

Oznaczmy:

$$s_n = \frac{\epsilon_1}{1} + \frac{\epsilon_2}{2} + \dots + \frac{\epsilon_n}{n},$$

$$s'_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}.$$

Z rozbieżności szeregu (2) oraz zbieżności szeregu (1) wynika rozbieżność szeregu (3), bowiem

$$s_n - s'_n = \sum_{\substack{m \leq [n/2] \\ m \in M}} \frac{1}{m} \rightarrow \infty \quad (\text{przy } n \rightarrow \infty).$$

Pozostaje dowieść, że $\lim(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n)n^{-1} = 0$. Wystarczy ograniczyć uwagę do n parzystych: $n = 2q$. Zauważmy, że $\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{2q} = 2r_q$, gdzie r_q jest liczbą elementów zbioru $M \cap (0; q)$. Mamy więc wykazać, że

$$(4) \quad \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{q} \cdot r_q = 0.$$

Elementami zbioru $M \cap (0; q)$ są początkowe wyrazy ciągu (rk_r) :

$$M \cap (0; q) = \{rk_r : r = 2, 3, \dots, r_q + 1\}.$$

W szczególności liczba $r_q k_{r_q}$ należy do tego zbioru, a więc nie przekracza q . Zatem

$$(5) \quad \frac{q}{r_q} \geq k_{r_q}.$$

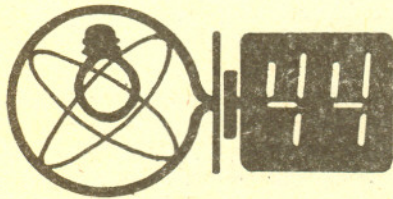
Oczywiście

$$\lim_{q \rightarrow \infty} r_q = \infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} k_r = \infty.$$

Wobec tego z nierówności (5) wynika relacja graniczna (4), a to znaczy, że szereg (3) ma własności, o które chodziło. Odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie jest twierdząca.

174. Oznaczmy badaną liczbę przez t oraz przyjmijmy $u = (y-z)^{-1}$, $v = (z-x)^{-1}$, $w = (x-y)^{-1}$. Zatem $u^{-1} + v^{-1} + w^{-1} = 0$, a stąd

$$t = u^2 + v^2 + w^2 = (u+v+w)^2 - 2(vw + wu + uv) = (u+v+w)^2 - 2uvw(u^{-1} + v^{-1} + w^{-1}) = (u+v+w)^2.$$



Czołówka ligi sędziowskiej „Klub 44 F”
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 67 (WT=2,59) i 68 (WT=1,24)
z numeru 4/1988

Bogusław Mikieliewic	- Brodnica	44,26pkt
Piotr Bała	- Toruń	41,68pkt
Roman Mustaj	- Katowice	31,62pkt
Piotr Koczyński	- Warszawa	29,73pkt
Paweł Perkowski	- Szczecin	29,73pkt
Wiesław Kacprzak	- Kraków	28,39pkt
Adam Sikoraki	- Lublin	25,63pkt
Aleksander Surma	- Myszków	23,23pkt

Do grona członków Klubu 44 F dołącza, jako jedenasty
pan Mikieliewic.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1988.

Zadania z fizyki nr 79, 80

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

79. Podczas prób podłączenia trójlampowego żyrandola z dwiema żarówkami 100-watowymi i jedną 60-watową do sieci zaopatrzonej w dwa wyłączniki stwierdzono, że żarówki 100 W świecą normalnie przy włączonym wyłączniku (1) oraz przy obu wyłącznikach włączonych, podczas gdy żarówka 60 W świeci tylko przy włączonym wyłączniku (2) i to słabiej niż normalnie.

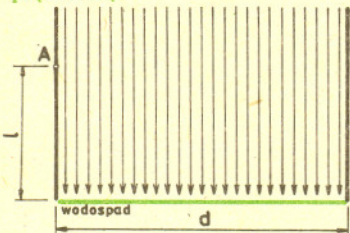
Podać najbardziej prawdopodobny schemat obwodu elektrycznego.

80. Wytwarza się obecnie wiązki „ultra zimnych” neutronów o energii kinetycznej 10^{-7} eV. Jaka jest prędkość tych neutronów i jak zachowują się one w ziemskim polu grawitacyjnym? Czy wiązka „ultra zimnych” neutronów ulega dyfrakcji na kryształach? W jaki sposób można by przechowywać takie neutrony przez pewien czas (krótszy od czasu życia swobodnego neutronu) w ograniczonej przestrzeni?

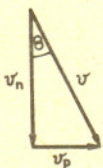
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 8/1988

Przypominamy treść zadań

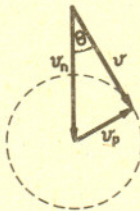
71. Rzeka o jednorodnym wartkim nurcie i szerokości d opada w pewnym miejscu gwałtownym wodospadem (rys.1). W odległości l od wodospadu, w górę rzeki (w punkcie A) skacze do wody pływak, pragnący przepłynąć na drugi brzeg. W jakim kierunku powinien on płynąć, aby mieć największe szanse osiągnięcia drugiego brzegu powyżej wodospadu? Przyjmujemy, że pływak płynie cały czas ze stałą (największą osiągalną) prędkością.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

71. Załóżmy, że znany jest stosunek prędkości pływaka względem wody v_p do prędkości nurtu rzeki v_n . Jeśli $v_p/v_n > d/l$, pływak może płynąć prostopadle do brzegu, co zapewnia przebycie rzeki w najkrótszym czasie. Wektor prędkości wypadkowej v tworzy wówczas z brzegiem kąt $\Theta = \text{arctg}(v_p/v_n)$ (rys.2). W przypadku, gdy $v_p > v_n$, można uzyskać dowolną wartość kąta Θ , odpowiednio dobierając kierunek wektora v_p . Dla $v_p < v_n$ maksymalny kąt Θ jest osiągany, gdy $v \perp v_p$ (rys.3). Warunkiem sukcesu jest $\Theta > \alpha$, gdzie $\alpha = \text{arctg}(d/l)$, skąd wynika

$$(*) \quad \frac{v_p}{\sqrt{v_n^2 - v_p^2}} \geq \frac{d}{l}$$

Jeśli stosunek v_p/v_n jest nieznan, powinno się postępować jak w przypadku granicznym, dla którego we wzorze (*) występuje znak równości. Oznacza to prostopadłość wektora v_p do linii AB (rys.4). Ten sposób postępowania gwarantuje bezpieczne przepłynięcie rzeki, o ile to tylko możliwe.

72. Ciśnienie atmosferyczne jest równe sumie ciśnień parcjalnych poszczególnych składników powietrza. Ponieważ ciśnienie parcjalne pary wodnej wzrosło o $\Delta p = (90\% - 60\%) \cdot 3,5 \text{ kPa} \approx 1 \text{ kPa}$, a ciśnienie atmosferyczne nie uległo zmianie, wobec tego ciśnienie pozostałych składników powietrza zmalało o Δp . Traktując suche powietrze jako gaz doskonały o pewnej średniej masie molowej, możemy napisać równania Clapeyrona dla jednostkowej objętości V zawierającej odpowiednio w początkowej i końcowej sytuacji n_1 i n_2 moli gazu:

$$p'V = n_1RT, \quad (p' - \Delta p)V = n_2RT,$$

gdzie $p' = p - 60\% \cdot 3,5 \text{ kPa} = 98 \text{ kPa}$ jest początkowym ciśnieniem suchego powietrza, R - stałą gazową. Stąd znajdujemy poszukiwany stosunek gęstości:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{p' - \Delta p}{p'} = 0,99.$$



Galaktyka M 82 wygląda jakby była niemal w całości ogarnięta eksplozją pochodzącą z centrum – i tak też interpretowano zazwyczaj jej postać. Tymczasem pod koniec lat 70. podano zupełnie inny model galaktyki. Jej podczerwone widma okazały się bowiem niezwykle podobne do widma mgławicy M 42 w Orionie, będącej jednym z najlepiej znanych obszarów formowania się gwiazd w naszej Galaktyce. Możliwe jest zatem, że galaktyka M 82 zawiera 10^5 „mgławic Orion”. Takie nagromadzenie obszarów powstawania nowych gwiazd może prowadzić do wybuchania jednej supernowej co trzy lata, co z kolei tłumaczyłoby obserwowaną aktywność galaktyki.

Jeśli w grupie G zawarta jest grupa G' , to G' nazywamy podgrupą grupy G . Gdy G ma skończoną liczbę elementów, to liczba elementów G' dzieli liczbę elementów G . Udowodnił to Joseph Louis Lagrange. Stąd np. podgrupami każdej grupy siedmioelementowej są tylko ona cała i grupa złożona z samego elementu neutralnego.



W liście do Corneliusa Lanczosa Einstein stwierdza ... *przekształciłem się, dzięki pracy nad problemem grawitacji, w wierzącego racjonalistę, to znaczy w kogoś, kto jedynego autentycznego źródła prawdy doszukuje się w matematycznej prostocie. To, co logicznie proste, nie musi być – rzecz jasna – prawdziwe, ale to, co jest fizycznie prawdziwe, jest logicznie proste.*



W teorii oddziaływań elementarnych wielką rolę odgrywają symetrie: P – odbić przestrzennych (zmiana wektorów położenia r na $-r$), T – odwrócenia biegu czasu ($t \rightarrow -t$) i C – sprzężenia ładunkowego (zamiana cząstki na odpowiadającą jej antycząstkę). W ramach kwantowej teorii pola dowodzi się twierdzenia CPT , mówiącego, że oddziaływania są niezmiennicze względem jednoczesnej transformacji C , P i T . Stąd wynika szereg podstawowych praw fizyki, np. równość mas i czasów życia cząstki i jej antycząstki. Dotąd nie stwierdzono odstępstw od niezmienniczości CPT . Natomiast stwierdzono, że oddziaływania słabe, odpowiedzialne np. za rozpad β neutronu, nie są niezmiennicze względem P , a rozpady mezonów K^0 względem transformacji CP .



Podobno w 1870 roku w Paryżu przy calvadosie dwaj studenci Camille'a Jordana – Felix Klein i Sophus Lie – podzielili się badaniem grup. Obaj uważali grupy za niezmiernie ważną i mało opracowaną gałąź matematyki. Problematyka ta wydawała się im też zbyt rozległa, by można było badać jej całość. Klein wziął wobec tego grupy dyskretne (obrazy dowolnego punktu uzyskane za pomocą przekształceń grupy są izolowane), a Lie – grupy ciągłe.



W europejskim Centrum Badań Jądrowych (CERN) udało się utrzymać w pułapkach jonowych pojedyncze antyprotony przez około 10 minut. Aby przedłużyć czas utrzymania antyprotonów do 1 roku, konieczne jest osiągnięcie stanu wysokiej próżni, rzędu 10^{-12} paskala. Celem tych doświadczeń jest sprawdzenie równości mas protonów i antyprotonów. Zgodnie z twierdzeniem CPT , masy cząstek i antycząstek powinny być równe. Wyniki dotychczasowych pomiarów z dokładnością 10^{-5} są zgodne z przewidywaniami teoretycznymi, a nowe doświadczenia z antyprotonami w pułapkach jonowych pozwolą osiągnąć dokładność o 4 rzędy wielkości lepszą.



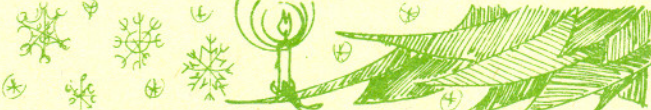
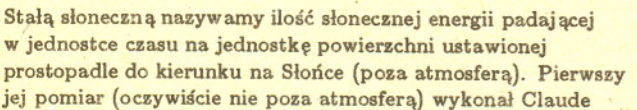
Niektóre kryształy po zmianie temperatury wykazują polaryzację elektryczną – zjawisko piroelektryczne. Efekt ten nie może wystąpić, gdy kryształ ma środek symetrii. W kryształach takim nie może również wystąpić zjawisko piezoelektryczne (polaryzacja elektryczna pod wpływem ściskania).



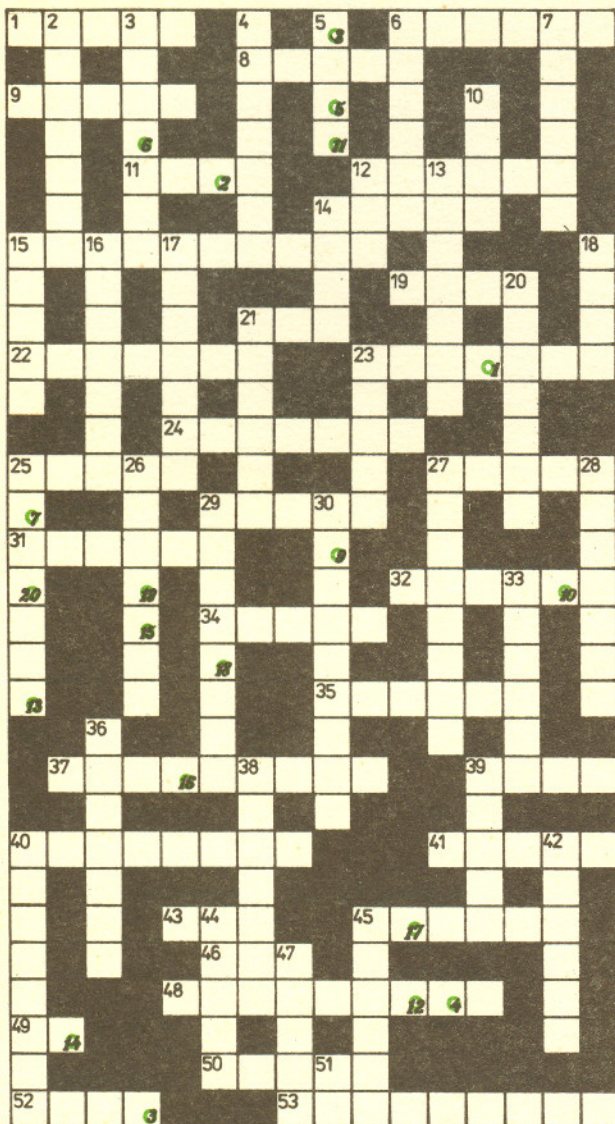
Stałą słoneczną nazywamy ilość słonecznej energii padającej w jednostce czasu na jednostkę powierzchni ustawionej prostopadle do kierunku na Słońce (poza atmosferą). Pierwszy jej pomiar (oczywiście nie poza atmosferą) wykonał Claude Pouillet w 1837 roku. Obecnie pomiary te wykonują sztuczne satelity. Wbrew nazwie wielkość ta nie jest stała (jej średnia wartość wynosi $1368,2 \text{ W/m}^2$). Wykazuje ona wahania zależne od stanu aktywności słonecznej, związane z rotacją Słońca, jego pulsacjami, ale też drobne zmiany systematyczne (maleje o 0,04% rocznie) – nie wiadomo na razie jak je zinterpretować.



Gerolamo Cardano (1501–1576) – którego imię noszą wzory na pierwiastki równań trzeciego stopnia (których odkrywcą był prawdopodobnie Tartaglia), oprócz matematyki zajmował się filozofią i ... astrologią. Ułożył horoskop, w którym przewidział dokładną datę swojej śmierci. Gdy nadszedł wyznaczony dzień ... popełnił samobójstwo.



Gwiazda μ Cephei jest czerwonym nadolbrzymem o masie 20 i jasności 10^5 jednostek słonecznych. Jej średnica wynosi 9 j.a., czyli jest niemal rozmiarów orbity Jowisza. Gwiazda ta traci materię i jej własne światło rozproszone w tym wietrze gwiazdowym daje poświatę jeszcze w odległości 10 000 j.a. Gwiazda ta leży w odległości 330 pc, zatem świecąca otoczka o średnicy 20 tys. j.a. jest widoczna pod kątem $1'$, a więc w zasadzie na granicy rozdzielczości oka.



Krzyżówka z hasłem

Poziomo: 1) brzeg kuli, 6) wektor jednostkowy, 8) odwrotność pochodnej, 9) matematyk angielski (1793 – 1841), stworzył podstawy teorii potencjału, 11) odwrotność funkcji hiperbolicznej, 12) figura złożona z odcinków, 14) proste urządzenie rachunkowe, 15) liczba przyporządkowywana macierzy, 19) zbiór elementów numerowanych liczbami naturalnymi, 21) 100, 22) należy do zbioru, 23) matematyk włoski (1501 – 1576), podał ogólne rozwiązanie równania stopnia trzeciego, 24) wynik odejmowania, 25) wielkość kąta, 27) odwrotność funkcji trygonometrycznej, 29) współczynnik zmiany wielkości przy jednokładności, 31) matematyk angielski (1643 – 1727), współtwórca rachunku różniczkowego i całkowego, 32) ciąg arytmetyczny lub geometryczny, 34) prosta lub krzywa, 35) ma kierunek, zwrot i długość, 37) dualność, 39) składa się z wektorów liniowo niezależnych, 40) część zbioru, 41) 0,1,2,3,4,5,6,7,8 lub 9, 43) jeden z trzech w trójkącie, 45) $1/\cos$, 46) tworzą go dwie półproste, 48) punkt przecięcia wysokości, 49) liczbowa lub symetrii, 50) struktura algebraiczna z jednym działaniem, 52) matematyk norweski (1802 – 1829), dowiódł nierozwiązalności w postaci ogólnej równań stopnia piątego, 53) wykres sinusów.

Pionowo: 2) regularny (wielokąt lub wielościan), 3) matematyk niemiecki (1826 – 1866), zajmował się teorią całki, 4) matematyk niemiecki (1843 – 1921), jedna z ważnych nierówności nazwana jest jego nazwiskiem, 5) fragment powierzchni w przestrzeni, 6) imię Sierpińskiego, 7) otwarty podzbiór płaszczyzny, 10) + lub -, 12) kawałek okręgu, 13) tablica z liczbami, 14) Eratostenesa, 15) bryła powstała przez obrót prostokąta, 16) nie stała, 17) dział matematyki, 18) element neutralny dodawania, 20) ma ją ciąg zbieżny, 21) bryła powstała przez obrót trójkąta, 23) część całkowita logarytmu, 25) część ułamkowa logarytmu, 26) wirowość pola wektorowego, 27) Euklidesa, 28) $1/360$ kąta pełnego, 29) matematyk holenderski, wyliczył 35 znaków dziesiętnych liczby π , 30) pożądana własność odwzorowania przestrzeni liniowych, 33) liczb, prawdopodobieństwa lub względności, 36) czworokąt foremny, 38) ma trzy kąty, 39) figura przestrzenna, 40) krzywa o równaniu $y = x^2$, 42) pozostaje przy dzieleniu, 44) brzeg koła, 45) imię Banacha, 47) bryła w kształcie dętki, 51) $\approx 3,14$.

Litery z pól ponumerowanych od 1 do 20 dadzą rozwiązanie.

J. W.

Szarada

Delta przed Tobą RAZ-DZIEWIĘĆ-SZÓSTA.
Jest OSIEM-SIÓDMA, lecz nie jest pusta.
Do DWU-SIÓDMEGO więc Czytelniku,
bo ciekawostek tutaj bez liku.

Od geometrii zaczniemy właśnie.
PIĘĆ-TRZY-DWANAŚCIE każdy DWANAŚCIE
OSIEM prostemu równy kątowni.
„Pi” to SZEŚĆ-SIÓDMA, każdy to powie.
JEDYNKA-DZIEWIĘĆ-TRZY-CZTERY – bryła
ta dobrze znana już dawno była.
RAZ-DZIEWIĘĆ-TRZY-OŚM pięciokątami
mogą się wszyscy zabawić sami,
skleiwszy DZIESIĘĆ-JEDENAŚ-CZWARTY
otrzymać model podziwu warty.

DWA-JEDENAŚCIE-DZIEWIĄTKA przez dwa
liczba parzysta resztę zero da.

Kto hasła szuka, niech się nie boi,
PIĘĆ-SZEŚĆ doń droga DZIESIĘCIO-DWOI.
Kto DZIESIĘĆ, ten niech sylaby wstawi.
PIĘĆ-TRZY do celu – końca zabawy.

Kolejnym liczbom odpowiadają sylaby, które po odgadnięciu
i uporządkowaniu dadzą rozwiązanie – nazwy kilku figur
geometrycznych.

J. W.

Rozwiązania prosimy nadsyłać do dnia 15 II 1989 r.
Wśród Czytelników, którzy nadesłały prawidłowe
rozwiązania zarówno krzyżówki, jak i szarady, zostanie
rozlosowane 10 książek.

NA OKŁADCE prezentujemy tablicę liczb pierwszych
do 98 000.

Liczby w lewej skrajnej kolumnie oznaczają tysiące, w górnym
wierszu setki, w drugim od góry dziesiątki, litery zaś mówią,
jakie cyfry jednostek mają liczby pierwsze w danej dziesiątce
(według kodu zamieszczonego obok tabeli). I tak np. litera H
w przecięciu wiersza 75 z kolumną o numerze 55 oznacza, że
liczby 75 553 i 75 557 są pierwsze i żadna inna liczba z tej
dziesiątki nie jest pierwsza.

Ponieważ w każdej dziesiątce (z wyjątkiem pierwszej) są co
najwyżej cztery liczby pierwsze o końcówkach 1, 3, 7 lub 9, więc
jest 16 możliwych układów końcówek liczb pierwszych dla każdej
dziesiątki. W tabeli wystarczyło więc użyć 17 liter (w tym jedna
– tylko dla pierwszej dziesiątki).

Pomysł takiej tabeli zaczerpnęliśmy z artykułu Sola Weintrauba
A Compact Prime Listing (Mathematics of Computation, vol. 28,
nr 127, lipiec 1974, str. 855-7).