



## SPIS TREŚCI

### NUMERU 10(209)

Manowce analogii <i>Józef Banaś</i>	str. 1
Rozmowa o średnich <i>Andrzej Olejniczak</i> <i>Krzysztof Omiljanowski</i>	str. 1
Plazma kwarkowo-gluonowa <i>Stanisław Mrówczyński</i>	str. 4
Zadania	str. 5
Patrz w niebo	str. 6
Od przypadku dyskretnego do ciągłego	str. 7
Krótkie dzieje Wszechświata <i>Krzysztof Maślanka</i>	str. 8
Fizyka promieni kosmicznych i narodziny fizyki cząstek elementarnych (1932 – 1952) <i>Helmut Rechenberg</i>	str.12
Klub 44	str.16
Epsilon	str.17

### W następnym numerze:

### Zadanie Napoleona

„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Edukacji Narodowej

#### Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula  
Bogdan Cichocki  
Roman Duda  
Jan A. Gaj  
Tomasz Hofmokl – wiceprzewodniczący  
Tadeusz Jarzębowski  
Marcin Kubiak  
Andrzej Mąkowski  
Andrzej Pelczar  
Zbigniew Płochocki  
Zdzisław Pogoda  
Konrad Rudnicki  
Zbigniew Semadeni  
Grzegorz Sitarski  
Józef I. Smak  
Kazimierz Stępień  
Mieczysław Subotowicz  
Andrzej Szymacha  
Aniela Wolska  
Andrzej Woszczyk  
Wojciech Żakowski – przewodniczący

#### WARUNKI PRENUMERATY

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 1992 r. wynosi 8 400,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumeratę.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
  - oddziały RSW właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora
  - odbioru zamówionych egzemplarzy dokonuje prenumeratorem w wyznaczonych punktach sprzedaży lub w inny, uzgodniony sposób,
  - urzędy pocztowe i listonosze – od prenumeratorów z terenów wiejskich lub innych miejscowości, w których nie ma oddziałów RSW, a w miastach tylko od osób niepełnosprawnych – poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pod wskazany adres pod warunkiem uiszczenia dodatkowej opłaty za każdy doręczany egzemplarz – opłata wynosi 500,- zł od egzemplarza,
  - Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – tylko od prenumeratorów zlecających dostawę za granicę.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
  - na kraj – do 20 XI na I kwartał roku następnego  
do 20 II na II kwartał  
do 20 V na III kwartał  
do 20 VIII na IV kwartał
  - na zagranicę – do 31 X na I kwartał  
oraz do 1 dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza si 8 000,-

Redaguje kolegium w składzie:

Krzysztof Biesaga  
Piotr Hajłasz  
Krystyna Kordos – sekr. red.  
Marek Kordos – red. nac.  
Paweł Krawczyk – z-ca red. nac.  
Tomasz Kwast  
Stanisław Mrówczyński  
Anna Rudnik  
Joanna Udalska

Adres Redakcji:

Centrum Informatyczne UW  
Krakowskie Przedmieście 26/28  
00-927 Warszawa  
tel. 20-03-81 wewn. 841

Adres poczty komputerowej  
(E-mail address):  
DELTA@PLEARN.BITNET

Wydawca:

Uniwersytet Warszawski  
Krakowskie Przedmieście 26/28  
00-927 Warszawa

Nakład 10 000 egz.  
Wydrukowano  
w Zakładach Graficznych  
w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem TeX  
wykonała redakcja.

Józef BANASZ

Bardzo często obiektem badań matematycznych są różnego typu przestrzenie, np. przestrzeń liniowa, przestrzeń metryczna, przestrzeń Banacha, przestrzeń Riemanna itp. Jeśli chcemy w ramach naszych badań „zajrzeć” głębiej w strukturę jakiejś przestrzeni, musimy poznać wiele jej różnorodnych własności i obowiązujących w niej reguł. Mówiąc obrazowo, musimy nauczyć się żyć w tej przestrzeni. Musimy zarazem pamiętać o tym, że zmieniając obiekt naszych badań, czyli „przenosząc się” do innej przestrzeni, powinniśmy pozbyć się „starych przyzwyczajęń”, gdyż w nowej przestrzeni obowiązują już inne warunki, rządzą nią nowe reguły i prawa.

Dla zilustrowania powyższej wypowiedzi zajmiemy się pewnym problemem geometrycznym.

Załóżmy, że  $E$  jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych  $R$ . Będziemy, jak to już tradycyjnie jest przyjęte, oznaczać wektory z  $E$  literami łacińskimi, skalary zaś z  $R$  literami greckimi. Przypomnijmy, że odcinkiem o końcach  $x, y \in E$  nazywamy zbiór  $\overline{xy}$  taki, że  $\overline{xy} = \{\alpha x + (1 - \alpha)y : \alpha \in [0, 1]\}$ , a środkiem odcinka  $\overline{xy}$  – punkt  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$  z tego odcinka. Zbiór  $X$  ( $X \subset E$ ) nazywamy wypukłym, jeśli wraz z każdymi dwoma punktami zawiera łączący go odcinek.

W dalszym ciągu założymy, że w przestrzeni  $E$  określona jest norma  $\|\cdot\|$ , tzn.  $E$  jest przestrzenią unormowaną. Oczywiście, norma ta indukuje metrykę na  $E$ , określoną w ten sposób, że za odległość punktów  $x, y \in E$  przyjmujemy  $\|x - y\|$ .

Gdy ktoś nie lubi normy (np. dlatego, że nie zna tego pojęcia), może wyobrazić sobie normę punktu  $x \in E$  jako odległość punktu  $x$  od punktu  $(0, \dots, 0)$ . Podobnie słowo metryka może być zastąpione przez odległość pod warunkiem, że będzie się pamiętało, iż odległość można mierzyć na różne sposoby.

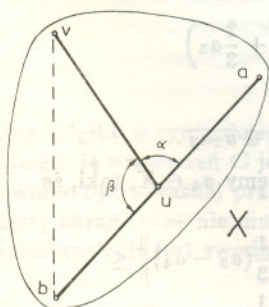
Jeżeli  $X$  jest ograniczonym podzbiorem przestrzeni  $E$ , to średnicą zbioru  $X$  nazywać będziemy kres górny zbioru odległości jego punktów ( $\sup\{\|x - y\| : x, y \in X\}$ ) i oznaczać symbolem  $\text{diam } X$ .

Załóżmy następnie, że  $X$  jest wypukłym i ograniczonym podzbiorem przestrzeni unormowanej  $E$ , takim że  $\text{diam } X > 0$ . Punkt  $x \in X$  nazywać się będzie punktem diametralnym zbioru  $X$ , jeżeli  $\sup\{\|x - y\| : y \in X\} = \text{diam } X$ . Jeżeli natomiast dla punktu  $x$  mamy  $\sup\{\|x - y\| : y \in X\} < \text{diam } X$ , to  $x$  nazywa się punktem niediametralnym zbioru  $X$ .

Postawmy teraz następujące pytanie: Czy w każdym wypukłym i ograniczonym podzbiorem  $X$  przestrzeni  $E$ , takim, że  $\text{diam } X > 0$ , znajdują się punkty niediametralne tego zbioru?

Intuicja związana z naszymi doświadczeniami geometrycznymi sugeruje, że tak być powinno. Inaczej bowiem zbiór  $X$  byłby „dziurawy”, co kłóci się z założeniem o jego wypukłości.

Na zwykłej płaszczyźnie przykładem figury złożonej z samych punktów diametralnych jest zbiór wierzchołków jakiegos wielokąta foremnego (np. kwadratu); oczywiście, nie jest to zbiór wypukły. Podobnie okrąg.



Rys. 1

Spróbujmy to jednak udowodnić. Oczywiście, naszych doświadczeń geometrycznych nabywamy w przestrzeni  $R^2$  z normą euklidesową,  $\|x\| = \|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  (inaczej: na płaszczyźnie z euklidesowym sposobem mierzenia odległości punktów). Niech  $X \subset R^2$  będzie zbiorem ograniczonym, wypukłym i niech  $\text{diam } X = d > 0$ . Ustalmy dowolnie liczbę  $\varepsilon \in (0; d/10)$  i znajdziemy w  $X$  dwa punkty  $a, b$ , takie, żeby  $\|a - b\| \geq d - \varepsilon$  (jest to możliwe wobec definicji  $d$ ). Niech  $u$  oznacza środek odcinka  $\overline{ab}$  (por. rys. 1).

## Rozmowa o średnich,

czyli ponowne odkrywanie MatAmeryki

Andrzej  
OLEJNICZAK,  
Krzysztof  
OMILJANOWSKI

Ten tekst jest próbą wivisekcji, próbą ukazania, jak się robi matematykę, próbą pokazania, jak się myśli (a raczej, jak autorzy to robili – wszak to bardzo indywidualna sprawa). Najmniej istotna jest tu treść matematyczna, znana i raczej błaha. Nie o nią tu chodzi (w tytule akcent jest położony na słowo „rozmowa”, a nie na „o średnich”).

Tekst ten ma (w zamiarze) propagować nie wiedzę matematyczną, lecz formę jej zdobywania.

Ponadto:

- nieścisłości są jak najbardziej zamierzone (w przeciwieństwie do błędów);
- pojawiające się słowo ćwiczenie jest sugestią pracy własnej dla tych Czytelników, którzy chcą ten tekst traktować (mimo wszystko) jako matematyczny;
- w zbliżonej formie materiał ten był prezentowany (przez drugiego z autorów) jako odczyt dla młodzieży organizowany przez Oddział Wrocławski PTM.

Poniższa rozmowa autorów – układających zadania dla studentów – zaczęła się od następującego zadania:

**Zadanie 1.** Dla liczb  $p, q$  ( $0 < p < q$ ) definiujemy ciągi  $\{a_n\}, \{b_n\}$  następująco:

$$a_1 = p, b_1 = q, a_{n+1} \text{ jest średnią harmoniczną } a_n, b_n, \text{ czyli}$$

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, b_{n+1} \text{ jest średnią}$$

arytmetyczną  $a_n, b_n$ , czyli  $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ .

Wykazać, że ciągi te są zbieżne do średniej geometrycznej liczb  $p, q$ , czyli do  $\sqrt{pq}$ .

– To zadanie jest trochę za trudne na egzamin. A może takie?

**Zadanie 2.** Dla liczb  $p, q$  ( $p < q$ ) definiujemy ciąg  $\{a_n\}$  następująco:  $a_1 = p, a_2 = q, a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ . Zbadać zbieżność tego ciągu.

– Tak, ale to zadanie było na zajęciach. (Okazuje się, że dla  $p = 0$ , oraz  $q = 1$  zapisanie pierwszych kilku wyrazów

w układzie dwójkowym daje wyraźną wskazówkę ćwiczenie.) Trzeba wymyślić coś prostszego!

- Mam:

**Zadanie 3.** Dla liczb  $p, q$  ( $0 < p < q$ ) definiujemy ciąg  $\{a_n\}$  następująco:

$$a_1 = p, a_2 = q,$$

$$(*)a \quad a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Zbadać zbieżność tego ciągu.

- Ciekawe zadanie; jak się do tego zabrać?

- Wypiszmy pierwszych kilka wyrazów.

Oj, nie mamy nic do pisania!

- W takim razie spróbujemy to sobie wyobrazić geometrycznie: mamy dwa wektory  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  (o wspólnym początku).

Wtedy  $\vec{a}_3$  wskazuje na środek (ciężkości) odcinka łączącego końce wektorów  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ .

Zatem  $\vec{a}_4$  wskazuje na środek ciężkości trzech jednakowych (punktowych) mas umieszczonych w końcach  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ .

ćwiczenie; czyli  $\vec{a}_4 = \vec{a}_3$ . Jasne, że dalej będzie tak samo; czyli  $\vec{a}_3 = \vec{a}_4 = \vec{a}_5 \dots$

**Niespodziewane, prawda?**

- A co będzie z **Zadaniem 3**, gdy w  $(*)a$  w miejsce średniej arytmetycznej wstawimy średnią geometryczną:

$$(*)g \quad a_{n+1} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

- Rachować? To nudne. Spróbujmy pokombinować:

$$a_{n+1} = (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n},$$

$$\log a_{n+1} = \frac{1}{n} \log (a_1 a_2 \dots a_n),$$

$$\log a_{n+1} = \frac{\log a_1 + \log a_2 + \dots + \log a_n}{n}.$$

- Zatem logarytmy wyrazów tego ciągu tworzą ciąg taki, jak w pierwszej wersji **Zadania 3**. Czyli i tym razem

$a_3 = a_4 = a_5 = \dots$

- Zapewne też tak jest dla średniej

harmonicznej.

- Zaraz, zaraz. Średnia harmoniczna dwóch liczb występowała w **Zadaniu 1**, ale by mieć analogię do **Zadania 3**, trzeba obliczać średnią harmoniczną trzech (i więcej) liczb. Nie pamiętam, jak się ją określa!

- Ja też. Kojarzy mi się to z jakimś prawem z elektryczności (opór zastępczy?), gdzie jest mowa o odwrotnościach.

Zobaczmy:

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2} = \frac{2}{\frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2}} = \\ &= \frac{2}{\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1}} = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}}. \end{aligned}$$

Przypuśćmy, że  $u$  jest diametralny. Wtedy istniałby punkt  $v \in X$ , taki, że  $\|v - u\| \geq d - \varepsilon$ . Oczywiście, jeden z kątów  $\alpha$  i  $\beta$ , zaznaczonych na rysunku 1, musi być nie mniejszy niż  $\pi/2$  i niech to będzie np.  $\beta$ . Korzystając z twierdzenia cosinusów mamy:

$$\begin{aligned} \|v - b\|^2 &= \|v - u\|^2 + \|u - b\|^2 - 2\|v - u\| \cdot \|u - b\| \cos \beta \geq \\ &\geq \|v - u\|^2 + \|u - b\|^2. \end{aligned}$$

(bo  $\cos \beta \leq 0$ )

Stąd

$$\|v - b\|^2 \geq (d - \varepsilon)^2 + \left(\frac{d - \varepsilon}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}(d - \varepsilon)^2 > \frac{5}{4}\left(d - \frac{d}{10}\right)^2 > d^2,$$

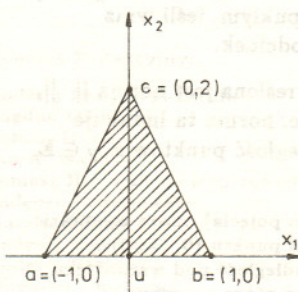
a więc

$$\|v - b\| > d.$$

Jest to jednak sprzeczne z tym, że  $\text{diam } X = d$ . Zatem  $u$  jest punktem niediametralnym dla zbioru  $X$ .

Poprzez analogię można by oczekiwać, że tak będzie również wtedy, gdy przestrzeń  $\mathbb{R}^2$  wyposażymy w inną normę (inny sposób mierzenia odległości). I rzeczywiście, analogia ta jest poprawna, ale nie do końca, ponieważ dowód wyżej przeprowadzony nie zawsze daje oczekiwany efekt. Weźmy bowiem w  $\mathbb{R}^2$  normę maksimum:

$$\|(x_1, x_2)\|_m = \max\{|x_1|, |x_2|\}.$$



Rys. 2

Rozważmy w  $\mathbb{R}^2$  zbiór  $T$  - trójkąt o wierzchołkach  $(1; 0)$ ,  $(-1; 0)$  i  $(0; 2)$  (rys. 2). Oczywiście,  $\text{diam } T = 2$  oraz  $\|a - b\|_m = 2$ . Ale punkt  $u$ , będący środkiem odcinka  $ab$ , nie jest już teraz tak „dobry” jak poprzednio, ponieważ  $\|u - c\|_m = 2$ .

Niemniej jednak zbiory ograniczone i wypukłe w  $\mathbb{R}^2$  z metryką maksimum mają punkty niediametralne.

A oto dowód.

Przypuśćmy, że wszystkie punkty zbioru  $X$  są diametralne. Niech  $a_1, a_2 \in X$  będą takie, że  $\|a_1 - a_2\| \geq d - \varepsilon$  (będziemy dalej opuszczać  $m$  przy symbolu normy), gdzie  $\varepsilon > 0$  jest odpowiednio małe. Ponieważ środek  $u_1$  odcinka  $\overline{a_1 a_2}$  jest diametralny, więc znajdziemy punkt  $a_3 \in X$ , taki, że  $\|a_3 - u_1\| \geq d - \varepsilon/2$ . Stąd mamy, że

$$d - \varepsilon/2 \leq \left\| a_3 - \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 \right\| \leq \frac{1}{2}\|a_3 - a_1\| + \frac{1}{2}\|a_3 - a_2\|.$$

Zatem

$$2d - \varepsilon \leq \|a_3 - a_1\| + \|a_3 - a_2\|.$$

Stąd, ponieważ  $\|a_3 - a_2\| \leq d$ , więc  $\|a_3 - a_1\| \geq d - \varepsilon$ . Podobnie  $\|a_3 - a_2\| \geq d - \varepsilon$ .

W poprzednim dowodzie podaliśmy, co znaczyło w nim „odpowiednio małe” - było to „mniejsze od  $d/10$ ”. Tutaj pozostawiamy Czytelnikowi określenie, dla jak małego  $\varepsilon$  dowód będzie przebiegał pomyślnie.

Weźmy teraz punkt  $u_2 = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$ . Zauważmy, że  $u_2 \in X$ , bowiem wystarczy zapisać

$$u_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3}a_2 + \frac{2}{3}a_3 \right)$$

i zauważyć, że

$$\frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 \in \overline{a_1 a_2}, \quad \frac{1}{3}a_2 + \frac{2}{3}a_3 \in \overline{a_2 a_3}.$$

Ponieważ punkt  $u_2$  jest diametralny, więc znajdujemy  $a_4 \in X$ , taki, że  $\|u_2 - a_4\| \geq d - \varepsilon/3$ . Dalej mamy:

$$\begin{aligned} d - \varepsilon/3 &\leq \left\| \frac{1}{3}(a_1 - a_4) + \frac{1}{3}(a_2 - a_4) + \frac{1}{3}(a_3 - a_4) \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{3}\|a_1 - a_4\| + \frac{1}{3}\|a_2 - a_4\| + \frac{1}{3}\|a_3 - a_4\|. \end{aligned}$$

Stąd, podobnie jak poprzednio, wnioskujemy, że

$$\|a_n - a_i\| \geq d - \varepsilon, \quad i = 1, 2, 3.$$

Założmy dalej, że przedłużamy naszą procedurę indukcyjnie. Wtedy skonstruujemy taki ciąg  $\{a_n\}$  punktów z  $X$ , że

$$\|a_i - a_j\| \geq d - \varepsilon \quad \text{dla } i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

Ponieważ ciąg  $\{a_n\}$  składa się z punktów zbioru  $X$ , więc jest ograniczony, a zatem musi zawierać podciąg mający w  $\mathbb{R}^2$  granicę. Z drugiej strony odległość między jego elementami jest co najmniej  $d - \varepsilon$ , a to wyklucza zbieżność tak całego ciągu, jak i każdego z jego podciągów. Stąd sprzeczność. Oznacza to, że w zbiorze  $X$  są punkty niediametralne.

Zwróćmy uwagę na to, że w powyższym dowodzie nie korzystaliśmy z faktu, że  $X$  jest podzbiorem  $\mathbb{R}^2$ , jak również z tego, że  $\|\cdot\|$  była norma maksimum. Istotne było tylko to, że ciąg ograniczony w rozpatrywanej przestrzeni miał podciąg zbieżny. Własność tę nazywa się lokalną zwartością.

Czytelnik, znający nieco więcej analizy, zauważy zapewne, że przeprowadzone rozumowanie implikuje prawdziwość następujących dwóch twierdzeń.

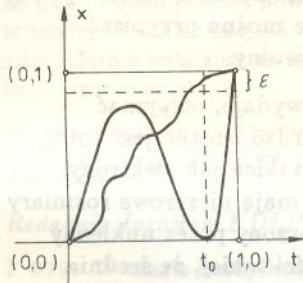
**Twierdzenie 1.** Każdy relatywnie zwarty i wypukły podzbiór dowolnej przestrzeni unormowanej ma punkty niediametralne.

**Twierdzenie 2.** Każdy zbiór wypukły i ograniczony w przestrzeni skończonej wymiarowej ma punkty niediametralne.

Teraz, poprzez analogię, można by wyciągnąć wniosek, że zbiór wypukły i ograniczony w dowolnej przestrzeni unormowanej powinien mieć punkty niediametralne. Oczywiście, nie można udowodnić tego tak, jak wyżej, gdzie skorzystaliśmy z lokalnej zwartości przestrzeni skończonej wymiarowych. Należy więc wymyślić inny dowód. Okazuje się jednak, że analogia i intuicja zawiodą nas całkowicie. Rozpatrzmy bowiem przestrzeń  $C = C[0, 1]$  złożoną z funkcji  $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , ciągłych na przedziale  $[0, 1]$ . Unormujmy tę przestrzeń w klasyczny sposób za pomocą normy maksimum  $\|x\| = \max\{|x(t)| : t \in [0, 1]\}$ . W przestrzeni tej rozważmy zbiór

$$X = \{x \in C : 0 = x(0) \leq x(t) \leq x(1) = 1\}.$$

Jest to więc zbiór złożony z funkcji, których wykresy na płaszczyźnie  $(t, x)$  łączą punkt  $(0, 0)$  z punktem  $(1, 1)$  i mieszczą się w kwadracie  $[0, 1] \times [0, 1]$  (por. rys. 3). Oczywiście, zbiór  $X$  jest ograniczony, wypukły i  $\text{diam } X = 1$ . Pokażemy teraz, że mimo wypukłości zbiór ten jest bardzo dziurawy, ponieważ każdy jego punkt jest diametralny. Istotnie, weźmy dowolne  $x \in X$  oraz  $\varepsilon > 0$ . Wobec ciągłości funkcji  $x$  istnieje  $t_0$  „bliskie” 1, takie, że  $x(t_0) > 1 - \varepsilon$ . Weźmy dalej dowolną funkcję  $y \in X$ , taką, że  $y(t_0) = 0$ . Mamy:  $\|x - y\| \geq |x(t_0) - y(t_0)| = x(t_0) > 1 - \varepsilon$ . Zatem  $x$  jest diametralny. Koniec dowodu.



Rys. 3

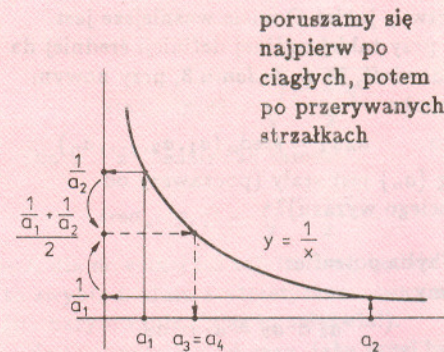
Ktoś mógłby w tym miejscu stwierdzić, że nasza „sztuczka” udała się dlatego, że przestrzeń  $C$  jest nieskończenie wymiarowa. Analogicznie powinno być w każdej przestrzeni tego typu (w takich przestrzeniach zbiory ograniczone nie muszą być zwarte). Niestety, okazuje się, że i tym razem analogia jest zwodnicza. Ale o tym, być może, innym razem.

– Teraz jest jasne: średnia harmoniczna jest odwrotnością średniej arytmetycznej odwrotności danych liczb. Zatem w nowej wersji **Zadanie 3** przyjmie postać:

$$(*)h \quad a_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

– No dobrze, ale jak dowieść, że i tym razem otrzymamy ciąg stały począwszy od trzeciego miejsca?

– Narysujmy kawałek hiperboli:



poruszamy się najpierw po ciągłych, potem po przerywanych strzałkach

– Przy obliczaniu  $a_4$  ciągu strzałka nakryje przerywaną, a na pionowej osi nic się nie zmieni (pierwsza wersja **Zadania 3**). Popatrz uważnie! Mamy  $a_4 = a_3$ . Dalej też jest dobrze:  $a_3 = a_4 = a_5 = \dots$

**Niespodziewane.**

– To pewnie da się dowieść, że tak jest dla **każdej** średniej!

– Ale co to jest **średnia**? Jak uogólnić, jak wyabstrahować wspólną cechę (tych trzech średnich)?

– Średnia to funkcja (o paskudnej dziedzinie), która  $n$ -tkom liczb przypisuje pewne liczby.

– No tak, ale według jakiego sposobu?

– Tak, by **Zadanie 3** miało – w ogólnej wersji – rozwiązanie uogólniające rozwiązania dla tych konkretnych trzech średnich.

– Ale co to znaczy? To jest *wishful thinking!*

– Może i tak. Spróbujmy choć to zapisać:

$$\text{śred}[a_1, a_2, \dots, a_n, \text{śred}(a_1, a_2, \dots, a_n)] = \text{śred}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

– Tak, to by wystarczyło dla **Zadania 3** ćwiczenie. Niestety, trudno to uznać za aksjomat – jest niezbyt naturalne (wszak niespodziewane dla nas było rozwiązanie pierwszej wersji **Zadania 3**).

– Może tak: gdy  $\square$  jest pewnym działaniem (np. dodawaniem, mnożeniem), to  $s$  jest średnią (kwadracikową) liczb  $a_1, a_2$ , jeśli  $s \square s = a_1 \square a_2$ .

- A dla większej ilości liczb? Aha:

### Definicja 1

$$s = \text{śred}_n(a_1, a_2, \dots, a_n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{s \square \dots \square s}_{n \text{ razy}} = a_1 \square a_2 \square \dots \square a_n.$$

- Dobrze, ale żeby móc pisać (po prawej stronie) bez nawiasów, to musisz mieć łączność działania  $\square$ .

- No to mam!  $\square$  ma wszystkie własności, jakie są potrzebne dla poprawności tej definicji ćwiczenie! Niech się algebraicy martwią, jakie! O wiele ważniejsze jest, czy przy takiej ogólnej definicji średniej da się dowiedzieć, że w Zadaniu 3, przy nowym warunku

$$(*) \square \quad a_{n+1} = \text{śred}_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

ciąg  $\{a_n\}$  jest stały (począwszy od trzeciego wyrazu)?

- Chyba potrafię:

mamy

$$a_3 \square a_3 = a_1 \square a_2$$

oraz

$$a_4 \square a_4 \square a_4 = a_1 \square a_2 \square a_3,$$

co daje

$$a_4 \square a_4 \square a_4 = (a_1 \square a_2) \square a_3,$$

$$a_4 \square a_4 \square a_4 = a_3 \square a_3 \square a_3,$$

czyli gdy  $\square$  będzie miało porządną własności (tu przydałoby się coś na kształt pierwiastkowania ćwiczenie), to  $a_4 = a_3$ ; a dalej zapewne indukcyjną:

$$a_4 = a_5 = a_6 = \dots$$

- Oczywiście! Mamy wszystko! Chodźmy spać!

- Zaraz, zaraz, chwileczkę! Czy średnia harmoniczna jest średnią w sensie Definicji 1?

- Faktycznie; jest kłopot ze zdefiniowaniem takiego działania  $\square_h$ , by

$$\text{śred}_{\square_h}(p, q) = \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}.$$

- Mam, ale niezbyt elegancko:

$$p \square_h q = \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}.$$

- Lepiej wygląda, gdy się to wystawi:

$p \square_h q$  jest odwrotnością sumy odwrotności liczb  $p, q$ . To teraz mamy już wszystko.

- Fajnie, ale zobaczmy jeszcze konkretne przykłady innych średnich.

- Oj, ciężka sprawa; nie mam pomysłu na jakieś naturalne działanie typu  $\square$ .

- A może zrobimy analogicznie, jak dla średniej harmonicznej. Średnią harmoniczną odczytywaliśmy rysując hiperbole; teraz narysujemy parabolę

## Plazma kwarkowo-gluonowa

Stanisław MRÓWCZYŃSKI

Układ wielu zjonizowanych atomów, a więc dodatnio naładowanych jonów i elektronów obdarzonych ładunkami ujemnymi, nazywa się plazmą, dokładniej plazmą elektronowo-jonową. Plazma wykazuje cały szereg niebywale ciekawych i bardzo specyficznych własności i stąd bywa nazywana czwartym stanem materii, po ciałach stałych, cieczech i gazach. Kilka lat temu pojawił się w literaturze naukowej nowy termin – plazma kwarkowo-gluonowa, której właśnie jest poświęcony ten krótki artykuł.

Kwarki i gluony to składniki cząstek elementarnych podlegających silnym oddziaływaniom jądrowym. Wspomniane cząstki to hadrony, do których w szczególności należą protony i neutrony, zwane wspólnie nukleonami, tworzące jądra atomowe. Nukleon zbudowany jest z trzech kwarków powiązanych, sklejonych za pomocą gluonów (ang. *glue* – klej). Poza cząstkami trójkwarkowymi istnieją jeszcze wśród hadronów cząstki nazywane mezonami, każda tworzona przez parę kwark-antykwar. Kwarki i gluony obdarzone są ładunkami kolorowymi, czymś w rodzaju ładunków elektrycznych, i zdają się mieć tę szczególną cechę, że istnieją jedynie w układach kolorowo neutralnych, takich jak wspomniane nukleony i mezony. Wymieniona cecha stanowi treść hipotezy uwięzienia, o której nieco szerzej pisałem w *Delcie* 9/1991. Hipoteza uwięzienia nie wyklucza istnienia układu bardzo wielu kwarków i gluonów uwolnionych z wnętrza hadronów i tworzących makroskopowy układ, który jako całość jest kolorowo neutralny. Taki właśnie układ nazywany jest plazmą kwarkowo-gluonową.

Plazmę elektronowo-jonową można otrzymać z gazu atomowego dwoma sposobami – podgrzewając ów gaz lub podwyższając jego gęstość. Jak wiadomo, podgrzewanie gazu prowadzi do wzrostu prędkości atomów w gazie. Jeśli zderzenia atomów gazu następują przy dostatecznie dużych prędkościach, rezultatem tych zderzeń jest jonizacja atomów, tzn. odrywanie się elektronów od jąder atomowych. W przypadku podwyższania gęstości zimnego gazu jonizacja atomów nastąpi wtedy, gdy średnia odległość między jądrami atomowymi będzie bliska promieniowi atomu. Wówczas danego elektronu (w przypadku atomów wieloelektronowych elektronu z zewnętrznych powłok) nie będzie można przypisać żadnemu atomowi, a zatem elektron będzie wolny.

Plazmę kwarkowo-gluonową można, jak się wydaje, otrzymać z gazu hadronowego w podobny sposób. Bardzo istotne jest tutaj, że w odróżnieniu od cząstek elementarnych takich jak elektrony, hadrony nie są obiektami punktowymi, lecz mają niezerowe rozmiary rzędu 1 fm, tj.  $10^{-13}$  cm. Jeśli więc gaz tworzony przez nukleony zwany materią jądrową zgnieciemy do gęstości takiej, że średnia odległość między nukleonami będzie istotnie mniejsza niż 1 fm, to spodziewamy się otrzymać plazmę kwarkowo-gluonową. Oczekuje się, że podgrzewanie materii jądrowej również prowadzi do powstania plazmy kwarkowo-gluonowej, choć przyczyny są tutaj inne niż w przypadku plazmy elektronowo-jonowej, gdyż hipoteza uwięzienia zabrania powstawania wydzielonych kwarków w zderzeniach hadronów. Natomiast w zderzeniach szybkich hadronów mogą produkować się nowe hadrony, głównie mezony, co powoduje, że podgrzewanie gazu hadronowego będzie prowadziło do wzrostu jego gęstości i w rezultacie do powstania plazmy.

Fakt, że bardzo gęsta materia jądrowa może istnieć jedynie w formie plazmy kwarkowo-gluonowej, prowadzi niemal automatycznie do wniosku, iż w odpowiednio wczesnej epoce ewolucji Wszechświata jego materię stanowiła plazma kwarkowo-gluonowa, która następnie, gdy gęstość materii obniżyła się, zamieniła się w hadrony. Przypuszcza się również, że plazma istnieje obecnie w niektórych bardzo gęstych obiektach astronomicznych, takich jak gwiazdy neutronowe. Najbardziej jednak intrygująca wydaje się możliwość wytworzenia plazmy kwarkowo-gluonowej w warunkach laboratoryjnych, w zderzeniach ciężkich i bardzo szybkich jąder atomowych. Oczekuje się, że niemal jednoczesne zderzenie wielu nukleonów z zamianą ich energii ruchu postępowego na energię wyprodukowanych cząstek stworzy warunki dla istnienia plazmy kwarkowo-gluonowej. Żywość tak wytworzonej plazmy będzie, niestety, bardzo krótka, rzędu  $10^{-22}$  s. Powstały przy bardzo dużej gęstości układ kwarków i gluonów będzie się bardzo szybko rozszerzał, by przy pewnej krytycznej gęstości zamienić się w hadrony. Eksperymenty przeprowadzone w ostatnich latach zdają się wskazywać, że plazma jest istotnie produkowana w zderzeniach ciężkich jąder, choć interpretacja rezultatów tych eksperymentów jest niejednoznaczna. Uważa się, że dopiero nowa generacja akceleratorów, w których jądra atomowe zostaną przyspieszone do bardzo wielkich, obecnie niedostępnych energii, umożliwi pełniejsze zbadanie problemu. Niestety, budowa owych akceleratorów to ogromne, wieloletnie przedsięwzięcie, więc na rezultaty przyjdzie jeszcze poczekać.



## Zadania

**M 610.** Wykazać, że nie ma wielościanu o siedmiu krawędziach.

Rozwiązanie na str. 8

**M 611.** Dane są w przestrzeni cztery punkty  $A, B, C, D$ . Wykazać, że jeśli prosta łącząca środek odcinka  $AB$  ze środkiem odcinka  $CD$  jest do obu tych odcinków prostopadła, to  $AC = BD$  i  $AD = BC$ .

Rozwiązanie na str. 8

**M 612.** Ponad połowa powierzchni kuli jest zabrudzona farbą. Wykazać, że istnieje średnica mająca oba końce zabrudzone niezależnie od tego, jak nieregularnie kula została zabrudzona.

Rozwiązanie na str. 8

Zadania matematyczne zostały zaczerpnięte z programu zajęć z geometrii na Trzyletnim Studium Zawodowym nauczycieli matematyki na Uniwersytecie Warszawskim.

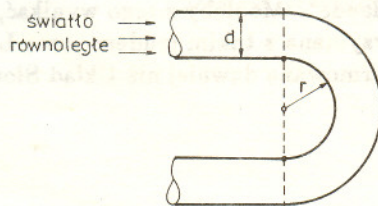
Redaguje Jarosław KULPA

**F 319.** W czasie burzy kropelki deszczu naładowały się do potencjału 1 V. Na dachu  $n = 100$  kropelek utworzyło jedną kroplę. Obliczyć jej potencjał zakładając, że kropelki nie straciły swego pierwotnego ładunku.

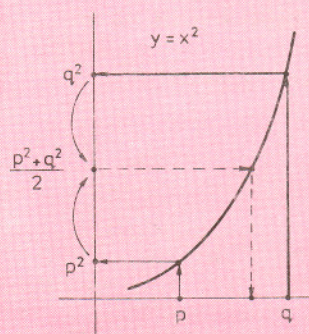
Rozwiązanie na str. 9

**F 320.** Jaki najmniejszy promień krzywizny  $r$  (rysunek) może mieć nieposrebrzone włókno światłowodowe o średnicy  $d$ , aby spełniało nadal swoje zadanie. Współczynnik załamania włókna wynosi  $n$ .

Rozwiązanie na str. 9



i postępujemy tak, jak w tamtym przypadku:



poruszamy się najpierw po ciągłych, potem po przerywanych strzałkach

$$\text{śred}_{x^2}(p, q) = \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{2}}$$

- Dla  $y = x^3$  będzie tak samo:

$$\text{śred}_{x^3}(p, q) = \sqrt[3]{\frac{p^3 + q^3}{2}}$$

- A dla dowolnej funkcji liniowej będzie to zwykła średnia arytmetyczna (ćwiczenie (po narysowaniu Tales to załatwia!).

- No to zapytajmy od razu, jaka musi być funkcja  $f: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ , by za jej pomocą zdefiniować (tak jak wyżej) odpowiadającą jej średnią?

- Do przodu, czyli do osi  $OY$  zawsze dojdziemy wzdłuż strzałek ciągłych, ale by móc wrócić po przerywanych, to musi istnieć takie  $s$ , że  $f(s) = \frac{f(p) + f(q)}{2}$ .

- Dla tego wystarczy ciągłość funkcji  $f$ , bo własność Darboux to gwarantuje. Ale powinno być tylko jedno takie  $s$ , bo gdy jest wiele, to które wybrać?

- Różnowartościowość funkcji  $f$  zapewni nam jedyność.

- O.K. Zatem

**Definicja 2**

Dla dowolnej funkcji  $f: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$  ciągłej i różnowartościowej (inaczej mówiąc: ciągłej i monotonicznej) definiujemy

$$\begin{aligned} \text{śred}_f(a_1, a_2, \dots, a_n) &= \\ &= f^{-1} \left[ \frac{f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)}{n} \right]. \end{aligned}$$

- Popatrz, że średnią geometryczną dostaniemy, gdy za  $f$  (w powyższej definicji) przyjmiemy logarytm (o jakiegokolwiek podstawie!) (ćwiczenie).

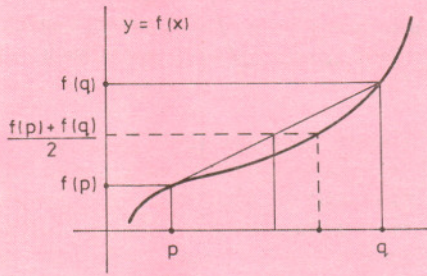
- Tak zdefiniowane średnie spełniają też **Definicję 1**.

- Tak, trzeba tylko postąpić tak, jak w przypadku średniej harmonicznej określając  $\square_f$  (ćwiczenie; najlepiej słownie).

- A czy dla każdej średniej określonej za pomocą pewnego działania  $\square$  istnieje taka funkcja  $f$ , by  $\text{śred}_\square \equiv \text{śred}_f$ ?

- Oj, zostawmy to na później - po co ciągle taka ogólność! Popatrz lepiej na to: średnia geometryczna i harmoniczna liczb  $p, q$  leżą na lewo od środka odcinka  $pq$ . Czy każda średnia ma tę własność?

- Eee ... chyba nie. O, patrz:



śred  $f(p, q)$

to zależy zapewne od wypukłości funkcji  $f$  ćwiczenie.

- Pewnie masz rację. Sądzę, że na dzisiaj wystarczy. Dobranoc!

Następnego dnia, wieczorem:

- Średnia arytmetyczna i geometryczna są związane z pojęciem ciągu arytmetycznego i geometrycznego następującą formułą:

$$(**) \quad a_n = \text{śred}(a_{n-1}, a_{n+1}).$$

Ciągi arytmetyczne i geometryczne są opisane; wiadomo, jak wyglądają. A czy jest coś takiego, jak ciąg harmoniczny?

- Oczywiście, ciąg  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ .

- Ale czy on spełnia (\*\*)?

- Tak. Łatwo sprawdzisz, że tak jest ćwiczenie. Spróbujmy opisać wszystkie ciągi harmoniczne, tzn. ciągi  $\{a_n\}$  spełniające (\*\*), gdzie średnia to średnia harmoniczna.

- Chyba trzeba zacząć rachować; wyrazić  $a_{n+1}$  za pomocą wcześniejszych

$$a_n = \frac{2}{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}} \Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1}}{2a_{n-1} - a_n}.$$

- Oj, dokładnie nic nie widać! A może tak?

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}},$$

co dla  $n = 2, 3, 4$  daje:

$$\frac{1}{a_3} = \frac{2}{a_2} - \frac{1}{a_1};$$

$$\frac{1}{a_4} = \frac{2}{a_3} - \frac{1}{a_2} =$$

$$= 2 \left[ \frac{2}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right] - \frac{1}{a_2} =$$

$$= \frac{3}{a_2} - \frac{2}{a_1};$$

$$\frac{1}{a_5} = \dots = \frac{4}{a_2} - \frac{3}{a_1}.$$

## Patrz w niebo

Trzy najobfitsze na Ziemi izotopy ksenonu (o masach atomowych 129, 131 i 132) występują w dość zbliżonych ilościach - po trochu ponad 20%. W latach 60. Roy Lewis i jego koledzy z University of Chicago znaleźli w niektórych meteorytach (a w każdym razie w ich częściach „pierwotnych”, tzn. nie zniszczonych przez wysoką temperaturę panującą przy przelocie przez atmosferę) nadmiar - i to dwukrotny - izotopu zarówno ciężkiego, jak i lekkiego. Ksenon ten nazwano ksenonem HL (od słów *heavy* - ciężki i *light* - lekki). Wkrótce zresztą stwierdzono też anomalny skład izotopowy azotu. Powstało przypuszczenie, że te meteoryty pochodzą spoza Układu Słonecznego.

Na początek jednak należało odpowiedzieć na pytanie, gdzie właściwie znajduje się ksenon w tych meteorytach. Wszystko wskazywało na to, że w węglu, który może w nich występować w dużych ilościach. No, ale gdzie - dokładniej? Nastąpiła seria żmudnych prac mających na celu wyodrębnienie frakcji węgla zawierającej ksenon. Najwięcej materiału dostarczył bogaty w węgiel meteoryt Allende, który w 1969 r. spadł w Meksyku. Według słów Lewisa, końcowe usuwanie węgla pozbawionego ksenonu doprowadziło do gwałtownej zmiany wyglądu próbki: stała się ona biała! Ostateczne precyzyjne badania tajemniczego proszku, wliczając w to obserwacje dyfrakcji elektronów na jego ziarnach, dały niezwykle wniosek: są to mikroskopijne diamenty!

Dotychczas w trzech jeszcze meteorytach wykryto diamenty zawierające ksenon. Same diamenty znajdowano w meteorytach już wcześniej. Przypuszcza się, że powstają one, gdy węglowy meteoroid wpada w ziemską atmosferę. Wysoka temperatura i ogromne ciśnienie wywołane przez falę uderzeniową (setki tysięcy atmosfer) prowadzą do powstania drobnych kryształków. Tu jednak, to znaczy np. w meteorycie Allende, diamenty - w dodatku zawierające ksenon - musiały powstać w inny sposób, gdyż znajdowały się w „pierwotnej” materii meteorytu. Jakże więc jest ich pochodzenie?

Hipoteza jest następująca. Prawdopodobnie pył diamentowy powstaje z gazu wyrzuconego przez czerwone olbrzymy - kryształy kondensują się wprost ze stanu gazowego w obszarze, gdzie panuje wprawdzie wysoka temperatura, ale niemal zerowe ciśnienie, a więc w warunkach dotychczas uznawanych za nie sprzyjające „produkcji diamentów”. Ksenon HL powstaje później, mianowicie gdy gwiazda stanie się supernową, wtedy bowiem w tym kataklizmie powstają w ogóle najróżniejsze izotopy pierwiastków. Materia rozerwanej gwiazdy dogania otoczkę pyłową i wtedy atomy m.in. ksenonu grzęzną w kryształkach diamentowych. Recz jasna, grzęzną tam również inne domieszki, a tylko obecność ksenonu jest względnie łatwa do stwierdzenia. Tak więc pył diamentowy z osobliwym ksenonem byłby namacalną pozostałością po eksplozji jakiejś gwiazdy. To jej resztki mogły następnie wejść w skład materii, z której powstał Układ Słoneczny wraz z meteoroidami „typu Allende”. Mogłoby z tego wynikać, że szczypta pyłu diamentowego, otrzymana z takim trudem przez Lewisa i jego grupę, jest materia uformowaną dawniej niż Układ Słoneczny.

Tomasz KWAST

## Od przypadku dyskretnego do ciągłego

Jeżeli  $a_1, a_2, \dots, a_n$  są liczbami dodatnimi, to wyrażenia

$$(1) \quad H_n(a_1, \dots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}},$$

$$(2) \quad G_n(a_1, \dots, a_n) = (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}},$$

$$(3) \quad A_n(a_1, \dots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

nazywamy odpowiednio średnią: harmoniczną, geometryczną i arytmetyczną liczb  $a_1, \dots, a_n$ .

Między tymi wielkościami ma miejsce zależność:

$$(4) \quad \min(a_1, \dots, a_n) \leq H_n(a_1, \dots, a_n) \leq G_n(a_1, \dots, a_n) \leq A_n(a_1, \dots, a_n) \leq \max(a_1, \dots, a_n).$$

Została ona sformułowana w przypadku dyskretnym.

Zdefiniujemy analogiczne średnie dla funkcji ciągłej  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}_+$ .

Średnią arytmetyczną funkcji  $f$  określimy uogólniając wzór (3)

w następujący sposób:

$$A(f; a, b) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f\left(a + j \cdot \frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Korzystając z własności funkcji logarytmicznej można łatwo zauważyć związek:

$$\ln(G_n(a_1, \dots, a_n)) = A_n(\ln a_1, \ln a_2, \dots, \ln a_n),$$

czyli

$$G_n(a_1, \dots, a_n) = e^{A_n(\ln a_1, \dots, \ln a_n)}.$$

Zatem średnią geometryczną funkcji  $f$  jest liczba:

$$G(f; a, b) = e^{\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) dx}.$$

Między wzorami (1) i (3) dostrzegamy zależność:

$$\frac{1}{H_n(a_1, \dots, a_n)} = A_n\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}\right),$$

więc średnią harmoniczną funkcji  $f$  nazywamy liczbę

$$H(f; a, b) = \frac{b-a}{\int_a^b \frac{1}{f(x)} dx}.$$

Analogiczna do wzoru (4) jest w „przypadku ciągłym” nierówność

$$\begin{aligned} \min_{x \in [a, b]} f(x) &\leq \frac{b-a}{\int_a^b \frac{1}{f(x)} dx} \leq e^{\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) dx} \leq \\ &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \max_{x \in [a, b]} f(x). \end{aligned}$$

– To wygląda jak ciąg arytmetyczny. Popatrz!

$$a_3 = \frac{1}{\frac{1}{a_2} + 1 \left[ \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right]},$$

$$a_4 = \frac{1}{\frac{1}{a_2} + 2 \left[ \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right]},$$

$$a_5 = \frac{1}{\frac{1}{a_2} + 3 \left[ \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right]},$$

– Oczywiście: ciągi harmoniczne są odwrotnościami ciągów arytmetycznych ćwiczenie! (Niech nauczyciele gnębią uczniów sprawą zer w mianownikach.) Wszystkie są zbieżne do zera ćwiczenie!

– Oj, nie wszystkie, ale to też zostawmy nauczycielom. Ciekawe, czy dla innych średnich w (\*\*\*) otrzymamy jakieś modyfikacje ciągu arytmetycznego ćwiczenie?

– Po tej wczorajszej zabawie spojrzalem do *Encyklopedii Szkolnej* i tam poza średnią arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną, jest jeszcze średnia kwadratowa:

$$\text{śred}_{2,2}(p, q) = \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{2}},$$

spróbujmy zatem dla niej. To chyba nietrudne:

$$a_n = \sqrt{\frac{a_{n-1}^2 + a_{n+1}^2}{2}},$$

$$2a_n^2 = a_{n-1}^2 + a_{n+1}^2,$$

$$a_{n+1}^2 = 2a_n^2 - a_{n-1}^2,$$

a to przypomina poprzednią zabawę:

$$a_3 = \sqrt{a_2^2 + (a_2^2 - a_1^2)},$$

$$a_4 = \sqrt{a_2^2 + 2(a_2^2 - a_1^2)},$$

$$a_5 = \sqrt{a_2^2 + 3(a_2^2 - a_1^2)},$$

⋮

– Wygląda na to, że ciągi „kwadratowe” są pierwiastkami ciągów arytmetycznych ćwiczenie. Dla innych średnich pewnie będzie tak samo. Coś mi się widzi, że w „przyrodzie” jest tylko jedna średnia – średnia arytmetyczna i tylko ciągi arytmetyczne. Wszystko inne jest tylko wariacją na ten temat.

– Może niezupełnie – ale coś w tym jest.

Jarosław GÓRNICKI





## Wstęp



Na przedmiot badań kosmologii, Wszechświat, można patrzeć z tyłu różnych punktów widzenia! Dla współczesnych kosmologów-observatorów, pogrążonych w żalu po niespodziewanym stwierdzeniu zamglenia wzroku u kosztownego satelity-observatorium Hubble'a, jest przede wszystkim Wszechświat zbiorowiskiem przeróżnych struktur, z których najważniejsze są wielkoskalowe: galaktyki i ich gromady. Kosmolog-teoretyk będzie we Wszechświecie widział efekt kwantowej kreacji sprzed kilkunastu miliardów lat; fenomen egzotyczny, posłuszny jednak prawom fizyki – tym znanym i tym jeszcze nie odkrytym. Albo inaczej: rozszerzający się Wszechświat jako swój własny zegar, określający tzw. kosmologiczną strzałkę czasu. Dla matematyka będzie to po prostu rozwiązanie równań grawitacji Einsteina – Wszechświat jako dynamiczna czasoprzestrzeń, której ewolucję, w szczególności końcowy los, określa jej materialna zawartość. Nawet tak, zdawałoby się, wzniosłe stwierdzenie – „Wszechświat to nasz dom” – może jednak być źródłem dość konkretnych wniosków na temat jego struktury i historii, która, ze względu na niewątpliwy fakt naszego istnienia, nie może być całkowicie dowolna (tzw. zasada antropiczna).

W tym artykule nasz wybór porównania może się wydać z początku dość pośpolicie i szkolny: „Wszechświat jako naczynie z tłokiem”; materialna zawartość wypełniająca zmienną w czasie objętość, która wciąż reaguje ze sobą. W istocie jednak naczynie to okaże się jedynym w swym rodzaju „ostatecznym laboratorium”, potężnym akceleratorem, nieosiągalnym dla fizyków w żadnej przewidywalnej przyszłości, który testuje prawa fizyki fundamentalnej.

## Skrócony kurs kosmologii wczesnego Wszechświata

Na użytek dalszej części podamy teraz kilka wiadomości z pogranicza kosmologii oraz dość egzotycznej fizyki, zwanej bardziej wzniosle fizyką procesów fundamentalnych lub po prostu fizyką wysokich energii albo wreszcie konkretnie – fizyką cząstek elementarnych. Będzie to wykład w miarę dyletancki, za to zwięzły i dość współczesny.

**Ekspansja Wszechświata.** Wszechświat rozszerza się. Tę podstawową o nim prawdę znamy dobrze od czasów systematycznych badań Hubble'a (1929), ale odkrycia oddalania się galaktyk dokonał kilkanaście lat wcześniej Vesto Slipher. Nie nazwał tego jeszcze ekspansją Wszechświata. Na posiedzeniu Amerykańskiego Towarzystwa Astronomicznego w roku 1914 stwierdził ostrożnie, że „na ogół galaktyki uciekają od Drogi Mlecznej”. Rozszerzający się Wszechświat, zupełnie podobnie jak zwykle naczynie z gazem, ochładza swą zawartość; kiedyś musiał zatem być znacznie mniejszy i gorący.

**Temperatura Wszechświata.** Dobrze (zdawałoby się) znane pojęcie temperatury kojarzy się zwykle z fizjologicznym odczuciem ciepła czy zimna. Dla zastosowań kosmologicznych potrzebna nam będzie znaczna ekstrapolacja tego pojęcia w zakresy zupełnie obce naszej intuicji oraz przekraczające możliwości wszelkich termometrów.

W związku z temperaturą należy tu wspomnieć o trzech efektach fizycznych.

- Pierwszy z nich jest dość oczywisty. W miarę wzrostu temperatury materia ulega rozpiciu na coraz bardziej elementarne składniki. Jako pierwsze, najłabsze, ulegają rozpiciu atomy (przy temperaturze około 0,3 eV). Elektryony oddzielają się od jąder atomowych, powstaje plazma. W dalszej kolejności zachodzi rozpad jąder atomowych na ich składniki, protony i neutrony (100 keV). Na koniec z protonów i neutronów uwalniają się kwarki (200 MeV).

- Drugie zjawisko jest nieco bardziej egzotyczne, chociaż również dobrze poznane. Spróbujmy cofać się w myśli w czasie. Objętość Wszechświata maleje; maleją również odległości między galaktykami. Jest nieco mniej oczywiste, że zmniejsza się także długość fali każdego fotonu, że są one „sprężane”. Ale mniejsza długość fali oznacza większą energię ( $E \sim 1/\lambda$ ). Energia ta, w dobrze określonych chwilach, przekraczać będzie energie spoczynkowe rozmaitych, coraz cięższych cząstek elementarnych. W chwili, w której energia fotonu staje się równa masie jakiejś cząstki materii (razy kwadrat prędkości światła), może zachodzić zjawisko zwane *kreacją par* (odwrotną anihilacją): cząstki i antycząstki danego rodzaju powstają parami z promieniowania i przebywają z nim w równowadze. Oznacza to, że jeśli nawet w wyniku spotkania ze sobą ulegają anihilacji, to średnio tak samo szybko następuje ich odtwarzanie z promieniowania.



**Roswiązanie zadania M 610.**  
Gdy wielościan ma tylko ściany trójkątne, to liczba krawędzi jest równa  $\frac{2}{3}$  liczby ścian, a więc dzieli się przez 3 i wobec tego nie jest równa 7.  
Gdy chociaż jedna ze ścian jest  $n$ -kątem, dla  $n \geq 4$ , to liczba krawędzi jest równa co najmniej  $2n$ , a więc co najmniej 8.  
Czytelnik potrafi zapewne wskazać wielościan mający dokładnie  $k$  krawędzi dla każdej liczby  $k \geq 6$  różnej od 7.



**Roswiązanie zadania M 611.**  
Symetria względem prostej łączącej środki odcinków  $AB$  i  $CD$  przeprowadza  $A$  na  $B$ ,  $B$  na  $A$ ,  $C$  na  $D$  i  $D$  na  $C$ , co daje tezę.  
 $ABCD$  jest zatem trapezem lub czworokątnem mającym oś symetrii. Warto zauważyć, że czworokąt może wobec tego mieć jedną lub trzy osie symetrii, albo nie mieć ich wcale.



**Roswiązanie zadania M 612.**  
Gdyby każda średnica z zabrudzonym końcem miała drugi koniec czysty, symetria względem środka kuli przekształciłaby zabrudzoną część kuli na czystą, co wobec rozmiarów części zabrudzonej jest niemożliwe.



**Rozwiązanie zadania F 819.** Niech  $q$ ,  $r$  oraz  $Q$  i  $R$  oznaczają ładunek oraz promień odpowiednio małej i dużej kropli. Wobec tego  $Q = nq$ ; sumując objętości kropelek mamy:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = n \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow R = n^{1/3} r.$$

Potencjał dużej kropli jest równy

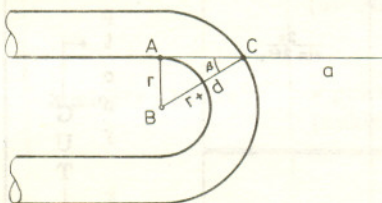
$$\phi = \frac{kQ}{R} = \frac{knq}{n^{1/3}r} = n^{2/3} \frac{kq}{r},$$

gdzie  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ . Podstawiając wartości liczbowe ostatecznie otrzymujemy

$$\phi \approx 21,5 \text{ V}.$$



**Rozwiązanie zadania F 820.** Aby światłowod spełniał swoje zadanie, światło nie może opuścić światłowodu. We wszystkich punktach musi więc następować zjawisko całkowitego wewnętrznego odbicia, tj.  $\sin \beta > \frac{1}{n}$ , gdzie  $\beta$  jest kątem padania (na ściankę światłowodu). Najbardziej ostry kąt ze ścianką światłowodu tworzy promień biegnący po prostej  $a$ .



Rozważając trójkąt  $ABC$  dostajemy

$$\sin \beta = \frac{r}{r+d} > \frac{1}{n},$$

stąd ostatecznie

$$r > \frac{d}{n-1}.$$

Ponieważ dla promienia  $a$  sytuacja jest najbardziej niekorzystna, więc warunek powyższy zapewnia całkowite odbicie wewnętrzne dla całej wiązki światła.



Inaczej mówiąc, dla każdego typu cząstek elementarnych można wskazać w historii Wszechświata taki moment (i odpowiadającą mu energię progową), że dla wszystkich chwil wcześniejszych cząstki te występowały tak obficie, jak fotony. Nawet więcej, nie różniły się zasadniczo od fotonów.

• Trzecie, potrzebne nam, zjawisko jest jeszcze bardziej subtelne. Nosi ono nazwę *odtworzenie symetrii w wysokich temperaturach*. Chodzi tu o symetrię sił przyrody, tę fundamentalną ich cechę, która wręcz siły te określa, i która w postaci magicznego słowa-klucza *gauge* (cechowanie) przenika całą współczesną fizykę. W przypadku ewolucji Wszechświata i jego stopniowego ochładzania się mówimy o zjawisku odwrotnym, o kolejnych *złamaniach symetrii*. Ze względu na pewne formalne podobieństwa używa się też określenia „przejścia fazowe”.

By zrozumieć istotę tych zjawisk, w szczególnym kontekście wczesnego Wszechświata, można podać prostą analogię korzystając z dobrze znanego zachowania się materii. (Przykład ten pochodzi z książki Jamesa Trefila *The Moment of Creation*). Wyobraźmy sobie trzy, niewątpliwie różne ciecze: rtęć, alkohol i wodę. W zwykłych temperaturach zachowują one swe różne charaktery, ale w temperaturze kilkuset stopni wszystkie one są w stanie gazowym; tworzą jednorodną mieszaninę, której żaden ze składników nie ujawnia swej indywidualnej tożsamości. Jest to jednocześnie stan najwyższej *symetrii* układu.

W miarę obniżania się temperatury następują kolejne przejścia fazowe, skroplenia. Jako pierwsza ze stanu pierwotnej symetrii wyłame się rtęć ulegając skropleniu; pozostałe dwa składniki będą jeszcze przez jakiś czas nierozróżnialne. Potem do rtęci dołączy woda, na koniec alkohol. Ostateczny stan, stan zupełnie złamanej symetrii, to trzy oddzielne, łatwo rozróżnialne ciecze.

Jest rzeczą niezwykłą, że w podobny sposób zachowują się znane nam oddziaływania. Początkowo, „tuż po stworzeniu”, jak przypuszczamy, Wszechświatem rządziła jedna uniwersalna siła. W miarę rozszerzania się kolejne siły oddzielały się z tej pierwotnej „mieszaniny” zyskując swą, znaną nam z dzisiejszej fizyki, tożsamość. Tę tożsamość określa m.in. charakterystyczna stała sprzężenia, zasięg (nieskończony lub ograniczony), rodzaj ładunków. Ale głównym sprawcą tych przemian jest temperatura.

### Fizyka cząstek elementarnych

Zawartość Wszechświata to różnorodność różnych typów cząstek zwanych elementarnymi. Nazwy tej nie należy traktować zbyt dosłownie. „Tak naprawdę” to są tylko dwa rodzaje tych cząstek: cząstki materii (fermiony) oraz cząstki przenoszące siły pomiędzy nimi (bozony).

Cząstki te oddziałują wzajemnie różnymi siłami. Istnieje dobrze sprawdzony, pozwalający na dokonywanie obliczeń, i stąd powszechnie przyjęty w fizyce, opis tych sił. Mówimy, że cząstki przyciągają się lub odpychają przez wymianę innych cząstek, tzw. *bozonów pośredniczących*. Dla nas będzie tu ważny pewien aspekt tego opisu: bozony pośredniczące zmieniają tożsamość oddziałujących cząstek. Mamy obecnie dość poważne podstawy, by sądzić, że nawet bardzo różne typy cząstek mogą przechodzić w siebie, ale ceną takiej metamorfozy jest masa wymienianego bozonu: im bardziej egzotyczna metamorfoza, tym cięższy bozon. „Cięższy” należy tu rozumieć jako trudniej dostępny, trudniejszy do odtworzenia z promieniowania wskutek odwrotnej anihilacji czy w jakiś inny sposób.

Obraz ten, pozornie mniej naturalny niż znana koncepcja oddziaływania na odległość prowadząca do klasycznego pola, sprawdził się doskonale dla wszelkich sił z wyjątkiem grawitacji.

Można zatem, jako swego rodzaju ogólną zasadę, sformułować następującą prawidłowość:

*W miarę cofania się w czasie materia ujawnia swe coraz prostsze składniki. Wzrost temperatury sprawia, że pojawiają się coraz cięższe bozony pośredniczące, dzięki którym różnice między dotychczas różnymi cząstkami zanikają. W szczególności – jest to tylko (pożądane ze względu na swą estetykę) przypuszczenie – „tuż po” kreacji we Wszechświecie występował zaledwie jeden typ cząstek rządzony jedną uniwersalną siłą opisaną hipotetyczną Teorią Wielkiej Unifikacji (GUT).*

Przyglądając się ponad stuletniej już tablicy pierwiastków Mendelejewa nie sposób powstrzymać się od uczucia satysfakcji z jej wewnętrznej spójności oraz od przekonania, że jest to dobrze odgadnięta prawidłowość przyrody. Ale analogiczna

kontemplacja współczesnych tablic cząstek elementarnych (a więc bytów, zdawałoby się, dużo bardziej fundamentalnych niż atomy) wywołuje uczucie frustracji połączonej z podziwem dla tych, którzy tablice te kompilowali i wciąż na nowo kompilują. Podziw dla cierpliwości tych wszystkich, którzy cierpliwie śledzą trajektorie cząstek, lecz także podziw dla hojności tych, którzy nie rozumiejąc istoty problemów, rozrzutnie finansują ogrom tych badań.

Streszczenie najistotniejszych cech najbardziej elementarnych składników materii (spin 1/2), jak również nośników sił pomiędzy nimi (spin 1), zawiera poniższa tabelka. Jest to w jakimś sensie odpowiednik szacownej tablicy Mendelejewa. Zawiera ona niewiele elementów i, jak się zdaje, jest dość kompletna. (Brakuje tam „tylko” hipotetycznych cząstek o spinie 3/2, grawitonu o spinie 2, a nade wszystko kwantu fundamentalnego pola skalarnego, upragnionego bozonu Higgsa o spinie 0, czyli brakującego, a niezbędnego elementu tak, skądinąd, udanej teorii Weinberga-Salama.)

### „Mała Tablica Mendelejewa”

nazwa	→	elektron
symbol	→	e
masa [MeV]	→	0,511

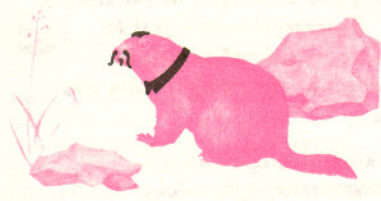
spin 1/2 fermiony			spin 1 bozony				
			foton $\gamma$ 0	gluon g 0	bozon W $W^\pm$ 80 600	bozon Z $Z^0$ 91 100	bozon GUT X $10^{10}?$
neutrino taonowe $\nu_\tau$ 0	neutrino mionowe $\nu_\mu$ 0	neutrino elektronowe $\nu_e$ 0	0	0	$\frac{e}{\sin \Theta_w}$	$\frac{2e}{\sin 2\Theta_w}$	l e p t o n y k w a r k i ← G U T
tau $\tau$ ~ 1784	muon $\mu$ 105,8	elektron e 0,511	-1	0			
kwark top t $\geq 89\,000$	kwark powabny c ~ 1500	kwark górnny u ~ 5	$+\frac{2}{3}e$	$g_c$	$\frac{e}{\sin \Theta_w}$	$\frac{2e}{\sin 2\Theta_w}$	
kwark piękny b ~ 4600	kwark dziwny s ~ 150	kwark dolny d ~ 5	$-\frac{1}{3}e$	$g_c$			

Na skrzyżowaniu wierszy opisujących fermiony i kolumn opisujących bozony podane zostały wartości stałych sprzężenia bozonów z fermionami (e oznacza tu ładunek elementarny). Strzałki w kolumnie bozon W i X oznaczają, że w oddziaływaniu z nimi cząstki z połączonych wierszy przechodzą jedne w drugie.

### Pierwsze kilkanaście miliardów lat

Według naszych obecnych poglądów cały Wszechświat rozszerza się tak, jak mu nakazują równania Einsteina. Równania te to potworna maszyna matematyczna dla urodzonych masochistów umysłowych. Laikom wystarczy informacja, że geometria Wszechświata i jej ewolucja zależy od jego materialnej zawartości. Wybierzmy zatem jakąś najprostszą (symetryczną) trójwymiarową geometrię i wrzucmy do niej zawartość powyższej tabelki. Puśćmy to wszystko w ruch zgodnie z równaniami Einsteina (materia zakrzywia czasoprzestrzeń i sama porusza się po najkrótszych liniach w tak zakrzywionej przez siebie czasoprzestrzeni). Wynik tej dość brutalnej operacji to tzw. model standardowy, lub, jak się to niekiedy mówi, scenariusz zdarzeń, jakie, mamy nadzieję, zaszły kiedyś we Wszechświecie.

Poniższa tabela jest skróconą kompilacją rozmaitych liczb i zjawisk rozproszonych po najnowszej literaturze; danych nie zawsze ze sobą zgodnych i bynajmniej – zwłaszcza im bliżej górnej ramki – nie ostatecznych, a raczej dość prowizorycznych. Zaznaczyłem tam tylko zupełnie podstawowe epizody ewolucji, jak również coś, co nazwałem „logiką ewolucji”. Każdą z wymienionych haseł to temat (przynajmniej) na duży, fachowy artykuł przeglądowy. Nie twierdzą, że wybrałem wszystko, co ważne. Zorientowani



Czytelnicy zechcą dopisać brakujące epizody. Chodziło mi tu wreszcie głównie o stwierdzenie niewątpliwego już dzisiaj faktu: zaborcza kosmologia wchłonęła właściwie wszystkie głębokie koncepcje fizyki. Patrząc na ten skrócony przewodnik po wczesnym Wszechświecie nie ulegajmy jednak pokusie zachłyśnięcia się dumą z naszej wszechwiedzy. Od chwili oznaczonej jako „1 sekunda” wstecz wiele może się jeszcze zmienić, a brakujące do tajemniczej „chwili zero”  $10^{-43}$  s to nie tak znów mało, jeśli zważyć, kiedy i w jak ekstremalnych warunkach wszystko to się działo.

### Główne etapy ewolucji Wszechświata

Czas	Temperatura	Zjawisko, Era ewolucji	Materia	Oddziaływania	Logika ewolucji
		kwantowa kreacja „z niczego”?	pusta próżnia kwantowa		Etap I
		pierwotna symetria	jeden rodzaj cząstek „fermio-bozonów”, jedna siła • supergrawitacja?		Obniżanie się temperatury od $10^{32}$ K do $10^{15}$ K i stąd odchylenie od pierwotnej symetrii:
$10^{-43}$ s	$10^{19}$ GeV	* oddzielenie grawitacji Teorie Wielkich Unifikacji (GUT)	„kwarko-leptony” bozony X	dwie siły: • grawitacja • silno-elektrosłabe	1. rozdzielenie oddziaływań, (łamanie symetrii w niskich temperaturach)
$10^{-35}$ s	$10^{15}$ GeV	* oddzielenie sił jądrowych (inflacja Wszechświata) Model Standardowy	kwarki leptony bozony W, Z	trzy siły • grawitacja • silne • elektrosłabe	2. różnicowanie cząstek elementarnych (w niskich temperaturach zanikają bozony pośredniczące).
$10^{-10}$ s	100 GeV	* oddzielenie sił słabych	plazma kwarkowo-gluonowa	cztery siły • grawitacja • silne • słabe • elektro-magnetyczne	Etap II Dalszy spadek temperatury od $10^{12}$ K do 2, 7 K.  W takich warunkach rozmaite siły łączą różne cząstki w trwałe, coraz większe i bardziej złożone struktury: hadrony, jądra atomowe, atomy, cząsteczki, ..., gwiazdy, galaktyki.
$\approx 10^{-5}$ s	200 MeV	Era kwarków. • powstanie hadronów (uwięzienie kwarków)	elektrony neutrina fotony nukleony		
3 minuty	100 keV	Era leptonów • powstanie lekkich jąder (nukleosynteza)	plazma: jądra elektrony fotony		
$\approx 10^5$ lat	0,3 eV	Era plazmy • powstanie wodoru (rekombinacja)	atomy		
$\approx 2 \cdot 10^{10}$ lat		Era materii teraz	galaktyki		

Nie należy zapominać, że za tym wszystkim stoją omylni ludzie różnych temperamentów i upodobań: astronomowie-observatorzy i fizycy wysokich energii; geniusze honorowani Nagrodą Nobla i ci mniej wszechstronni, niekiedy wręcz przypadkowi odkrywcy; ekscentrycy chodzący swoimi drogami i pracownicy rzemieślnicy; wreszcie wirtuozowie matematyki i wyrobnicy od teleskopów z kamerami CCD i komputerów. Zaprezentowane zestawienie to ich wspólna, wciąż na nowo pisana, Historia Wszechświata. Czas pokaże, jak sam Wszechświat osądzi ich dzieło, co będą zmuszeni zmienić, a co dopisać.

Nie wszyscy ze znanych fizyków ulegli pokusie kosmologicznej mody w fizyce. Wielki Richard Feynman, w swych wykładach z 1984 r., określił obecny stan teorii unifikacyjnych jako *super-duper*: wielka lipa. (W języku polskim nie można oddać rymu, ale mamy za to niezamierzoną grę słów.)

Trzeba pamiętać, że podstawą wszelkich zjawisk wymienionych w tabeli jest znacznie skromniejsza i bardziej oszczędna, i estetyczna „Mała Tablica Mendelejewa”. Po prostu zastosowano ją do szczególnego kontekstu Wszechświata.

Z tabeli tej, która z pewnością zasługuje na chwilę kontemplacji, jedno nie powinno ulegać wątpliwości: całą ewolucję Wszechświata zdaje się przenikać pewien nieprzypadkowy sens. Ocierający się o granice obecnej fizyki Początek Świata zdaje się stanowić gorące stadium powszechnej prostoty, symetrii i unifikacji. Tuż potem ekspansja, powodująca spadek temperatury, sprawia, iż następują trzy kolejne akty różnicowania oddziaływań; te zaś z kolei umożliwiają trzy akty połączeń w strukturze materii. Powstaje obecny, bogaty w struktury, daleki od prostoty, olbrzymi i chłodny Wszechświat – nasz dom.

# Fizyka promieni kosmicznych i narodziny fizyki cząstek elementarnych (1932 – 1952)

*Helmut RECHENBERG,*

*Instytut Maxa Plancka, Monachium*

W podręcznikach fizyka cząstek elementarnych przedstawiana jest zwykle jako dziedzina będąca owocem ciągłych poszukiwań coraz to głębszych poziomów struktury materii. Poszukiwania te zapoczątkowały w naszym wieku badania nad fizyką atomu, a później nad fizyką jądra atomowego. Jednakże historyczny rozwój fizyki cząstek elementarnych nie postępował według takiego uporządkowanego wzorca. Główny wkład do jej narodzin wniosła fizyka promieniowania kosmicznego – w promieniach kosmicznych odkryto pierwsze cząstki elementarne nie będące składnikami atomów: pozyton, mezony i tak zwane cząstki dziwne.

## Fizyka promieni kosmicznych przed 1932 r.

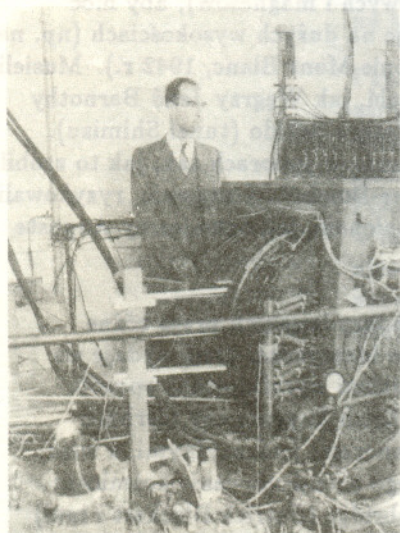
Promieniowanie kosmiczne zostało odkryte w 1912 r. przez Austriaka, Victora F. Hessa, który podczas lotów balonem zaobserwował silny wzrost atmosferycznego promieniowania przenikliwego na dużych wysokościach (do 4500 m). Werner Kolhörster z Halle potwierdził w 1913 r. istnienie tego, co Hess nazwał „promieniowaniem dużych wysokości” (niem. *Höhenstrahlung*) – gdyż w oczywisty sposób wnikało ono do atmosfery z góry. Po pierwszej wojnie światowej badania nad promieniowaniem Hessa podjął wraz z kilkoma współpracownikami Robert A. Millikan (od 1922 r.). Stwierdził on, że składa się ono z bardzo twardego promieniowania gamma, o którym sądził, iż pochodzi z czasów, gdy we Wszechświecie tworzyła się materia („krzyk nowo narodzonych atomów”). Podczas gdy Millikan nie wykrył żadnej zależności natężenia promieniowania kosmicznego od szerokości geograficznej – zależność taka powinna mieć miejsce, gdyby w promieniowaniu kosmicznym występowały cząstki naładowane – holenderski fizyk Jacob Clay zaobserwował takie zjawisko porównując natężenie między Batawią i Amsterdamem (1927 – 1930). Dymitr Skobieltyn (1928) oraz Walter Bothe i Werner Kolhörster (1929) udowodnili następnie ponad wszelką wątpliwość, że promieniowanie kosmiczne zawiera znaczącą składową cząstek naładowanych (głównie elektronów). Swoje wyniki uzyskali oni za pomocą komór mgłowych (Wilsona; w silnych polach magnetycznych) oraz liczników Geigera-Müllera (działających w koincydencji). Natomiast Millikan pracował, podobnie jak wcześniejsi pionierzy fizyki promieni kosmicznych, z komorami jonizacyjnymi. Obie metody, komory mgłowe (plus pola magnetyczne) i liczniki (w obwodach koincydencyjnych i antykoincydencyjnych) stały się głównym narzędziem eksperymentalnym badania promieni kosmicznych w latach trzydziestych.

## Odkrycie pozytonu i „mezotronu” (1932 – 1937)

Na początku 1928 r. Paul Dirac z Cambridge przedstawił Królewskiemu Towarzystwu Naukowemu (Royal Society) w Londynie swą pracę „Kwantowa teoria elektronu”. Wyprowadził w niej nowe relatywistyczne równanie dla elektronu. Rozwiązanie tego równania dopuszczało stany o ujemnej energii, które autor „przetransformował” w dodatnio naładowane „dziury”, zakładając, że odpowiadają one znanym protonom. Trzy lata później, w maju 1931 r. Dirac zmienił swoją interpretację twierdząc: *Musimy porzucić utożsamienie dziur z protonami... Dziura, gdyby istniała, byłaby cząstką nowego rodzaju, nieznaną*



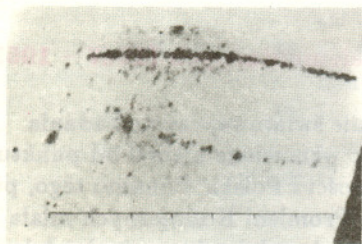
fizyce doświadczalnej, mającą tę samą masę i przeciwny ładunek niż elektron. Możemy nazwać taką cząstkę anty-elektronem. Nie powinniśmy spodziewać się odnalezienia anty-elektronów w przyrodzie z powodu dużej szybkości ich rekombinacji z elektronami... Spotkanie się dwóch twardych promieni  $\gamma$  (o energii co najmniej pół miliona elektronowoltów) może prowadzić do równoczesnej kreacji elektronu i anty-elektronu. [1]



Rys. 1. C. D. Anderson ze swą komorą mgłową (zdjęcie z 1934 r.).

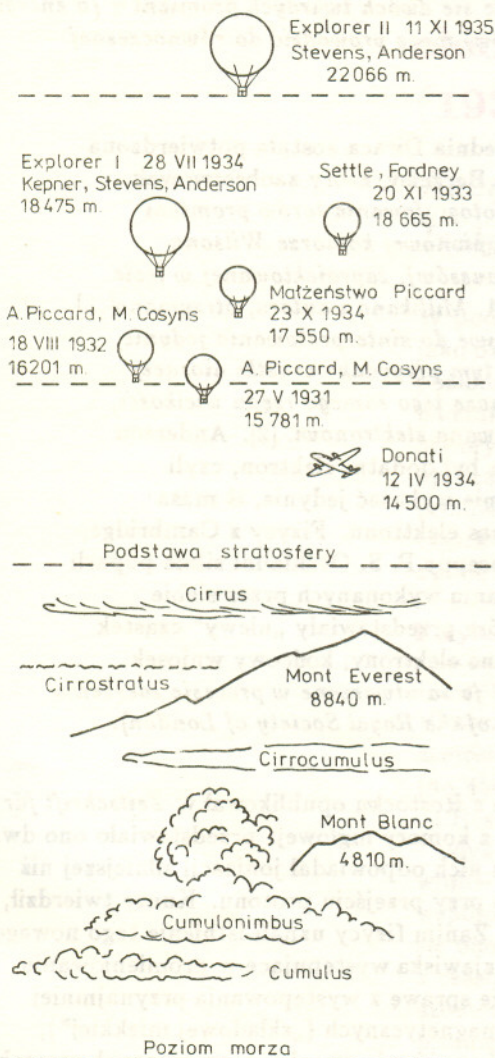
Dobry rok później przepowiednia Diraca została potwierdzona przez Carla D. Andersona z Berkeley, który zaobserwował: 2 sierpnia 1932 r. podczas fotografowania torów promieni kosmicznych utworzonych w pionowej komorze Wilsona (pole magnetyczne 30 000 gaussów), zaprojektowanej w lecie 1930 r. przez profesora R. A. Millikana i autora, otrzymano[...] ślady, które wydają się możliwe do zinterpretowania jedynie, gdy przyjmujemy istnienie w tym przypadku cząstki niosącej dodatni ładunek i mającej masę tego samego rzędu wielkości, co masa normalnie przypisywana elektronowi. [2]. Anderson wywnioskował, że cząstką tą był dodatni elektron, czyli pozyton, mimo że był w stanie wykazać jedynie, iż masa cząstki nie przewyższa 20 mas elektronu. Fizycy z Cambridge, Patrick M. S. Blackett i Giuseppe P. S. Occhialini silnie poparli ten pogląd po przeanalizowaniu wykonanych przez siebie zdjęć z komory mgłowej, które przedstawiały „ulewy” cząstek zawierające dodatnie i ujemne elektrony; końcowy wniosek brzmiał, że najlepiej uważać je za utworzone w procesie zderzenia (lutu 1933 r. w *Proceedings of the Royal Society of London*).

W tym samym, 1933 roku Paul Kunze z Rostocku opublikował w *Zeitschrift für Physik* (vol. 83, str. 10) pewne zdjęcie z komory mgłowej: przedstawiało ono dwa tory i autor zauważył, że ciemniejszy z nich odpowiadał jonizacji silniejszej niż przy przejściu elektronu, a słabszej niż przy przejściu protonu. Kunze twierdził, że tor ten zakresliła nieznaną cząstką. Zanim fizycy uznali istnienie tego nowego obiektu, musieli przebadać dokładnie zjawiska występujące w promieniowaniu kosmicznym. Do roku 1936 zdano sobie sprawę z występowania przynajmniej dwóch typów ulew: (i) kaskad elektromagnetycznych („składowej miękkiej”), których źródłem było promieniowanie hamowania wysokoenergetycznych cząstek (głównie elektronów) przekształcające się w pary elektron-pozyton, które to cząstki znów produkowały promieniowanie hamowania itd.; (ii) składowej twardej, bardzo przenikliwej, dającej w komorze zaledwie kilka, a nawet dokładnie jeden tor. Następnie Werner Heisenberg wywnioskował na podstawie argumentów teoretycznych oraz danych doświadczalnych istnienie trzeciego rodzaju ulew, tzw. ulew wybuchowych (1936). Na początku 1937 r. Seth Neddermeyer i Carl Anderson z Berkeley oraz E. C. Stevenson i Jabez C. Street z Cambridge (Massachusetts) wykazali, że składowa twarda reprezentuje cząstkę naładowaną o masie (której wartość może nie być jednoznacznie określona) większej niż masa zwykłego swobodnego elektronu i znacznie mniejszej niż masa protonu. (*Phys. Rev.* 51, 15 maja 1937, str. 886).



Rys. 2. Najwcześniejszy opublikowany tor „mezotronu” (P. Kunze, *Z. f. Phys.* 83 (1933), 10).

Nową cząstkę nazwano „mezotronem” i uznano wkrótce za identyczną z hipotetycznymi kwantami U wprowadzonymi do fizyki w listopadzie 1934 r. przez Hideki Yukawę z Osaki w celu wyjaśnienia zasięgu i siły silnych oddziaływań jądrowych. Yukawa przewidywał ich masę na około 200 mas elektronu. „Mezotron” okazał się cząstką nietrwałą (zarówno doświadczalnie, jak i teoretycznie), co dostarczyło fizykom wielu trudnych zagadek, które miały zostać rozwiązane w ciągu następnych dziesięciu lat.



Rys. 3. Loty balonowe w latach 1931 – 1935.

Pierre Auger z Paryża, jeden z pionierów studiów nad promieniowaniem kosmicznym, opisał badaczy czasów „heroicznej epoki” (prac nad promieniami kosmicznymi) jako „alpinistów, górników, nurków i aeronautów”. Rzeczywiście, pionierzy musieli wspinać się w górach z ciężkim bagażem na plecach (częściami komór mgłowych i magnesów), aby móc przeprowadzać swoje obserwacje na dużych wysokościach (np. na szczycie Aiguille di Midi w rejonie Mont Blanc, 1942 r.). Musieli opuszczać się do głębokich kopalń, jak Węgrzy Jenő Barnothy i panna Forro lub Japończyk Yataro Sekido (tunel Shimizu). Musieli zatapiać swoje instrumenty w jeziorach tak, jak to zrobił Erich Regener ze swą „Bodensee-Bombe”. I wreszcie, ryzykowali życiem w najwyższych lotach balonem, jak Szwajcarzy Auguste i Jean Piccard (rys. 3).

Wyposażenie używane w latach trzydziestych przez różne grupy eksperymentalne nie było identyczne. Dziś wydaje się ono proste, choć używane w całkiem wyrafinowany sposób. Wielu specjalistów, takich jak Erich Regener czy Gerhard Hoffman, wciąż pracowało z komorami jonizacyjnymi, a więc z narzędziem, za pomocą którego promieniowanie kosmiczne zostało odkryte. Fizycy z Cambridge (Patrick Blackett i inni) polegałi głównie na komorach mgłowych, których z powodzeniem używano także w Związku Radzieckim (D. Skobieltyn), Ameryce (C. D. Anderson i współpracownicy), Francji (P. Auger i Paul Ehrenfest, Jr, Louis Leprince-Ringuet i M. Lh eritier) oraz Japonii (Yoshio Nishina i współpracownicy). W Niemczech liczniki Geigera-M ullera znalazły owocne zastosowanie w r ekach Hansa Geigera i współpracujących z nim badaczy. Bruno Rossi przeniósł t  metod  do Włoch, a p zniej także do USA, gdzie rozwinął ulepszoną technik  teleskopową. Wreszcie w latach trzydziestych rozpoczęto stosowanie klisz fotograficznych, szczególnie przez Mariett  Blau i Herth  Wambachrer z wiedeńskiego Institut für Radiumforschung (badaczki te zapoc tkowały także studia w dziedzinie rozszczepienia jądrowego wywoływanego przez promienie kosmiczne).

Podczas drugiej wojny s wiatowej uzyskano dwa ważne wyniki. Po pierwsze, fizycy rzymscy G. Bernhardini, M. Conversi, E. Pancini O. Picconi, E. Scrocco i G. C. Wick udowodnili za pomocą metody licznikowej, że znany z promieni kosmicznych „mezotron” wykazuje jedynie słabe oddziaływanie z jądrami, a tym samym musi zosta  wykluczony jako kandydat na yukawowski kwant U. Po drugie, M. Lh eritier z grupy działającej w  cole Polytechnique w Paryżu odnalazł w 1943 r. na zdjeciu z komory mgłowej tor, który zinterpretował jako dodatnio naładowaną cz stk  uderzajac  w elektron z gazu wypełniajacego komor . Mas  tej cząstki oszacowano na  $990 m_e \pm 12\%$ , a więc musiała by  to cząstka nowa [3].

### Odkrycie pionu i dalszych cząstek elementarnych (1947 – 1952)

W okresie bezpośrednio po drugiej wojnie s wiatowej czyste badania naukowe w wielu krajach musiały zosta  wznowione niemal od punktu zerowego; uwaga ta dotyczy w szczególności i Polski. Pomimo tego, pierwsza Mi zynarodowa Konferencja na temat Promieni Kosmicznych miała miejsce od 6 do 11 października 1947 r. w Krakowie, gdzie aktywnie działal w tej dziedzinie Marian Mięsowicz. Wielu spośród najwybitniejszych pionierów lat trzydziestych (w szczególności P. Auger, J. Barnothy. P. A. M. Blackett, J. Clay,



P. Cosyns, M. Forro, W. Heitler, L. Janossy, L. Leprince-Ringuet i J. A. Montgomery) było obecnych, gdy nowicjusz, Cecil Frank Powell z Bristolu przedstawił wystąpienie pt. „Dowód istnienia mezonów o różnych masach”. Zaprezentował on w szczególności odkrycie nowej cząstki o pośredniej masie, która rzeczywiście wykonywała zadania kwantów U Yukawy – pośredniczyła w silnych oddziaływaniach jądrowych. Powell zaobserwował swoje „mezony pi”, oczywiście, w promieniowaniu kosmicznym. Używał on nowych klisz fotograficznych, których produkcję rozwinęto w Ilford Company na krótko przedtem.

I znów rozkwitło badanie promieni kosmicznych, znów podejmowano aeronautyczne wyprawy, choć tym razem bezzałogowe balony wynosiły na wielkie wysokości paczki klisz i emulsji fotograficznej. Po ich powrocie na ziemię i wywołaniu wielkiej liczby ekspozycji otrzymano tysiące torów pionów. Pokazywały one między innymi rozpad pionu na przenikliwy „mezotron” odkryty w latach trzydziestych, teraz nazwany „mionem”. Mion reprezentuje cząstkę niezwykle podobną do elektronu, jest właściwie „ciężkim elektronem”, jak nazwali go pierwotnie jego odkrywcy – Anderson i współpracownicy. Jego istnienie w przyrodzie wydaje się nie mieć żadnej przekonywającej przyczyny.

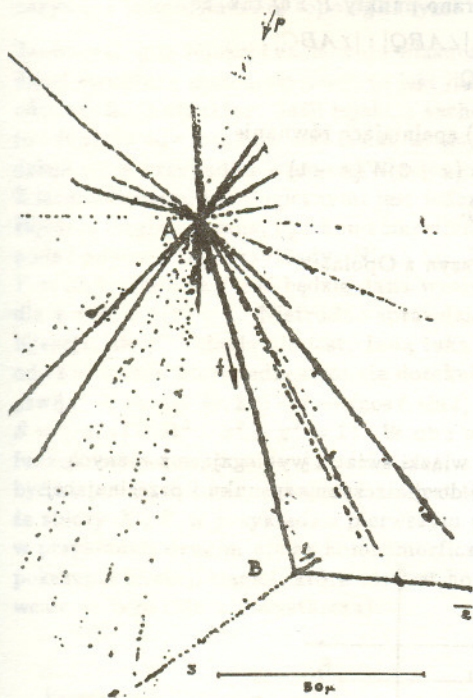
„Kto to zarządził?”, zapytał Isidor Rabi podczas pewnej konferencji pod koniec lat czterdziestych. Powinien był powtórzyć to samo pytanie w odniesieniu do innej cząstki promieniowania kosmicznego, tak zwanego mezonu V, po raz pierwszy zauważonej 15 października 1946 r. w komorze mgłowej przez członków grupy badawczej z Manchesteru. W swojej pracy donosili oni także o słabych rozpadach naładowanych i neutralnych mezonów V [4]. Obydwie cząstki miały, podobnie jak obiekt odkryty przez Lhéritiera w 1943 r., masy równe około  $1000 m_e$ . Kto to zarządził?

Chociaż następne dwa lata nie przyniosły obserwacji żadnej nowej cząstki typu Lhéritiera-Rochestera-Butlera, rok 1949 rozpoczął obfite żniwo obiektów ostatecznie nazwanych „cząstkami dziwnymi”. W efekcie poznano całą różnorodność mezonów dziwnych i innych cząstek dziwnych o masach większych niż masa nukleonu. Te ostatnie nazwano „hiperonami”. Hiperony mogą zostać wbudowane w strukturę jądra atomowego. Rzeczywiście, Marian Danysz i Jerzy Pniewski z Uniwersytetu Warszawskiego zaprezentowali pierwszy przykład takiego „hiperjadra” (rys. 4). Obserwacja dziwnych cząstek elementarnych w promieniowaniu kosmicznym zakończyła narodziny fizyki cząstek elementarnych. Nowo odkryte obiekty w oczywisty sposób rozszerzały dziedzinę fizyki jądrowej daleko poza jej dotychczasowe granice.

przetłumaczył Paweł KRAWCZYK

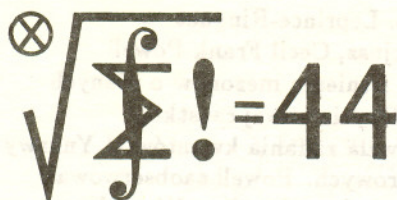
Literatura cytowana w tekście:

- [1] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. London*, **A133**, (1931), 60–72, w szczególności str. 61.
- [2] C. D. Anderson, *Phys. Rev.*, **43** (1933), 491-494, szczególnie str. 491. Pierwsze doniesienie o odkryciu pozytonu ukazało się w *Science* 76(1932), 238.
- [3] L. Leprince-Ringuet i M. Lhéritier, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **219** (1944), 618.
- [4] G. D. Rochester i C. C. Butler, *Nature*, **160** (1947), 855.



Rys. 4. Pierwsze zarejestrowane hiperjądro, 1952 r.





## Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,  
Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 3$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 7/1990.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 1992

### Zadania z matematyki nr 227, 228

Czołówka ligi zadaniowej

#### Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 213 ( $WT=3,60$ ) i 214 ( $WT=1,37$ )  
z numeru 1/1991

Mariusz Zajac	- Pruszków	44,32
Przemysław Gadziński	- Środa Śl.	44,30
Tomasz Grzesiak	- Kraków	42,85
Krzysztof Zawislowski	- Warszawa	42,82
Tomasz Wietecha	- Tarnów	37,48

Dwa nowe nazwiska w **Klubie 44 (M)**  
(pierwsze od blisko pół roku): panowie  
M. Zajac i P. Galziński.

#### Redaguje Marcin E. KUCZMA

**227.** Na bokach  $BC$  i  $AC$  trójkąta  $ABC$  obrano punkty  $P$  i  $Q$  tak, że

$$|\angle BAP| : |\angle BAC| = |\angle ABQ| : |\angle ABC|.$$

Dowieść, że jeśli  $|AC| \geq |BC|$ , to  $|AP| \geq |BQ|$ .

**228.** Wyznaczyć wszystkie wielomiany  $W(x)$  spełniające równanie

$$(x-1)W(x+1) = (x+3)W(x-1)$$

(dla każdej rzeczywistej wartości zmiennej  $x$ ).

Zadanie **228** zaproponował pan Piotr Jurczyszyn z Opola.

### Zadania z fizyki nr 125, 126

Czołówka ligi zadaniowej

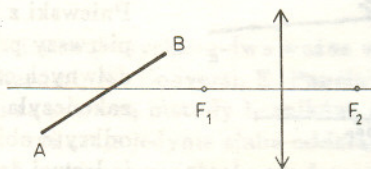
#### Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 111 ( $WT=1,19$ ) i 112 ( $WT=3,73$ )  
z numeru 1/1991

Leszek Motyka	- Kraków	46,00
Paweł Perkowski	- Szczecin	26,53
Anna Głuza	- Toruń	24,35
Adam Sikorski	- Lublin	18,24

#### Redaguje Jerzy B. BROJAN

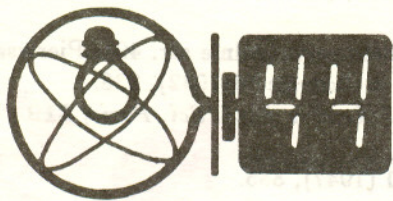
**125.** Przez soczewkę skupiającą przechodzą wiązki światła wybiegające z różnych punktów płaskiej powierzchni  $\sigma$  prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przecinającej się z nią wzdłuż linii  $AB$ .



Jaki powinien być kształt ekranu, aby wszystkie punkty powierzchni  $\sigma$  były ogniskowane na tym ekranie ostro? Jeśli przedmiotem jest prostokąt należący do  $\sigma$ , to jaki kształt będzie miał obraz tego prostokąta na ekranie?

**126.** Jednorodna kulka toczy się bez poślizgu po płaszczyźnie poziomej z prędkością  $v_0$  w kierunku osi  $x$ , przy czym jej oś obrotu tworzy z pionem (osią  $y$ ) kąt  $\beta$ . Kulka wtacza się na wznoszącą się powierzchnię niezmienniczą względem przesunięć wzdłuż osi  $x$  i nachyloną w kierunku  $x$ . Jaką maksymalną wysokość osiągnie kulka?

Przyjąć, że kulka nie odrywa się od podłoża i styka się z nim tylko w jednym punkcie.

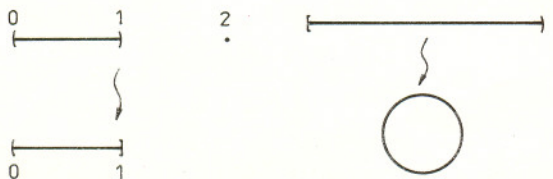




## O parach niehomeomorficznych

Homeomorfizm to taka ciągła bijekcja, że funkcja do niej odwrotna też jest ciągła (matematycy czasem mówią krótko: „bijekcja w obie strony ciągła”). Pojęcie to jest bardzo ważne, szczególnie w topologii. Głównym przedmiotem badań topologii są własności, które nie zmieniają się po przekształceniu zbioru przez homeomorfizm (zwane niezmiennikami homeomorfizmów). Praktycznie rzecz biorąc, z reguły w badaniach topologii dwa zbiory homeomorficzne (tzn. takie, że istnieje homeomorfizm przekształcający jeden na drugi) mogą być uważane za nierozróżnialne. Homeomorfizmy są także nazywane izomorfizmami topologicznymi.

Zazwyczaj, gdy bijekcja zachowuje własność wiodącą dla danej struktury matematycznej, to jest już izomorfizmem odpowiednich struktur. Jeśli bijekcja zachowuje porządek, to i funkcja odwrotna do niej ma tę własność. Podobnie dzieje się w przypadku własności algebraicznych. Z izomorfizmami topologicznymi jest jednak inaczej! Bijekcja ciągła nie musi być homeomorfizmem; łatwo podać odpowiednie przykłady. Niech np.  $X = (0, 1) \cup \{2\}$ ,  $Y = (0, 1]$ , funkcja  $f$  zaś będzie dana wzorem  $f(x) = x$  dla  $x \neq 2$ , a  $f(2) = 1$ . Nietrudno sprawdzić, że  $f$  jest ciągłą bijekcją, ale  $f^{-1}$  ciągłą nie jest. Inną taką funkcją jest odwzorowanie, które jednostronnie domknięty odcinek „związa” w okrąg:  $[0, 2\pi) \ni t \rightarrow (\cos t, \sin t) \in S$ , gdzie  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ . W obu przypadkach funkcje odwrotne „rozrywają” dziedzinę, a więc ciągłe być nie mogą. Można wykazać, i nie jest to wcale trudne, że zbiory  $X$  i  $Y$  w przykładzie pierwszym oraz  $[0, 2\pi)$  i  $S$  w przykładzie drugim nie są homeomorficzne (rzecz jasna, pokazanie bijekcji ciągłej, która nie jest homeomorfizmem, wcale do tego celu nie wystarcza).



Przychodzi na myśl naturalne pytanie. Załóżmy, że mamy takie zbiory  $A$  i  $B$ , że istnieją: bijekcja ciągła przekształcająca  $A$  na  $B$  i bijekcja ciągła zbioru  $B$  na  $A$ . Czy z tego wynika, że  $A$  i  $B$  są homeomorficzne?

Odpowiedź jest negatywna, ale znalezienie odpowiedniego przykładu wcale nie jest proste... Napiszemy tu o dwóch takich parach.

**Grzegorz z Legnicy.** Pana niepokój jest zupełnie nieuzasadniony. Może Pan spokojnie przesłać swoją pracę do któregoś z matematycznych czasopism, na pewno nikt z redaktorów nie „przywłaszczy” sobie rezultatów. Deponowanie pracy w zalakowanej kopercie u notariusza jest absolutnie zbędne.

**A. J.** Prosimy o cierpliwość w oczekiwaniu na ocenę Pańskiego artykułu; jesteśmy dopiero przy lekturze 10587. strony maszynopisu.

**Leonard A., student.** Kolega ma rację; istotnie, gdy Galois był w Pana wieku, to nie żył już od trzech lat. Nie przekreśla to jednak Pana szans na zostanie sławnym matematykiem.

**Eugeniusz Bazia, Warszawa.** Nie wiemy, czy nadesłana przez Pana historia o matematykach jest autentyczna i – ewentualnie – kogo dotyczy. Szczerze mówiąc, słyszeliśmy ją wcześniej o prawnikach. Anegdota nam się podoba, więc umieszczamy ją w *EPSILONIE* (poniżej).

*Młody matematyk pojechał na pierwszą w życiu konferencję, gdzie wygłosił referat. Wśród słuchaczy dostrzegł swojego wykładowcę z wczesnych lat studenckich. Po referacie podszedł do niego i zapytał:*

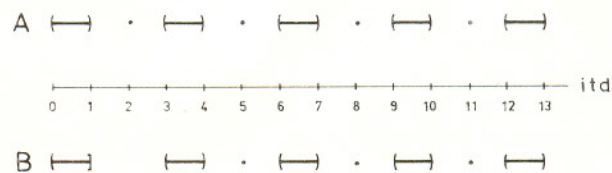
*– No i jak wyszło – Panie kolego?*

*Starszy matematyk popatrzył na niego i odpowiedział:*

*– To już lepiej mów mi „ty”.*

Zbiory te zostały wymyślone przez Paula Halmosa i Ralpha Focha w latach pięćdziesiątych (choć matematycy ci wcale nie są przekonani, że nikt nie wpadł na podobny pomysł przed nimi). Pierwszy kontrprzykład jest wyjątkowo elementarny, gdyż dotyczy podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych.

Rozważmy zbiory  $A$  i  $B$  pokazane na rysunku.



Można zapisać, że

$$A = (0, 1) \cup \{2\} \cup (3, 4) \cup \{5\} \cup (6, 7) \cup \{8\} \cup \dots$$

zaś

$$B = (A \setminus \{2\}) \cup \{1\}.$$

Odpowiednim odwzorowaniem ciągłym z  $A$  na  $B$  jest funkcja, która dwójce przyporządkowuje jedynkę, resztę zaś pozostawia bez zmian (dokleja pierwszy „samotny” punkt do pierwszego przedziału). W drugą stronę – doklejamy drugi przedział do pierwszego, „ściskamy” (innymi słowy,  $x \rightarrow x/2$  – aby otrzymać  $(0, 1)$ , nie zaś  $(0, 2)$ ), a wszystkie pozostałe punkty przesuwamy o 3 w lewo. Czytelnik zechce zapisać te funkcje wzorami.

Zbiory  $A$  i  $B$  nie są jednak homeomorficzne...

cdn.\*

\*To nie jest „c.n.d.”, choć w wielu podręcznikach ów skrót pojawia się w takich właśnie miejscach, lecz „cdn.”.