

# deja

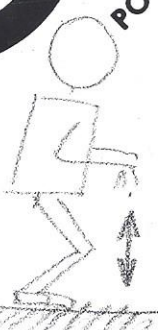
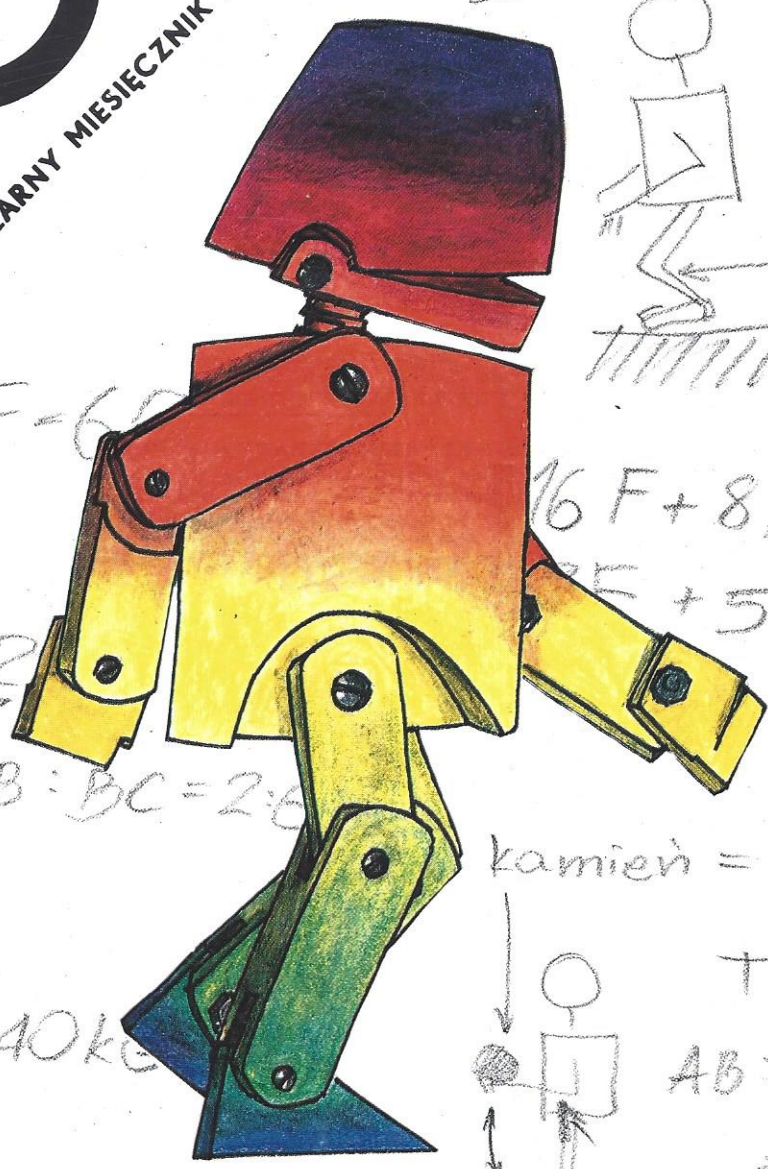
h=6.63·10<sup>-34</sup> J·s N=3,141593

CENA ZŁ 8000,-

NR 6 (229) 1993  
 PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X

POPULARNY MIESIĘCZNIK MATEMATYCZNO-FIZYCZNO-ASTRONOMICZNY

T = 56 kg  
 P = 45 kg !



$$16F + 8M = 3T$$

$$2F + 5M = 3P$$

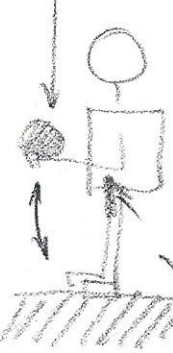
T, P = ?

AB : BC = 2 : 6

~~4P = 8F~~

P = 240 kg

kamień = 10 kg



T = ?

AB : BC : CD =  
 = 3 : 5 : 8

2T = 6F

T = 180 kg

≈ 1 kg

Dnia 29 maja 1993 roku

zmarł

**prof. dr hab. Wojciech Żakowski**  
wielce zasłużony dla upowszechnienia i nauczania matematyki  
Autor niesłychanie popularnych podręczników akademickich  
i zbiorów zadań

Wieloletni Przewodniczący Komitetu Redakcyjnego „Delta”

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 6(229)

Współpraca człowieka

z maszyną

*Jan Rusinek*

str. 1

Tęcza

*Grzegorz Derfel*

str. 1

Ciekawa tożsamość

str. 6

Co pisali inni

str. 7

Mała Delta

str. 8

Stała Davenporta, czyli sztuka  
zadawania pytań

*Marcin Mazur*

str. 9

Zadania

str.11

Modele mechaniczne stawów

*Kazimierz Mikulski*

str.12

Klub 44

str.14

Patrz w niebo

str.16

Epsilon

str.17

**W następnym numerze:**

Symetrie

Okładkę zaprojektował

*Bernard BADZIOCH*

Wydawca:

Uniwersytet Warszawski

Krakowskie Przedmieście 26/28

00-927 Warszawa

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego  
i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,  
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula  
Bogdan Cichoński  
Roman Duda  
Jan A. Gaj  
Tomasz Hofmokr – wiceprzewodniczący  
Tadeusz Jarzębowski  
Marcin Kubiak  
Andrzej Mąkowski  
Andrzej Pelczar  
Zbigniew Płochocki  
Zdzisław Pogoda  
Konrad Rudnicki  
Zbigniew Semadeni  
Grzegorz Sitarski  
Józef I. Smak  
Kazimierz Stępień  
Mieczysław Subotowicz  
Andrzej Szymacha  
Andrzej Woszczyk

Wojciech Żakowski – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

Krzysztof Biesaga  
Piotr Hajłasz  
Jan Kalinowski – z-ca red. nac.  
Krzyszyna Kordos – sekr. red.  
Marek Kordos – red. nac.  
Tomasz Kwast  
Stanisław Mrówczyński  
Anna Rudnik  
Joanna Udalska

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7

02-678 Warszawa

tel. 43-02-43 wewn. 21

DELTA@PLEARN.BITNET

Wydrukowano w Zakładach Graficznych  
w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem TeX wykonała redakcja.

#### WARUNKI PRENUMERATY w AMOS-ie

Od stycznia br. prenumeratę „Delta” prowadzi również firma AMOS, 01-506 Warszawa, ul. Szenwalda 1 (tel. 39-17-52). Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. Koszt trzech numerów wynosi 24 000,-zł (rocznika'93 – 96 000,-zł). Przy wpłacie prosimy zaznaczyć okres prenumeraty (co najmniej 3 miesiące).

Prenumerata zagraniczna trzech numerów wynosi 60 000,-zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** AMOS dostarcza „Deltę” pod wskazany adres nie pobierając dodatkowej opłaty. Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Blankiet pocztowy na prenumeratę „Delta” w AMOS-ie zamieszczamy na str.15/16.

Konto AMOS-u: PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-186

#### WARUNKI PRENUMERATY w RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na III kwartał 1993 r. wynosi 24 000,- zł.

3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.

4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:

– na teren kraju

– jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,

– na zagranicę

– „Ruch” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.

5. Terminy przyjmowania prenumeraty:

– na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego  
do 20 II na II kwartał  
do 20 V na III kwartał  
do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 8 000,- zł

# Tęcza

Grzegorz DERFEL

Tęcza jest dość powszechnym zjawiskiem meteorologicznym. Rzadko jednak występuje w pełnej krasie prezentując wszystkie szczegóły swojej budowy. Dlatego warto je wymienić.

Tęcza składa się z dwóch łuków. Łuk wewnętrzny, zwany pierwotnym, ma promień kątowy (kąąt widzenia promienia okręgu, którego fragmentem jest ten łuk) około  $42^\circ$ , łuk zewnętrzny („wtórny”) – około  $50^\circ$ . W łuku pierwotnym najbardziej wewnętrzną barwą jest fiolet, najbardziej zewnętrzną – czerwień. W łuku wtórnym kolejność barw jest odwrotna. Obszar między łukami stanowi pas wyraźnie ciemniejszy od reszty nieba. Wewnątrz łuku pierwotnego widoczne są czasem tak zwane łuki nadliczbowe, których najwyraźniejsze barwy to różowa i zielona. Środek wszystkich łuków leży na prostej przechodzącej przez Słońce i oko obserwatora. Wygląd tęczy bywa różny, zależnie od wielkości kropeł: duże krople o średnicy 1–0,5 mm dają tęczę o jaskrawych barwach, bardzo małe (0,05 mm) dają tęczę niemal białą. Światło pochodzące od tęczy jest prawie całkowicie spolaryzowane w płaszczyźnie padania.

Wobec uroku tęczy nikt chyba nie pozostaje obojętny. Zainteresowanie nią ma jednak podłoże nie tylko estetyczne. Tęcza stanowiła wyzwanie dla uczonych wszystkich epok. Na liście tych, którzy poświęcili jej uwagę, znajdujemy wiele znakomitych nazwisk. Można powiedzieć, że historia poznania tęczy ilustruje historię fizyki.

Udokumentowane wysiłki naukowego wyjaśnienia tęczy liczą sobie ponad 2000 lat. Już Arystoteles (384–322 p.n.e.) podjął taką próbę. Ustalił, że tęcza nie jest obiektem materialnym, lecz powstaje w oku obserwatora dzięki odbiciu światła słonecznego od kropełek tworzących chmurę. Z badaniem tęczy wiąże się też jedno z pierwszych doświadczeń przeprowadzonych przy świadomym wykorzystaniu modelu. Teodoryk z Freiburga w 1304 r. użył kulistych naczyń szklanych napełnionych wodą do odtworzenia drogi, wzdłuż której światło rozchodzi się w kroplach deszczu. Uzyskał poprawne wyniki, lecz ich interpretacja jest z dzisiejszego punktu widzenia nie do przyjęcia. Mimo to dzieło Teodoryka *De iride* („O tęczy”) pozostaje znaczące dzięki niescholastycznemu podejściu do problemu.

Nieprzemijającą wartość ma wyjaśnienie tęczy w ramach optyki geometrycznej podane w 1637 r. przez René Descartesa w traktacie *Les Météores*, poświęconym zjawiskom atmosferycznym. Podejście takie jest użytecznym przybliżeniem zamieszczanym dziś w wielu podręcznikach.

Dzięki pracochłonnym obliczeniom (z użyciem sformułowanego w 1621 r. przez Snella prawa załamania) Descartes znalazł drogi wielu promieni równoległych padających na kroplę w różnych jej punktach (to jest pod różnymi kątami). Promienie takie są pokazane na rysunkach 1 i 2 dla jednej barwy, dla której przyjęto współczynnik załamania  $n = 1,33$ . Pominięto promienie odbite i załamane, nie biorące udziału w tworzeniu tęczy.

# Współpraca człowieka z maszyną

Jan RUSINEK

Już blisko 200 lat temu pojawiły się po raz pierwszy maszyny grające w szachy. Były to jednak tylko mistyfikacje, bowiem we wnętrzu maszyny siedział człowiek i tylko obsługiwał urządzenie. Mimo tego zdobyły sobie one wielki rozgłos – poświęcano im nawet utwory literackie, a jeden z nich – opowiadanie A. Niemojewskiego *Szach i mat* doczekało się wersji filmowej, pokazywanej m.in. kilkakrotnie w naszej telewizji.

Pierwszą prawdziwą maszynę grającą w szachy skonstruował na początku XX wieku hiszpański wynalazca L. Torres y Quevedo. Maszyna ta potrafiła dawać mata samotnemu królowi za pomocą króla i wieży. Każdy grający w szachy wie, że algorytm dawania mata tymi dwiema figurami jest wyjątkowo prosty i łatwy.

Pierwsze maszyny potrafiące zmierzyć się z człowiekiem jak równy z równym pojawiły się dopiero wraz z burzliwym rozwojem informatyki w latach 70. Początkowo mogły one toczyć równą walkę tylko z amatorami, ale bardzo szybko ich siła gry zaczęła wzrastać i obecnie najlepsze z nich są w stanie nawiązać walkę nawet z czołową światową. Często organizatorzy turniejów w celu uatrakcyjnienia imprezy dopuszczają do gry komputery i dziś już chyba nie ma na świecie dobrego szachisty, który by nie przegrał choć raz (a przynajmniej nie miał poważnych kłopotów) z komputerem szachowym – może poza aktualnym mistrzem świata, Garri Kasparowem, który na razie spektakularnie wygrywa z komputerami wszystkie partie godnie broniąc honoru rodzaju ludzkiego.

Spore są też osiągnięcia komputerowe w pracach nad teorią szachów.

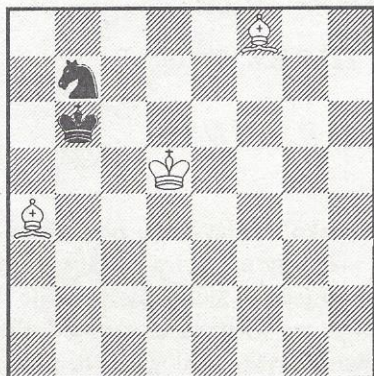
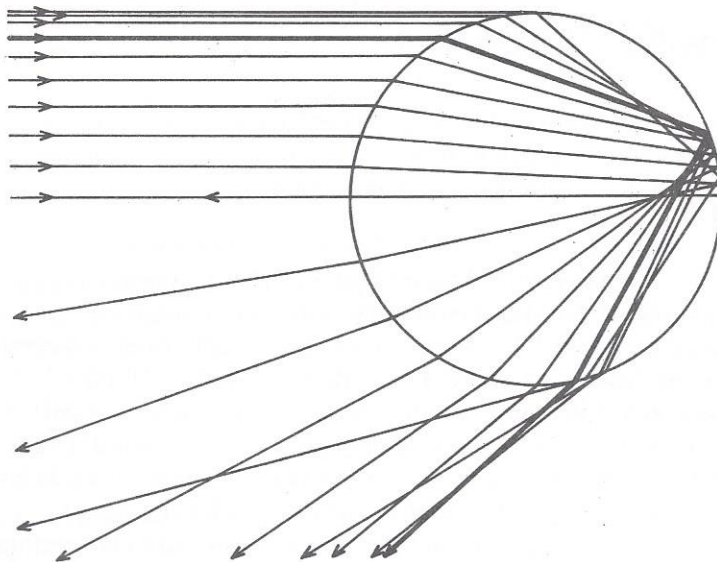


Diagram nr 1 przedstawia teoretyczną pozycję jeszcze z XIX wieku, która przez ponad 100 lat uchodziła za remisową. Amerykański programista, Ken Thompson, napisał w 1986 roku specjalny program na końcówkę 2 gońce przeciwko skoczkowi (bez pionów) i program ten wykazał, że dwa gońce **zawsze** wygrywają. Między innymi wygrana jest też pozycja nr 1 – przy czym w niektórych pozycjach z takim układem sił do osiągnięcia wygranej potrzeba ponad 60 posunięć.

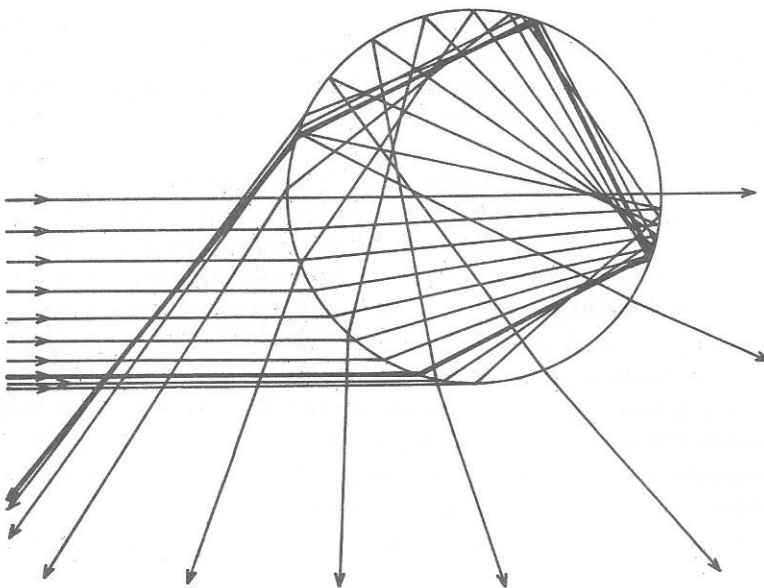
Wielką rolę odgrywają komputery w tzw. **kompozycji szachowej**. Kompozycja szachowa jest to jakby dziedzina sztuki, która posługuje się językiem szachów (tak jak np. malarstwo posługuje się językiem barw i kształtów, a muzyka językiem dźwięków). Na pewno każdy spotkał się na łamach rubryk szachowych z różnego typu zadaniami szachowymi, jak **Mat w określonej liczbie posunięć** lub **Wygrana** czy **Remis**. Najbardziej nieprzyjemną i niewdzięczną pracą autorów zadań szachowych jest sprawdzanie ich poprawności. Bowiem zadanie, aby było wartościowe, musi mieć dokładnie jedno (akurat to zaplanowane przez autora – ciekawe i zaskakujące) rozwiązanie. I właśnie człowieka w tym sprawdzaniu zaczynają na dobre zastępować komputery. Autor może więc więcej czasu poświęcić na pracę bardziej twórczą – na wymyślanie nowych idei i pomysłów, a komputer robi za niego „czarną robotę”. Jeśli chodzi o zadania w małej liczbie posunięć (do 5–6), to nawet

Rysunek 1 przedstawia bieg promieni po jednokrotnym odbiciu we wnętrzu kropli.



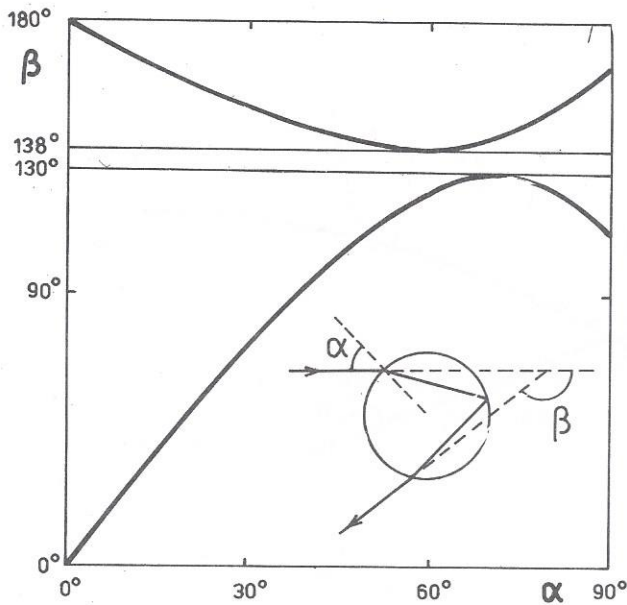
Rys. 1

Dają one łuk pierwotny. Łuk wtórny powstaje po dwukrotnym odbiciu przedstawionym na rysunku 2.



Rys. 2

Na obu rysunkach widać, że podczas gdy kąt padania  $\alpha$  przyjmuje wszystkie możliwe wartości, to kąt rozproszenia  $\beta$  (między promieniem padającym na kroplę i wychodzącym z niej) nie spada poniżej  $\beta_1 = 130^\circ$  przy jednokrotnym odbiciu i nie przewyższa  $\beta_2 = 138^\circ$  przy odbiciu dwukrotnym. Prawidłowości te przedstawia rysunek 3. Dzięki temu spostrzeżeniu staje się zrozumiałe istnienie ciemnego pasma oddzielającego łuki. Każda kropla, rozpraszając wiązkę promieni, wysyła je w dość znaczny kąt bryłowy, tak że do oka światło dochodzi z dużego obszaru nieba rozciągającego się pod i nad ciemnym pasmem. Trzeba więc wyjaśnić, dlaczego tęcza jest bardzo wąska.



Rys. 3

W sąsiedztwie ekstremalnych kątów  $\beta_1$  i  $\beta_2$  („kątów tęczy”), w tym samym kierunku wysyłanych jest wiele promieni rozproszonych. Powoduje to zwiększenie natężenia światła dochodzącego do obserwatora z tego kierunku. Mamy tu do czynienia z utworzeniem przez promienie ekstremalnie odchyłone powierzchni kaustycznej (*kaustikos* – palący). Dzięki podobniemu zjawisku koncentracji promieni powstaje znany każdemu obrazek widoczny na dnie kubka przy odbiciu światła od jego ścianek. Tęcza jest więc widoczna dzięki temu, że jest kaustyką. Zauważmy, że strumień energii wchodzący do kropli w przedziale kątów  $d\alpha$  wychodzi z niej w przedziale kątów  $d\beta$ . Natężenie światła wychodzącego rośnie więc ze wzrostem  $|d\alpha/d\beta|$ . Dokładnie przy kącie tęcowym, gdy  $|d\beta/d\alpha| = 0$ , natężenie światła powinno być nieskończenie duże. Ten kłopotliwy wynik jest konsekwencją przybliżonego charakteru optyki geometrycznej.

Powtórzenie tego rozumowania dla każdej barwy światła z uwzględnieniem właściwego dla niej współczynnika załamania wyjaśnia sekwencję barw w łukach pierwotnym i wtórnym. Takie wytłumaczenie tęczy jest przekonujące, chociaż przewiduje nieskończone natężenie światła i nie wspomina o łukach nadliczbowych.

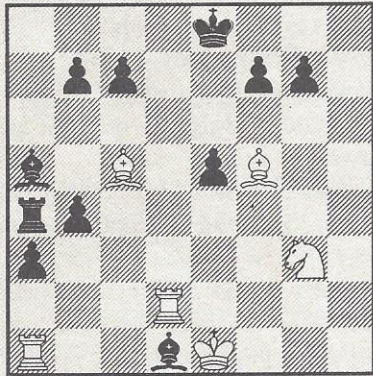
Dla usunięcia tych mankamentów trzeba uwzględnić falową naturę światła. Pierwsza falowa teoria tęczy pochodzi od Thomasa Younga, który w 1804 r. wyjaśnił istnienie prążków nadliczbowych interferencją fal wychodzących z kropli. Bardziej wnikliwie rozwiązał to zadanie George B. Airy w 1838 r., który przeprowadził obliczenia stosując zasadę Huygensa do czoła fali opuszczającej kroplę. Przekrój tego czoła płaszczyzną przechodzącą przez środek kropli ma kształt litery S, dobrze przybliżony krzywą trzeciego stopnia, z punktem przegięcia w miejscu przechodzenia promienia

mikrokomputery radzą sobie z nimi bez trudu. Gorzej jest z zadaniami dłuższymi – wówczas nawet duże maszyny są za wolne i czas potrzebny do pełnego rozwiązania staje się zbyt długi. Potrzebne są wówczas pewne pomysły pozwalające ten czas skrócić. Czasami prosty pomysł daje znakomite efekty. Taki przykład zademonstruję poniżej.

Zastanówmy się nad tym, jak działa program rozwiązujący zadanie szachowe. Przypuśćmy, że mamy do rozwiązania zadanie Mat w 2 posunięciach. Załóżmy, że białe mają  $k$  pierwszych ruchów:  $b_1, b_2, \dots, b_k$ ; na każdy ruch  $b_i$  czarne mają  $l_i$  odpowiedzi  $c_{i1}, \dots, c_{il_i}$ , i z kolei na każdy ruch  $c_{ij}$  jest  $m_{ij}$  ruchów białych  $b_{ij1}, \dots, b_{ijm_{ij}}$ . Komputer rozważa ruch  $b_1$  i sprawdza kolejno ruchy czarnych  $c_{11}, c_{12}, \dots$  itd. i jeśli po którymś z nich (np.  $c_{1j}$ ) okaże się, że żaden drugi ruch białych  $b_{1jp}$  nie jest matujący, to dalszych ruchów czarnych już nie sprawdza, bo wiadomo, że wówczas ruch  $1.b_1$  nie jest rozwiązaniem i komputer przechodzi do badania ruchu  $b_2$ . Widać z tego, że czas zużyty na analizę danego ruchu białych zależy od tego, jak prędko komputer natrafi na skuteczną odpowiedź czarnych. Co należy zatem zrobić? Trzeba tak ułożyć program, aby rozpoczynał on badanie od silnych ruchów czarnych. Ale skąd komputer ma wiedzieć, które ruchy są silne? Otóż statystycznie rzecz biorąc silne są posunięcia szachujące, bicia, dorobienia figury, ruchy silnymi figurami (hetmanem, wieżą). I tak jest też ułożona większość dobrych programów – rozpoczynają one analizę od statystycznie silnych posunięć. Czasami jednak „statystycznie silny” ruch nie jest najlepszy. Co wówczas zrobić? Ciekawy, choć prosty pomysł zastosował fiński programista, Ilkka Blom, w swoim programie ALYBADIX służącym do rozwiązywania zadań. Pomysł ten pozwala na „współpracę” człowieka z komputerem, w niektórych przypadkach znacznie skracającą czas rozwiązania. Otóż w swojej nowej wersji tego programu uzależnił on kolejność rozpatrywania ruchów od

kolejności wprowadzania figur do pamięci komputera. Pozwala to człowiekowi wpływać na czas rozwiązywania poprzez wybór dla każdego zadania optymalnej (tu trzeba się trochę znać na szachach) kolejności. Aby zademonstrować, jak ten pomysł okazał się efektywny, popatrzmy na diagram 2.

2. K. Wenda, 1966

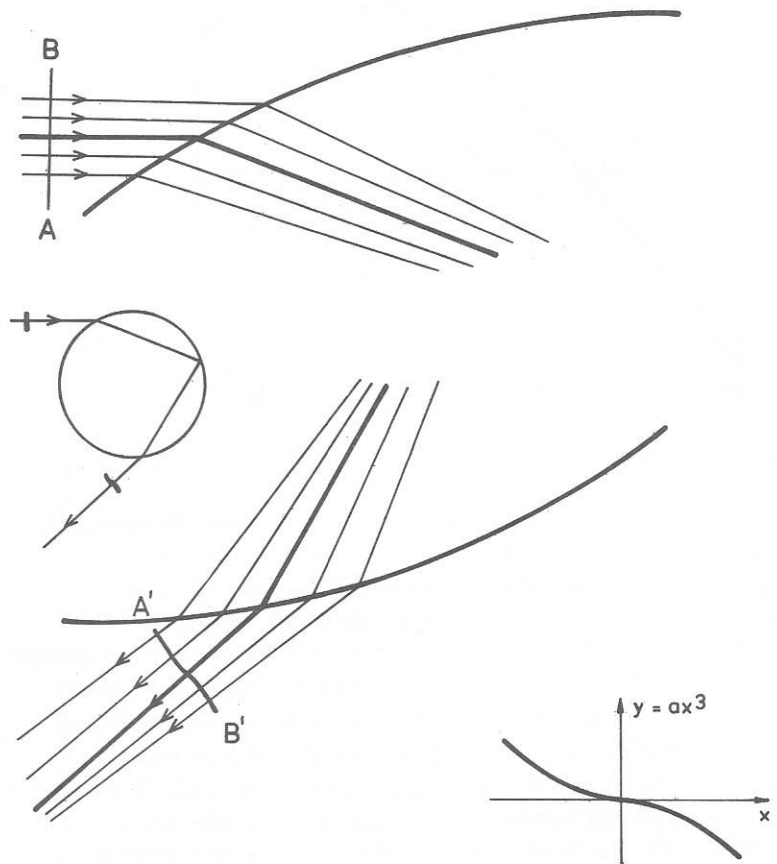


### Mat w 6 posunięciach

Program ALYBADIX na komputerze 386DX 33MHz przy standardowym wprowadzaniu na szachownicę figur, tzn. najpierw król, potem hetman itd. – na końcu pionki, rozwiązywał to zadanie 1 godzinę 55 minut. Jednak pobieżna analiza pokazuje, że w pozycji diagramu bardzo silnym posunięciem czarnych jest ruch 1. . . b4 – b3 włączający do gry wieżę i gońca. Zatem trzeba wprowadzanie czarnych figur rozpocząć od pionka b4. I rzeczywiście – przy takiej kolejności czas rozwiązywania wyniósł 9 minut 40 sekund, a więc był 12 razy krótszy! (Rozwiązanie zadania 2 jest następujące: 1.Sh5! G:h5 2.Gd7+ Kd8 3.Gg4+! Ke8 4.0-0-0 c6 5.Wd8+ G:d8 6.Gd7×, lub 4. . . f6 5.Gh5+ g6 6.G:g6×.)

Następny przykład jeszcze dobitniej pokazuje, jak wiele zależy od pomysłowości człowieka piszącego algorytm programu. Jednym z działów kompozycji szachowej są tzw. **maty pomocnicze**. W zadaniach tego typu zaczynają czarne i obie strony dążą do zamiatowania czarnego króla. Jest to chyba najbardziej matematyczny rodzaj zadań szachowych, bowiem zadanie

ekstremalnego. Rysunek 4 pokazuje, jak płaskie czoło  $AB$  fali padającej zostaje zastąpione przez wygięte czoło  $A'B'$  fali wychodzącej z kropki.

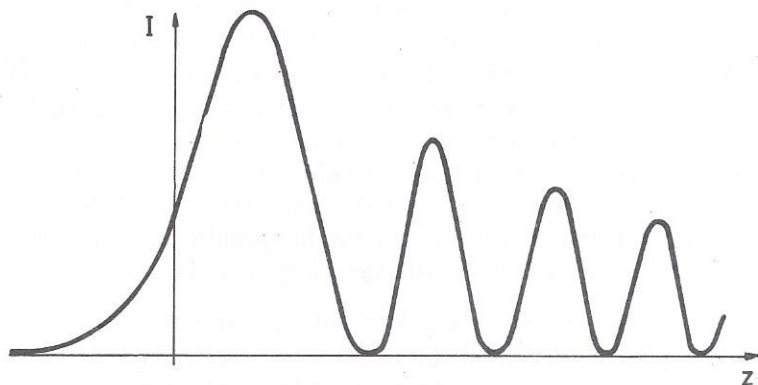


Rys. 4

Zbieżność promieni po jednej stronie promienia tęczowego i ich rozbieżność po drugiej oraz wygięcie linii  $A'B'$  są celowo przesadzone, aby wyraźniej przedstawić charakter zjawiska. Sumowanie fal pochodzących od wszystkich punktów czoła  $A'B'$  (przy założeniu, że amplituda jest wszędzie na tym czołe jednakowa) prowadzi do wyrażenia na względne natężenie  $I$  światła w zależności od kąta  $\Theta$  mierzącego odchylenie promienia od kierunku ekstremalnego. Natężenie to jest proporcjonalne do kwadratu tzw. całki tęczowej Airy'ego

$$f(z) = \int_0^{\infty} \cos \left[ \frac{\pi}{2} (u^3 - zu) \right] du.$$

(Nazwa „funkcja Airy'ego” używana jest częściej dla całki o nieco innej postaci.) Zmienne  $u$  i  $z$  są związane z kątem  $\Theta$  i współrzędną  $x$  punktu na froncie falowym oraz zależą od współczynnika załamania, promienia kropki, liczby odbić wewnętrznych i od długości fali. Dzięki temu wykres  $I(z)$ , pokazany na rysunku 5, ma charakter uniwersalny.



Rys. 5

Funkcja ta ma kilka cech, które lepiej odzwierciedlają rzeczywistość niż teoria geometryczna. Najwyższe maksimum odpowiada łukowi pierwotnemu i zastępuje nieskończone natężenie. Kolejne maksima dają łuki nadliczbowe. Zanik natężenia od strony ciemnej zachodzi nie skokowo, lecz płynnie. Kąt maksimum głównego jest nieco różny od kąta tęcowego. Ze wzrostem promienia kropli oraz przy zmniejszaniu długości fali kąty między sąsiednimi maksimami zmniejszają się. Nałożenie się rozkładów dla wszystkich długości fal daje barwną tęczę, której wygląd zależy od wielkości kropeł. Istotne jest przy tym względne natężenie danej barwy w widmie słonecznym, a także skończona średnica katowa Słońca.

Teoria Airy'ego była wielokrotnie porównywana z doświadczeniem w warunkach laboratoryjnych. Doświadczenia te często były dowodem wielkiego kunsztu eksperymentatorów. Felix Billet, na przykład, wykonał w latach 1863–1868 serię doświadczeń, w których badał tęczę powstałą na cienkich strużkach wody. Był w stanie zaobserwować tęczę 19 rzędów, a łuki nadliczbowe w 11 z nich. Stwierdzona zgodność położenia maksimów obserwowanych i obliczonych sprawiła, że teoria Airy'ego zyskała miano „kompletnej” teorii tęczy. Trzeba jednak pamiętać, że ona także stanowi przybliżenie dające wyniki słuszne ilościowo tylko dla kropli dużych ( $R > 0,5$  mm) i dla kątów różnych od tęcowego o nie więcej niż  $0,5^\circ$ . Poza tymi granicami rozkład natężenia  $I(z)$  światła może być traktowany jako przybliżenie jakościowe.

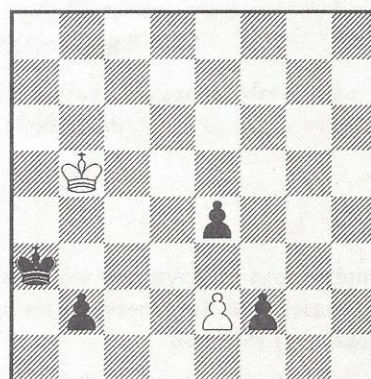
Teoria Airy'ego ma również pewne inne niedostatki. Przypadkowa bliskość wartości kąta padania promienia tęcowego wewnątrz kropli ( $40^\circ$ ) i kąta Brewstera (kąt padania, dla którego promień odbity jest prostopadły do załamane) dla granicy woda-powietrze ( $37^\circ$ ) jest odpowiedzialna za polaryzację tęczy. Teoria Airy'ego nie bierze pod uwagę polaryzacji przy odbiciu. Dlatego porównanie  $I(z)$  z rozkładem światła spolaryzowanego w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny padania ujawnia istotne rozbieżności, także jakościowe. Stosunkowo niedawno wykazano, że modyfikując teorię Airy'ego można uzyskać poprawne wyniki dla obu polaryzacji (S.D. Mobbs, *J. Opt. Soc. Am.*, **69**, 1089 (1979)). Oprócz światła odbitego wewnątrz kropli uwzględniono światło odbite od jej zewnętrznej powierzchni. Natężenia światła spolaryzowanego w płaszczyźnie padania oraz w płaszczyźnie prostopadłej do niej wyliczono dzięki współczynnikom odbicia danym wzorami Fresnela.

takie to po prostu zadanie konstrukcyjne na temat: wykorzystując reguły obowiązujące w szachach skonstruować pozycję matową w  $n$  posunięciach.

Czas rozwiązywania takich zadań przez komputery jest bardzo długi, bowiem komputer musi badać wszystkie posunięcia czarnych (i oczywiście białych) i nie może, tak jak w przypadku omawianym powyżej, przerwać analizy po „silnym ruchu czarnych”. Zadania w większej liczbie posunięć niż 4 – nawet bardzo proste, są nie do rozwiązania w sensownym czasie.

Dlatego wspomniany już Ilkka Blom postanowił zastosować algorytm oparty na metodzie rozwiązywania zadań przez człowieka. Otóż wprawny specjalista od rozwiązywania zadań nigdy nie rozwiązuje matów pomocniczych sprawdzając ruch po ruchu. Robi to „od końca”. Najpierw stara się skonstruować pozycję matową za pomocą materiału obecnego na szachownicy, a jeśli mu się to uda, to szuka zgodnej z regułami gry drogi do tej pozycji. Jak zwierzył się autor programu, praca nad takim algorytmem trwała wiele lat (niełatwo jest imitować rozumowanie człowieka!), ale program ten (nazwany przez autora HELPBADIX INTELLIGENT!) okazał się w przypadku niektórych zadań rewelacyjny.

S. T. Kardos, 1956



Mat pomocniczy w 7 posunięciach

Czas rozwiązywania zadania nr 3 na wspomnianym komputerze przez standardową wersję programu ALYBADIX (tzn. sprawdzającą ruch po ruchu) wyniósłby około 20 000 godzin!

Zauważmy, że na szachownicy są tylko dwie białe bierki mające do dyspozycji przez całą grę około 7 posunięć – na przykład przy podobnych czterech białych bierkach czas byłby już około  $2^7$  razy dłuższy (dlaczego?), a przy większej liczbie czas byłby długi niewiarygodnie.

Natomiast program HELPBADIX INTELLIGENT rozwiązał powyższe zadanie w 1 godzinę 22 minuty.

(Rozwiązał, tzn. znalazł rozwiązanie i sprawdził, że nie ma innych.)

(Rozwiązanie zadania 3 – w matach pomocniczych przyjęło się rozpoczynać numerowanie posunięć od ruchu czarnych! – 1.f1W e3 2.Wf4 ef4 3.e3 f5 4.e2 f6 5.e1W f7 6.Wa1 f8W 7.Wa2 Wf3×.)

Przykłady te pokazują z jednej strony nieocenioną pomoc, jaką mogą oddać człowiekowi komputery, a z drugiej wielce dla nas budującą tezę, że jednak „decydujące posunięcie” należy do człowieka i że największe sukcesy ma komputer tam, gdzie z człowiekiem współpracuje lub gdzie „próbuje” go naśladować.

Problem rozkładu natężenia światła w tęczy można także rozwiązać ściśle wykorzystując teorię niemieckiego fizyka Gustawa Mie, który w 1908 r. wykazał, że natężenie fali elektromagnetycznej rozproszonej na kuli może być obliczone z dowolną dokładnością dla dowolnego kąta rozproszenia. Natężenie może być przedstawione jako suma szeregu składników o dość złożonej postaci reprezentujących fale cząstkowe. W przypadku tęczy zachodzi konieczność uwzględnienia kilku tysięcy składników szeregu. Niebanalny problem stanowi przy tym znalezienie jak najefektywniejszego algorytmu obliczeń.

Możliwość uzyskania ścisłych wyników numerycznych nie oznacza końca teoretycznych prac nad tęczą. Ważnym osiągnięciem jest zaadaptowanie do jej opisu aparatu matematycznego stosowanego w teorii rozproszenia cząstek. Zaproponowano także powiązanie wyglądu naturalnej tęczy z rozkładem wielkości kropel deszczu oraz z elipsoidalnym spłaszczeniem największych spośród nich.

## Ciekawa tożsamość

Udowodnimy następującą zaskakującą tożsamość

$$1^k + 2^k - 3^k + 4^k - 5^k - 6^k + 7^k + 8^k - \dots \pm (2^n - 1)^k = 0,$$

gdzie  $k, n$  ( $k < n$ ) są dowolnymi liczbami naturalnymi oraz składnik  $m^k$  występuje ze znakiem plus, jeśli w zapisie dwójkowym liczby  $m$  występuje nieparzysta liczba jedynek i ze znakiem minus w przeciwnym przypadku.

**Dowód.** Proste wymnożenie prowadzi do tożsamości

$$1 - (1 - e^x)(1 - e^{2x})(1 - e^{4x}) \dots (1 - e^{2^{n-1}x}) = e^x + e^{2x} - e^{3x} + e^{4x} - e^{5x} - \dots - (-1)^n e^{(2^n - 1)x}.$$

Nietrudno przekonać się, że znak przy składniku  $e^{mx}$  po prawej stronie jest taki sam jak znak przy  $m^k$  w wyrażeniu z treści zadania.

Zróżniczkujemy powyższą równość  $k$ -krotnie ( $k < n$ ), a następnie podstawmy  $x = 0$ . Ponieważ  $k$ -ta pochodna  $e^{mx}$  jest równa  $m^k e^{mx}$ , więc po podstawieniu  $x = 0$  po prawej stronie otrzymamy badane wyrażenie

$$1^k + 2^k - 3^k + 4^k - 5^k - \dots - (-1)^n (2^n - 1)^k.$$

Teraz zbadamy lewą stronę.

Po lewej stronie różniczkujemy iloczyn złożony z  $n$  czynników. Stosując  $k$ -krotnie wzór na pochodną iloczynu otrzymamy, że  $k$ -ta pochodna lewej strony jest równa sumie wyrażen postaci

$$-(1 - e^x)^{(k_1)} (1 - e^{2x})^{(k_2)} \dots (1 - e^{2^{n-1}x})^{(k_n)},$$

gdzie  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$ , a przez  $(1 - e^{2^{m-1}x})^{(k_m)}$  oznaczyliśmy  $k_m$ -tą pochodną wyrażenia  $1 - e^{2^{m-1}x}$ .

Ponieważ  $k < n$ , więc dla pewnego  $m$  zachodzi  $k_m = 0$ . Oznacza to, że w powyższym iloczynie czynnik  $(1 - e^{2^{m-1}x})$  nie jest różniczkowany. Po podstawieniu  $x = 0$  czynnik ten będzie równy 0, a stąd i cała lewa strona będzie równa 0. Porównując ją z prawą stroną otrzymujemy tezę.

Paweł STRZELECKI





### Rozwiązanie zadania M 670.

Rozważmy liczby

$$0, x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Wówczas pewne dwie spośród nich, np.

$$x_1 + \dots + x_k, x_1 + \dots + x_{k+1}$$

dają tę samą resztę przy dzieleniu przez  $n$  (jest

ich  $n + 1$ , a możliwych, różnych od zera

reszt, tylko  $n$ ). Stąd ich różnica, czyli

$$x_{k+1} + \dots + x_{k+1}$$

dzieli się przez  $n$ .

O uogólnieniach tego zadania Czytelnik

może dowiedzieć się z artykułu Marcina

Mazura.

## Co pisali inni

Mikołaj Kopernik był nie tylko astronomem, ale także lekarzem. Większość jego biografów twierdzi, że współczesnym był bardziej znany jako lekarz niż jako astronom.

Oto treść jego najślynniejszej recepty, którą zanotował na okładce *Elementów* Euklidesa:

„Weź gliny armeńskiej dwie uncje, cynamonu 1/2 uncji, cytwaru 2 drachmy, korzenia kurzego ziela, dyptanu, czerwonych sandałów po 2 drachmy, oskrobków kości słoniowej i szafranu po 1 drachmie, popiołu i kwaśnej róży po 2 skrupuły, skórki cytrynowej i pereł po 1 drachmie, szmaragdu, czerwonego hiacyntu, szafiru po 1 skrupule, kości z serca jelenia 1 drachmę, szarańczy morskiej, rogu jednorożca, czerwiego koralu, złota, srebra w listkach po 1 skrupule, cukru pół funta albo ile trzeba, aby zrobić proszek.”

Aby uwiarygodnić tę receptę, dodajmy, że „kość z serca jelenia” była medykamentem figurującym we wszystkich spisach leków od XIII do XVIII wieku.



### Rozwiązanie zadania M 671.

Warunek postawiony w treści

zadania oznacza, że  $[x]^2 = x(x - [x])$

( $[a]$  oznacza część całkowitą

liczby  $a$ ). Stąd, rozwiązując równanie

kwadratowe względem  $x$ , otrzymujemy

$$x = [x](1 + \sqrt{5})/2$$

(drugi pierwiastek

jest ujemny). Z własności części

całkowitej mamy teraz

$$[x] + 1 > x = [x] \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

czyli

$$[x] < \frac{2}{\sqrt{5} - 1} < 2.$$

To oznacza, że  $[x] = 0$  lub  $[x] = 1$ .

W pierwszym przypadku  $x = 0$ , czyli

nie jest spełniony jeden z warunków

zadania, w drugim  $x = (1 + \sqrt{5})/2$ .

„Matematyka jest to królowa nauk; jej ulubieńcem jest prawda, a prostota i oczywistość jej strojem. Ale przybytek tej monarchini jest obsadzony cierniem, po którym przechodzić trzeba, – nie ma on powabu – (jak) tylko dla umysłów zamilowanych w prawdzie i lubiących walczyć z trudnościami. – Co także pokazuje niepospolitą i wyższego rzędu skłonność człowieka do zawyłych zaiste, ale trwałych i wyniosłych rozkoszy umysłowych, uzacniającego naturę ludzką.

Matematyka, która tyle zrobiła przysług społeczeństwu, naukom i sztukom, stanie się jeszcze wodzem ludzkiego umysłu we wszystkich poznawaniach.”

Jan Śniadecki

„Żeby więc odbyć podróż międzyplanetarną w wozie, mającym wraz z podróżnymi masę 1 tony, należałoby zabrać z sobą 160 000 ton materiałów pędnych, co jest oczywiście niemożliwe. Dowodzi to, że przy dzisiejszym stanie techniki podróż taka jest niewykonalna. Sprawa posunęłaby się naprzód, gdybyśmy mogli wydatnie zwiększyć  $w$ , tj. prędkość wypływu gazów, która dzisiaj, praktycznie biorąc, dochodzi do 2000 m/sek.”

Jest to fragment z dwutomowej monografii Stefana Banacha *Mechanika w zakresie szkół akademickich* wydanej w 1938 roku.

„Zajmowanie się geometrią i rozważanie tematów trudnych do zrozumienia może zająć człowiekowi całe życie i odciągnąć go od pożytecznych umiejętności.”

Sokrates (wg Ksenofonta)

„Pewnego razu głupiec zapytał Newtona o to, jak odkrył prawo powszechnego ciężenia. Widząc z kim ma do czynienia i chcąc się pozbyć natręta Newton odpowiedział, że spadające jabłko trafiło go w nos. I głupiec odszedł zadowolony, że teraz już wie.”

Carl Gauss



### Rozwiązanie zadania M 672.

Oznaczmy długości boków trójkąta

przez  $a, b = a + x, c = a + 2x, x > 0$ .

Z twierdzenia Pitagorasa dostaniemy

po prostym rachunku

$$0 = a^2 + b^2 - c^2 = (a + x)(a - 3x),$$

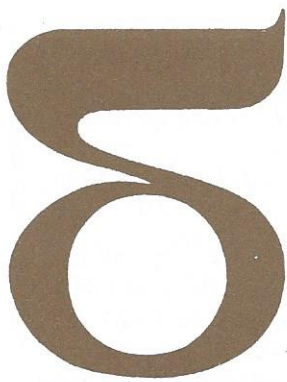
skąd  $a = 3x, b = 4x, c = 5x$ . Promień

okręgu wpisanego w trójkąt jest, jak

dobrze wiadomo, równy ilorazowi

podwojonego pola przez obwód, co daje

$$r = \frac{ab}{a + b + c} = \frac{12x^2}{12x} = x.$$



# mała delta

## W którą stronę?

W obracających się układach zjawiska fizyczne przebiegają inaczej niż w układach nie obracających się. Łatwo się o tym przekonać spacerując po obracającej się karuzeli lub poruszając się w autobusie na zakręcie. Spróbujmy odpowiedzieć na proste pytanie: czy płomień świecy w takim układzie ulegnie odchyleniu, a jeśli tak, to w którą stronę?

Można próbować zrobić doświadczenie ze świeczką na karuzeli. Proponujemy w zamian wykonanie prostego doświadczenia w domu.

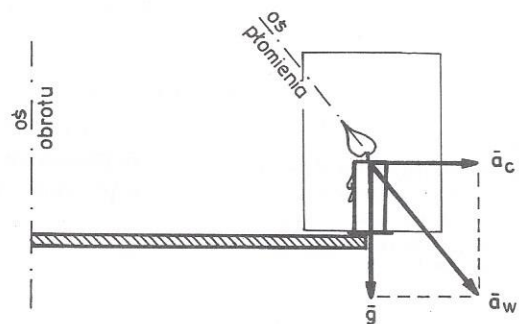
W pojemniku z przezroczystymi ściankami (możemy do tego celu wykorzystać np. butelkę plastikową po oleju) umieszczamy świeczkę. Denko i przykrywka muszą mieć otworki umożliwiające dopływ powietrza i odpływ gazów powstających przy spalaniu. Pojemnik mocujemy w pozycji pionowej na końcu pręta o długości około pół metra (może to być kij od szczotki). Gdy pojemnik znajduje się w spoczynku, oś płomienia skierowana jest pionowo. Obracając pręt w płaszczyźnie poziomej wprawiamy świeczkę w ruch po okręgu (wystarczy około jednego obrotu na sekundę). Pojemnik plastikowy potrzebny jest jedynie do osłony płomienia świecy. Możemy teraz zaobserwować, w którą stronę wychyli się płomień świecy.

Wychyla się w kierunku do osi obrotu. Dlaczego? Płomień świecy to gazy o gęstości mniejszej od gęstości powietrza. Z tego powodu, gdy świeca spoczywa, gazy te poruszają się ku górze, to jest

w kierunku przeciwnym do wektora przyspieszenia grawitacyjnego  $\vec{g}$ .

Gdy świeca porusza się po okręgu, musimy uwzględnić przyspieszenie odśrodkowe  $\vec{a}_c$ .

Oś płomienia skierowana będzie teraz w kierunku przeciwnym do wektora przyspieszenia wypadkowego  $\vec{a}_w = \vec{g} + \vec{a}_c$  (rys.).



Tak więc oś płomienia odchyli się w kierunku do osi obrotu, a nie na zewnątrz, jak wydawało się wielu osobom, które bez zastanowienia udzielały mi odpowiedzi na postawione pytanie.

*Małą Deltę przygotował Jacek CIBOROWSKI*

# Stała Davenporta, czyli sztuka zadawania pytań

Marcin MAZUR

Powszechnie znany i bardzo prosty fakt, że spośród dowolnych  $n$  liczb całkowitych można wybrać pewną ilość tak, by ich suma była podzielna przez  $n$ , sięga czasów starożytnych (tak przynajmniej twierdzi Paul Erdős – jeden z wybitniejszych matematyków naszego stulecia). Jeśli Czytelnik nie zna przypadkiem tego stwierdzenia, proponuję przed przystąpieniem do dalszego czytania rozwiązać zadanie M 670 w tym numerze *Delty*.

Bądźmy jednak bardziej dociekliwi i zapytajmy, czy spośród dowolnych  $n$  liczb naturalnych można wybrać pewną ilość tak, by ich suma dawała resztę  $r$  przy dzieleniu przez  $n$ , gdzie  $0 \leq r < n$  jest dowolną, ustaloną liczbą naturalną. Na tak postawione pytanie odpowiedź brzmi: nie. Weźmy bowiem  $n = 4$ ,  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 2$  oraz  $r = 1$ . Wówczas żadna suma nie da reszty 1 (bo zawsze będzie parzysta). Widać jednak, jaka jest tego przyczyna: wszystkie  $a_i$  mają wspólny dzielnik z  $n$ . Załóżmy więc, że nasze pytanie ograniczymy do liczb  $a_i$  względnie pierwszych z  $n$ . Okazuje się, że w tym przypadku odpowiedź jest pozytywna. Zachodzi bowiem następujący

**Lemat:** Załóżmy, że każda z liczb całkowitych  $a_1, \dots, a_k$  jest względnie pierwsza z  $n$ , gdzie  $k$  i  $n$  ( $k < n$ ) są liczbami naturalnymi. Utwórzmy wszelkie możliwe sumy tych liczb (bez powtórzeń). Wówczas otrzymane liczby dają co najmniej  $k$  różnych niezerowych reszt przy dzieleniu przez  $n$ .

Aby udowodnić powyższy lemat, posłużymy się indukcją matematyczną ze względu na  $k$ . Otóż, dla  $k = 1$  nie ma czego dowodzić: ponieważ  $a_1$  jest względnie pierwsze z  $n$ , to daje niezerową resztę przy dzieleniu przez  $n$ . Załóżmy więc, że nasz lemat prawdziwy jest dla pewnego  $k < n - 1$  i rozpatrzmy  $k + 1$  liczb całkowitych  $a_1, \dots, a_{k+1}$  względnie pierwszych z  $n$ . Na mocy założenia indukcyjnego rozpatrując wszelkie możliwe sumy różnych wyrazów ciągu spośród  $a_1, \dots, a_k$  otrzymamy liczby dające co najmniej  $k$  różnych niezerowych reszt  $b_1, \dots, b_k$  przy dzieleniu przez  $n$ . Niech  $i$  będzie taką najmniejszą liczbą naturalną, że  $i \cdot a_{k+1}$  przy dzieleniu przez  $n$  daje resztę różną od  $b_1, \dots, b_k$ . Wówczas  $i \leq k + 1 < n$  (ponieważ  $a_{k+1}$  jest względnie pierwsze z  $n$ , więc liczby  $a_{k+1}, 2a_{k+1}, \dots, (k+1)a_{k+1}$  dają różne, niezerowe reszty przy dzieleniu przez  $n$  (dlaczego?)). Wobec tego  $(i-1)a_{k+1}$  daje przy dzieleniu przez  $n$  resztę taką, jak suma pewnych liczb spośród  $a_1, \dots, a_k$  lub jest to liczba 0 (jeśli  $i = 1$ ). W obu przypadkach  $ia_{k+1} = (i-1)a_{k+1} + a_{k+1}$  daje z dzielenia przez  $n$  resztę  $b_{k+1}$  taką samą, jak pewna suma liczb spośród  $a_1, \dots, a_{k+1}$  i w dodatku reszta ta jest niezerowa i różna od  $b_1, \dots, b_k$ . Tym samym lemat jest prawdziwy dla  $k + 1$ . Na mocy indukcji matematycznej dowód jest zakończony.

Wspomniany na wstępie fakt nic nie mówi o ilości liczb, których suma ma być podzielna przez  $n$ . Czy nie można (być może zakładając, że mamy więcej niż  $n$  liczb) zagwarantować, by istniało wśród nich dokładnie  $k$  liczb, których suma jest podzielna przez  $n$ ? Jeśli  $k < n$ , to nie, bo spośród żadnej liczby jedynek nie można wybrać  $k$  o sumie podzielnej przez  $n$ . Podobnie rzecz ma się dla  $k$  niepodzielnych przez  $n$ . Jeśli jednak  $k = n$ , to okazuje się, że odpowiedź jest pozytywna. Jeśli bowiem mamy  $n(n-1) + 1$  liczb całkowitych, to pewne  $n$  z nich dają taką samą resztę przy dzieleniu przez  $n$  (dlaczego?), a więc ich suma jest podzielna przez  $n$ . Naturalne wydaje się więc zapytać, ile co najmniej potrzeba liczb całkowitych, by zawsze można było wybrać spośród nich  $n$  liczb o sumie podzielnej przez  $n$ . Szukana liczba jest z pewnością większa od  $2(n-1)$ , bo jeśli  $a_1 = \dots = a_{n-1} = 1$  i  $a_n = a_{n+1} = \dots = a_{2(n-1)} = 0$ , to suma  $n$  dowolnych spośród nich nie dzieli się przez  $n$ . Okazuje się jednak, że prawdziwe jest następujące twierdzenie udowodnione w 1961 roku przez P. Erdősa, A. Ginzburga i A. Ziva:

**Twierdzenie EGZ:** Spośród dowolnych  $2n - 1$  liczb całkowitych można wybrać  $n$  liczb, których suma dzieli się przez  $n$ .

Teza twierdzenia dla  $n = 100$  była przedmiotem jednego z zadań olimpiady matematycznej w ZSRR. Istnieje kilka dowodów twierdzenia EGZ (ponoć twierdzenie jest tym prawdziwsze, im więcej jest jego dowodów). Przytoczmy teraz jeden z nich. Przede wszystkim zredukujmy nasz problem do liczb pierwszych. W tym celu zauważmy, że jeśli twierdzenie EGZ jest prawdziwe dla liczb  $n_1, n_2$ , to jest również prawdziwe dla  $n_1 \cdot n_2$ . W samej rzeczy, rozpatrzmy  $2n_1 \cdot n_2 - 1$  liczb całkowitych. Ponieważ twierdzenie EGZ zachodzi dla  $n_1$ , więc Czytelnik bez trudu uzasadni, że spośród tych liczb można tak wybrać  $2n_2 - 1$  rozłącznych układów po  $n_1$  liczb, że suma liczb każdego układu jest podzielna przez  $n_1$  (ogólnie, spośród  $s \cdot n_1 - 1$



## Rozwiązanie zadania F 359.

Gęstość prądu elektronów płynących z powietrza do naelektryzowanego ekranu jest równa  $j = \sigma E$ , a więc prąd wynosi  $I = \sigma E \cdot s$ , gdzie  $s$  jest powierzchnią ekranu. Ładunek elektronów, a zatem i jonów pozostających w powietrzu wynosi  $q = \sigma E \cdot s \cdot t$ , gdzie  $t$  jest czasem pracy. Z drugiej strony ładunek, przy jakim odczuwamy dyskomfort, jest równy  $q = 100 \text{ V} e$ , gdzie  $V$  jest objętością pokoju, a  $e$  ładunkiem elektronu.

Ostatecznie  $t = \frac{100 \text{ V} e}{\sigma E s}$ . Podstawiając dane liczbowe otrzymujemy  $t = 1,4$  godziny.



## Rozwiązanie zadania F 360.

Z prawa Stefana-Boltzmann'a wyznaczamy moc Słońca  $P = \sigma T^4 \cdot S$ , gdzie  $S = 4\pi R^2$  jest powierzchnią Słońca, a  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$  jest stałą Stefana-Boltzmann'a.

We wnętrzu Słońca musi zachodzić  $P/E$  cykli termojądrowych na sekundę. Liczba neutronów emitowanych w ciągu sekundy wynosi  $N = \frac{2P}{E} = \frac{2\sigma T^4 \cdot 4\pi R^2}{E} \approx 2 \cdot 10^{38} \text{ s}^{-1}$ .

Przyjmując, że powierzchnia ciała jest rzędu  $1 \text{ m}^2$  otrzymujemy

$$\frac{N}{4\pi d^2} \approx 10^{15} \text{ s}^{-1}\text{m}^{-2}.$$

liczb całkowitych można wybrać  $s - 1$  takich układów (dlaczego?). Niech  $b_i$  oznacza sumę  $i$ -tego układu. Wówczas liczby  $\frac{b_i}{n_1}$  są całkowite i jest ich  $2n_2 - 1$ , a więc spośród nich można wybrać  $n_2$  liczb o sumie podzielnej przez  $n_2$  (bo twierdzenie EGZ zachodzi dla  $n_2$ ). Niech będą to  $\frac{b_{i_1}}{n_1}, \dots, \frac{b_{i_{n_2}}}{n_1}$ . Zatem liczba  $b_{i_1} + \dots + b_{i_{n_2}}$  jest podzielna przez  $n_1 \cdot n_2$  i wobec określenia  $b_i$  jest ona sumą  $n_1 \cdot n_2$  liczb spośród rozpatrywanych, co dowodzi, że twierdzenie EGZ jest prawdziwe również dla  $n_1 \cdot n_2$ . Udowodniony fakt i prosta indukcja pozwalają ograniczyć się w dalszym ciągu do liczb pierwszych (które, zgodnie z tradycją, oznaczamy literą  $p$ ). Ponadto możemy założyć, że nasze  $2p - 1$  liczb spełnia nierówność

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{2p-1} < p \text{ (dlaczego?)}$$

Niech  $d_i = a_{p+i} - a_i$ , dla  $i = 1, \dots, p - 1$ . Zatem  $0 \leq d_i < p$ . Jeśli  $d_i = 0$  dla pewnego  $i$ , to  $a_i = a_{i+1} = \dots = a_{i+p}$ , a stąd suma  $p$  liczb  $a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+p-1}$  jest podzielna przez  $p$ . Jeśli wszystkie  $d_i$  są różne od 0, to stosując lemat dla  $n = p$  i liczb  $d_1, \dots, d_{p-1}$  (które są względnie pierwsze z  $p$ ) otrzymamy, że każda niezerowa reszta z dzielenia przez  $p$ , czyli dowolna liczba spośród  $1, 2, \dots, p - 1$ , jest resztą z dzielenia przez  $p$  sumy pewnych liczb spośród  $d_i$ . Zatem albo  $a_1 + \dots + a_p$  jest podzielna przez  $p$ , albo istnieją takie  $i_1 < i_2 < i_3$ , że  $d_{i_1} + \dots + d_{i_3}$  daje taką samą resztę przy dzieleniu przez  $p$ , jak  $-(a_1 + \dots + a_p)$ . Ale w drugim przypadku liczba  $a_1 + \dots + a_p + d_{i_1} + \dots + d_{i_3}$  jest podzielna przez  $p$ . Ponieważ liczba ta jest sumą  $p$  spośród liczb  $a_1, \dots, a_{2p-1}$  (dlaczego?; zauważmy, że  $a_1 + \dots + a_p + d_1 = a_2 + \dots + a_{p+1}$  itd.), więc w każdym przypadku w ciągu  $a_1, \dots, a_{2p-1}$  istnieje  $p$  wyrazów o sumie podzielnej przez  $p$ , co kończy dowód twierdzenia EGZ.

Okazuje się, że stosując nieco subtelniej powyższą metodę można wykazać (co pozostawiamy Czytelnikowi), że wśród  $2n - 2$  liczb całkowitych albo istnieje  $n$ , których suma jest podzielna przez  $n$ , albo można je tak podzielić na dwa podzbiory po  $n - 1$  liczb, że w każdym z tych podzbiorów wszystkie liczby dają takie same reszty przy dzieleniu przez  $n$ .

Następne pytanie, jakie postawimy, będzie starało się uogólnić uczynioną na wstępie obserwację jeszcze głębiej i doprowadzi do tytułowej stałej Davenporta -  $d$ . Niech więc dane będą liczby naturalne  $n_1, \dots, n_k$ , wszystkie większe od 1. Będziemy rozpatrywać  $k$ -wyrazowe ciągi złożone z tych liczb. Pytanie, jakie sobie zadamy, brzmi następująco: Jaka jest najmniejsza liczba naturalna  $d = d(n_1, \dots, n_k)$ , taka, że spośród dowolnych  $d$  takich ciągów  $k$ -wyrazowych można wybrać pewną ich liczbę tak, by suma  $i$ -tych wyrazów wybranych ciągów była podzielna przez  $n_i$  dla każdego  $1 \leq i \leq k$ . Oczywiście, jeśli  $k = 1$ , to stwierdzenie z początku artykułu daje  $d(n_1) = n_1$  (bo nie może być  $d(n_1) < n_1$  (dlaczego?)).

Okazuje się, że odpowiedź na tak zadane pytanie do dziś pozostaje otwartym problemem matematycznym. Przed przystąpieniem do dokładniejszego omówienia postawionego problemu wprowadzimy parę pojęć, które ułatwią nam rozważania. Wzbogacenie języka matematycznego niejednokrotnie przyczyniło się do rozwiązania problemu, którego przez długi czas nie udawało się ogarnąć, o czym Czytelnik studiujący matematykę z pewnością nieraz się przekonał. Przede wszystkim przez  $n$  będziemy oznaczali ciąg  $(n_1, \dots, n_k)$ . Resztą z dzielenia ciągu liczb całkowitych  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$  przez  $n$  będziemy nazywali taki ciąg  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_k)$ , że  $r_i$  jest resztą z dzielenia  $a_i$  przez  $n_i$  dla każdego  $i$  ( $1 \leq i \leq k$ ). Powiemy, że  $n$  dzieli  $\mathbf{a}$ , jeśli reszta  $\mathbf{r}$  jest  $(0, \dots, 0)$ . Ponadto sumą dwóch ciągów  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  i  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  będziemy nazywali ciąg  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$ , gdzie  $c_i = a_i + b_i$  dla  $i = 1, \dots, k$ . Podobnie określamy różnicę. Możemy teraz nasz problem sformułować następująco: Jaka jest najmniejsza liczba  $d = d(n_1, \dots, n_k) = d(\mathbf{n})$ , taka, że spośród dowolnych  $d$  ciągów  $k$ -wyrazowych można tak wybrać pewną ilość, by ich suma była podzielna przez  $n$ .

Teraz możemy wykazać, że taka liczba  $d$  rzeczywiście istnieje, a nawet, że  $d \leq n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ . Istnieje bowiem  $n_1 \cdot \dots \cdot n_k$  różnych reszt przy dzieleniu przez  $n$ . Jeśli więc rozpatrzymy  $n_1 \cdot \dots \cdot n_k$  ciągów  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n_1 \cdot \dots \cdot n_k}$ , to wśród sum  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_{n_1 \cdot \dots \cdot n_k}$  albo będzie ciąg dający resztę zero przy dzieleniu przez  $n$ , albo pewne dwa będą dawały taką samą resztę; jeśli będą to  $\mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_k + \mathbf{a}_{k+1} + \dots + \mathbf{a}_s$ , wówczas ciąg  $\mathbf{a}_{k+1} + \dots + \mathbf{a}_s$  da resztę zero. W każdym przypadku otrzymamy sumę pewnych  $\mathbf{a}_i$  podzielną przez  $n$ . (Zauważmy, że dowód ten jest niemal identyczny z rozwiązaniem zadania M 670, w którym dowodzimy własności sformułowanej na początku artykułu.) Okazuje się jednak, że  $d(n_1, \dots, n_k)$  jest często dużo mniejsze od  $n_1 \cdot \dots \cdot n_k$ .

#### Pan Aleksander Durniatt

Starosiedle 25

66-633 Stargard Gubiński

poszukuje archiwalnych numerów DELTY:

5, 8 z 1978 r., 4, 6 oraz 8-12 z 1981 r., 5, 6 z 1982 r., 1 z 1985 r., 7 z 1987 r., 9, 10 z 1988 r., 8 z 1989 r.

Oferuje na zamianę:

11 z 1974 r., 6, 8, 11 z 1976 r., 8, 10, 12 z 1977 r., 1, 9, 12 z 1978 r., 1, 10, 11 z 1979 r., 9, 10, 12 z 1980 r., 1, 2 z 1981 r., 10 z 1986 r., 4 z 1987 r.

Żeby dokładniej przyjrzeć się naszemu problemowi, ograniczymy dopuszczalne ciągi  $\mathbf{n}$ . W tym celu rozpatrzmy dla liczby pierwszej  $p$  następującą operację  $T_p$ : jeśli  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k)$ , to można napisać  $n_i = p^{\alpha_i} \cdot n'_i$ , gdzie  $\alpha_i \geq 0$  i  $p \nmid n'_i$ . Niech  $\sigma$  będzie taką permutacją liczb  $1, \dots, k$ , że  $\alpha_{\sigma(1)} \leq \alpha_{\sigma(2)} \leq \dots \leq \alpha_{\sigma(k)}$  i rozpatrzmy ciąg  $\mathbf{n}'_i = p^{\alpha_{\sigma(i)}} n'_i$ . Jeśli w ciągu tym wykreślić wyrazy równe 1, to otrzymany ciąg będzie właśnie wynikiem operacji  $T_p$  na ciągu  $\mathbf{n}$ . Okazuje się, że stałe  $d$  dla ciągów  $\mathbf{n}$  i  $T_p(\mathbf{n})$  są takie same. Poza tym, w wyniku skończonej liczby operacji  $T_{p_i}$ , każdy ciąg  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k)$  można doprowadzić do takiego ciągu  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_s)$ , że  $m_1 | m_2 | \dots | m_s$  (tzn.  $m_i$  jest dzielnikiem liczby  $m_{i+1}$  dla  $i = 1, \dots, s-1$ ) i ciąg  $\mathbf{m}$  jest w ten sposób wyznaczony jednoznacznie (zainteresowany Czytelnik z pewnością bez trudu udowodni powyższe stwierdzenia). Będziemy taki ciąg  $\mathbf{m}$  oznaczali przez  $T(\mathbf{n})$ .

(Przykład:  $(n_1, n_2, n_3) = (2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 3 \cdot 5) \xrightarrow{T_3} (3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 5) \xrightarrow{T_2} (2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 5)$ .)

Powyższe rozważania wykazują, że wystarczy zajmować się liczbami  $d(n_1, \dots, n_k)$  dla  $n_1 | n_2 | \dots | n_k$ . Tak też będziemy w dalszym ciągu czynić.

Oszacujemy teraz liczbę  $d(n_1, \dots, n_k)$  od dołu. Wykażemy mianowicie,

że  $d(n_1, \dots, n_k) \geq \sum_{i=1}^k (n_i - 1) + 1$ . Rozpatrzmy bowiem takie ciągi  $\mathbf{a}_i$ , że dokładnie  $n_i - 1$  spośród nich ma postać  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , gdzie występuje dokładnie jedna jedynka na  $s$ -tym miejscu. Suma dowolnych spośród tych ciągów nie dzieli się przez  $n$  (dlaczego?).

Oczywiście, oszacowanie nasze jest prawdziwe dla dowolnego ciągu  $\mathbf{n}$  (bez założenia, że  $n_1 | n_2 | \dots | n_k$ ). Łatwo jednak wykazać, że liczba szacująca jest dla ciągu  $T(\mathbf{n})$  nie

mniejsza niż dla  $\mathbf{n}$ . Dla  $n_1 | n_2 | \dots | n_k$  oznaczmy  $D = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) + 1$ . Przez pewien

czas przypuszczano, że  $d = D$ . Tak jest rzeczywiście, jeśli  $k = 2$ , albo jeśli wszystkie  $n_i$  są potęgami tej samej liczby pierwszej. Okazało się jednak, że na ogół  $d > D$ . Pierwszy przykład otrzymano rozpatrując  $\mathbf{n} = (2, 2, 2, 2, 6)$ . Otóż, w tym przypadku  $D = 10$ , natomiast  $d \geq 11$ .

Znanych jest obecnie wiele  $\mathbf{n}$ , dla których  $d > D$ , ale niewiele wiadomo, jak dokładnie zachowuje się  $d$ . Ponadto wciąż nie wiadomo, czy  $d = D$  dla ciągów  $\mathbf{n}$  długości 3, tzn. dla  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ , gdzie  $n_1 | n_2 | n_3$  (np. dla ciągów  $(3, 3, 15)$ ,  $(5, 10, 10)$ ).

Dla  $k \geq 4$  wiadomo, że istnieją kontrprzykłady. Być może Czytelnikowi uda się znaleźć odpowiedzi (choćby częściowe) na postawione pytania bądź artykuł ten zainspiruje Go do postawienia innych, podobnych pytań i znalezienia na nie odpowiedzi.

Zauważmy, że równość  $d = D$  dla  $k = 2$  implikuje w szczególności twierdzenie EGZ. W rzeczy samej, jeśli  $\mathbf{n} = (n, n)$  i weźmiemy  $2n - 1$  ciągów  $\mathbf{a}_i = (a_i, 1)$ , to suma pewnych z nich jest podzielna przez  $n$ . Ale ich liczba musi być w takim razie równa  $n$ , bo suma drugich współrzędnych ma być wielokrotnością  $n$ . A stąd spośród liczb  $a_1, \dots, a_{2n-1}$  można wybrać  $n$  o sumie podzielnej przez  $n$ .



## Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

**M 670.** Udowodnić, że spośród dowolnych liczb naturalnych  $x_1, x_2, \dots, x_n$  można wybrać pewną ich liczbę, tak by ich suma była podzielna przez  $n$ .

Rozwiązanie na str. 7

**M 671.** Dla jakich dodatnich  $x$  część ułamkowa  $x$ , część całkowita  $x$  oraz sama liczba  $x$  tworzą ciąg geometryczny?

Rozwiązanie na str. 7

**M 672.** Udowodnić, że jeśli długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny, to promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy różnicy owego ciągu.

Rozwiązanie na str. 7

Redaguje Jarosław KULPA

**F 359.** W pokoju o wymiarach  $5 \text{ m} \times 4 \text{ m} \times 3 \text{ m}$  pracuje komputer, którego ekran elektryzuje się. Natężenie pola elektrycznego w pobliżu ekranu osiąga wartość  $E = 3000 \text{ V/m}$ . Ładunek ekranu jest zawsze dodatni. Jeżeli w powietrzu jest przewaga ładunków dodatnich, zakłóca to pracę układu nerwowego człowieka. Dyskomfort jest już odczuwany, gdy stężenie jonów przewyższa stokrotnie standardową jonizację powietrza wynoszącą  $i = 20$  jonów/ $\text{cm}^3$ . Oszacować, co jaki czas trzeba przewietrzać pomieszczenie, aby nie odczuwać dyskomfortu.

Przewodność powietrza wynosi  $\sigma = 2,5 \cdot 10^{-14} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ .

Rozwiązanie na str. 9

**F 360.** Oszacować, ile neutronów słonecznych przechodzi przez ciało człowieka w ciągu jednej sekundy. W ciągu jednego cyklu przemian termojądrowych powstają średnio 2 neutrony i wydzielają się energia  $E = 4 \cdot 10^{-12} \text{ J}$ . Temperatura powierzchni Słońca wynosi  $T \approx 6000 \text{ K}$ , promień Słońca  $R = 695 \cdot 10^3 \text{ km}$ , odległość Ziemia-Słońce  $d = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ .

Rozwiązanie na str. 9

# Modele mechaniczne stawów

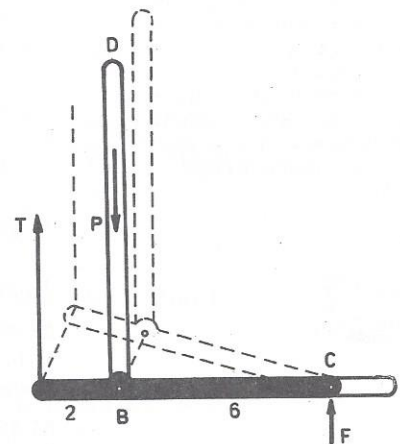
Kazimierz MIKULSKI

Nieraz pewnie, odczuwając ból w łokciu lub kolanie, zastanawialiście się, jak to właściwie się dzieje, że ręka czy noga zgina się i prostuje. Problem bolącego łokcia zostawimy lekarzom, a tutaj omówimy proste mechaniczne modele stawów.

Zacznijmy od stawu skokowego, który, jak sama nazwa wskazuje, umożliwia podskoki. Rysunek 1a pokazuje budowę stopy i podudzia, rysunek 1b zaś schemat naszego modelu. Zwróćmy uwagę na długość kości będących ramionami dźwigni, położenia punktów przyłożenia sił i osi obrotów. Na rysunku 1b zaznaczono również główne siły działające na stopę: siłę nacisku  $P$ , siłę reakcji podłoża  $F$  oraz siłę  $T$ , którą poprzez ścięgno Achillesa działa mięsień podudzia. Przyjęto, że stosunek odcinków  $AB$  do  $BC$  ma się jak 2 do 6. Wyobraźmy sobie, że ważymy 60 kG i wspięliśmy się lekko na palce jednej nogi. Siła  $F$  wynosi, oczywiście, 60 kG. Aby nie następował obrót względem punktu  $A$ , moment siły  $P$  musi równoważyć moment siły  $F$ , tzn.  $2P = 8F$ , a zatem  $P = 240$  kG. Widzimy więc, że nacisk z góry na stopę nie jest równy naszej wadze, lecz jest 4 razy większy. Gdy wykonujemy skok, następuje obrót względem punktu  $B$ . Z warunku równowagi wynika, że  $2T = 6F$ , więc  $T = 180$  kG. Takie obciążenie musi wytrzymać ścięgno Achillesa.

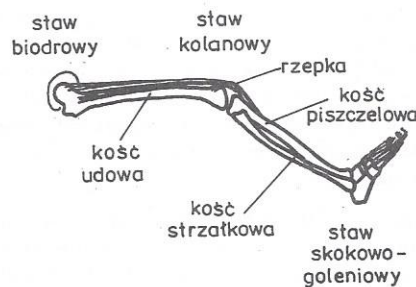


Rys. 1a. Kości podudzia.

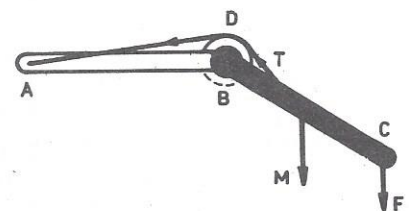


Rys. 1b. Model stawu skokowego.

Gdy skaczemy, pracuje nie tylko staw skokowy, lecz również kolany – pokazany na rysunku 2a. W modelu tego stawu (rys. 2b) wykorzystano bloczek.



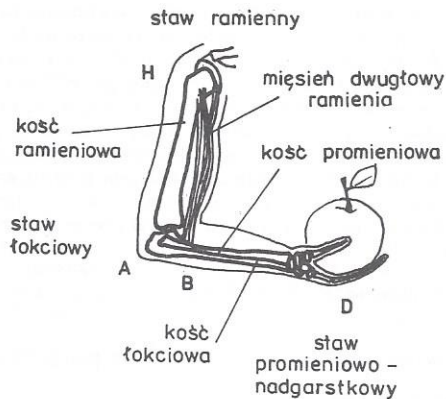
Rys. 2a. Kości nogi w pozycji poziomej.



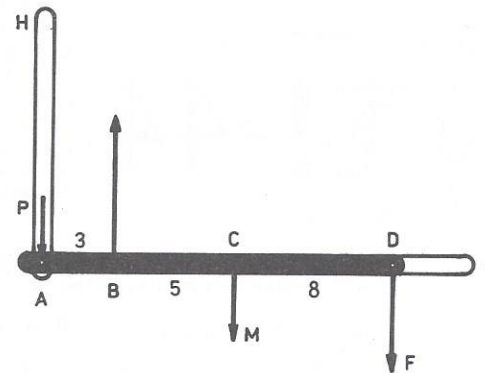
Rys. 2b. Model nogi.

Pozostawimy Czytelnikowi obliczenie siły  $T$ , którą działa ściętno przerzucone przez ten bloczek, aby pokonać ciężar samego podudzia  $M$  i obciążenie  $F$ .

Wydaje się, że szczególnie niefortunna z mechanicznego punktu widzenia jest konstrukcja stawu łokciowego (rys. 3a i 3b).



Rys. 3a. Kości ręki.



Rys. 3b. Model kości ręki.

Siła  $P$  przedstawia działanie ramienia,  $T$  mięśnia zwanego popularnie bicipsem, siły  $M$  i  $F$  zaś ciężar samego przedramienia oraz ciężar trzymanego w ręku kamienia. Stosunek długości odcinków  $AB$ ,  $BC$  i  $CD$  przyjęliśmy jako 3:5:8. Warunek równowagi przy obrocie względem punktu  $A$  ma postać

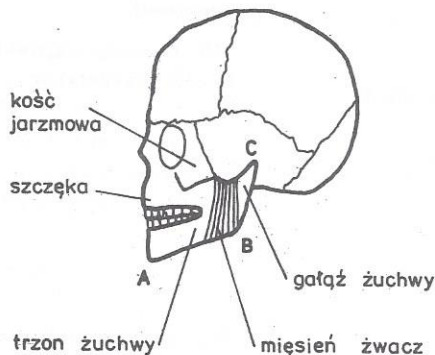
$$16F + 8M = 3T,$$

przy obrocie zaś względem  $B$

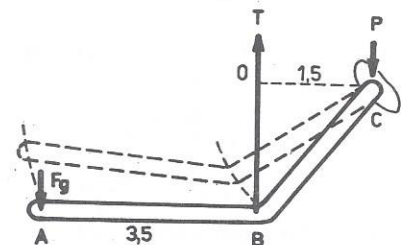
$$13F + 5M = 3P.$$

Zakładając, że kamień waży 10 kG, przedramię zaś tylko 1 kG, znajdujemy wartości sił  $T = 56$  kG i  $P = 45$  kG.

W odróżnieniu od stawów kończyn konstrukcja naszej szczęki bardzo Naturze się udało. Jak widać na rysunkach 4a i 4b, obciążenie mięśnia podnoszącego żuchwę jest niewielkie i zapewne dlatego trudno się zmęczyć mówieniem.



Rys. 4a. Kości głowy.

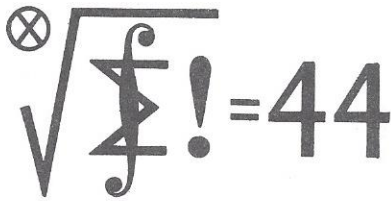
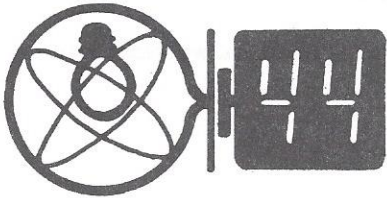


Rys. 4b. Model szczęki górnej i żuchwy.

Odpowiedzi na zagadki w *EPSILONIE*:  $X_1 =$  *Kubuś Puchatek* (Alan Alexander Milne),  $X_2 =$  *Alicja* (Lewis Carroll),  $X_3 =$  *Ananiasz* (René Goscinny),  $X_4 =$  *Niedźwiadek Nalle* (Gösta Knutsson),  $X_5 =$  *Mały Książę* (Antoine de Saint-Exupéry).

# Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,  
Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*



## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 3$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1993.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Czołówka ligi zadaniowej  
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 245 ( $WT=2,93$ ) i 246 ( $WT=2,58$ )  
z numeru 9/1992

Przemysław Gadziński	- Środa Śl.	42,00
Marcin Kasperski	- Warszawa	38,26
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	37,80
Tomasz Wietecha	- Tarnów	35,41

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/1993

Przypominamy treść zadań:

255. Czworokąt wypukły o bokach długości  $a, b, c, d$  jest wpisany w koło i opisany na kole. Promień koła opisanego ma długość  $R$ . Pole czworokąta równa się  $S$ . Dowiedź, że

$$\frac{S}{a} + \frac{S}{b} + \frac{S}{c} + \frac{S}{d} \leq 2\sqrt{S} + \frac{4R^2}{\sqrt{S}}$$

256. Dane są liczby całkowite  $n \geq k \geq 1$ . Ile jest  $k$ -elementowych ciągów liczb całkowitych dodatnich  $(x_1, \dots, x_k)$  spełniających równanie  $x_1 + \dots + x_k = n$ ? (Ciągi o tych samych wyrazach, ale występujących w różnej kolejności, uważamy za różne.)

255. Oznaczmy długości przekątnych czworokąta przez  $e, f$  tak, by cztery trójkąty wyznaczone przez trójki jego wierzchołków miały (odpowiednio) boki o długościach:  $(a, b, e)$ ,  $(c, d, e)$ ,  $(a, d, f)$ ,  $(b, c, f)$ . Pola tych trójkątów są kolejno równe  $(abe)/(4R)$ ,  $(cde)/(4R)$ ,  $(adf)/(4R)$ ,  $(bcf)/(4R)$ ; mamy więc równości  $4RS = abe + cde$  oraz  $4RS = adf + bcf$ , które po przemnożeniu stronami dają związek

$$(1) \quad 16R^2S^2 = ef((a^2 + c^2)bd + ac(b^2 + d^2)).$$

Przyjmijmy oznaczenia:

$$a + c = b + d = p, \quad ac + bd = E.$$

Pole czworokąta wpisanego w koło i opisanego na kole wyraża się wzorem  $S = \sqrt{abcd}$ . Zgodnie z twierdzeniem Ptolemeusza ( $E = ef$ ) możemy więc przepisać równość (1) jako

$$(2) \quad 16R^2S^2 = E((p^2 - 2ac)bd + ac(p^2 - 2bd)) = E(Ep^2 - 4S^2).$$

Lewą stronę danej w zadaniu nierówności przekształcamy do postaci

$$\begin{aligned} \frac{S}{a} + \frac{S}{b} + \frac{S}{c} + \frac{S}{d} &= \frac{1}{S} \left( \frac{S^2}{a} + \frac{S^2}{b} + \frac{S^2}{c} + \frac{S^2}{d} \right) = \\ &= \frac{bcd + cda + dab + abc}{S} = \\ &= \frac{ac(b+d) + (a+c)bd}{S} = \frac{Ep}{S}. \end{aligned}$$

Mamy więc do udowodnienia nierówność

$Ep/S \leq 2\sqrt{S} + 4R^2/\sqrt{S}$ , która po pomnożeniu stronami przez  $4S^2\sqrt{S}$  i skorzystaniu z (2) przybiera postać

$$(3) \quad 4Ep \cdot S\sqrt{S} \leq 8S^3 + Ep^2 - 4ES^2.$$

Ponieważ  $S = \sqrt{abcd} \leq \frac{1}{2}(ac + bd) = \frac{1}{2}E$  oraz  $p^2 = (a+c)^2 \geq 4ac$ ,  $p^2 = (b+d)^2 \geq 4bd$ , zatem

$$E \geq 2S \quad \text{oraz} \quad p \geq \sqrt{2E}.$$

Wynika stąd w szczególności, że

$$Ep - 2S\sqrt{S} \geq E\sqrt{2E} - 2S\sqrt{S} > 0,$$

wobec czego  $(Ep - 2S\sqrt{S})^2 \geq (E\sqrt{2E} - 2S\sqrt{S})^2$ , czyli

$$E^2p^2 - 4Ep \cdot S\sqrt{S} \geq 2E^3 - 4ES\sqrt{2ES}.$$

Nierówność (3) będzie więc udowodniona, jeśli wykazemy, że

$$(4) \quad 2E^3 - 4ES\sqrt{2ES} \geq 4ES^2 - 8S^3.$$

Korzystając ponownie z oszacowania  $E \geq 2S$  mamy

$$\begin{aligned} 2E^3 - 4ES\sqrt{2ES} + 8S^3 - 4ES^2 &\geq \\ &\geq 2E^2\sqrt{E \cdot 2S} - 4ES\sqrt{2ES} + 8S^3 - 4ES^2 = \\ &= 2\sqrt{2S}(E - 2S)(E\sqrt{E} - S\sqrt{2S}) \geq 0. \end{aligned}$$

To dowodzi nierówności (4), a tym samym i nierówności wyjściowej.

256. Każdemu ciągowi  $(x_1, \dots, x_k)$  spełniającemu warunki zadania przyporządkujemy ciąg  $(y_1, \dots, y_{k-1})$  o wyrazach  $y_i = x_1 + \dots + x_i$ ; oczywiście

$$(*) \quad y_1, \dots, y_{k-1} \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \quad y_1 < y_2 < \dots < y_{k-1}.$$

Na odwrót, dowolnemu ciągowi  $(y_1, \dots, y_{k-1})$  spełniającemu warunki (\*) możemy przyporządkować ciąg  $(x_1, \dots, x_k)$  wzorami

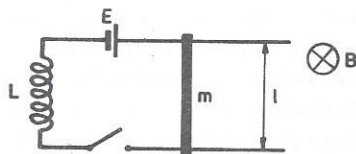
$$\begin{aligned} x_1 &= y_1, \\ x_i &= y_i - y_{i-1} \quad \text{dla } i = 2, \dots, k-1, \\ x_k &= n - y_{k-1}. \end{aligned}$$

Tak określone odwzorowania  $((x_i) \mapsto (y_i))$  oraz  $(y_i) \mapsto (x_i)$  są wzajemnie odwrotne; ustalają więc bijekcję pomiędzy zbiorem wszystkich ciągów  $(x_1, \dots, x_k)$  spełniających warunki zadania oraz zbiorem wszystkich ciągów  $(y_1, \dots, y_{k-1})$  spełniających warunki (\*). Ponieważ ciąg rosnący można identyfikować ze zbiorem jego wyrazów, zatem dopuszczalnych ciągów  $(y_1, \dots, y_{k-1})$  jest tyle, ile  $(k-1)$ -elementowych podzbiorów ma zbiór  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  – czyli  $\binom{n-1}{k-1}$ . Tyle samo jest też i dopuszczalnych ciągów  $(x_1, \dots, x_k)$ .



po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 145 (WT=4,00) i 146 (WT=2,60)  
z numeru 10/1992

Tomasz Włetecha - Tarnów 28,92  
Przemysław Gworys - Częstochowa 28,13



153. Przeporządkowanie jest następujące:  
nr obrazu dyfr. 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17  
otwór ) B ~ o x L J N D : T g I H Z S C

Należało zwrócić uwagę m.in. na symetrię rysunków, gdyż symetria otworu musi pociągać za sobą tę samą symetrię obrazu. Związek ten nie jest wzajemnie jednoznaczny, ponieważ każdy obraz dyfrakcyjny ma symetrię środkową (przechodzi w siebie przy przekształceniu  $r \rightarrow -r$ ). Wynika to ze wzoru przedstawiającego falę za przeszkodą jako sumę (ew. całkę) fal, które uległy rozproszeniu na poszczególnych punktach otworu (zasada Huygensa):

$$\psi = \sum_{r'} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'),$$

gdzie  $\mathbf{k}$  jest wektorem o długości  $2\pi/\lambda$  wskazującym punkt  $\mathbf{r}$  ekranu. Widzimy, że podstawienie  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$  jest równoważne zmianie znaku  $t$ , co, oczywiście, nie zmieni amplitudy fali  $\psi$ . Symetria środkowa jest więc jedyną symetrią obrazu fali rozproszonej na otworze o kształcie np. litery g, a występowanie symetrii osiowej otworu przy odbiciu względem osi pionowej lub poziomej w połączeniu z symetrią środkową pociąga za sobą symetrię obrazu względem obu osi. Dla otworu o kształcie litery L lub x mamy do czynienia z elementami przybliżonej symetrii względem osi skośnych (obróconych o  $45^\circ$ ). Najłatwiej jest rozpoznać literę o ze względu na prawie ścisłą symetrię obrotową.

Obok symetrii istotną wskazówką mogą być podstawowe cechy dyfrakcji i interferencji. Dla otworu o kształcie pionowej kreski („obciętej” litery I) dyfrakcja jest znacznie silniejsza w kierunku poziomym niż pionowym. Obecność dwóch równoległych linii w otworze (np. litery N, H lub Z) wiąże się z układem maksimum i minimum interferencji wzdłuż osi prostopadłej do

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/1993

Przypominamy treść zadań:

153. Przeporządkować właściwym otworom obrazy dyfrakcyjne (patrz okładka *Delta* 2/1993) powstałe w wyniku przejścia fali przez te otwory. Zakładamy, że fala pada na otwór prostopadle, a potem jest obserwowana na bardzo odległym ekranie (lub też – w przypadku fali świetlnej – przechodzi przez soczewkę skupiającą, a ekran znajduje się w płaszczyźnie ogniskowej). Długość fali jest mniejsza od rozmiarów otworu. Objaśnić zasady rozumowania.

154. Narysowany obok obwód znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $B$ , prostopadłym do płaszczyzny rysunku. Prawą część obwodu tworzy pręt o masie  $m$ , który może bez tarcia ślizgać się po poziomych szynach odległych o  $l$ . Opisać ruch pręta po zamknięciu klucza. Opór obwodu pominąć.

linii, przy czym im dalej od siebie są te linie, tym gęściej są maksima i minima. Szczególnie łatwe jest rozpoznanie efektów interferencji dla otworu o kształcie dwukropka.

W wielu trudniejszych przypadkach opisane wyżej metody dają odpowiedzi bardzo niejednoznaczne i konieczne jest „kombinowanie” – wyszukiwanie podobieństw otworów i obrazów. Zapewne przyda się i odrobina intuicji. Trudno rozstrzygnąć, czy na elementarnym poziomie możliwe jest jednoznaczne rozróżnienie dyfrakcji na niektórych otworach. Autor spodziewa się interesujących listów od Czytelników!

154. Suma napięć na cewce i ogniwie jest równa SEM indukcji w obwodzie, tzn. wyrażeniu  $\Delta\Phi/\Delta t = B\Delta S/\Delta t = Blv$  (gdzie  $v$  – prędkość pręta,  $\Delta S$  – związana z nią zmiana powierzchni obwodu). Stosując do pręta II zasadę dynamiki otrzymujemy układ równań

$$E - L \frac{\Delta I}{\Delta t} - Blv = 0 \quad (I - \text{natężenie prądu})$$

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = F = IlB,$$

przy czym dodatnie zwroty wielkości  $I$ ,  $v$  i  $B$  są następujące:  $B$  za płaszczyznę rysunku,  $I$  prawoskrętnie,  $v$  w prawo (w razie wątpliwości co do znaków w pierwszym równaniu należy powołać się na regułę Lenza). Rozwiązaniem jest wyrażenie

$$v = \frac{E}{Bl} + a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t),$$

gdzie  $a$  i  $b$  są dowolnymi stałymi, a  $\omega = Bl/\sqrt{mL}$ . Jeśli w chwili początkowej pręt spoczywał, a prąd był równy zeru, to  $b = 0$ ,  $a = -\frac{E}{Bl}$ , czyli  $v = \frac{E}{Bl} [1 - \cos(\omega t)]$ . Pręt porusza się więc ruchem „skokowym”, będącym złożeniem ruchu jednostajnego i drgania harmonicznego.

Odcinek dla poczty		Odcinek dla posiadacza rachunku		Potwierdzenie dla wpłacającego	
Zł .....	Zł .....	Zł .....	Zł .....	Zł .....	Zł .....
słownie złotych		słownie złotych		słownie złotych	
Dokładny adres	Dokładny adres	Dokładny adres	Dokładny adres	Dokładny adres	Dokładny adres
wplacający		wplacający		wplacający	
na r-k	na r-k	na r-k	na r-k	na r-k	na r-k
AMOS		AMOS		AMOS	
01-506 Warszawa		01-506 Warszawa		01-506 Warszawa	
ul. Szenwalda 1		ul. Szenwalda 1		ul. Szenwalda 1	
nazwa banku	nazwa banku	nazwa banku	nazwa banku	nazwa banku	nazwa banku
PKO VIII O/W-wa		PKO VIII O/W-wa		PKO VIII O/W-wa	
Nr r-ku	Nr r-ku	Nr r-ku	Nr r-ku	Nr r-ku	Nr r-ku
1586-77578-136		1586-77578-136		1586-77578-136	
stempel	Pobrano opłatę	stempel	Pobrano opłatę	stempel	Pobrano opłatę
.....	zł .....	.....	zł .....	.....	zł .....
podpis przyjmującego	podpis przyjmującego	podpis przyjmującego	podpis przyjmującego	podpis przyjmującego	podpis przyjmującego

## Patrz w niebo

Problem niewidocznej masy we Wszechświecie to jeden z najważniejszych obecnie w astronomii. Jego znaczenie jest ogromne dla całego właściwie przyrodoznawstwa, bowiem łączą się w nim podstawowe fakty dotyczące makro- i mikroświata.

Widoczna materia to, oczywiście, gwiazdy, obłoki gazu i pyłu oraz galaktyki i ich gromady. Już od dość dawna wiadomo jednak, że oprócz niej musi we Wszechświecie istnieć jeszcze jakaś niewidoczna – przynajmniej na razie – jej forma. A argumenty za tym są, na przykład, następujące. Z pomiarów prędkości radialnych gwiazd w różnych miejscach galaktyki spiralnej, widzianej w przybliżeniu z krawędzi, można odtworzyć tzw. krzywą rotacji, czyli zależność prędkości obiegowej gwiazd od odległości od centrum galaktyki. Gdyby – jak można oczekiwać – większość masy galaktyki była zawarta w jej jądrze, to prędkość obiegowa gwiazd poza jądrem malałaby ku jej peryferiom w przybliżeniu tak, jak wynika z praw Keplera. Tymczasem u wielu galaktyk spiralnych krzywa rotacji przebiega niemal poziomo do samej krawędzi galaktyki. Częściowo za to odpowiedzialny może być wodór wypełniający galaktykę w ilości przekraczającej w niektórych przypadkach kilkakrotnie ilość materii widocznej – obecnie obserwuje się go w zakresie radiowym na fali 21 cm. Niewidoczne mogą też być małe czarne dziury lub brązowe karły, jednak o ich liczebności nic pewnego dziś powiedzieć nie można.

Oto inny przykład. Z rozmieszczenia na niebie galaktyk w regularnej gromadzie można odtworzyć ich rozmieszczenie w przestrzeni, a z pomiarów prędkości radialnych – prędkości przestrzenne. Można więc ocenić potencjalną i kinetyczną energię gromady. Jeżeli gromada,

jak się spodziewamy, jest stabilna, to suma energii potencjalnej i podwojonej energii kinetycznej powinna być równa zeru (jest to tzw. twierdzenie o wirale), a wtedy zależność ta umożliwia określenie średniej masy pojedynczej galaktyki. Otóż, często tak oceniane masy są większe niż oceniane na podstawie jasności galaktyk. Dziś wiemy, że tak jest, ponieważ w ten sposób zastosowane twierdzenie o wirale nie uwzględnia gorącego gazu wyrzuczonego przez gwiazdy w przestrzeń międzygalaktyczną. Obecnie gaz ten (głównie zjonizowany wodór) obserwuje się w zakresie rentgenowskim.

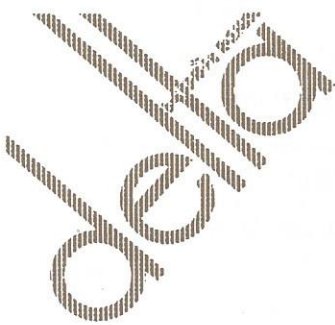
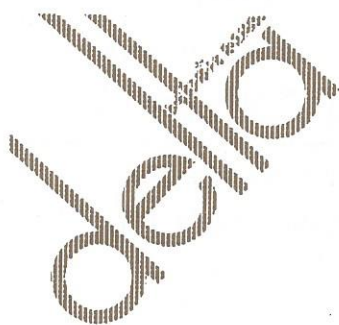
Tak więc pewne formy dawniej niewidocznej materii zostały już ujawnione dzięki nowoczesnym technikom obserwacyjnym. Jest to nadal „normalna” materia barionowa, tzn. zbudowana z protonów i neutronów, ale ciągle jest jej za mało, by wytłumaczyć dynamikę Wszechświata. Jest nawet gorzej. Mianowicie, jednym z najważniejszych sukcesów Teorii Wielkiego Wybuchu było prawidłowe przewidzenie przez nią zawartości helu we Wszechświecie, przy czym narzucone zostały dość ostre ograniczenia na gęstość całej barionowej materii tuż po Wielkim Wybuchu. Okazało się, że do dziś gęstość ta powinna spaść do wartości mniej więcej takiej, jaką właśnie obserwujemy. Oznacza to, że ciągle brakująca nam materia musi być niebarionowa, czyli musi składać się z neutrin lub jakichś egzotycznych cząstek obecnie nie znanych. Jest to poważne wyzwanie dla fizyki cząstek elementarnych. Pewne propozycje zostały już poczynione, choć do potwierdzenia ich realności jest jeszcze daleko. Na dziś pozostaje nam więc świadomość, że patrząc w niebo widzimy skromny ułamek tego, co tam się rzeczywiście znajduje.

*Tomasz KWAST*

Prenumerata „Deltę”  
za okres:

Prenumerata „Deltę”  
za okres:

Prenumerata „Deltę”  
za okres:



## Znamy?

I oto nadszedł kolejny Dzień Dziecka. Przypomnijmy więc niektóre quasi-matematyczne fragmenty pewnych pozycji literatury „dziecięcej” o niekwestionowanej renomie. Poznajemy...? Kim są  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ ,  $X_4$ ,  $X_5$ ? A kto stworzył te postacie? Odpowiedzi na stronie 13 Delt.

...I w tej chwili zapadł w drzemkę i śniło mu się, że on,  $X_1$ , i Nieustraszony Basen wraz z Mężnym Cejlonem i Mnożnikami mieszkali razem z koniem i byli wiernymi rycerzami (wszyscy z wyjątkiem Mnożników mających pieczę nad koniem)...

...- Przeszedłem tylko program z przedmiotów obowiązkowych (...), różne odgałęzienia Arytmetyki - Wodowanie, Obejmowanie, Dnożenie i Brzydzielienie. - Nigdy nie słyszałam o „Brzydzielieniu” - odważyła się zapytać  $X_2$ . - Cóż to jest takiego?...

...- A poza tym, wiesz co? Jeżeli będziesz grzeczny, przyrzekam, że cię zapytam z arytmetyki.

- Z ułamek? - zapytał  $X_3$ .

Pani odpowiedziała mu, że tak, więc  $X_3$  puścił się ławki i stanął z nami trzęsąc się okropnie i przez cały czas poplakując cicho: „Buuu, buuu, buuu”...

...Gdy doszli do sklepu kolonialnego Anderssona,  $X_4$  zrobił błagalną minę:

- Czy muszę oddać wszystkie osiemnaście stoików?

- Tak,  $X_4$ , musisz.

- Czy myślisz, że Andersson przeliczył je tak dokładnie? - zastanawiał się  $X_4$ . - Czy zauważą, jeżeli oddam dziewiętnaście, a jeden zatrzymam?...

...- Dzień dobry - powiedział  $X_5$ . - Zgasł panu papieros.

- Trzy plus dwa równa się pięć. Pięć plus siedem równa się dwanaście. Dwanaście plus trzy równa się piętnaście. Dzień dobry. Piętnaście plus siedem równa się dwadzieścia dwa. Dwadzieścia dwa plus sześć równa się dwadzieścia osiem. Nie mam czasu zapalić go. Dwadzieścia sześć plus pięć równa się trzydzieści jeden. Uf! A więc pięćset jeden milionów sześćset dwadzieścia dwa tysiące siedemset trzydzieści jeden.

- Pięćset milionów czego?

- Co? Jeszcze tu jesteś? Pięćset jeden milionów... nie wiem czego... mam tyle pracy! Jestem poważnym człowiekiem, nie tracę czasu na głupstwa! Dwa plus pięć...



- Hej, wy tam... Nie podpowiadajcie!

Rys. Jean Effel

## Dobrze, że tak dobrze znamy się na matematyce...

Jednym z głównych bohaterów książki Aleksandra Minkowskiego *Kosmiczny Sekret Lutego* jest chłopak o pseudonimie Spinoza. Jest on przedstawiony Czytelnikom jako „światny matematyk”, co zresztą znajduje potwierdzenie w akcji książki. Jednym z wątków książki są liczne próby otwarcia ponemieckiej kasy pancernej z szyfrowym zamkiem, wykonywane przez bohaterów. Spinoza prowadzi ewidencję. „Jeszcześmy jej nie zdołali otworzyć, choć wypróbowaliśmy tysiące kombinacji cyfrowych” - oznajmia Czytelnikom na początku książki główny bohater, Lutosław. Konstrukcja zamka nie jest skomplikowana: trzeba, kręcąc tarczą, ustawić kolejno cztery liczby wybrane spośród dwunastu: 1, ..., 12 (nb. w książce cały czas mówi się „cyfry”). Po dobraniu właściwej czwórki kasa zostanie otwarta. W pewnym momencie otwarcie kasy staje się pilne. Oddajmy głos Spinozie:

...- Na wyprobowanie wszystkich możliwych kombinacji nie wystarczy nawet i dwustu godzin, rozumiesz? Przy dwunastu cyfrach na tarczy, wariantów czterocyfrowych mogą być miliony.

- Przesadzasz - mówię.

- Przesadzam? - zaperza się Spinoza. - Mam ci wyprowadzić wzór na ilość kombinacji? Proszę bardzo... - chwyta ołówek, pochyla się nad notesem.

O milionach mówi się jeszcze w książce kilkakrotnie: *praktycznie szanse (otwarcia kasy) są prawie takie same, jak jeden do miliona, ...w ciągu minuty wypróbujecie trzy kombinacje (...)* Cóż to jest wobec milionów możliwości?

Wzór, o którym mowa, nie zostaje jednak w książce wyprowadzony, a szkoda. Szukana liczba to  $12^4 (= 20\,736)$  (nb. wzór jest w programie matematyki młodszych klas szkoły średniej). Książka jest ciekawa; ilu jej młodych czytelników uwierzy, że istotnie w opisanym sytuacji są miliony różnych możliwości...?

K.C.

# **XXXII ZJAZD FIZYKÓW POLSKICH**

## **KRAKÓW**

### **20-23 WRZEŚNIA 1993**

Zjazd będzie spotkaniem pracowników nauki, nauczycieli i sympatyków fizyki z całego kraju. Celem naukowym Zjazdu jest popularyzacja najlepszych osiągnięć fizyki. Program Zjazdu przewiduje jednogodzinne wykłady specjalistów oraz sesję plakatową, na której poszczególne ośrodki fizyki będą mogły zaprezentować wybrane przez siebie zagadnienia. Specjalna sesja poświęcona będzie dydaktyce fizyki na wszystkich szczeblach nauczania. W trakcie trwania Zjazdu zorganizowane zostaną wystawa i targi aparatury naukowej, do udziału w których zaproszono szereg firm zagranicznych i polskich. Podczas Zjazdu odbędzie się Walne Zebranie Delegatów i wybory nowych władz PTF.

Obrady Zjazdu odbędą się w Auli Wydziału Fizyki i Techniki Jądrowej Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie, ul. Reymonta 19. Koszt uczestnictwa wynosić będzie około 400 tys. zł. (Przewidziane są zniżki dla uczniów i nauczycieli szkół średnich i podstawowych). Szczegółowe informacje wraz z kartą zgłoszeniową rozesłane zostaną do potencjalnych uczestników w maju br.

**Organizatorami Zjazdu są:**

**Polskie Towarzystwo Fizyczne, Oddział Krakowski**  
**Wydział Fizyki i Techniki Jądrowej AGH, Kraków**

**Komitet Organizacyjny Zjazdu:**

**Przewodniczący:** Jerzy Niewodniczański  
**Wiceprzewodniczący:** Andrzej Kisiel  
**Sekretarz:** Janusz Wolny

**Komitet Programowy Zjazdu:**

**Przewodniczący:** Kazimierz Grotowski

**Adres Komitetu Organizacyjnego**

Wydział Fizyki i Techniki Jądrowej  
A G H  
al. Mickiewicza 30  
30-059 Kraków

telefon: (12) 333740

telex: 0322203 agh pl

fax: (12) 340010

email: zjazd@mifitj.ifj.edu.pl