

# SPIS TREŚCI

## NUMERU 11(210)

O zasadzie najmniejszego działania <i>Paweł Krawczyk</i>	str. 1
Siły pływowe na Ziemi i w Układzie Słonecznym <i>Andrzej Krasniński</i>	str. 1
Teleologia i determinizm <i>Stanisław Mrówczyński</i>	str. 4
A jednak elementarnie...	str. 5
Jabłko Demokryta <i>Kazimierz Mikulski</i>	str. 6
Zadanie Napoleona <i>Edmund Puczyłowski</i>	str. 8
Patrz w niebo	str. 10
Epsilon	str. 11
Tylko prędkości radialne <i>Tomasz Kwast</i>	str. 12
Kwadratura koła, czyli jak zostać milionerem <i>Piotr Hajłasz</i>	str. 14
Klub 44	str. 16
Zadania	str. 17
Korespondencja komputerowa	str. 17

**W następnym numerze:**

**Ziemia**

„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astrofizyczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Edukacji Narodowej

### Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula  
Bogdan Cichocki  
Roman Duda  
Jan A. Gaj  
Tomasz Hofmokl – wiceprzewodniczący  
Tadeusz Jarzębowski  
Marcin Kubiak  
Andrzej Mąkowski  
Andrzej Pelczar  
Zbigniew Płochocki  
Zdzisław Pogoda  
Konrad Rudnicki  
Zbigniew Semadeni  
Grzegorz Sitarski  
Józef I. Smak  
Kazimierz Stępień  
Mieczysław Subotowicz  
Andrzej Szymacha  
Aniela Wolska  
Andrzej Woźszyk  
Wojciech Żakowski – przewodniczący

### WARUNKI PRENUMERATY

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 1992 r. wynosi 8 400,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
  - oddziały RSW właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora
  - odbioru zamówionych egzemplarzy dokonuje prenumerator w wyznaczonych punktach sprzedaży lub w inny, uzgodniony sposób,
  - urzędy pocztowe i listonosze – od prenumeratorów z terenów wiejskich lub innych miejscowości, w których nie ma oddziałów RSW, a w miastach tylko od osób niepełnosprawnych – poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pod wskazany adres pod warunkiem uiszczenia dodatkowej opłaty za każdy doręczany egzemplarz – opłata wynosi 500,- zł od egzemplarza,
  - Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – tylko od prenumeratorów zlecających dostawę za granicę.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
  - na kraj – do 20 XI na I kwartał roku następnego  
do 20 II na II kwartał  
do 20 V na III kwartał  
do 20 VIII na IV kwartał
  - na zagranicę – do 31 X na I kwartał  
oraz do 1 dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 8 000,-

Redaguje kolegium w składzie:  
Krzysztof Biesaga  
Piotr Hajłasz  
Krystyna Kordos – sekr. red.  
Marek Kordos – red. nac.  
Paweł Krawczyk – z-ca red. nac.  
Tomasz Kwast  
Stanisław Mrówczyński  
Anna Rudnik  
Joanna Udalska

### Adres Redakcji:

Centrum Informatyczne UW  
Krakowskie Przedmieście 26/28  
00-927 Warszawa  
tel. 20-03-81 wewn. 841

Adres poczty komputerowej  
(E-mail address):  
DELTA@PLEARN.BITNET

### Wydawca:

Uniwersytet Warszawski  
Krakowskie Przedmieście 26/28  
00-927 Warszawa

Nakład 10 000 egz.  
Wydrukowano  
w Zakładach Graficznych  
w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem TeX  
wykonała redakcja.

# O zasadzie najmniejszego działania

Paweł KRAWCZYK

Bloczki, równie pochyłe, wahadła, baki – oto, z czym zwykle kojarzy się zwrot „mechanika klasyczna”. Czy może być coś interesującego w zagadnieniach tego typu? Czy może być interesująca dziedzina systematycznie badana od trzystu lat, dziedzina, w której chyba wszystkie dające się rozwiązać problemy dawno już rozwiązano?

A jednak... Czytelnik byłby zapewne zdziwiony mnogością podręczników z mechaniki klasycznej i to nie tylko tych szacownych, istniejących już od dziesiątków lat, ale też i tych nowych, napisanych ostatnio. Nie jest to bynajmniej przejaw akademickiego zaślepienia ich autorów, którzy poza ukochaną dziedziną nie dostrzegają interesujących tematów. Co prawda, mechanika potrafi urzec swą matematyczną strukturą, precyzją twierdzeń i wielością sformułowań. Nie jest to jednak najistotniejsze. Rzecz raczej w odniesieniu mechaniki do innych dziedzin fizyki, szczególnie tych, które wciąż jeszcze są tworzone. Niektóre bowiem z formalizmów mechaniki klasycznej dają się w naturalny sposób uogólnić i stają się punktem wyjścia dla budowy i opisu nowych działów fizyki. Aktualny stan badań w pozornie nie związanej z mechaniką dziedzinie może więc rzucić nowe światło na mechanikę, zmieniając nasze wyobrażenia o tym, co jest w niej mniej lub bardziej ważne. I to jest bodaj główna przyczyna powstawania wciąż nowych podręczników tej klasycznej już wiedzy.

Przez wiele lat ulubioną metodą fizyków kwantowych, zaczerpniętą z mechaniki klasycznej, był tzw. formalizm kanoniczny. Jednakże osiągnięcia ostatniego dwudziestolecia w teorii cząstek elementarnych i kwantowej teorii pola przywróciły nadszarpnięty autorytet intuicyjnie łatwiejszemu i historycznie wcześniejszemu formalizmowi lagranżowskiemu. Opis niektórych jego aspektów jest tematem naszego artykułu. Notabene, w dziedzinach takich, jak klasyczna teoria pola, podejście lagranżowskie nigdy nie utraciło „palmy pierwszeństwa”.

Wszyscy Czytelnicy *Delty* wiedzą, że mechanikę klasyczną (punktów materialnych) można ująć w formie trzech zasad dynamiki Newtona. Nie jest to jednak sformułowanie jedyne, a nawet – w wielu przypadkach – najwygodniejsze. W naszych rozważaniach oprzemy się na alternatywnym sformułowaniu zwanym zasadą najmniejszego działania.

Rozważmy punkt materialny, którego położenie w dowolnej chwili możemy scharakteryzować przez podanie wektora wodzącego  $\vec{r}$ . Dowolną funkcję czasu,  $\vec{r}(t)$ , nazwiemy trajektorią tego punktu (ponieważ nie orzekamy, czy taka właśnie funkcja czasu realizowana jest podczas ruchu, czy też nie, moglibyśmy również mówić o trajektoriach możliwych). Jeżeli w chwili  $t_A$  punkt materialny znajdował się w punkcie  $A$  (o wektorze wodzącym  $\vec{r}_A$ ), zaś w chwili  $t_B$  znajdzie się w pewnym dowolnym punkcie  $B$  (o wektorze wodzącym  $\vec{r}_B$ ), to zasada najmniejszego działania stwierdza, że w czasie ruchu realizowana jest ta spośród wszystkich możliwych trajektorii spełniających warunek

$$\vec{r}(t_A) = \vec{r}_A, \quad \vec{r}(t_B) = \vec{r}_B,$$

dla której uśredniona względem czasu i pomnożona przez  $(t_B - t_A)$  różnica między energią kinetyczną i potencjalną jest minimalna.

Zasada najmniejszego działania należy do najogólniejszych zasad fizyki teoretycznej. Czytelnik może znaleźć więcej informacji o niej w znakomitych *Feynmana wykładach z fizyki*, t. II, cz. 1. Pisaliśmy o niej również w *Delcie* 6/1985.

Dla porządku dodajmy, że tak naprawdę trajektorie muszą spełniać pewne dodatkowe warunki, jak np. różniczkowalność, w pewnych zaś patologicznych przypadkach działanie – bo tak właśnie nazywa się średnia różnica energii kinetycznej i potencjalnej pomnożona przez czas ruchu – nie jest minimalne, lecz na odwrót – maksymalne. Są to jednak komplikacje, o których możemy spokojnie zapomnieć.

# Siły pływowe na Ziemi i w Układzie Słonecznym

Andrzej KRASIŃSKI

## 1. Siły bezwładności.

Wszystko, co trzeba wiedzieć o siłach bezwładności, aby zrozumieć dalszy ciąg artykułu, można znaleźć w moim artykule w *Delcie* 3/1980. Przypomnijmy więc tylko podstawowe fakty w skrócie.

Pierwsze prawo dynamiki Newtona mówi, że ciało, na które nie działają żadne oddziaływania zewnętrzne, będzie poruszało się ruchem jednostajnym prostoliniowym albo pozostawało w spoczynku. Stwierdzenie to jest w gruncie rzeczy definicją pewnej klasy układów odniesienia zwanych **układami inercjalnymi**, założeniem zaś mechaniki Newtona jest, że takie układy odniesienia istnieją. Nasze otoczenie jest przeniknięte siłami grawitacyjnymi Ziemi i sąsiednich obiektów astronomicznych i nie jest wcale oczywiste, gdzie należałoby szukać układów inercjalnych.

W układzie, który nie jest inercjalny, ciała niekoniecznie będą poruszały się po liniach prostych albo ze stałymi prędkościami, mogą one doświadczać niespodziewanych zmian kierunku lub przyspieszeń. Przykładem układu nieinercjalnego jest wnętrze autobusu (zakładamy na chwilę, że powierzchnia Ziemi jest układem inercjalnym – wrócimy jeszcze do tego problemu). W przyspieszającym autobusie pasażerowie czują siłę ciągnącą ich do tyłu, w hamującym autobusie pewna siła pcha ich do przodu, na zakręcie zaś podobna siła usiłuje wypchnąć ich na zewnątrz zakrętu. Narciarz rozpoczynający zjazd musi wychylić się do przodu, aby nie upaść na plecy pod wpływem siły, która nie działała na niego, dopóki stał w miejscu. Siły, pojawiające się w układach odniesienia poruszających się ruchem przyspieszonym, są nazywane **siłami bezwładności**. W układzie poruszającym się z przyspieszeniem  $\vec{a}$  siła bezwładności jest równa  $-m\vec{a}$ , gdzie  $m$  jest masą ciała doświadczającego przyspieszenia. Proszę zauważyć, że siła bezwładności ma zwrot przeciwny do wywołującego ją przyspieszenia.

Wyobraźmy sobie teraz ciało o masie  $m$  spadające swobodnie w polu grawitacyjnym o natężeniu  $\vec{g}$ . Siła grawitacyjna działająca na to ciało jest wtedy równa  $m\vec{g}$ , przyspieszenie w spadku swobodnym wynosi  $\vec{g}$ , siła bezwładności wynosi więc  $-m\vec{g}$ , zatem siła wypadkowa działająca na ciało, mierzona w układzie odniesienia spadającym wraz z badanym ciałem, wynosi  $m\vec{g} - m\vec{g} = 0$ . Ciało spadające swobodnie nie doświadcza więc żadnych sił i jest jedną z możliwych realizacji układu inercjalnego. Zauważmy jednak, że taki układ (nazywany **lokalnym układem inercjalnym**) przestaje być inercjalny w dużych odległościach od swobodnie spadającego ciała. Wystarczy wyobrazić sobie dwa obiekty swobodnie spadające po przeciwnych stronach Ziemi. Każdy z tych obiektów będzie miał niezerowe przyspieszenie względem drugiego, a więc nie będą one dla siebie nawzajem inercjalnymi układami odniesienia.

Jak duży jest lokalny układ inercjalny? Wyobraźmy sobie na chwilę jednorodne pole grawitacyjne (jest to obiekt nieistniejący w realnym świecie). Jego natężenie  $\vec{g}$  jest wszędzie takie samo, a więc jakiegokolwiek dwa swobodnie spadające ciała będą poruszały się z takim samym przyspieszeniem  $\vec{g}$ . Względne przyspieszenie tych dwu ciał będzie więc równe zeru, czyli będą poruszać się jedno względem drugiego po linii prostej ze stałą prędkością. Widać stąd, że układ odniesienia związany ze swobodnie spadającym ciałem jest układem inercjalnym w całym obszarze, w którym pole grawitacyjne można uważać za jednorodne.

Rzeczywiste pola grawitacyjne, występujące w przyrodzie, nie są jednorodne. Ich linie sił są zbieżne, a natężenie pola grawitacyjnego zmienia się wzdłuż nich (rośnie w kierunku źródła). Lokalny układ inercjalny jest więc ściśle inercjalny tylko wzdłuż każdego pojedynczego toru spadku swobodnego, i jest w przybliżeniu inercjalny w takim otoczeniu owego toru, w którym zbieżność linii sił jest zaniedbywalnie mała (na przykład, nie może być zmierzona przyrządem pomiarowym o danej dokładności – należy pamiętać, że wielkość układu lokalnego zawsze będzie zależała od dokładności naszych pomiarów).

Zauważmy, że znoszenie sił grawitacyjnych przez siły bezwładności zachodzi nie tylko dla ciał spadających wprost ku środkowi Ziemi. Zachodzi ono także na orbitach

Najkrótsza nawet chwila namysłu nad zasadą najmniejszego działania wskazuje, że stanowi ona sformułowanie mechaniki zgoła zdumiewające. Po pierwsze, różni się ona drastycznie od zasad Newtona i nie jest bynajmniej oczywiste, że obydwa sformułowania są równoważne. Spróbujmy więc wyprowadzić drugą zasadę dynamiki z zasady najmniejszego działania. Nie jest to łatwe, gdyż dziedziną, na której obliczamy działanie, jest zbiór możliwych trajektorii, a więc zbiór funkcji, a nie liczb i nie możemy stosować zwykłych metod szukania ekstremum, o którym mowa w zasadzie. Zaatakujmy więc problem sposobem i podzielmy przedział czasowy  $[t_A, t_B]$  na  $N$  podprzedziałów o tej samej długości  $\Delta t = (t_A - t_B)/N$ . Wyróżniamy w ten sposób na osi czasowej  $N + 1$  równo odległych punktów i zastępujemy uśrednianie energii kinetycznej i potencjalnej względem całego przebiegu czasowego, uśrednianiem względem tych dyskretnych punktów. W celu jeszcze dalszego uproszczenia ograniczymy się wyłącznie do ruchów jednowymiarowych (opisanych zmianami współrzędnej  $x$ ). Jeśli wybraliśmy dostatecznie małe przedziały  $\Delta t$ , to prędkość w  $i$ -tym przedziale jest prawie stała i wynosi w przybliżeniu

$$v_i \simeq \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t},$$

gdzie  $x_i = x(t_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  i  $x_0 = x_A$ ,  $x_N = x_B$ . Energia kinetyczna przybierze więc postać

$$T_i \simeq \frac{m}{2} \left( \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} \right)^2.$$

Pojawia się teraz pytanie, jaką wielkość wziąć za dyskretną reprezentację energii potencjalnej  $V$ . W zwykłym podejściu jest ona ciągłą funkcją położenia  $V = V(x)$ . Od razu nasuwają się więc cztery możliwe sposoby wyboru energii potencjalnej w  $i$ -tym przedziale czasowym:  $V(x_i)$ ,  $V(x_{i-1})$ ,  $V\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)$ ,  $\frac{1}{2}[V(x_i) + V(x_{i-1})]$ . Okazuje się, że każdy z nich może być użyty z równie dobrym skutkiem. Tutaj zdecydujemy się na ostatnią możliwość, gdyż nie narusza ona symetrii między końcowymi punktami przedziału (jak pierwsze dwie) i nie wprowadza nowych punktów (jak trzecia). Po tych rozważaniach jesteśmy gotowi do wypisania przybliżonego wzoru na działanie.

$$\begin{aligned} S &\simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{m}{2} \left( \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} \right)^2 - \frac{1}{2}[V(x_i) + V(x_{i-1})] \right\} \cdot (t_A - t_B) = \\ &= \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{m}{2} \left( \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} \right)^2 - \frac{1}{2}[V(x_i) + V(x_{i-1})] \right\} \cdot \Delta t. \end{aligned}$$

Przybliżenie nasze jest tym lepsze, im mniej zmienia się na każdym z małych przedziałów  $\Delta t$  prawdziwa wartość energii kinetycznej i potencjalnej, a więc powinno się poprawiać, gdy  $N$  rośnie. W granicy  $N \rightarrow \infty$  ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) otrzymujemy prawdziwą wartość działania.

„Wtajemniczeni” bez trudu spostrzegą, że w granicy  $N \rightarrow \infty$  nasze wyrażenie na działanie staje się całką Riemanna postaci

$$S = \int_{t_A}^{t_B} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right] dt.$$

Funkcja podcałkowa jest równie ważnym obiektem co działanie i nosi nazwę lagranżjanu.

W ujęciu dyskretnym trajektoria staje się po prostu zbiorem liczb  $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ . Tym samym, działanie możemy uważać teraz za funkcję  $N - 1$  zmiennych  $x_1, \dots, x_{N-1}$  (punkty  $x_0$  i  $x_N$  są ustalone) i względem tych zmiennych przeprowadzić minimalizację  $S$ . Jeśli zasada najmniejszego działania ma być słuszna, to musi zachodzić

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N - 1.$$

Różniczkowanie powyższe łatwo możemy wykonać explicite:  $i$ -ta zmienna występuje jedynie w  $i$ -tym i  $i+1$ -szym składniku sumy określającej  $S$ . A zatem dostaniemy

$$m \cdot \frac{(x_i - x_{i-1}) - (x_{i+1} - x_i)}{(\Delta t)^2} - \frac{dV}{dx} \Big|_{x=x_i} = 0.$$

Nietrudno zauważyć, że w granicy  $\Delta t \rightarrow 0$  wzór powyższy przybiera postać

$$-m \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dV}{dx} = 0,$$

a ponieważ przyspieszenie definiujemy jako drugą pochodną położenia i z definicji energii potencjalnej wynika, że  $-\frac{dV}{dx}$  jest po prostu siłą, tym samym wzór powyższy pokrywa się z drugą zasadą dynamiki Newtona.

Zaprezentowanemu wywodowi drugiej zasady dynamiki z zasady najmniejszego działania daleko jest do matematycznej ścisłości. Zauważmy jednak, że uwaga ta nie dotyczy wspomnianej możliwości, iż działanie staje się maksymalne, a nie minimalne. Żądaliśmy bowiem jedynie znikania pochodnej  $\frac{\delta S}{\delta x_i}$ , co obejmuje obydwie przypadki, jak również możliwość istnienia punktu stacjonarnego (co czasem też się zdarza).

Co z pozostałymi zasadami? – zapyta Czytelnik. Cóż, pierwszą z nich przemyciliśmy formułując zasadę najmniejszego działania – zasada wymaga podania wzoru na energię kinetyczną. Powiedzenie, że ten wzór to  $\frac{1}{2}mv^2$ , jest słuszne jedynie w układzie inercyjnym. Wtedy też dostajemy ruch jednostajny prostoliniowy. Jeżeli chodzi o trzecią zasadę dynamiki, to orzeka ona o siłach działających pomiędzy ciałami, wymaga więc wyjścia poza mechanikę punktu materialnego, czego w tym artykule nie robimy. Ale również trzecia zasada dynamiki znajduje w przedstawionym formalizmie swój wyraz.

Trzecia zasada dynamiki wiąże ze sobą siłę  $\vec{F}_{AB}$ , z jaką punkt  $B$  działa na punkt  $A$ , z siłą  $\vec{F}_{BA} (= -\vec{F}_{AB})$ , z jaką punkt  $A$  działa na  $B$ . Ograniczmy się do układu dwóch punktów materialnych. Działanie w tym przypadku nadal określamy jako średnią czasową różnicę energii kinetycznej i potencjalnej (całkowitych). Trzecią zasadę dynamiki odtworzymy zakładając, że energia potencjalna zależy nie od indywidualnych położenia, lecz jedynie od ich różnic.

Druga zasada dynamiki wiąże ze sobą przyczynę (siłę) i skutek (przyspieszenie) i na tej podstawie pozwala – przy znajomości położenia i prędkości w pewnej chwili – określić położenie i prędkość w chwili następnej. Ruch w tym opisie składa się z wielkiej liczby małych kroczków powiązanych związkiem przyczynowo-skutkowym. Inaczej jest w zasadzie najmniejszego działania. Tam, poruszająca się cząstka w jakiś sposób „wie” od samego początku, jak ma się poruszać w przeciągu całego trwania ruchu, „przeczuwa”, że ruch nie zostanie przerwany aż do osiągnięcia swego celu. Nie może na początku biec zbyt wolno, bo w końcowej fazie wymagałoby to nadmiernych prędkości i – co za tym idzie – nieminimalnej wartości działania. Interpretację taką jest niezmiernie trudno pogodzić z przyczynowym (kausalnym) opisem świata, który przecież leży u podstaw fizyki! Fakt ten sugeruje, że mechanika klasyczna nie jest teorią pełną (choć nie ma tu żadnej wewnętrznej sprzeczności o charakterze formalnym). I ta właśnie obserwacja może posłużyć do rozwinięcia pewnego sformułowania mechaniki kwantowej.

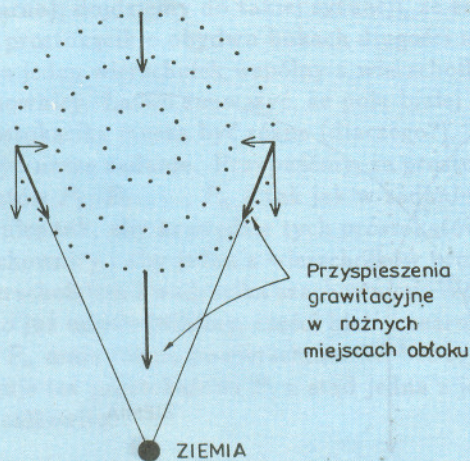
kołowych, w tym przypadku siła grawitacji  $m\vec{g}$  jest równoważona przez siłę odśrodkową  $mv^2/r = mg$ , gdzie  $m$  jest masą obiektu krążącego po orbicie,  $v$  – jego prędkością,  $r$  – odległością od środka Ziemi. Siła odśrodkowa jest siłą bezwładności wywołaną przez przyspieszenie  $\vec{g}$  odchylające tor ciała od linii prostej. Na orbicie eliptycznej ruch ciała jest złożeniem ruchu obiegowego oraz spadku swobodnego (lub swobodnego ruchu w górę – siła grawitacji zmniejsza wtedy prędkość), również wtedy siła grawitacyjna jest znoszona przez siły bezwładności, chociaż rachunek byłby trochę bardziej skomplikowany.

## 2. Siły pływowe.

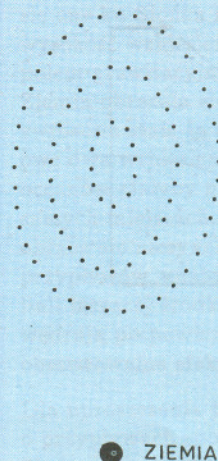
Wyobraźmy sobie kulisty obłok złożony z małych obiektów, nie oddziałujących na siebie żadnymi siłami (zapomnijmy na chwilę o ich wzajemnym przyciąganiu grawitacyjnym) i spadający swobodnie w polu grawitacyjnym bardzo dużego obiektu (np. Ziemi) wprost ku jego środkowi, z prędkością początkową równą zeru (rys. 1a). Przypomnijmy wzór na przyspieszenie grawitacyjne:

$$\vec{g} = -\frac{GM\vec{r}}{r^3},$$

gdzie  $G$  – stała grawitacyjna,  $M$  – masa Ziemi,  $r$  – odległość obiektu od Ziemi. Ponieważ obiekty znajdujące się w „górnjej” („tylnej”?) części obłoku są zawsze dalej od Ziemi niż obiekty w dolnej części obłoku, przyspieszenie tylnej części będzie zawsze mniejsze od przyspieszenia przedniej części. Ta różnica przyspieszeń wywoła różnicę w prędkościach, stale narastającą. W rezultacie dolna część obłoku będzie oddalała się od górnej. Równocześnie przyspieszenia bocznych



Rys. 1a.  
Obłok swobodnie spadających obiektów, w chwili początkowej mający kształt kulisty...



Rys. 1b.  
...wydłużą się podczas lotu i zwężą wskutek różnic w natężeniu pola grawitacyjnego w sąsiednich punktach.

### komentarz do artykułu *O zasadzie najmniejszego działania*

Po raz kolejny dwóch fizyków z redakcji *Delty* nie może dojść do porozumienia. Tym razem przyczyna niezgody jest dość typowa – różnice w interpretacji rezultatu formalnego, a mianowicie równoważności zasady najmniejszego działania i zasad dynamiki Newtona.

Opis układu oparty na równaniu różniczkowym, wyrażającym drugą zasadę dynamiki, ma wyraźnie charakter deterministyczny, tzn. ewolucja układu przedstawia się jako łańcuch przyczyn i skutków. Przy zastosowaniu natomiast zasady najmniejszego działania ujawnia się, by użyć terminu filozoficznego, teleologiczny bądź finalistyczny charakter ewolucji, tzn. układ dąży do określonego celu, w tym przypadku do zminimalizowania wielkości zwanej działaniem. Tę drugą, teleologiczną interpretację uważa mój adwersarz za podejrzaną i w związku z tym sugeruje, że mechanika klasyczna jest „teorią niepełną”. Nie zgadzam się z takim poglądem. Obie interpretacje, deterministyczną i teleologiczną, uważam za całkowicie równoprawne.

Filozofowie od wieków toczą dysputę o prawach rządzących światem. Materialiści stoją zwykle na gruncie determinizmu, podczas gdy idealiści często optują za teleologią, choć cel inny niż minimalizowanie działania mają na myśli. Fizyka w odróżnieniu od filozofii dysponuje aparatem formalnym podsunętym przez matematykę i wypracowaną metodologią badań doświadczalnych. Dzięki temu nie tylko stawia pytania, ale potrafi udzielać odpowiedzi. Pytania są zwykle dużo prostsze niż te rozważane przez filozofów, zamiast bytu czy nicości mamy układ punktów materialnych lub równie pochyłą, za to odpowiedzi bywają całkiem precyzyjne.

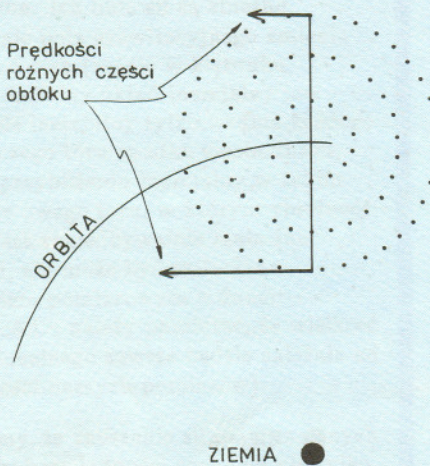
Zasada najmniejszego działania wydaje się nie mieć wiele wspólnego z zasadami dynamiki Newtona, a jednak oba podejścia są całkowicie równoważne. (Pomijam tu sztuczki matematyków, którzy zapewne bez kłopotu znajdą taką klasę *niefizycznych* ruchów, że dyskutowane podejścia nie będą równoważne). Jeśli już równoważność została udowodniona, to nie ma sensu twierdzić, że jedna interpretacja jest słuszna i prawidłowa, podczas gdy druga podejrzana bądź przypadkowa. Równoważność oznacza, według mnie, że różnica jest pozorna, że zespół pojęć, jakim operujemy, w tym przypadku determinizm i teleologia, jest nie zawsze adekwatny do opisu rzeczywistości. W fizyce z taką sytuacją spotykamy się wielokrotnie, szczególnie w mechanice kwantowej, gdzie mamy słynny dualizm korpuskularno-falowy, który sprawia, że obiekt kwantowy zachowuje się jednocześnie jak cząstka i jak fala. Używając znanych nam z życia codziennego pojęć fali i cząstki zrozumieć tego nie sposób, lecz Natura tym się nie przejmuje. I podobnie jest, jak sądzę, z determinizmem i teleologią, czyli w naszym przypadku z zasadami dynamiki Newtona i zasadą najmniejszego działania. Zauważmy, że zarówno w przypadku wspomnianego dualizmu, jak i dyskutowanej równoważności zasad ruchu, strona formalna zagadnień nie budzi kontrowersji.

Stanisław MRÓWCZYŃSKI

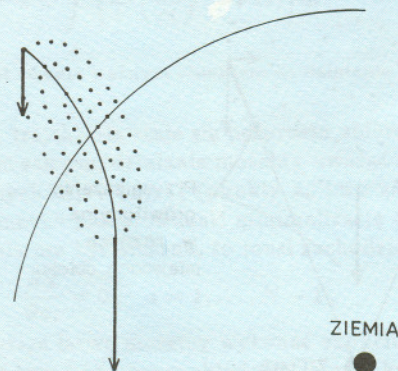
części obłoku nie będą równoległe, lecz nachylone ku sobie (są one wszystkie skierowane ku środkowi Ziemi). Będą więc miały małe składowe, skierowane ku środkowi obłoku, i boki obłoku będą powoli zbliżały się do siebie. Widać stąd, że różnice w natężeniu pola grawitacyjnego w sąsiednich punktach spowodują deformację obłoku. Będzie on rozciągany w kierunku środka Ziemi i ściskany w kierunkach prostopadłych, zmieniając kształt z kulistego na wrzecionowaty (rys. 1b).

Te różnice w natężeniu pola grawitacyjnego nazywane są **siłami pływowymi**. Przy ich obliczaniu odejmuje się wartości składowych siły grawitacyjnej po przeciwnych stronach badanego obiektu (w powyższym przykładzie był to spadający obłok). Wynik tego obliczenia nie może być zakodowany jako wektor, ponieważ składa się on z 9 liczb – jest to macierz; nie będziemy się dalej zajmowali szczegółami matematycznymi, ale trzeba wiedzieć, że mówimy tu o innym pojęciu niż zwyczajna siła wektorowa.

Obłok poruszający się po orbicie kołowej ulegnie podobnej deformacji (rys. 2a i 2b). Można łatwo obliczyć (np. z drugiego prawa Keplera), że obiekty dalsze od Ziemi poruszają się po orbicie z mniejszą prędkością niż obiekty bliższe. „Dolna” część obłoku będzie więc stale wyprzedzała część górną, i jeśli w chwili początkowej obłok będzie kulisty, to po pewnym czasie przybierze kształt podobny do banana (ponieważ różnica prędkości nie jest proporcjonalna do różnicy odległości od Ziemi, obiekty leżące początkowo na odcinku prostej utworzą później łuk krzywej).



Rys. 2a.  
Obłok poruszający się po orbicie, początkowo kulisty...

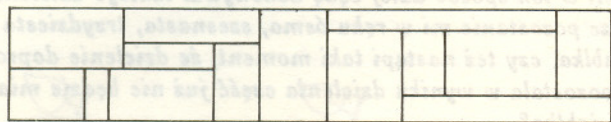


Rys. 2b.  
... również zostanie zdeformowany wskutek różnych prędkości orbitalnych różnych części obłoku (spowodowanych różnicami w natężeniu pola grawitacyjnego).

## A jednak elementarnie ...

W *Delcie* 9/1991 w niezależnym dodatku *EPSILON* zostało rozwiązane nieelementarnie (za pomocą całek podwójnych z funkcji zespolonej!) następujące zadanie.

*Prostokąt  $P$  dzielimy na skończoną liczbę mniejszych prostokątów (w ten sposób, że dowolne dwa z nich mogą zahaczać o siebie jedynie bokami – porównaj z rysunkiem). Załóżmy, że każdy z mniejszych prostokątów ma przynajmniej jeden bok o długości będącej liczbą całkowitą. Udowodnić, że prostokąt  $P$  ma bok o długości będącej liczbą całkowitą.*



Redakcja *EPSILONA* zaznaczyła, że nie zna elementarnego rozwiązania. Co więcej, zadanie to było dyskutowane na pewnej międzynarodowej konferencji i tam też nikt nie znalazł elementarnego rozwiązania. Natomiast pan Marcin Mazur zwrócił nam uwagę, że elementarne rozwiązanie tego zadania znajduje się w zbiorze *Зарубежные математические олимпиады* (wyd. Moskwa 1987) – zadanie 16.25.

Poniżej przytaczamy szkic tego rozwiązania. Wyobraźmy sobie, że płaszczyzna jest nieskończoną szachownicą (pomalowaną na czarno-biało w standardowy sposób), przy czym kwadraciki, z których zbudowana jest ta szachownica, mają krawędzie długości  $1/2$ . Jeżeli teraz weźmiemy dowolny prostokąt o krawędziach równoległych do linii szachownicy, mający jeden bok o długości całkowitej, to, jak łatwo zauważyć, powierzchnia jego białej części będzie równa powierzchni jego części czarnej (dlaczego?). Jeżeli natomiast weźmiemy dowolny prostokąt o krawędziach równoległych do linii szachownicy, mający jeden z wierzchołków wspólny z wierzchołkiem jakiegoś kwadracika i jeżeli wiemy, że powierzchnia jego białej części jest taka sama jak powierzchnia jego części czarnej, to stąd już wynika, że jeden z boków ma długość całkowitą. Jeżeli bowiem żaden z boków nie ma długości całkowitej, to odcinając odpowiednie prostokąty, których co najmniej jeden z boków ma długość całkowitą (dla nich część biała ma takie samo pole jak część czarna), dojdziemy do takiej sytuacji, że zostanie nam mały prostokąt o obydwu bokach długości mniejszej niż 1, który ma jeden wierzchołek wspólny z wierzchołkiem kwadracika na szachownicy. Łatwo zauważyć, że pola białej i czarnej części tego prostokątka muszą być różne (dlaczego?). Teraz już możemy dokończyć nasze zadanie. Przypuśćmy, że prostokąt  $P$  jest sumą prostokątów  $P_1, P_2, \dots, P_n$  – tak jak w zadaniu. Usytuujmy naszą szachownicę tak, aby krawędzie tych prostokątów były równoległe do linii szachownicy i aby jeden z wierzchołków prostokąta  $P$  pokrywał się z wierzchołkiem kwadracika szachownicy. Wówczas, zgodnie z tym, co już udowodniliśmy, części białe i czarne prostokątów  $P_1, P_2, \dots, P_n$  mają równe powierzchnie. Wobec tego ta własność przysługuje też prostokątowi  $P$ , a stąd jedna z jego krawędzi ma długość całkowitą.

Zauważmy, że powyższy dowód uogólnia się na przypadek trójwymiarowy, gdzie prostokąty zastępujemy prostopadłościanami (proszę sformułować i udowodnić odpowiednie twierdzenie).

Piotr HAJŁASZ

Na orbicie eliptycznej deformacja obłoku będzie kombinacją opisanych tu efektów.

W tym miejscu Czytelnik wie już wystarczająco dużo, aby zrozumieć, jak powstają przypiływy na Ziemi i na innych ciałach niebieskich.

### 3. Przypiływy na Ziemi.

Mechanizm przypiływów oceanicznych na Ziemi jest skomplikowany, ponieważ Ziemia jest dość mocno związana swoim własnym polem grawitacyjnym (nie jest obłokiem swobodnie poruszających się obiektów), a ponadto skorupa ziemską jest ciałem stałym o dużej sztywności. Różne części Ziemi nie poruszają się więc niezależnie w polu grawitacyjnym Słońca. Przedstawione powyżej rozumowanie pozwala jednak na jakościowe zrozumienie tego procesu.

Będąc ciałem prawie sztywnym cała Ziemia jest przymuszana do ruchu po orbicie z tą samą prędkością. Jednakże, część Ziemi znajdująca się bliżej Słońca, gdyby mogła, poruszałaby się szybciej niż środek Ziemi (z drugiego prawa Keplera) – porusza się więc z prędkością mniejszą od jej właściwej prędkości orbitalnej. Powoduje to nadwyżkę siły ciężenia nad siłą odśrodkową – na tę część Ziemi działa siła odciągająca ją ku Słońcu, od środka Ziemi. Część Ziemi znajdująca się dalej od Słońca, gdyby mogła, poruszałaby się po orbicie wolniej niż środek Ziemi, jest więc przymuszana do ruchu „zbyt szybkiego”. To z kolei wywołuje nadwyżkę siły odśrodkowej nad siłą ciężenia – na tę część Ziemi działa więc siła odciągająca ją od Słońca, znów od środka Ziemi.

Jedyną częścią powierzchni Ziemi, która może w widoczny sposób poddać się tym siłom, są masy wody w oceanach. Wznoszą się one ku Słońcu i w dal od Słońca, wysokość wzniesienia jest ograniczana polem grawitacyjnym Ziemi. Gdyby Ziemia obracała się synchronicznie, zwrócona stale tą samą stroną ku Słońcu, owe dwa wzniesienia na powierzchni oceanów stałyby nieruchomo stale w tych samych miejscach. Ponieważ Ziemia obraca się niesynchronicznie, wzniesienia przypiływów, znajdujące się zawsze na linii łączącej środka Słońca i Ziemi, wędrują po powierzchni Ziemi powodując obserwowalne efekty na wybrzeżach.

Dla uproszczenia mówiliśmy tu o przypiływach spowodowanych przez Słońce. W rzeczywistości na Ziemię działa także przyciąganie grawitacyjne Księżyca. Ponieważ Księżyc jest znacznie bliżej, niejednorodność jego pola grawitacyjnego

(zbieżność linii sił) jest większa niż w przypadku Słońca i przyprływy spowodowane przez Księżyc są wyższe. Na otwartym oceanie różnice poziomu wody spowodowane przez Słońce wynoszą 35 cm, różnice poziomu spowodowane przez Księżyc wynoszą 65 cm. Te dwie pary fal przyprływowych obiegają Ziemię z różnymi prędkościami (słoneczne w 24 godziny, Księżycowe nieco dłużej – podczas obrotu Ziemi Księżyc przemieszcza się w kierunku obrotu). Dwa razy w ciągu miesiąca synodycznego (podczas nowiu i pełni) fale przyprływów słonecznych i księżycowych pokrywają się i osiągają maksymalną wysokość około 1 metra. W pozostałych okresach w ciągu doby następują po cztery mniejsze przyprływy i odpływy, oddzielone zmieniającymi się odstępami czasu.

Fale przyprływu zalewające wybrzeża oceanów osiągają wysokości znacznie przekraczające 1 metr. Dzieje się tak wtedy, gdy nadbiegająca fala napotyka dno morskie wznoszące się łagodnie w kierunku jej ruchu albo zatokę lejkowato zwężającą się w kierunku ruchu. W zatokach na francuskim brzegu kanału La Manche wysokość fali przyprływu sięga 10 metrów, zaś najwyższe na świecie przyprływy – 16 metrów – notowane są w zatoce Bay of Fundy w południowo-wschodniej Kanadzie.

Zauważmy, że różnice poziomu morza mniejsze niż 1 metr przy średnicy Ziemi, wynoszącej prawie 13 000 km, są bardzo małe. Pola grawitacyjne Słońca i Księżyca są więc z dobrym przybliżeniem jednorodne na całej Ziemi i są całkiem dokładnie znoszone przez przyspieszenia orbitalne Ziemi. Podobnie, pola grawitacyjne naszej Galaktyki i innych galaktyk są znoszone przez siły bezwładności spowodowane ruchem Słońca w Galaktyce i ruchem Galaktyki w Lokalnej Grupie galaktyk. Dlatego układ odniesienia związany ze środkiem Ziemi może być dla wielu celów uważany za inercjalny.

#### 4. Skutki sił pływowych na innych ciałach w Układzie Słonecznym.

W skorupie Ziemi działanie sił pływowych nie daje się zaobserwować, ponieważ na Ziemi siły te są, jak wykazano powyżej, bardzo małe. Można sobie jednak łatwo wyobrazić, że większe siły pływowe, powstające w bardziej niejednorodnym polu grawitacyjnym (np. blisko Słońca albo dużej planety), mogą wznosić garby podobne do przyprływów oceanu także w stałych powierzchniach planet lub księżyców. Zdarza się to rzeczywiście w Układzie Słonecznym.

## Jabłko Demokryta

Kazimierz MIKULSKI

Wśród wielu anegdot i opowieści o starożytnych filozofach jest też i ta o jabłku Demokryta. Głosi ona, że siedząc pewnego razu na kamieniu nad brzegiem morza i trzymając w dłoni jabłko, Demokryt tak rozmyślał:

*Jeżeli to jabłko przetnę na połowę, otrzymam połówkę jabłka. Jeżeli następnie tę połówkę przetnę na dwie części, otrzymam ćwiartkę jabłka. Jeżeli w ten sposób dalej będę dokonywał takiego dzielenia, to czy zawsze pozostanie mi w ręku ósma, szesnasta, trzydziesta druga itd. część jabłka, czy też nastąpi taki moment, że dzielenie doprowadzi do tego, iż pozostała w wyniku dzielenia część już nie będzie miała właściwości jabłka?*

Filozof doszedł do wniosku, że granica owych podziałów istnieje. Swoje spostrzeżenia i wnioski wyłożył w dziele pt. *Mały diakosmos*, a niepodzielną część nazwał „atomem”.

Ilu cię potrzeba, by zamiast jabłka trzymać w ręku atom? Demokryt nie był w stanie odpowiedzieć na to pytanie. Aby to zrobić, musiałby znać rozmiary atomu, a pierwsze informacje na ten temat pojawiły się przeszło dwa tysiące lat po śmierci genialnego Greka.

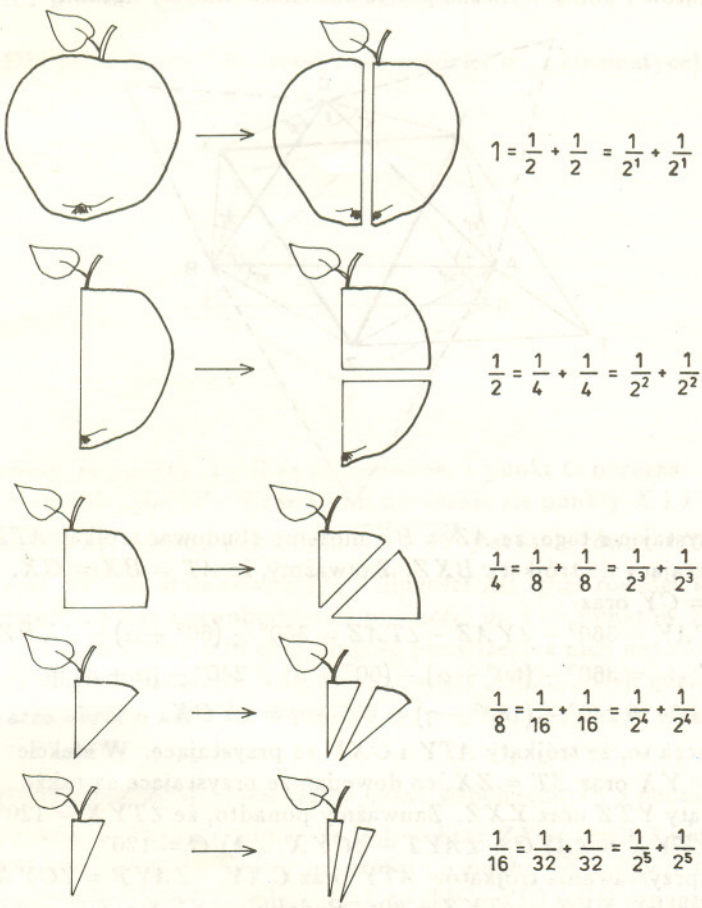
W 1742 r. Michał Wasylewicz Łomonosow (1711 – 1765) zauważył, że jubilerzy rozwałkują złoto do grubości jednej dziesięciotysięcznej części centymetra ( $10^{-4}$  cm), a więc atomy nie mogą być większe. W 1773 r. Benjamin Franklin (1706 – 1790) wykonał już specjalne doświadczenie mające na celu pomiar rozmiarów atomu. Wylał on na powierzchnię wody stawu w Clapham Common łyżkę oleju o objętości około  $4 \text{ cm}^3$  i zmierzył powierzchnię powstającej plamy – wynosiła ona około 0,2 ha, czyli  $2 \cdot 10^7 \text{ cm}^2$ . Dzieląc objętość przez powierzchnię, Franklin otrzymał liczbę  $2 \cdot 10^{-7}$  cm wyznaczającą górną granicę na średnicę „atomu” (dziś powiedzielibyśmy – cząsteczki) oleju.

Doświadczenia z błonkami olejowymi były powtarzane i w późniejszych latach. W swoich rozległych pracach badawczych Michael Faraday (1791 – 1867) wykonał ze złota warstwy o grubości rzędu  $10^{-6}$  cm, a na szkle otrzymał przezroczyste warstewki, wręcz błonki o grubości  $10^{-7}$  cm. Lord John William Strutt Rayleigh (1842 – 1919) otrzymał błonki o grubości 16 Å ( $1 \text{ Å} = 10^{-8}$  cm). Natomiast w 1890 roku Wilhelmowi Conradowi Roentgenowi (1845 – 1923) udało się wytworzyć błonki olejowe o grubości 5 Å, ale jeszcze wcześniej, bo w 1805 roku, Thomas Young (1773 – 1829) badając zjawisko kapilarności oraz napięcia powierzchniowego cieczy wyliczył, że rozmiary badanych atomów są rzędu  $10^{-8}$  cm.

Zupełnie odmienny sposób oszacowania wielkości fizycznych związanych z atomem (w tym i jego rozmiarów) podał w 1865 roku Józef Loschmidt (1821 – 1895). Stwierdził on, wykorzystując teorię molekularno-kinetyczną, która zakładała budowę gazów z poruszających się molekuł, że średnice atomów wynoszą  $10^{-8}$  cm i są prawie jednakowe dla wszystkich znanych atomów.

Dalsze badania nie przyniosły już zasadniczych zmian w obrazie nakreślonym przez Loschmita, choć, oczywiście, precyzja pomiarów rosła z upływem czasu.

Aby odpowiedzieć na postawione wcześniej pytanie o liczbę podziałów jabłka, której musiałby dokonać Demokryt, możemy z powodzeniem przyjąć, że średnica atomu wynosi  $10^{-8}$  cm. Załóżmy, że Demokryt trzymał jabłko będące w przybliżeniu kulą o średnicy  $d$  dziesięć centymetrów, a więc o objętości  $V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 \approx 500 \text{ cm}^3$ . Przy każdym podziale jabłka objętość ta zmniejsza się o połowę (rysunek). Po  $n$ -tym dzieleniu objętość trzymanej części wynosi więc  $V_n = \frac{V}{2^n}$ , przy czym proces dzielenia możemy kontynuować co najwyżej do momentu, gdy  $V_n$  jest równe objętości atomu  $V_a = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{D}{2}\right)^3$ , gdzie  $D = 10^{-8}$  cm. Otrzymujemy stąd  $2^n \approx \left(\frac{d}{D}\right)^3$ , czyli  $n \approx 90$ . Liczba ta jest zaskakująco mała.



Rysunek przedstawia podział jabłka Demokryta. A na ile części Ty, Czytelniku, możesz podzielić jabłko, ile najwięcej wykonasz cięć? Spróbuj.

Na zakończenie dodajmy, że z poglądami Demokryta (znanymi z poematu autorstwa Titusa Lukrecjusza Carusa (99 – 55 p.n.e.) pt. *O naturze wszechrzeczy*), żyjącego w latach około 460 – 370 p.n.e., w jońskiej kolonii Abderze na trackim wybrzeżu Morza Śródziemnego, nie zgadzał się działający niewiele później Arystoteles (384 – 322 p.n.e.), który uważał, że jabłko można dzielić bez końca. Zdanie Arystotelesa zwyciężyło i przez blisko dwa tysiące lat miało w nauce moc obowiązującą. A jednak Demokryt, uważany powszechnie za twórcę pojęcia atomu, nie był w swych poglądach zupełnie osamotniony. Historia wspomina jego nauczyciela, Leukippa z Miletu, oraz czasami fenickiego uczonego, Moscha z Sydonu, a także starochińskiego filozofa Kanadę (samo słowo „Kanada” można tłumaczyć jako „pożeracz atomów”).

Fala przyływu biegnąca po powierzchni ciała stałego wykonuje pracę przy odkształceniu tej powierzchni. Źródłem energii do wykonania tej pracy jest ruch obrotowy ciała (planety lub księżyca). Energia ruchu obrotowego jakiegokolwiek ciała stałego w silnie niejednorodnym polu grawitacyjnym zmniejsza się więc stale dotąd, aż fale przyływu przestaną wędrować po jego powierzchni. Innymi słowy, księżyc lub planeta doświadczająca takich przyływów zwolni swój ruch obrotowy tak, że w końcu będzie zwrócona stale tą samą stroną w kierunku źródła pola grawitacyjnego. Tak właśnie stało się z Księżycem, który jest zwrócony ku Ziemi stale tą samą stroną, i z galileuszowymi satelitami Jowisza.

Można zapytać, dlaczego Księżyc nie zmusił Ziemi do obrotu synchronicznego, mimo że Ziemia zmusiła do tego Księżyc. Aby to wyjaśnić, napiszmy wzór na różnicę przyspieszeń grawitacyjnych wywołaną przez Ziemię po przeciwnych stronach Księżyca:

$$\Delta g_K = GM_Z \left( \frac{1}{(d - r_K)^2} - \frac{1}{(d + r_K)^2} \right) = \frac{4GM_Z d r_K}{(d^2 - r_K^2)^2}$$

gdzie  $M_Z$  jest masą Ziemi,  $d$  – odległością od środka Ziemi do środka Księżyca,  $r_K$  – promieniem Księżyca. Wzór na różnicę przyspieszeń grawitacyjnych po przeciwnych stronach Ziemi wywołaną przez Księżyc jest następujący:

$$\Delta g_Z = GM_K \left( \frac{1}{(d - r_Z)^2} - \frac{1}{(d + r_Z)^2} \right) = \frac{4GM_K d r_Z}{(d^2 - r_Z^2)^2}$$

gdzie  $M_K$  jest masą Księżyca, zaś  $r_Z$  – promieniem Ziemi. Stąd:

$$\frac{\Delta g_K}{\Delta g_Z} = \frac{M_Z}{M_K} \cdot \frac{r_K}{r_Z} \cdot \frac{(d^2 - r_Z^2)^2}{(d^2 - r_K^2)^2} = \frac{M_Z}{M_K} \cdot \frac{r_K}{r_Z} \cdot \frac{(1 - r_Z^2/d^2)^2}{(1 - r_K^2/d^2)^2}$$

Ostatni czynnik jest z dobrym przybliżeniem równy 1 ( $r_Z/d \approx \frac{1}{60}$ ),  $M_Z/M_K \approx 81$ ,  $r_K/r_Z \approx \frac{2}{7}$ . Zatem:

$$\frac{\Delta g_K}{\Delta g_Z} = 23,$$

czyli siły pływowe wywoływane na Księżycu przez Ziemię są 23 razy większe niż siły pływowe wywoływane na Ziemi przez Księżyc. Ponadto, własne pole grawitacyjne Księżyca na jego powierzchni jest około 6 razy słabsze od ziemskiego pola grawitacyjnego na powierzchni Ziemi, Księżyc tłumiał więc fale przyływowe znacznie mniej skutecznie niż Ziemia.



Właśnie dlatego Ziemia nie została jeszcze zmuszona do obrotu synchronicznego z Księżycem. Warto jednak wiedzieć, że istnieją geologiczne dowody na to, że ruch obrotowy Ziemi jest spowalniany. W muzeum historii naturalnej Smithsonian Institution w Waszyngtonie znajduje się odłamek dawnej rafy koralowej pochodzący sprzed kilkuset milionów lat. Rafa koralowa jest szkieletem żywego organizmu i, dopóki organizm żyje, stale rośnie. Geolodzy potrafia rozpoznac warstwy przyrostu dziennego rafy i po charakterystycznych, cyklicznie powtarzających się układach warstw dziennych rozpoznają przyrosty roczne. Okazuje się, że w czasach, gdy rafa z muzeum żyła, rok miał 390 dni. Nie są znane przyczyny, dla których mogłaby zmaleć długość roku na Ziemi (wiązałoby się to z przyspieszeniem ruchu orbitalnego, a więc zbliżeniem Ziemi do Słońca – tak wyraźna zmiana w ciągu kilkuset milionów lat nie byłaby możliwa do wytłumaczenia). Wniosek jest tylko jeden: Ziemia obraca się dziś wolniej, a za spowolnienie obrotu odpowiedzialne są przyplwy.

Sily pływowe mogą wywoływać też inne efektowne zjawiska. Jeśli są wystarczająco duże, mogą spowodować rozerwanie gwiazdy, planety lub księżyca na fragmenty. Możliwe, że ich działaniu zawdzięczają też istnienie pierścienie pyłowe wokół planet. Wyobraźmy sobie, że na orbicie wokół gwiazdy lub planety znalazł się obłok małych obiektów (podobny do tego, o którym już mówiliśmy), związany silami grawitacyjnymi na tyle słabo, że własne pole grawitacyjne obłoku jest za małe dla powstrzymania rozciągającego działania sil pływowych. Wówczas, jak to już opisaliśmy, część obłoku bliższa ciału przyciągającemu będzie systematycznie wyprzedzać część zewnętrzną i po dostatecznie dużej liczbie obiegów wyprzedzi ją o całą orbitę. W tym momencie obłok zamieni się w zamknięty pierścień. Nie próbujemy tu wyjaśnić, jak powstaje początkowy obłok, ale wnioskiem z powyższych rozważań jest następujące stwierdzenie: dla układu wielu małych obiektów krążących po bliskich sobie orbitach naturalnym stanem końcowym jest zamknięty pierścień wokół ciała centralnego, nie zaś obłok o małych rozmiarach.

Przypuśćmy, że obrót księżyca jakiejś planety stał się już synchroniczny, ale jego orbita jest eliptyczna. Ze wzoru na  $\Delta g$  widać, że różnica sil grawitacyjnych po przeciwnych stronach księżyca jest

## Zadanie Napoleona

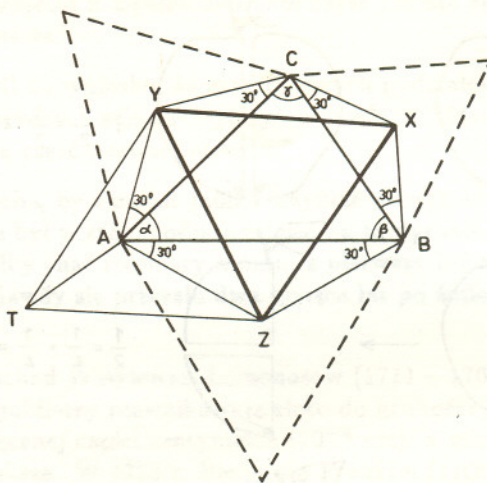
Edmund PUCZYŁOWSKI

Następujące zadanie pochodzi podobno od Napoleona.

Wykazać, że trójkąt, którego wierzchołkami są środki trójkątów równobocznych zbudowanych na bokach danego trójkąta ostrokątnego, jest równoboczny.

Przedstawimy tu trzy rozwiązania tego zadania.

**1. Dla szkół podstawowych** (trzeba znać cechy przystawania trójkątów i umieć wyliczać proste zależności między kątami).

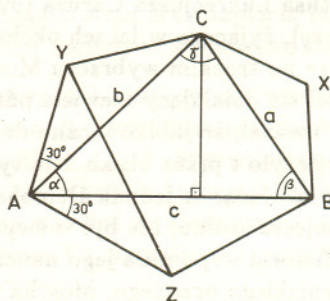


Korzystając z tego, że  $AZ = BZ$  możemy zbudować trójkąt  $ATZ$  przystający do trójkąta  $BXZ$ . Zauważmy, że  $AT = BX = CX$ ,  $AY = CY$  oraz

$$\begin{aligned} \angle TAY &= 360^\circ - \angle YAZ - \angle TAZ = 360^\circ - (60^\circ + \alpha) - \angle XBZ = \\ &= 360^\circ - (60^\circ + \alpha) - (60^\circ + \beta) = 240^\circ - (\alpha + \beta) = \\ &= 240^\circ - (180^\circ - \gamma) = 60^\circ + \gamma = \angle YCX. \end{aligned}$$

Oznacza to, że trójkąty  $ATY$  i  $CXY$  są przystające. W efekcie  $YT = YX$  oraz  $ZT = ZX$ , co dowodzi, że przystające są także trójkąty  $YTZ$  oraz  $YXZ$ . Zauważmy ponadto, że  $\angle TYX = 120^\circ$  (bo  $\angle TYX = \angle AYC + \angle AYT - \angle CYX$ ,  $\angle AYC = 120^\circ$ ) i – z przystawania trójkątów  $ATY$  oraz  $CXY$  –  $\angle AYT = \angle CYX$ . W efekcie  $\angle XYZ = \angle TYZ = 60^\circ$ . Podobnie  $\angle YZX = 60^\circ$ , a więc trójkąt  $XYZ$  jest równoboczny.

**2. Dla szkół średnich** (trzeba coś wiedzieć o trygonometrii).



Zauważmy, że  $AY = b/\sqrt{3}$ ,  $AZ = c/\sqrt{3}$  oraz  $\angle YAZ = \alpha + 60^\circ$ .

Zatem, na podstawie twierdzenia cosinusów,

$$\begin{aligned}(YZ)^2 &= (1/3)(b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha + 60^\circ)) = \\ &= (1/3)(b^2 + c^2 - bc \cos \alpha + \sqrt{3}bc \sin \alpha).\end{aligned}$$

Analogicznie

$$(XZ)^2 = (1/3)(a^2 + c^2 - ac \cos \beta + \sqrt{3}ac \sin \beta).$$

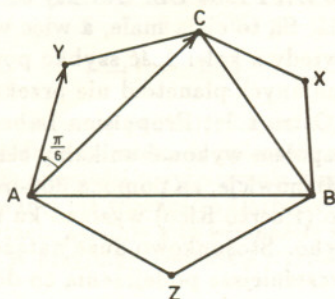
Teraz  $bc \sin \alpha = ac \sin \beta = 2S$ , gdzie  $S$  jest polem trójkąta  $ABC$ , oraz (z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkąta  $ABC$ )

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ . Zatem

$$\begin{aligned}(YZ)^2 &= (1/3)(a^2 + bc \cos \alpha + \sqrt{3}bc \sin \alpha) = \\ &= (1/3)(a^2 + c(c - a \cos \beta) + 2\sqrt{3}S) = \\ &= (1/3)(a^2 + c^2 - ac \cos \beta + \sqrt{3}ac \sin \beta) = (XZ)^2,\end{aligned}$$

czyli  $YZ = XZ$ . Podobnie dowodzimy, że  $XY = XZ$ .

**3. Dla studentów (?)** (trzeba coś wiedzieć o... kinematyce).



Załóżmy, że punkty  $A$  i  $B$  są umocowane, a punkt  $C$  porusza się w sposób „gładki”. Wraz z nim poruszają się punkty  $X$  i  $Y$ .

Ponieważ kąt między wektorami  $\vec{AC}$  i  $\vec{AY}$  jest stale równy  $\pi/6$  oraz długość  $\vec{AY}$  jest stale równa  $1/\sqrt{3}$  długości  $\vec{AC}$ , więc również kąt między wektorami (swobodnymi) prędkości  $v_Y$  i  $v_C$  punktów  $Y$  i  $C$  jest stale równy  $\pi/6$  oraz długość pierwszego z nich jest równa  $1/\sqrt{3}$  długości drugiego. Tak więc  $v_Y = (1/\sqrt{3})O_{\pi/6}(v_C)$ , gdzie  $O_{\pi/6}$  oznacza obrót o kąt  $\pi/6$ . Podobnie  $v_C = \sqrt{3}O_{\pi/6}(v_X)$ . W efekcie  $v_Y = O_{\pi/3}(v_X)$ .

Wybermy teraz na płaszczyźnie układ współrzędnych o początku

w punkcie  $Z$ . Przypomnijmy, że jeśli wektor  $\vec{ZX}$  w chwili  $t$  jest równy  $(x(t), y(t))$ , to wektor prędkości  $v_X$  punktu  $X$  w chwili  $t$  jest równy  $(x'(t), y'(t))$ , gdzie – jak zwykle –  $x'(t)$ ,  $y'(t)$  oznaczają pochodne  $x(t)$  i  $y(t)$  względem  $t$ . Podobnie, jeśli w chwili  $t$

$\vec{ZY} = (x_1(t), y_1(t))$ , to w tej chwili  $v_Y = (x_1'(t), y_1'(t))$ . Jak widzieliśmy,  $v_Y = O_{\pi/3}(v_X)$ , więc  $x_1'(t) = \cos(\pi/3) \cdot x'(t) - \sin(\pi/3) \cdot y'(t)$  oraz  $y_1'(t) = \sin(\pi/3) \cdot x'(t) + \cos(\pi/3) \cdot y'(t)$ .

Wynika stąd, że istnieją takie stałe  $a$ ,  $b$ , że dla dowolnego  $t$

$$x_1(t) = \cos(\pi/3) \cdot x(t) - \sin(\pi/3) \cdot y(t) + a \text{ oraz}$$

$$y_1(t) = \sin(\pi/3) \cdot x(t) + \cos(\pi/3) \cdot y(t) + b. \text{ Oznacza to, że}$$

w dowolnym momencie  $\vec{ZY} = O_{\pi/3}(\vec{ZX}) + \vec{R}$ , gdzie  $\vec{R}$  jest

wektorem o współrzędnych  $a$ ,  $b$ . Oczywiście, ruch punktu  $C$  możemy

dobrać tak, by w pewnym momencie  $t_0$ , punkty  $A$ ,  $B$ ,  $C$  tworzyły

trójkąt równoboczny. W tym momencie również punkty  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$

będą tworzyły trójkąt równoboczny. Mamy więc  $\vec{ZY} = O_{\pi/3}(\vec{ZX})$ ,

co oznacza, że  $\vec{R} = 0$ . W efekcie dla dowolnego położenia punktu  $C$ ,

$\vec{ZY} = O_{\pi/3}(\vec{ZX})$ . Oznacza to, że  $\angle YZX = \pi/3$ . Podobnie

dowodzimy, że pozostałe kąty trójkąta  $XYZ$  są równe  $\pi/3$ .

większa, gdy księżyc znajduje się bliżej planety i mniejsza, gdy jest dalej. Fala przyływu na powierzchni księżycy (powierzchnia ta jest ciałem stałym!) będzie wtedy stać stale w tym samym miejscu powierzchni, ale będzie oscylować w górę i w dół. Energia, której kosztem powstają odkształcenia powierzchni księżycy, to energia ruchu obiegowego po orbicie. Wskutek utraty tej energii księżyc może w końcu spaść na swoją macierzystą planetę lub też jego orbita może stać się kołowa. Zanim do tego dojdzie, praca wykonywana przez oscylującą powierzchnię księżycy wytwarza energię ciepłą w jego wnętrzu i może je stopić. Ten mechanizm wytwarzania ciepła jest jedynym wyjaśnieniem, dlaczego na najbliższym z galileuszowych księżyców Jowisza, Io, znajdują się wulkany (erupcje wulkanów na Io zostały sfotografowane przez amerykańską sondę kosmiczną Voyager). Obiekt o dużej masie, jak Ziemia, mógł zachować wystarczająco dużo ciepła we wnętrzu od czasu swojego powstania, lub też nagrzać się od energii rozpadu pierwiastków promieniotwórczych. Mały obiekt, taki jak Io, wystygłby już dawno (podobnie jak np. nasz Księżyc), gdyby nie miał stale działającego źródła energii.

### 5. Siły pływowe są obiektywnym testem na istnienie pola grawitacyjnego.

Jak już stwierdziliśmy wcześniej, przyspieszenie może znieść grawitację. Może też być użyte do symulowania grawitacji. Czytelnicy wiedzą pewnie, np. z powieści fantastyczno-naukowych, o „sztucznej grawitacji” w pojeździe kosmicznym, którą można wytworzyć przez obrót pojazdu wokół jego osi – siła odśrodkowa będzie wtedy „udawała” siłę grawitacyjną. Nie jest to żadna sztuczka psychologiczna, siły bezwładności i siły grawitacyjne naprawdę działają identycznie na wszystkie układy fizyczne i żadne przyrządy pomiarowe mierzące siłę w **jednym punkcie** nie potrafią rozróżnić tych dwóch sił.

Możliwość odróżnienia grawitacji od sił bezwładności stwarzają właśnie siły pływowe. Wyobraźmy sobie układ inercjalny, w którym nie działają siły grawitacyjne. Wyobraźmy sobie następnie, że w takim układzie zbieramy grupkę małych cząstek materii i następnie wypuszczamy wszystkie cząstki z jednakowymi prędkościami początkowymi (tzn. wszystkie prędkości mają równoległe kierunki oraz jednakowe zwroty i wartości).

liczbowe). Względne prędkości cząstek są więc początkowo równe zeru. Jeśli w układzie nie działają żadne siły, to prędkości względne pozostaną równe zeru stale – i obserwację tę uczyni każdy obserwator, niezależnie od tego, czy on sam spoczywa, czy porusza się ruchem jednostajnym lub przyspieszonym. Jeżeli jednak obserwowane cząstki znajdują się w polu grawitacyjnym, to wskutek działania sił pływowych pomiędzy prędkościami poszczególnych cząstek zaczną narastać różnice i po pewnym czasie prędkości różnych cząstek na ogół nie będą ani równe, ani równoległe – prędkości względne staną się różne od zera. Również tę obserwację zgodnie uczynią wszyscy możliwi obserwatorzy. Siły pływowe są więc obiektywnym, niezależnym od układu odniesienia dowodem istnienia pola grawitacyjnego. Wniosek ten jest ważny przy studiowaniu teorii grawitacji Einsteina, dla której rozróżnienie zjawisk względnych, obserwowalnych tylko w niektórych układach odniesienia, od zjawisk obiektywnych, wykrywalnych dla każdego obserwatora, jest podstawowym problemem.



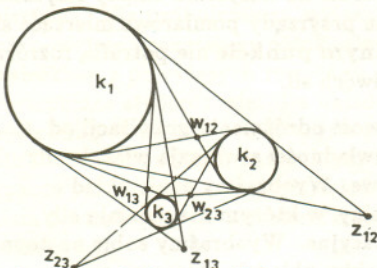
**Rozwiązanie sadania M 615.** Oznaczmy promień  $k_1$  przez  $r_1$ . Dowód pierwszej współliniowości: Jednokładność o środku  $z_{12}$  i skali  $\frac{r_2}{r_1}$  przeprowadza  $k_1$  na  $k_2$ ,

a jednokładność o środku  $z_{23}$  i skali  $\frac{r_3}{r_2}$  przeprowadza  $k_2$  na  $k_3$ . Złożenie tych jednokładności ma skalę  $\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_3}{r_2} = \frac{r_3}{r_1} > 0$ ; przeprowadza  $k_1$  na  $k_3$ , ma więc środek  $z_{13}$ .

Jeśli złożeniem jednokładności  $J_1$  i  $J_2$  jest jednokładność  $J_3$  (i żadna z nich nie jest identycznością), to środki tych jednokładności leżą na jednej prostej. Stąd pierwsza współliniowość.

Dowód drugiej współliniowości: Jednokładność o środku  $z_{12}$  i skali  $\frac{r_2}{r_1}$  przeprowadza  $k_1$  na  $k_2$ ,

a jednokładność o środku  $w_{23}$  i skali  $-\frac{r_3}{r_2}$  przeprowadza  $k_2$  na  $k_3$ . Złożenie tych jednokładności ma skalę  $\frac{r_2}{r_1} \cdot \left(-\frac{r_3}{r_2}\right) = -\frac{r_3}{r_1} < 0$ ; przeprowadza  $k_1$  na  $k_3$ , ma więc środek  $w_{13}$  – ciąg dalszy jak poprzednio.



Dowody pozostałych przypadków są analogiczne.

Jeśli Czytelnik nie zna twierdzenia wyróżnionego kursywą (z którego istotnie korzystaliśmy), to ma przed sobą dodatkowe, czwarte zadanie (ale już bez rozwiązania w tym numerze Delt) – udowodnić to twierdzenie.

Nie od dziś wiemy, że planetoidy różnią się nie tylko kształtem i rozmiarami, ale i składem chemicznym. W szczególności istnieje dość dobrze wyodrębniona klasa planetoid metalicznych zbudowanych niemal wyłącznie z żelaza i niklu. Podejrzuje się zresztą, że mogą to być szczątki jakiegoś większego obiektu. Większość planetoid krąży wokół Słońca, jak wiadomo, między orbitami Marsa i Jowisza, niektóre jednak mają orbity silnie odbiegające od kołowych i zbliżają się znacznie do orbity Ziemi. Stąd wzięły się pomysły, że ciała te można by w przyszłości wykorzystać jako „źródło bogactw naturalnych”.

Obserwacyjnie planetoidy tego typu wyróżniają się silniejszą emisją promieniowania długofalowego i dość wysoką ogólną zdolnością odbijania światła. W ten sposób stwierdzono, że metalicznymi planetoidami są np. 1986 DA i 1986 EB. Obiekty te w ogóle nie są łatwe do obserwowania. Są to ciała małe, a więc widoczne tylko z niedużej odległości, a wtedy z kolei dość szybko poruszają się na niebie. Rozmiary wspomnianych planetoid nie przekraczają 3 km. Niemniej jednak Steven Ostro z Jet Propulsion Laboratory w Kalifornii ze swoim zespołem wykonał unikalny eksperyment z planetoidą 1986 DA. Mianowicie, za pomocą 300-metrowego radioteleskopu w Arecibo (Puerto Rico) wysłano ku niej impulsy radiowe i odebrano ich echo. Stosunkowo duże natężenie odbitych impulsów potwierdziło wcześniejsze podejrzenia co do składu planetoidy.

Pojawiły się wtedy – jak to w Ameryce – praktyczne kalkulacje wartości tego bogactwa naturalnego. Gdyby planetoidy te miały istotnie taki właśnie skład chemiczny w całej objętości, to mogłyby być warte 10 bilionów dolarów. Taka byłaby wartość rynkowa – o naukowej w ogóle trudno coś sensownego powiedzieć.

Ale to jeszcze nic. Z badań geochemicznych wynika, że około 2,3 mln lat temu do Pacyfiku spadła planetoida – bo tak chyba należy ten obiekt nazwać. Dowodem na to ma być nie krater w dnie oceanicznym, lecz zaobserwowana nadwyżka irydu w osadach pochodzących z podejrzanego miejsca. Nawiasem mówiąc, jego współrzędne geograficzne są: długość 90° W i szerokość 57°S (trochę ponad 1000 km na zachód od Przylądka Horn). Wydobyte mianowicie z tamtych okolic osady denne zawierały szkliste ziarenka o zwiększonej zawartości irydu i złota. Irydu jest w skorupie ziemskiej jeden atom na bilion innych i każde odchylenie od tej normy ma prawo sugerować nawet pozaziemskie jego pochodzenie. Do takiego właśnie wniosku doszli badacze z University of California w Los Angeles: Frank Kyte, Lei Zhon i John Wasson. Nadwyżkę irydu zaobserwowali oni w wielu miejscach wokół punktu o podanych tu współrzędnych. Z tego oszacowali masę osobliwych osadów na 300 mln ton, a wreszcie rozmiary planetoidy na co najmniej 600 m (ceny nie podali). Byłby to największy obiekt, którego upadek na Ziemię można by uznać za „dowodzony” (drugim byłby meteoryt, który wybił słynny krater w Arizonie – jego średnica oceniana jest na 50 do 100 m). Co ciekawsze, geologowie sugerują, że między 2,2 a 2,5 mln lat temu nastąpiła jakaś gwałtowna zmiana klimatu ziemskiego. Spadek takiego ciała mógł wywołać np. epokę lodowcową, której bezpośrednich śladów nie znamy.

Tomasz KWAST

Komputer to taki niesłychanie sprawny idiota.

(Hugo Steinhaus)

W związku z planowanym wyjazdem zagranicznym matematyk R. został zmuszony do napisania swego życiorysu w języku angielskim. Pałając wrodzoną niechęcią do tego typu twórczości, zapytał swojego kolegę, matematyka N., czy ten przypadkowo nie posiada na dyskietce tekstu z własnym życiorysem. Przypuszczenie było słuszne – posiadał. Pożyczył więc R. dyskietkę, siadł przy komputerze i zaczął modyfikować życiorys kolegi zmieniając datę urodzenia i inne dane osobiste. Resztę pozostawiał bez zmian.

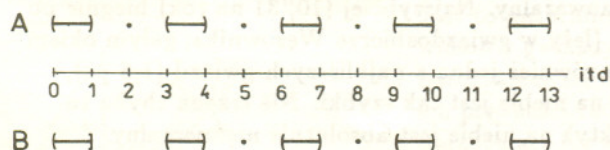
Gdy dotarł do działalności naukowej w życiorysie, z niejakim zaskoczeniem przeczytał, że dziedziną, którym interesuje się N., jest „erotic theory”.

Skąd taka informacja znalazła się w tekście? Rozwiązanie zagadki nie było trudne. Otóż po napisaniu życiorysu N. sprawdzał poprawność angielszczyzny specjalnym programem komputerowym („spellchecker”), a słowa „ergodic” (N. zajmuje się teorią ergodyczną) w słowniku nie było. Komputer wyświetlił więc możliwe, znane sobie, warianty „poprawnych” słów, wśród których najbliższe wyjściowemu było właśnie „erotic”. Matematyk N. zaś z rozperdu nacisnął nieodpowiedni klawisz.

Co najciekawsze, pan N. sam usterki nie zauważył i ów życiorys wysłał za granicę. Odpowiedzi na razie nie ma. Niewykluczone, że wkrótce zostanie on zaproszony do wygłoszenia cyklu wykładów. Pytanie tylko, czy to, co powie, zadowoli słuchaczy...

## O parach niehomeomorficznych (II)

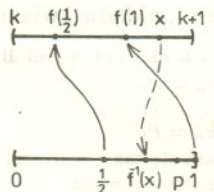
Przypomnijmy; pokazaliśmy (EPSILON nr 8), że gdy określimy zbiory:  $A = (0, 1) \cup \{2\} \cup (3, 4) \cup \{5\} \cup \dots$  i  $B = (A \setminus \{2\}) \cup \{1\}$ , to istnieje bijekcja ciągła przekształcająca  $A$  na  $B$  oraz bijekcja ciągła przekształcająca  $B$  na  $A$ . Zbiory  $A$  i  $B$  nie są jednak homeomorficzne. Dlaczego?



Dowód, który przedstawimy poniżej, nie jest najprostszym z możliwych, ma jednak tę zaletę, że opiera się wyłącznie na znanej ze szkoły własności przyjmowania wartości pośrednich (nazywanej też własnością Darboux) w jej bezpośredniej postaci. Zgodnie z tą własnością funkcja ciągła  $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  przyjmuje wszystkie wartości między  $\Phi(a)$  i  $\Phi(b)$ .

Przypuśćmy, że istnieje homeomorfizm przekształcający  $B$  na  $A$ ; oznaczmy go przez  $f$ . Wartość  $f$  w jedynce nie może być punktem izolowanym (tzn.  $f(1) \neq 3k + 2$  dla dowolnego  $k$  naturalnego). Czemu? Gdyby tak było, to na mocy własności przyjmowania wartości pośrednich w zbiorze  $A$  musiałby zawierać się przedział  $[f(\frac{1}{2}), f(1)]$  (lub  $[f(1), f(\frac{1}{2})]$ ), gdziekolwiek jednak  $f(\frac{1}{2})$  by się znajdowało ( $f(\frac{1}{2}) \neq f(1)$ , bo  $f$  jest bijekcją), jest to niemożliwe.

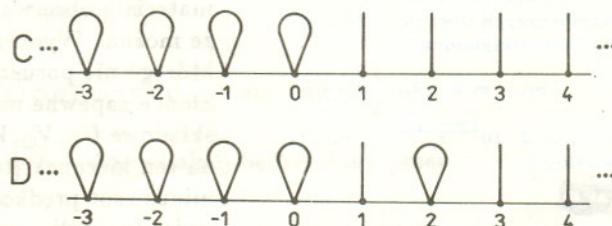
Wobec tego zachodzi  $f(1) \in (k, k+1)$  dla pewnego  $k$  całkowitego ( $k$  jest takie, że przedział  $(k, k+1)$  zawiera się w  $A$ ). Zauważmy, że również  $f(\frac{1}{2})$  należy do  $(k, k+1)$ , gdyż wszystkie spośród liczb między  $f(\frac{1}{2})$  i  $f(1)$  muszą być wartościami funkcji  $f$ . Przyjmijmy, że  $f(\frac{1}{2}) < f(1)$  (gdy  $f(1) < f(\frac{1}{2})$ , dowód jest analogiczny). Weźmy  $x \in (f(1), k+1)$  i rozważmy punkt  $f^{-1}(x)$ . Należy on do  $(0, 1)$  (w przeciwnym przypadku mamy sprzeczność z własnością Darboux zastosowaną dla przedziału  $[f(1), x]$  i funkcji  $f^{-1}$ , która też jest ciągła). Ponadto  $f^{-1}(x) \neq 1$ .



Weźmy teraz dowolny element  $p \in (f^{-1}(x), 1) \cap (\frac{1}{2}, 1)$ . Korzystając znów z własności przyjmowania wartości pośrednich, znajdziemy: w przedziale  $(f(1), x)$  taki punkt  $q$ , że  $f^{-1}(q) = p$  i punkt o tej samej własności w przedziale  $(f(\frac{1}{2}), f(1))$ . Przedziały  $(f(\frac{1}{2}), f(1))$

i  $(f(1), x)$  są jednak rozłączne, więc  $f^{-1}$  nie może być bijekcją. Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

Poświęćmy jeszcze parę słów drugiemu ze wspomnianych poprzednio przykładów „niehomeomorficznej pary”. Tym razem są to podzbiory płaszczyzny. Oto one (górne końce „pionowych odcinków” nie należą do zbiorów  $C$  i  $D$ ):



Przedstawimy tu jedynie ideę odpowiedniego rozumowania. By otrzymać w sposób ciągły zbiór  $D$  ze zbioru  $C$ , należy odcinek wychodzący z punktu 2 zawinąć i zaczepić w tym punkcie także i drugim końcem, tak, by otrzymać pętelkę. Aby dostać  $C$  z  $D$ , należy to zrobić z odcinkiem zaczepionym w punkcie 1 i przesunąć całą figurę o 2 w lewo.

Tak jak poprzednio, fakt, że zbiory  $C$  i  $D$  nie są homeomorficzne, wydaje się „widocznym”. Dowód nie jest jednak całkiem banalny. Myśl jednego ze sposobów pokazania tego polega na zauważeniu, że punkty, w których zaczepione są pętelki, muszą po przekształceniu przez homeomorfizm przejść w punkty tego samego typu. Należy też wykorzystać własność, że jeśli po wyrzuceniu jednego punktu figura rozpadnie się na kilka kawałków, to taki sam efekt da wyrzucenie obrazu tego punktu z homeomorficznego obrazu figury, a ponadto uzyskane kawałki muszą być ze sobą parami homeomorficzne. Na tej podstawie można wykazać, że żaden punkt nie może być obrazem 2 w ewentualnym homeomorfizmie z  $D$  na  $C$ .



**Roswiązanie zadania F 821.** Siła oporu aerodynamicznego jest równa  $F = C_x \rho S u^2$ , zatem praca dana jest wyrażeniem  $W = F \cdot d = C_x \rho S u^2 d$ . Praca mechaniczna, jaką wykona silnik, jest równa  $W = QV\eta$ , gdzie  $V$  oznacza objętość spalanej benzyny,  $\eta$  zaś jest sprawnością silnika. Największą sprawność ma silnik pracujący w cyklu Carnota  $\eta = 1 - \frac{T_c}{T_k}$ , gdzie  $T_k = 3000^\circ\text{C} = 3273\text{ K}$  jest temperaturą kotła, chłodzenie odbywa się za pomocą wody, której temperatura jest równa  $T_c \approx 80^\circ\text{C} = 353\text{ K}$ . Stąd  $\eta \approx 0,89$ . Porównując wyrażenia na pracę otrzymujemy

$$V = \frac{C_x \rho S u^2 d}{Q \eta} \approx 1,5 \text{ litra.}$$



**Roswiązanie zadania F 822.** Niech  $E$  oznacza natężenie oświetlenia Słońca,  $E_1$  zaś natężenie oświetlenia obiektu o światłości Słońca, wielkości gwiazdowej  $m$  i odległego o  $r$  od Ziemi. Stąd

$$m_s = -2,5 \log E + b,$$

$$m = -2,5 \log E_1 + b.$$

Niech  $I$  oznacza światłość Słońca. Wówczas

$$E = \frac{I}{R^2} \text{ oraz } E_1 = \frac{I}{r^2}.$$

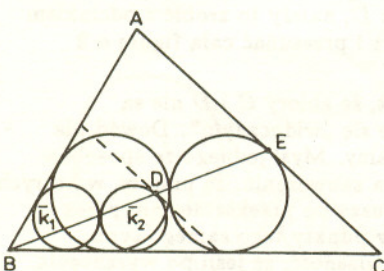
Podstawiając te wyrażenia do wcześniejszych równań i odejmując je stronami otrzymujemy

$$m_s - m = -2,5 \log \frac{r^2}{R^2},$$

stąd  $r = R \cdot 10^{\frac{(m-m_s)}{5}} \approx 1 \text{ min lat}$  świetlnych.



**Roswiązanie zadania M 618.** W kąt  $ABC$  wpisujemy małe koło  $\bar{k}_1$ , a następnie rysujemy koło  $\bar{k}_2$  o tym samym promieniu styczne zewnętrznie do  $\bar{k}_1$  i do  $\overline{BC}$  (leżące wewnątrz kąta  $ABC$ ).



Następnie prowadzimy styczną do  $\bar{k}_2$  równoległą do  $AC$  i leżącą po przeciwnej stronie  $\bar{k}_2$  niż punkt  $B$ . Przez punkt  $D$  stycznej  $\bar{k}_2$  z tą równoległą prowadzimy prostą z  $B$  aż do przecięcia z  $AC$  – oznaczamy to przecięcie  $E$ . Jednokładność o środku  $B$  i skali  $BE : BD$  przeprowadza  $\bar{k}_1$  i  $\bar{k}_2$  na  $k_1$  i  $k_2$ .

Niebo, a w każdym razie układ gwiazdozbiorów, zawsze robiło wrażenie czegoś majestatycznego i niezmiennego. Jest to, oczywiście, pozór, bowiem rozsiane w przestrzeni gwiazdy przyciągają się grawitacyjnie i muszą się poruszać. Poznanie tych ruchów jest jednym z głównych celów astronomii. Ideałem byłaby możliwość określenia trzech składowych prędkości każdego wybranego obiektu względem Słońca (co prawda, obserwator mieszka na Ziemi obiegającej Słońce, ale uznajmy, że ten ruch Ziemi zawsze da się uwzględnić). Łatwo zgadnąć, że trzeba przy tym znać odległość obiektu. Składowe prędkości styczne do sfery niebieskiej to iloczyny odległości oraz przesunięć kątowych (np. w rektascensji i deklinacji) gwiazdy w jednostce czasu. Same przesunięcia wyznacza się (bezpośrednio na niebie lub na zdjęciach) z dwóch pomiarów konfiguracji gwiazd, przy czym dobrze jest jeżeli te dwie obserwacje dzieli odstęp czasu kilkudziesięcioletni. Gwiazdy są bowiem tak odległe, że w krótszym czasie ich ruch może być po prostu niezauważalny. Najszybciej ( $10''/31$  na rok) biegnie po niebie tzw. gwiazda Barnarda (leży w gwiazdozbiore Wężownika; gołym okiem jej nie widać); jest ona zresztą również jedną z najbliższych gwiazd (1,8 pc), nic więc dziwnego, że jej ruch na niebie jest tak szybki. Nie trzeba chyba tu dowodzić, że z kolei ruch galaktyk na niebie jest absolutnie niemierzalny.

Trzecią składową prędkości, prostopadłą do sfery niebieskiej, mierzy się jako prędkość radialną  $v_r$  na podstawie dopplerowskiego przesunięcia linii widmowych gwiazdy:

$$\nu_{\text{obs}} = \nu_0 \left( 1 - \frac{v_r}{c} \right),$$

gdzie  $\nu_{\text{obs}}$  i  $\nu_0$  oznaczają obserwowaną i laboratoryjną częstość fali świetlnej w linii widmowej, a  $c$  prędkość światła. W tym przypadku odległość gwiazdy jest nieistotna.

Nietrudno się teraz domysleć, że dla gwiazd bardziej odległych prędkość radialna jest w ogóle jedyną mierzalną składową prędkości. Czy z tak zubożonego materiału obserwacyjnego można coś sensownego wydedukować? Okazuje się, że można. Wyobraźmy sobie np. układ współrzędnych prostokątnych, względem którego nie porusza się (jako całość) zbiór gwiazd widocznych gołym okiem. Słońce zapewne ma jakąś niezerową prędkość w tym układzie – niech ma ona składowe  $U_0, V_0, W_0$ . Weźmy dowolną gwiazdę o współrzędnych  $\alpha, \delta$ . Rzut na ten kierunek (tzn. określony przez te współrzędne) prędkości gwiazdy ( $\vec{v}_*$ ) minus rzut prędkości Słońca jest właśnie obserwowaną prędkością radialną ( $v_r$ ) gwiazdy, czyli

$$(\text{rzut } \vec{v}_*) - U_0 \cos \alpha \cos \delta - V_0 \sin \alpha \cos \delta - W_0 \sin \delta = v_r.$$

Rzut prędkości gwiazdy jest nieobserwowalny, można jednak przyjąć, że dla różnych gwiazd jest on przypadkowy. Jeżeli zatem w powyższym równaniu rzut  $\vec{v}_*$  pominąć, a za to ułożyć dużo takich równań (obserwując wiele gwiazd), to dostanie się układ równań, z którego można wyznaczyć  $U_0, V_0, W_0$  jako wielkości spełniające go najlepiej np. w sensie najmniejszych kwadratów. Tak znajdujemy składowe prędkości Słońca względem „układu gwiazd okolicznych”.

Układ  $k$  równań liniowych (a takie są nasze równania) z  $n$  niewiadomymi dla  $k \geq n$

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + \dots + A_{1n}x_n = P_1 \\ \dots \\ A_{k1}x_1 + \dots + A_{kn}x_n = P_k \end{cases}$$

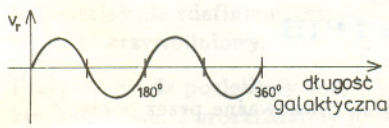
nie ma na ogół rozwiązania. Wówczas za najlepsze uważa się takie wartości ( $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ ) niewiadomych, dla których wyliczone wartości prawych stron równań

$$\begin{aligned} A_{11}\bar{x}_1 + \dots + A_{1n}\bar{x}_n &= L_1 \\ \dots \\ A_{k1}\bar{x}_1 + \dots + A_{kn}\bar{x}_n &= L_k \end{aligned}$$

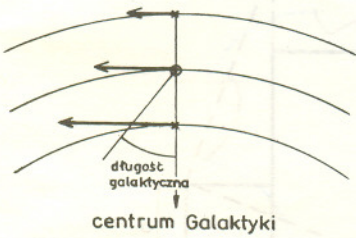
spełniają warunek:

$$\sum (L_i - P_i)^2 \text{ ma wartość najmniejszą.}$$

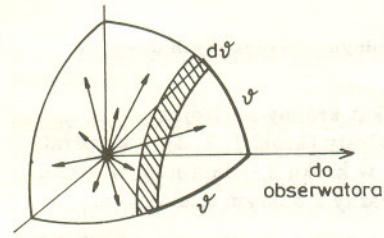
Istnieją algorytmy obliczania wartości  $\bar{x}_i$ . Wartości te uważamy za „najlepsze w sensie najmniejszych kwadratów”. Szczególnym przypadkiem takiej sytuacji jest wielokrotny pomiar tej samej wielkości – otrzymany wówczas wynik to średnia arytmetyczna pomiarów.



Rys. 1

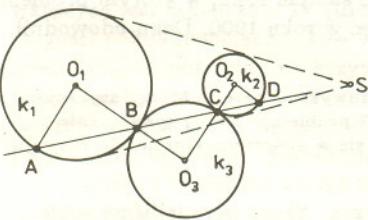


Rys. 2



Rys. 3

**Rozwiązanie zadania M 614.**  
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Mamy

$$\begin{aligned} \angle ABO_1 &= \angle O_3BC = \angle O_3CD = \\ &= \angle DCO_2 = \angle CDO_2 \end{aligned}$$

(pierwsza i trzecia równość ma miejsce, bo kąty są wierzchołkowe, druga i czwarta – bo trójkąty są równoramienne). Zatem  $\overline{O_1B} \parallel \overline{O_2D}$ . Stąd w jednokładności o skali dodatniej nakładającej  $k_1$  na  $k_2$  obrazem punktu  $B$  jest punkt  $D$ . Środkiem takiej jednokładności jest  $S$ , a ponieważ prosta łącząca punkt z jego obrazem w jednokładności przechodzi przez środek tej jednokładności, więc prosta  $BD$  (czyli  $BC$ ) przechodzi przez  $S$ .  
Uwaga: Zadanie to można uogólnić na wiele sposobów. Np.  $k_3$  może być styczne wewnętrznie do  $k_1$  i  $k_2$  – i nawet rozwiązanie pozostanie takie samo. Można też zastąpić warunek, by  $k_1$  i  $k_2$  były rozłączne przez warunek, by jedno nie zawierało się w drugim. Pozostawiając warunek rozłączności można zamienić styczne zewnętrzne na styczne wewnętrzne, ale wtedy  $k_3$  musi być inaczej styczne do  $k_1$  niż do  $k_2$ .

Ta prędkość Słońca wynosi około 20 km/s i jest skierowana ku punktowi  $\alpha_{\odot} \approx 18^h$ ,  $\delta_{\odot} \approx 30^\circ$ . Nazywa się on apeksem Słońca i leży w gwiazdozbiore Herkulesa.

Tak można wyznaczać prędkość Słońca względem dowolnej grupy obiektów (a prawdę powiedziawszy, nawet „względem” promieniowania relikowego). Np. wykonanie tej procedury dla zbioru gromad kulistych daje jako wynik prędkość obiegową Słońca wokół centrum Galaktyki (lekką zafałszowaną przez prędkość ku apeksovi). W ogóle, sama zależność prędkości radialnych gwiazd leżących w Drodze Mlecznej od długości galaktycznej idealnie interpretuje się przez tzw. rotację różnicową Galaktyki. Rozumie się przez to fakt, że gwiazdy położone w różnych odległościach od centrum Galaktyki obiegają je z różnymi prędkościami – w przybliżeniu jakby według praw Keplera. Zależność ta bowiem, poza, oczywiście, rozrzutem, jest „dwukrotnie zagęszczoną” sinusoidą (rys. 1).

Jest to naturalne, bo np. w pierwszym kwadrancie długości galaktycznej (rys. 2) widzimy gwiazdy leżące na orbitach ciaśniejszych niż słoneczna, a więc poruszające się szybciej niż Słońce. Uciekają one zatem przed Słońcem, czyli ich prędkości radialne są dodatnie. W drugim kwadrancie widać gwiazdy poruszające się wolniej, a więc Słońce je dogania i ich prędkości radialne są ujemne itd. Dowodzi to jeszcze ponadto, że istotnie w centrum Galaktyki musi być skupiona dominująca masa.

Założenie losowego rozkładu prędkości umożliwia znalezienie średniej prędkości całkowitej gwiazdy lub galaktyki w gromadzie z pomiarów samych prędkości radialnych. Otóż prędkość radialna  $v_r = v \cos \vartheta$ , gdzie  $\vartheta$  jest kątem między wektorem  $\vec{v}$  a kierunkiem widzenia (rys. 3) – zakładamy tu, że gromada jako całość ma zerową prędkość radialną.

Liczba wektorów  $\vec{v}$  skierowanych pod kątem  $\vartheta$  do kierunku widzenia jest proporcjonalna do  $\sin \vartheta$  (do pola zacieniowanego na rysunku), zatem średnią prędkość radialną (dokładniej:  $\langle |v_r| \rangle$ ) będzie  $\langle v_r \rangle$  zrzutowane na kierunek widzenia i dodatkowo ważone sinusem  $\vartheta$ , tj.

$$\langle |v_r| \rangle = \frac{\int_0^{\pi/2} \langle v \rangle \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{\int_0^{\pi/2} \sin \vartheta d\vartheta} = \frac{1}{2} \langle v \rangle.$$

Analogicznie średni kwadrat prędkości radialnej będzie dany przez

$$\langle v_r^2 \rangle = \frac{\int_0^{\pi/2} \langle v^2 \rangle \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{\int_0^{\pi/2} \sin \vartheta d\vartheta} = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$$

(pamiętajmy, że średni kwadrat to nie kwadrat średniej!). Wyniki te są istotne dla poznania dynamiki gromady, a stąd np. wyznaczenia średniej masy galaktyki w gromadzie.

Obserwacje prędkości radialnych dają też cenne informacje w przypadku pewnych pojedynczych obiektów. Na przykład widmo pierścieni Saturna, gdy szczelina spektrografu ustawiona jest wzdłuż ich dużej osi, ma linie leżące ukośnie, co dowodzi ich różnicowej rotacji. Stąd już od końca ubiegłego wieku wiadomo, że pierścienie zbudowane są z drobnych bryłek obiegających planetę niezależnie. Z kolei widma mgławic planetarnych mają linie rozdwojone w centralnych częściach mgławicy i normalne, pojedyncze na jej brzegach. Jedynym wytłumaczeniem jest założenie, że mgławica jest w przybliżeniu sferyczną warstwą gazu pęczniejącą we wszystkie strony od swojej macierzystej gwiazdy. Wtedy bowiem w centrum obrazu mgławicy obserwator widziałby zarówno masy gazu zbliżające się ku niemu (linie poniebieszczone), jak i oddalające się od niego (linie poczerwienione) – oczywiście gdy dla prostoty rozważań znowu uznać, że mgławica jako całość ma zerową prędkość radialną.

Przedstawione tu przykłady ilustrują zasadę, że jeżeli chcemy z okrojonych obserwacji coś wydobyć, to musimy poczynić dodatkowe założenia, najczęściej, jak widzimy, jakiejś symetrii. Krótko mówiąc – nic za darmo.

# Kwadratura koła, czyli jak zostać milionerem

Piotr HAJŁASZ

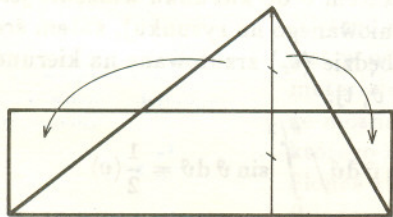
Ten dziwny tytuł wyjaśni się dopiero pod koniec artykułu. Ale nie uprzedzajmy faktów.

Powiemy o dwóch wielokątach, że są równoważne przez **pocięcie na wielokąty** (w skrócie: przez **pocięcie**), jeżeli jeden z nich tak można pociąć na skończoną liczbę mniejszych wielokątów, że z tych kawałków da się złożyć drugi wielokąt. Przy układaniu drugiego wielokąta kawałki nie mogą na siebie zachodzić, mogą co najwyżej stykać się brzegami. Kiedy jest to możliwe? Oczywiście, wielokąty muszą mieć to samo pole. Okazuje się, że jest to już warunek dostateczny! Ten fakt został udowodniony niezależnie przez Farkasa Bolyaia w 1832 r. i Paula Gerwiena w 1833 r.

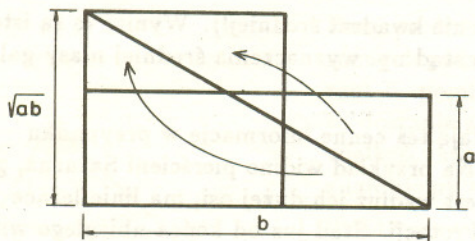
**Twierdzenie (Bolyai-Gerwien).** Dwa wielokąty są równoważne przez pocięcie wtedy i tylko wtedy, gdy mają to samo pole.

**Dowód.** Łatwo zauważyć, że jeżeli wielokąt  $W_1$  jest równoważny przez pocięcie z wielokątem  $W_2$ , wielokąt  $W_2$  zaś z wielokątem  $W_3$ , to  $W_1$  jest równoważny z  $W_3$  (dlaczego?). Wobec tego wystarczy udowodnić, że dowolny wielokąt jest równoważny z kwadratem o tym samym polu. Dowód tego faktu robimy na kilka kroków.

**Krok 1.** Trójkąt jest równoważny przez pocięcie z prostokątem.

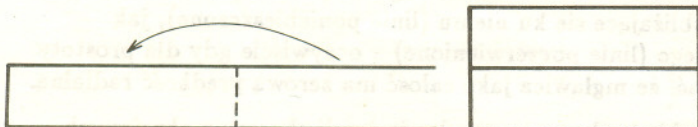


**Krok 2.** Jeżeli w prostokącie stosunek długości krawędzi dłuższej do krótszej jest nie większy niż 4, to prostokąt ten jest równoważny z kwadratem.



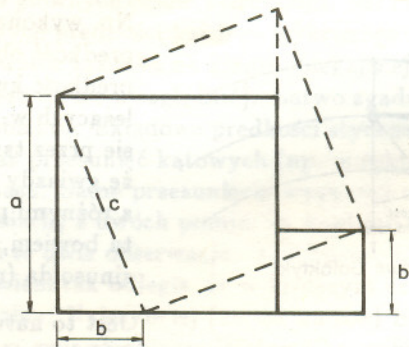
Dlaczego musi być  $\frac{b}{a} \leq 4$ ?

**Krok 3.** Dowolny prostokąt jest równoważny z prostokątem takim, jak w kroku 2.



Jeżeli prostokąt jest „za długi”, to go możemy złożyć „na pół”.

**Krok 4.** Dwa kwadraty są równoważne przez pocięcie z jednym kwadratem.



Krok ten jest w zasadzie jednym z rysunkowych dowodów twierdzenia Pitagorasa.

**Krok 5.** Dowolny wielokąt kroimy na trójkąty. Z trójkątów robimy kwadraty (kroki 1, 2, 3), a kwadraty łącząc po kolei – tak jak w kroku 4 – dają nam w końcu jeden kwadrat – równoważny z naszym wielokątem.

Można postawić analogiczne pytanie dla wielościanów i badać, jakie wielościany są równoważne przez pocięcie na wielościaniki. Otóż **trzeci problem Hilberta** dotyczy właśnie tego typu problemu. Można go sformułować w sposób następujący. Czy czworościan foremny i sześcian o tej samej objętości są równoważne przez pocięcie na wielościaniki? Otóż w tym samym roku, w którym problem został sformułowany, a więc w roku 1900, Dehn udowodnił, że nie są równoważne.

W 1900 r. na II Międzynarodowym Kongresie Matematycznym David Hilbert sformułował 23 problemy. Próby rozwiązania tych problemów przyczyniły się w znacznym stopniu do rozwoju matematyki współczesnej.

Ale powróćmy na płaszczyznę. Skoro poradziliśmy sobie z wielokątami, to zastanówmy się, czy koło i kwadrat są równoważne przez pocięcie na **wielokąty krzywoliniowe**? Oczywiście, musimy dopuścić szerszą klasę kawałków, na które tniemy – wielokąty krzywoliniowe, bo przecież z normalnych wielokątów koła nie da się poskładać. Co to jest wielokąt krzywoliniowy? Mówiąc niezbyt ściśle, jest to wielokąt, w którym krawędzie mogą być powyginane.

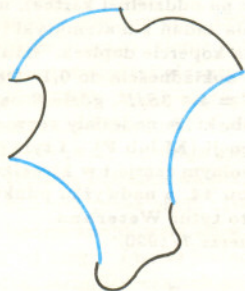


Podzieliiliśmy koło na wielokąty krzywoliniowe.

Nieco ściślej, jest to kawałek płaszczyzny otoczony krzywą bez samoprzecięć – takie zdeformowane koło. Okazuje się tym razem, że kwadrat i koło nie są równoważne przez pocięcie. Prawdę powiedziawszy, ten fakt nie jest zbyt zaskakujący. Przecież każdy odpowie bez namysłu, że nie ma takiego „puzzla”, który w zależności od tego, jak

go składać, da albo kwadrat, albo koło. Zresztą, zaraz to udowodnimy. Dowód nasz nie będzie zbyt ścisły, bo przecież nie zdefiniowaliśmy precyzyjnie, co to jest wielokąt krzywoliniowy.

Przypuśćmy, że pocięliśmy koło o promieniu 1 na wielokąt krzywoliniowy. Porozkładajmy je oddzielnie. Pokolorujmy te kawałki obwodów tych wielokątów, które są łukami o promieniu 1.



Pokolorowaliśmy fragmenty obwodu będące łukami okręgów o promieniu 1.

Mamy dwa rodzaje takich łuków – wklęsłe i wypukłe. Jeżeli jakiś wielokąt ma wklęsły łuk pokolorowany, to temu łukowi odpowiadają pewne pokolorowane łuki wypukłe tej samej długości (ponieważ do tego łuku doklejony jest z drugiej strony inny wielokąt bądź wielokąty – zanim je porozkładaliśmy oddzielnie). Natomiast nie do wszystkich wypukłych łuków pokolorowanych doklejone są z drugiej strony łuki wklęsłe, bowiem cały obwód koła jest pokolorowany.

Tak więc suma długości pokolorowanych łuków wklęsłych jest mniejsza o  $2\pi$  (długość okręgu) od sumy długości pokolorowanych łuków wypukłych. Natomiast jeżeli kwadrat potniemy na krzywoliniowe wielokąty, to powtarzając powyższe rozumowanie stwierdzimy, że sumy długości pokolorowanych łuków wklęsłych i wypukłych są równe. A stąd już wynika, że nie da się z tych samych kawałków złożyć koła i kwadratu.

Można też nieco inaczej zdefiniować równoważność dwóch figur (brył).

Powiemy, że dwie figury (bryły)  $A$  i  $B$  są równoważne przez skończony rozkład, jeżeli można je przedstawić w postaci sumy parami rozłącznych zbiorów

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j,$$

$$B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j,$$

w taki sposób, że zbiory  $A_i$  oraz  $B_i$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$  są izometryczne.

Równoważność przez skończony rozkład przypomina równoważność przez pocięcie, ale jednak różni się od niej bardzo istotnie. Po pierwsze, przy równoważności przez pocięcie dopuszczaliśmy jedynie cięcie na wielokąty (ewentualnie wielokąty krzywoliniowe, wielościany). Tutaj natomiast dopuszczamy rozkład na dowolne podzbiory. Po drugie, przy równoważności przez skończony rozkład zakładamy, że zbiory, na które dzielimy, są rozłączne, natomiast przy równoważności przez pocięcie wielokąty nie były rozłączne, gdyż stykały się brzegami. O tym, jak bardzo różnią się pojęcia równoważności przez pocięcie i przez skończony rozkład, przekonamy się widząc, do jak dalece odmiennych wniosków one prowadzą.

W 1925 r. Alfred Tarski postawił następujące pytanie: Czy koło i kwadrat o tym samym polu są równoważne przez skończony rozkład? Jest to więc w pewnym sensie pytanie o kwadraturę koła, tylko że rozumiana zupełnie inaczej niż w starożytnej Grecji. I oto w 1990 r. węgierski matematyk, Miklós Laczkovich udowodnił, że tak rozumiana kwadratura koła jest wykonalna! Liczba części, na które dzielił koło i kwadrat, wynosiła około ...  $10^{50}$ .

Jeszcze chyba bardziej zaskakującym wynikiem od twierdzenia Laczkovicha jest **paradoks Banacha-Tarskiego**. Otóż udowodnili oni w 1924 r. (ponad 60 lat przed Laczkovichem!), że kula o promieniu 1 jest równoważna przez skończony rozkład z dwiema kulami o promieniu 1! (A oto recepta, jak zostać milionerem: dokonujemy wielokrotnie takich operacji na kulach ze złota.)

Tak naprawdę, to Banach i Tarski udowodnili znacznie więcej. Udowodnili oni mianowicie, że dwa dowolne ograniczone, o niepustym wnętrzu, podzbiory w  $\mathbb{R}^3$  są równoważne przez skończony rozkład. (W szczególności czworoscian foremny i kostka – por. trzeci problem Hilberta.)

Stefan Banach (1892 – 1945). Przez wielu uznawany za najwybitniejszego polskiego matematyka. Jeden z twórców analizy funkcjonalnej.

Alfred Tarski (1901 – 1983). Wybitny polski matematyk i logik, autor kluczowego dla podstaw matematyki pojęcia spełniania.

Na pierwszy rzut oka mogłoby się wydawać, że twierdzenie to jest w oczywisty sposób fałszywe. Przecież jeżeli dzielimy kulę na skończenie wiele kawałków i z tych kawałków składamy coś innego, to to coś musi mieć taką samą objętość co wyjściowa kula, przecież przy izometriach objętości się zachowują. Otóż w tym rozumowaniu jest błąd. Byłoby ono poprawne, gdybyśmy potrafili obliczyć objętość tych kawałków, ale przecież jest wiele zbiorów, dla których bynajmniej nie jest jasne jaka miała by być ich objętość, powierzchnia, długość. Na przykład: jaka jest długość zbioru liczb niewymiernych z odcinka  $[0, 1]$ ?

Wobec powyższych argumentów jasne jest, że w paradoksie Banacha-Tarskiego kulę musimy dzielić na kawałki, dla których w żaden sposób nie można obliczyć objętości (przynajmniej dla niektórych z nich). A jak to jest na płaszczyźnie? W twierdzeniu Laczkovicha koło i kwadrat mają tę samą powierzchnię. Czy jednak można rozłożyć koło na skończoną liczbę kawałków i z tych kawałków otrzymać figurę o innym polu?

Otóż w 1923 r. Stefan Banach udowodnił, że na prostej i na płaszczyźnie istnieje metoda pozwalająca na obliczenie długości i powierzchni **wszystkich** podzbiorów. Wobec tego równość powierzchni jest warunkiem koniecznym na to, aby dwie figury na płaszczyźnie były równoważne przez skończony rozkład.

Dla tych, którzy wiedzą coś niecoś o teorii miary, sformułujemy precyzyjnie twierdzenie Banacha. Otóż Banach udowodnił, że na prostej i na płaszczyźnie istnieje **skończenie** addytywna miara mierząca **wszystkie** podzbiory, niezmiennicza ze względu na izometrię i rozszerzająca miarę Lebesgue'a.

Paradoks Banacha-Tarskiego pokazuje, że w  $\mathbb{R}^3$  takiej miary nie ma. Z tego paradoksu wynika też, że takiej miary nie ma w  $\mathbb{R}^n$  dla  $n \geq 3$  (Jak?).

A czy w przestrzeni istnieje taka uniwersalna metoda obliczania objętości wszystkich zbiorów? Oczywiście, nie istnieje. Gdyby bowiem istniała, to nie byłoby paradoksu Banacha-Tarskiego.



### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 3$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 7/1990.

Termin nadsyłania rozwiązań: 29 II 1992

### Zadania z matematyki nr 229, 230

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**229.** Dany jest czworóścian  $OABC$  oraz trójkąt  $KLM$  o wierzchołkach  $K, L, M$  leżących odpowiednio na krawędziach  $OA, OB, OC$ . Dowieść, że jeżeli na każdym z czworokątów  $ABLK$  i  $ACMK$  można opisać okrąg, to również na czworokącie  $BCML$  można opisać okrąg.

**230.** Dla funkcji ciągłej  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  rozważamy następujące dwa zdania:

- (1) Istnieją takie trzy różne liczby  $a, b, c$ , że  $f(a) = b, f(b) = c, f(c) = a$ .
- (2) Istnieją takie cztery różne liczby  $t, u, v, w$ , że  $f(t) = u, f(u) = v, f(v) = w, f(w) = t$ .

Udowodnić, że dla dowolnej funkcji ciągłej  $f$  warunek (1) pociąga za sobą (2) oraz dać przykład pokazujący, że nie zachodzi implikacja odwrotna.

Zadanie 230 zostało opracowane na podstawie propozycji zgłoszonej przez pana Andrzeja Pawłowskiego z Zabrza.

### Zadania z fizyki nr 127, 128

Redaguje Jerzy B. BROJAN

**127.** Mamy 70 jednakowych ogniw o oporze wewnętrznym  $1 \Omega$ . Jak je należy połączyć, aby przez dołączony do baterii opornik  $R$  popłynął jak największy prąd? Rozważć dwa przypadki:

- a)  $R = 1 \Omega$ ,
- b)  $R = 2 \Omega$ .

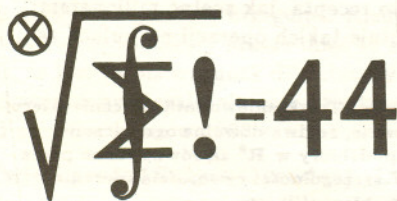
Nie jest wymagany dowód, że w podanym obwodzie prąd jest rzeczywiście maksymalny, wystarczy, że inni rozwiązujący nie otrzymają większej wartości.

**128.** Daną ilość wody o temperaturze początkowej  $T_0$  należy doprowadzić do temperatury końcowej  $T$  ogrzewając naczynie na palniku gazowym lub grzejniku elektrycznym. Upływ ciepła z naczynia do otoczenia na jednostkę czasu jest dany i wynosi  $P_u$  (zakładamy dla uproszczenia, że jest stały). Sprawność grzejnika, tzn. stosunek ciepła przekazanego naczyniu do ciepła wydzielonego przez grzejnik, jest funkcją mocy  $P$  grzejnika (np. funkcją wielkości płomienia)

$$W(P) = a - bP,$$

gdzie  $a, b$  - dane stałe dodatnie. Jak należy wybrać moc  $P$  grzejnika, aby zużyć na ogrzanie wody najmniejszą ilość energii?

Pojemność cieplną samego naczynia można pominąć lub przyjąć, że jest dana. Zakładamy też, że ciepło właściwe wody (ewentualnie także materiału naczynia) nie zależy od temperatury oraz, że straty cieplne nie są tak duże, aby całkowicie uniemożliwić podgrzanie naczynia.



Czołówka ligi zadaniowej

**Klub 44 M**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 215 ( $WT=1,44$ ) i 216 ( $WT=2,51$ )  
z numeru 2/1991

Tomaz Grzesiak	-	Kraków	44,29
Krzysztof Zawislawski	-	Warszawa	42,82
Tomaz Wietecha	-	Tarnów	37,48

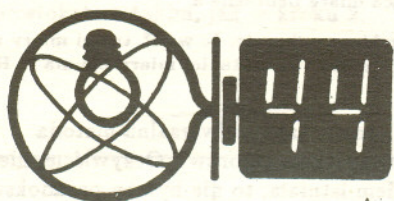
Numer sześćdziesiąty szósty  
w Klubie 44 (M): pan Grzesiak.

Czołówka ligi zadaniowej

**Klub 44 F**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 113 ( $WT=3,04$ ) i 114 ( $WT=2,20$ )  
z numeru 2/1991

Pawel Perkowski	-	Szczecin	28,51
Anna Gluza	-	Toruń	24,35
Adam Sikorski	-	Lublin	23,26



W rubryce tej publikujemy krótkie notatki otrzymane dzięki sieci komputerowej EARN, z której *Delta* korzysta.

Stacja badawcza *Ulysses*, po odłączeniu się od statku kosmicznego *Discovery* w październiku 1990 roku, zmierza w kierunku Jowisza, w którego rejonie znajdzie się w lutym 1992 roku. Pole grawitacyjne tej gigantycznej planety spowoduje taką zmianę trajektorii lotu stacji, że *Ulysses* podąży ku Słońcu, ale daleko od płaszczyzny Układu Słonecznego. W ciągu około czterech miesięcy, począwszy od maja 1995 roku, obserwowana będzie z pokładu *Ulyssesa* południowa półkula Słońca, a od maja roku następnego, również przez około cztery miesiące, półkula północna. Stacja będzie znajdowała się wówczas w odległości około 330 mln km od niego. *Ulysses* badać będzie pole magnetyczne Słońca, strumień cząstek emitowanych przez Słońce pochodzące z wiatru słonecznego, cząstki wysokoenergetyczne pochodzące z wybuchów słonecznych, promieniowanie kosmiczne z przestrzeni międzygwiazdowej i pył międzygwiazdowy. Ponadto *Ulysses* jest wyposażony w aparaturę do rejestracji fal grawitacyjnych i radiowych oraz urządzenia do badania korony słonecznej.

Misja *Ulyssesa* jest wspólnym przedsięwzięciem amerykańskiej agencji do badania przestrzeni kosmicznej (NASA) i analogicznej organizacji europejskiej (ESA).

Jacek TUSZYŃSKI, Pasadena, Kalifornia, USA

Obecnie wykonuje się na świecie ponad miliard kopii kserograficznych dziennie. A jak to się zaczęło? Pewien fizyk amerykański pracował w dziale patentowym niewielkiej nowojorskiej firmy, gdzie często trzeba było przerysowywać, ręcznie kopiować rysunki techniczne. W roku 1938 fizyk ów, Chester Carlson, zaproponował metodę automatycznego kopiowania, zwaną obecnie techniką kserograficzną. Wynalazek został upowszechniony dopiero po ponad dwudziestu latach. Przyczyną opóźnienia był w dużej mierze brak wiary u osób dysponujących kapitałem w zapotrzebowanie na takie koparki. Ponadto należało rozwiązać pewne kwestie techniczne, w szczególności, jak podgrzać papier nie powodując jego spalania.

Proces kserograficzny we współczesnych maszynach kopiujących przebiega, w znacznym uproszczeniu, w sposób następujący:

- 1) Matryca pokryta dodatnim ładunkiem elektrostatycznym oświetlona jest światłem odbitym od kopiowanego dokumentu. W miejscach oświetlonych powierzchnia matrycy staje się przewodnikiem, więc ładunek z tych miejsc odplywa.
- 2) Matrycę powleka się ujemnie naładowanym proszkiem (tonerem), który pozostaje na niej w miejscach, gdzie poprzednio zachował się ładunek dodatni.
- 3) Proszek przeniesiony jest na arkusz papieru, gdy ten, naelektryzowany dodatnio, kładzie się na matrycę.
- 4) Uzyskany obraz zostaje utrwalony przez podgrzanie pokrytego proszkiem papieru.

Chester Carlson zmarł w roku 1968, w kilka lat potem gdy rozpoczął się burzliwy okres rozwoju techniki kserograficznej.

Adam KLISZEWSKI, Los Angeles, Kalifornia, USA



## Zadania

**M 613.** W trójkącie  $ABC$  umieścić dwa zewnętrznie styczne koła  $k_1$  i  $k_2$  o tym samym promieniu w ten sposób, by  $k_1$  było wpisane w  $\angle ABC$ , a  $k_2$  – w  $\angle ACB$ .  
Rozwiązanie na str. 12

**M 614.** Do rozłącznych kół  $k_1$  i  $k_2$  o różnych promieniach jest styczne zewnętrznie koło  $k_3$ . Wykazać, że punkty styczności  $k_1$  z  $k_3$  i  $k_2$  z  $k_3$  oraz punkt przecięcia zewnętrznych prostych stycznych do  $k_1$  i  $k_2$  leżą na jednej prostej.  
Rozwiązanie na str. 13

**M 615.** Dane są rozłączne koła  $k_1$ ,  $k_2$  i  $k_3$ , każde o innym promieniu. Oznaczmy przez  $z_{ij}$  ( $i < j$ ) punkt przecięcia zewnętrznych prostych stycznych do  $k_i$  i  $k_j$ , a przez  $w_{ij}$  – wewnętrznych prostych stycznych do tych kół. Wówczas następujące trójki punktów są współliniowe  $(z_{12}, z_{23}, z_{13})$ ,  $(z_{12}, w_{23}, w_{13})$ ,  $(w_{12}, z_{23}, w_{13})$  i  $(w_{12}, w_{23}, z_{13})$  – pisaliśmy już o tym w *Delcie*, ale bez dowodu. Podać dowód.  
Rozwiązanie na str. 10

Zadania matematyczne zostały zaczerpnięte z programu zajęć z geometrii na Trzyletnim Studium Zawodowym nauczycieli matematyki na Uniwersytecie Warszawskim.

Redaguje Jarosław KULPA

**F 321.** Oszacować dolną granicę ilości benzyny spalanej na drodze  $d = 100$  km przez idealny samochód o standardowym przekroju poprzecznym  $S = 2 \text{ m}^2$  jadący z prędkością  $u = 90$  km/h. Zakładamy, że osiągalna wartość współczynnika aerodynamicznego wynosi  $C_x = 0,3$ , wartość opałowa benzyny jest równa  $Q = 33 \text{ MJ/l}$ , silnik pracuje w najefektywniejszym cyklu, a maksymalna temperatura spalin wynosi około  $3000^\circ\text{C}$ . Pomijamy wszystkie inne opory poza aerodynamicznymi. Gęstość powietrza  $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ .  
Rozwiązanie na str. 12

**F 322.** Za pomocą 11-metrowego teleskopu Keck budowanego na Hawajach będzie można obserwować obiekty do  $m = 28$  wielkości gwiazdowej. Oszacować, z jakiej największej odległości mogłyby być obserwowany obiekt o światłości Słońca. Pomijamy zjawisko pochłaniania promieniowania przez materię międzygwiazdową. (Wielkość gwiazdowa Słońca  $m_\odot = -26,7$ , odległość Ziemi od Słońca  $R = 1,6 \cdot 10^{-5}$  roku świetlnego).  
Rozwiązanie na str. 12