

h=6.63·10⁻³⁴ J·s $\hbar=3,141593$

CENA ZŁ 8000,-

NR 7 (230) 1993

PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X

o
e
d
o

POPULARNY MIESIĘCZNIK MATEMATYCZNO-FIZYCZNO-ASTRONOMICZNY



Dnia 31 maja 1993 roku
zmarł
Tadeusz Iwiński
przez dwudziestolecie Sekretarz Generalny
Polskiego Towarzystwa Matematycznego,
współzałożyciel „Delta”

SPIS TREŚCI

NUMERU 7(230)

Królewska droga do fizyki	str. 1
„Paradoksy” symetrii czasowej <i>Miroslaw Lachowicz</i>	str. 2
Symetrie, symetrie, symetrie <i>Piotr Hajłasz</i>	str. 4
Łamanie symetrii <i>Jan Kalinowski</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Symetryczne twierdzenia <i>Zdzisław Pogoda</i>	str.10
Klub 44	str.12
Zadania	str.14
Żywa symetria	str.15
Epsilon	str.16

W następnym numerze:

Pozorne trudności
z prawdopodobieństwem

Okładkę zaprojektował
Bernard BADZIOCH

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego
i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Komitet Redakcyjny:	Redaguje kolegium w składzie:
Andrzej Białynicki-Birula	Krzysztof Biesaga
Bogdan Cichoński	Piotr Hajłasz
Roman Duda	Jan Kalinowski – z-ca red. nac.
Jan A. Gaj	Krystyna Kordos – sekr. red.
Tomasz Hofmokr – wiceprzewodniczący	Marek Kordos – red. nac.
Tadeusz Jarzębowski	Tomasz Kwast
Marcin Kubiak	Stanisław Mrówczyński
Andrzej Małowski	Anna Rudnik
Andrzej Pelczar	Joanna Udalska
Zbigniew Płochocki	
Zdzisław Pogoda	Adres Redakcji:
Konrad Rudnicki	ul. Smyczkowa 5/7
Zbigniew Semadeni	02-678 Warszawa
Grzegorz Sitarski	tel. 43-02-43 wewn. 21
Józef I. Smak	DELTA@PLEARN.BITNET
Kazimierz Stępień	Wydrukowano w Zakładach Graficznych
Mieczysław Subotowicz	w Warszawie, ul. Srebrna 16
Andrzej Szymacha	Skład systemem TeX wykonała redakcja.
Andrzej Woszczyk	
Wojciech Żakowski – przewodniczący	

WARUNKI PRENUMERATY w AMOS-ie

Od stycznia br. prenumeratę „Delta” prowadzi również firma AMOS, 01-506 Warszawa, ul. Szenwalda 1 (tel. 39-17-52). Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. Koszt trzech numerów wynosi 24 000,-zł (rocznika'93 – 96 000,-zł). Przy wpłacie prosimy zaznaczyć okres prenumeraty (co najmniej 3 miesiące).

Prenumerata zagraniczna trzech numerów wynosi 60 000,-zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! AMOS dostarcza „Delte” pod wskazany adres nie pobierając dodatkowej opłaty. Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Blankiet pocztowy na prenumeratę „Delta” w AMOS-ie zamieszczamy na str.13/14.

Konto AMOS-u: PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136

WARUNKI PRENUMERATY w RUCH-u

- Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
- Cena prenumeraty na IV kwartał 1993 r. wynosi 24 000,- zł.
- Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
- Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
 - na teren kraju
 - jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
 - na zagranicę
 - „Ruch” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.
- Terminy przyjmowania prenumeraty:
 - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
 - do 20 II na II kwartał
 - do 20 V na III kwartał
 - do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 8 000,- zł

Królewska droga do fizyki

Początkom greckiej filozofii przyrody towarzyszył wielki spór zwolenników poglądu, że w Przyrodzie wszystko stale się zmienia, z filozofami dowodzącymi, że wszelka zmiana jest wykluczona. Ci ostatni powoływali się na liczne paradoksy, do jakich, ich zdaniem, prowadzi pojęcie ruchu. Kompromisowa teoria, w myśl której Świat składa się z niezmiennych atomów pozostających w ciągłym ruchu, nie zyskała wówczas zbyt wielu zwolenników. Świat pojęć starożytnych Greków nie wystarczył do rozstrzygnięcia wspomnianych paradoksów. Postawione pytania, gdy spojrzeć na nie z naszej perspektywy, stają się początkiem „programu badawczego” – poszukiwania wielkości, które pozostają niezmiennie podczas ruchu rozumianego tutaj jako wszelki proces zmiany. Do dziś odkryto wiele takich „niezmienników”, a odpowiednie prawa Przyrody nazywane są zwykle „zasadami zachowania”. Mamy więc zasady zachowania energii, pędu, momentu pędu, ładunku, liczby barionowej... W wielu przypadkach pozwalają one przewidzieć wynik końcowy skomplikowanego procesu, nawet jeśli nie rozumiemy, jak ten proces w szczegółach przebiega. Jakie wspólne cechy muszą mieć równania opisujące przebieg tych procesów, aby były zgodne z zasadami zachowania?

Emma Noether (1885–1935), córka profesora matematyki w Erlangen, Maxa, zdobyła wykształcenie matematyczne jako „wolna słuchaczka” (zwykle studia w Getyndze ukończyła pierwsza Grace Chisholm-Jung (1868–1953) w 1895 r.; w trybie zaocznym – Zofia Kowalewska w 1874 r.). Po obronieniu doktoratu w 1908 roku kontynuowała samodzielną pracę badawczą zastępując czasami ojca w prowadzeniu wykładów. W 1915 roku Felix Klein i David Hilbert zaprosili ją do Getyngi. Tutaj, jako kobieta, mimo wysokiej rangi jej własnych prac i wielkiego autorytetu Hilberta, nie mogła otrzymać posady na uniwersytecie. Prowadziła więc wykłady pod nazwiskiem Hilberta (tzn. formalnym wykładowcą, wpisanym do urzędowych planów, był Hilbert, a w rzeczywistości wykladała Emma Noether). Dopiero w 1923 roku otrzymała stanowisko wykładowcy algebry i niewysoką pensję. W 1933 roku musiała opuścić Niemcy. Zmarła w Stanach Zjednoczonych.

Formułując swoje twierdzenie Noether odwołała się do wariacyjnego sformułowania równań ruchu – tzw. zasady najmniejszego działania (patrz *Delta* 11/1991). Wykazała, że każdemu jednoparametrowemu przekształceniu zmiennych opisujących układ, pozostawiającemu nie zmienioną wartość działania, odpowiada pewna zasada zachowania.

Odpowiedzi na to pytanie udzieliła w 1918 roku Emma Noether. Wykazała ona, że zasady zachowania wynikają z niezmienniczości praw Przyrody względem pewnych operacji – symetrii. Tak więc, z faktu, że każde doświadczenie powtórzone w dowolnym czasie da ten sam wynik, o ile warunki początkowe będą takie same, wynika zasada zachowania energii; z niezmienniczości względem przesunięcia układu w przestrzeni w dowolnym z trzech kierunków, wynika zasada zachowania trzech składowych pędu, a z niezmienniczości względem obrotów – zasada zachowania momentu pędu.

Emma Noether nie tylko powiązała zasady zachowania z własnościami czasoprzestrzeni (symetriami), ale w dowodzie twierdzenia podała również przepis na obliczanie zachowywanych wielkości. W ten sposób wskazała „królewską drogę do fizyki teoretycznej”, otwartą, oczywiście, dla tych wszystkich, którzy poznali już dobrze język matematyczny, w którym sformułowane jest jej twierdzenie (patrz margines). Od tej pory tworzenie nowych teorii jest, w zasadzie, proste: (a) – wypisujemy wzór na działanie, (b) – sprawdzamy, czy jest on niezmienniczy względem wszystkich żądanych symetrii, co przy okazji daje nam przepis na (c) – wyznaczenie wielkości zachowanych. Teraz, dla eksperymentatorów pozostaje już tylko zadanie (d) – sprawdzenie, że rzeczywiście te i w ten sposób obliczone wielkości są zachowywane w procesach, których teorię właśnie stworzyliśmy. Bardzo proste! Tak też, z grubsza biorąc, przebiegał rozwój fizyki teoretycznej po roku 1918. Odkrycie mechaniki kwantowej skomplikowało jedynie techniczne szczegóły obliczeń pozostawiając całość schematu bez zmian. Wiele z tych „szczegółów technicznych” okazało się bardzo trudnymi problemami, czyniąc z kwantowej teorii pola dziedzinę od wielu już lat stymulującą rozwój nowych teorii matematycznych.

Podany wyżej przepis „na fizykę teoretyczną” uległ w ostatnim trzydziestoleciu wzbogaceniu o metody postępowania z symetriami przybliżonymi, nazywane przez fizyków technikami „łamania symetrii”.

Redakcja

„Paradoksy” symetrii czasowej

Mirosław LACHOWICZ

Podstawową teorią fizyczną, opisującą szeroki krąg zjawisk, jest klasyczna mechanika newtonowska. W jej ramach można traktować dowolne ciało jako zbiór oddziałujących na siebie obiektów mikroskopowych (cząstek). Owe obiekty tworzą układ, którego zachowanie w czasie opisują równania różniczkowe zwyczajne (równania Newtona). Istotną cechą układu jest jego odwracalność w czasie. Wynika ona z faktu, iż transformacja $t \rightarrow -t$ nie zmienia postaci równań (równania Newtona są rzędu drugiego). Jeśli znany jest stan początkowy, to można określić zarówno przeszłość, jak i przyszłość układu, przy czym nie ma możliwości, aby „odróżnić” to, co przeszłe, od tego, co przyszłe.

Oczywiście, w ramach mechaniki klasycznej nie da się wytłumaczyć (na przykład), dlaczego kostka cukru rozpuszcza się w herbatce i dlaczego nikt nie zaobserwował zjawiska odwrotnego. Teorią, która opisuje procesy nieodwracalne jest termodynamika. Druga zasada termodynamiki (sformułowana po raz pierwszy w roku 1852 przez Thompsona) wyznacza kierunek czasu (odróżnia przeszłe od przyszłego). Jedno z możliwych sformułowań drugiej zasady termodynamiki, poprzez wprowadzone w 1865 roku przez Clausiusa pojęcie *entropii*, mówi, że entropia układu izolowanego rośnie w czasie.

Próbie „wydedukowania” nieodwracalności z odwracalnej mechaniki klasycznej podjął Boltzmann (1872). Rozwodził on 6-wymiarową przestrzeń fazową położeń i pędów (tzw. *przestrzeń μ*). Każda z N cząstek układu reprezentowana była przez pewien punkt w tej przestrzeni. Zakładał nierozróżnialność cząstek i nie interesował się ich położeniami w przestrzeni μ , lecz gęstością prawdopodobieństwa (tzw. *funkcją rozkładu*) jednej (statystycznej) cząstki. W oparciu o mechanikę klasyczną oraz tzw. *hipotezę o molekularnym chaosie* wyprowadził równanie opisujące ewolucję w czasie funkcji rozkładu.

Hipoteza o molekularnym chaosie, sformułowana w 1857 roku przez Clausiusa, mówi o statystycznej niezależności stanów cząstek. To właśnie przyjęcie tej hipotezy wprowadziło do modelu Boltzmann’a „losowość” i opisowi nadało charakter statystyczny.

Nie będę tutaj opisywać samego równania Boltzmann’a, które jest skomplikowanym nieliniowym równaniem różniczkowo-całkowym, lecz omówię ważną konsekwencję tego równania – słynne *twierdzenie H* Boltzmann’a. Twierdzenie H mówi, że rozwiązaniu równania Boltzmann’a można przypisać pewną wielkość $H = H(t)$, zwaną *funkcją H* Boltzmann’a, mającą tę samą własność co entropia S . Mówiąc ściślej, H maleje w czasie, a zatem odgrywa rolę $-S$, entropii z przeciwnym znakiem.

Czy można zatem uznać, że problem nieodwracalności został rozwiązany, a druga zasada termodynamiki sprowadzona do mechaniki newtonowskiej? Nie, tak, oczywiście, nie jest!

Wątpliwości co do koncepcji Boltzmann’a – wyprowadzenia nieodwracalności z mechaniki klasycznej – pojawiły się wkrótce po opublikowaniu jego pracy.

Kelvin oraz, nieco później, Loschmidt (1876) zauważyli, że nieodwracalność zawarta w teorii Boltzmann’a nie może być traktowana jako wniosek z mechaniki klasycznej. Jak już wspomniałem, równania mechaniki klasycznej są symetryczne względem zmiany kierunku czasu, tzn. względem transformacji $t \rightarrow -t$. Tymczasem po dokonaniu tej transformacji funkcja H staje się rosnąca, co przeczy twierdzeniu H. Jest to tak zwany *paradoks odwracalności*.

Drugi paradoks pochodzi od Zermelo (1896) i nazwany jest *paradoksem powracalności*. Opiera się on na twierdzeniu Poincarégo, które mówi, że każdy zachowawczy i zamknięty układ mechaniczny powraca, po dostatecznie długim czasie, do dowolnie małego otoczenia prawie każdego stanu początkowego. Zatem funkcja H , która początkowo maleje, powinna następnie rosnać, aby przy powrocie w pobliże stanu początkowego przyjmować wartości bliskie wartościom początkowym. Ponieważ jednak funkcja H cały czas maleje – pojawia się sprzeczność.

Przytoczone paradoksy wyraźnie wykazują, że teoria Boltzmann'a nie może być konsekwencją jedynie czysto mechanicznego modelu. Jak już wspomniałem, w modelu Boltzmann'a elementem spoza mechaniki klasycznej była hipoteza o molekularnym chaosie nadająca modelowi charakter statystyczny. To właśnie wprowadzenie tej hipotezy czyni model nieodwracalnym. Zatem zrozumienie nieodwracalności modelu sprowadza się do zrozumienia istoty hipotezy o molekularnym chaosie.

Między Boltzmannem a jego oponentami toczyła się bardziej walka na słowa niż na argumenty naukowe. Boltzmann do końca życia był przekonany o słuszności swojej teorii, nie mógł jednak odeprzeć stawianych mu zarzutów. Być może świadomość trudności, jakie ów problem w sobie kryje, mogła być przyczyną samobójczej śmierci Boltzmann'a w 1906 roku.

Spróbujmy wyjaśnić opisane paradoksy na uproszczonym modelu, który zawiera wszystkie istotne cechy modelu fizycznego, ale jest na tyle prosty, że analiza staje się przejrzysta. Model ten nosi nazwę *kołowego modelu Kaca* (opis można znaleźć w książce Marka Kaca *Kilka zagadnień stochastycznych fizyki i matematyki*, PWN 1961). Rozważmy na okręgu n punktów P_1, \dots, P_n rozłożonych równomiernie w porządku wyznaczonym przez kierunek ruchu wskazówek zegara. Załóżmy, że $2m < n$ i m punktów jest zaznaczonych: tworzą one zbiór S . Pomiedzy każdymi dwoma kolejnymi punktami P_j i P_{j+1} (przyjmujemy, że $P_{n+1} = P_1$, $P_{n+2} = P_2$ itd.) znajduje się kula o jednym z dwóch kolorów: biała lub czarna. W jednostce czasu każda kula przesuwa się o jedno miejsce w kierunku ruchu wskazówek zegara (tzn. kula, która była pomiędzy P_j i P_{j+1} znajdzie się między P_{j+1} i P_{j+2}). Kula zmienia kolor wtedy i tylko wtedy, gdy przechodzi przez punkt ze zbioru S . Zagadnienie formuluje się w ten sposób, że dla zadanego początkowego rozkładu kolorów należy znaleźć rozkład po t krokach. Wprowadźmy następujące oznaczenia: $N_c(t)$ oraz $N_b(t)$ są odpowiednio liczbami czarnych i białych kul w chwili t . Ponadto

$$a_j = \begin{cases} -1, & \text{gdy } P_j \in S, \\ 1, & \text{gdy } P_j \notin S \end{cases}$$

oraz

$$f_j(t) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli kula między } P_j \text{ i } P_{j+1} \text{ jest czarna w chwili } t, \\ -1, & \text{jeżeli kula między } P_j \text{ i } P_{j+1} \text{ jest biała w chwili } t, \end{cases}$$

dla $j = 1, \dots, n$.

Ewolucję układu w czasie określa następujące równanie:

$$f_j(t) = a_j f_{j-1}(t-1),$$

gdyż kula znajdująca się między P_j i P_{j+1} w chwili t przyszła tam z położenia między P_{j-1} i P_j w chwili $t-1$ zmieniając kolor lub nie, zależnie od tego czy punkt P_j jest w zbiorze S , czy nie. Stąd otrzymujemy

$$f_j(t) = a_j a_{j-1} \dots a_{j-t+1} f_{j-t}(0).$$

Równanie to opisuje dynamikę danego modelu, a zatem może być uznane za odpowiednik równań mechaniki klasycznej. Podobnie jak te równania rozważany model jest zarówno odwracalny jak i ma własność powracalności. Zmieniając kierunek ruchu po okręgu (co odpowiada transformacji $t \rightarrow -t$) wraca się do punktu wyjścia: model jest więc odwracalny. Powracalność jest równie łatwa do zaobserwowania, gdyż model jest okresowy o okresie $2n$. Faktycznie, po n krokach każda kula wróci do swojego początkowego położenia przechodząc przez wszystkie punkty zbioru S . Będzie miała wtedy kolor wyznaczony przez $(-1)^m f_j(0)$. Zatem po $2n$ krokach kula wróci do swojego początkowego koloru: $(-1)^{2m} f_j(0) = f_j(0)$.

Oczywiście, model jest w pełni deterministyczny. Naśladując idee Boltzmann'a można do modelu wprowadzić losowość. W tym celu można przyjąć, że zbiór S nie jest zadany z góry, lecz, że każdy punkt P_1, \dots, P_n , niezależnie od pozostałych, jest z prawdopodobieństwem $\beta = \frac{m}{n}$ zaliczany do S , gdzie β jest ustalone i mniejsze od $\frac{1}{2}$. Następnie można obliczyć wartość średnią różnicy $N_c(t) - N_b(t)$. Wynik jest następujący

$$\langle N_c(t) - N_b(t) \rangle = (1 - 2\beta)^{n - |n-t|} (N_c(0) - N_b(0)).$$

Zatem dla n bardzo dużej liczby czarnych i białych kul będą się wyrównywały wykładniczo wraz ze wzrostem czasu t ($t < n$), niezależnie od stanu początkowego. Jest to odpowiednik twierdzenia H Boltzmann'a.

Otrzymany wynik wskazuje na źródło nieodwracalności – jest nim wprowadzenie do modelu elementów „pozamechanicznych”: uśrednienia oraz przejścia granicznego, obcych indywidualnym układom mechanicznym. W modelu Kaca uśrednia się po zbiorach S i rozważa granicę przy $n \rightarrow \infty$. Jest to pełna analogia do modelu Boltzmann'a. To sugeruje, że równanie Boltzmann'a należy traktować jako „ściśle w pewnym uśrednieniu”. Niestety, tej intuicji – nawet dzisiaj, 120 lat po powstaniu teorii Boltzmann'a – nie udało się nadać zadowalającego matematycznego kształtu. Należy przypuszczać, że zagadnienia te w dalszym ciągu będą wzbudzały silne emocje i gorące dyskusje (por. Prigogine i Stengers, *Z chaosu ku porządkowi*, PIW 1990).

Symetrie, symetrie, symetrie

Piotr HAJŁASZ

Gdy mamy dowolny, np. bardzo „paskudny” zbiór, to wydaje się, że nie można dopatrzeć się w nim żadnych symetrii. Dlatego przeczy trochę naszej intuicji następujący fakt:

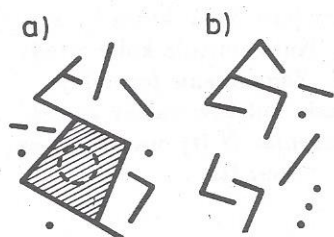
Dowolna płaska figura ograniczona o niepustym wnętrzu (tzn. zawierająca pewne koło) jest sumą skończonej liczby (niekoniecznie rozłącznych) figur środkowo symetrycznych.

Wbrew pozorom, dowód tego nie jest trudny. Figurę oznaczmy przez K , przez B zaś koło w niej zawarte. Niech ponadto S_a oznacza symetrię środkową względem punktu a . Nietrudno zauważyć, że figura $K \cap S_a(K)$ jest środkowo symetryczna. Ponadto figura ta zawiera tę część zbioru K , która jest przykryta przez koło $B' = S_a(B)$. Ponieważ figurę K można przykryć za pomocą skończonej liczby takich kół $S_{a_1}(B), \dots, S_{a_n}(B)$ (przy odpowiednio dobranych a_1, \dots, a_n), więc figura K jest sumą figur środkowo symetrycznych $K \cap S_{a_1}(K), \dots, K \cap S_{a_n}(K)$.

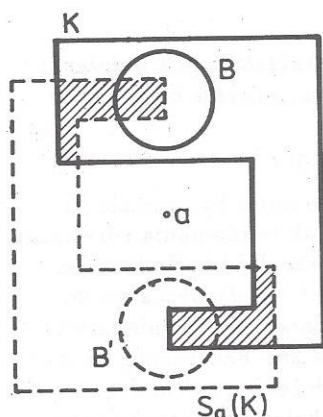
Podobnie w innych pozbawionych symetrii sytuacjach możemy dowolny „obiekt” przedstawić za pomocą „objektów symetrycznych”. A oto przykład (niezbędne wyjaśnienia znajdują się na marginesie sąsiedniej strony).

Niech X będzie dowolnym zbiorem. Wówczas każdą bijekcję $F: X \rightarrow X$ można przedstawić jako złożenie dwóch inwolucji.

Ktoś może zaprotestować. Nie ma tu przecież mowy o żadnej symetrii. My jednak odpieramy atak mówiąc, że słowo *symetria* pisaliśmy w cudzysłowie, a więc mieliśmy na myśli coś, co tylko w jakimś stopniu przypomina symetrię. A czy inwolucja przypomina symetrię? Zastanówmy się, co wyróżnia symetrie spośród izometrii. Otóż, symetrie to takie izometrie, które zastosowane dwukrotnie (dwukrotnie nie sama symetria) dają identyczność. Tak jest oczywiście dla symetrii względem punktu, prostej, płaszczyzny i... już dla żadnej innej izometrii (dlaczego?). A więc symetrie to te izometrie, które są inwolucjami. Śmiało więc możemy w przypadku dowolnego zbioru inwolucję uznać za prawidłowe uogólnienie symetrii.



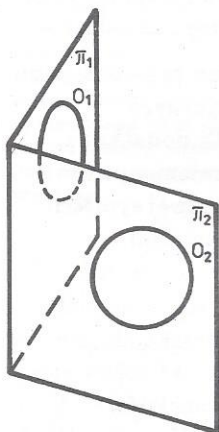
Rys. 1. Mówimy, że figura płaska ma niepuste wnętrze, jeżeli zawiera ona pewne koło. Figura na rysunku a) ma niepuste wnętrze, a na rysunku b) – puste.



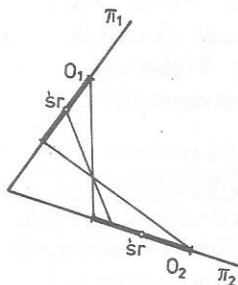
Rys. 2. Część ciemna to $K \cap S_a(K)$. Jest ona środkowo symetryczna. Ponadto zbiór $K \cap B'$ jest podzbiorem $K \cap S_a(K)$.

Bijekcją nazywamy każde przekształcenie $F: X \rightarrow X$, które jest różnowartościowe i na. Natomiast inwolucja to takie nieidentycznościowe przekształcenie $S: X \rightarrow X$, że $S(S(x)) = x$ dla każdego $x \in X$ (symbolicznie $S \circ S = \text{Id}$).

Praca Wojciechowskiego ukazała się w *Wiadomościach Matematycznych*, 27 (1986), str. 75-80, jej zaś skrót (jak każdej zwycięskiej w Konkursie), ukazał się w *Delcie* 1/1985.



Rys. 3



Rys. 4

Nie będziemy dowodzić twierdzenia o postaci bijekcji $F: X \rightarrow X$.

Dowód pozostawiamy zainteresowanym Czytelnikom (można go znaleźć w *Wiadomościach Matematycznych*, 22 (1980) str. 327). Nie jest on bardzo trudny. Zresztą zbyt trudny być nie może, bo skoro o zbiorze X niczego nie zakładamy, to nie mamy zbyt dużego wyboru w szukaniu rozwiązań. Główna trudność polega na umiejętności poruszania się w abstrakcyjnej sytuacji: skoro zbiór jest dowolny, więc trudno jest cokolwiek narysować i „zobaczyć”.

Symetrie dostarczają też innego rodzaju niespodzianek. W *Wiadomościach Matematycznych* 23 (1980) zostało zamieszczone zadanie następującej treści:

Udowodnić, że jeśli F jest figurą ograniczoną (zawartą w płaszczyźnie), mającą środek symetrii należący do tej figury, to F nie można rozłożyć na dwie rozłączne figury przystające.

Mimo iż Redakcja nie знаła dowodu, to jednak teza wydawała się na tyle oczywista (no bo skoro niby oba składniki mają być przystające, to do obu „musi” należeć środek symetrii, co przeczy ich rozłączności), że zostało napisane „udowodnić”, a nie „czy prawdą jest”. No i niespodzianka. Michał Wojciechowski znalazł kontrprzykład, zdobywając dzięki temu złoty medal w Konkursie Prac Uczniowskich z Matematyki w 1984 r. Oprócz owego kontrprzykładu wymyślił i udowodnił, tym razem już prawdziwe, następujące twierdzenie:

Figura ograniczona, zawarta w płaszczyźnie i zawierająca swój środek symetrii, nie może być przedstawiona jako suma dwóch rozłącznych figur przystających i środkowo symetrycznych.

Zastosowanie symetrii bardzo często prowadzi do błyskotliwego rozwiązania zadania. Najprostszym przykładem jest następujące, powszechnie znane, zadanie:

Mamy dwa punkty A i B leżące po jednej stronie prostej p . Znaleźć na prostej p taki punkt C , aby suma odległości $AC + BC$ była najmniejsza.

Odbijamy punkt B symetrycznie względem prostej p i... każdy z Czytelników z pewnością widzi już rozwiązanie.

Nieco trudniejsze (choć niewiele) jest następujące zadanie:

Wewnątrz kąta ostrego dany jest punkt A . Znaleźć takie punkty B i C na obu ramionach tego kąta, aby obwód trójkąta ABC był najmniejszy.

Czytelnik z pewnością bez trudu rozwiąże to zadanie.

Powyższe dwa przykłady na zastosowanie symetrii w rozwiązywaniu zadań geometrycznych są standardowe, natomiast przykład przedstawiony poniżej jest zaskakujący i nietrywialny.

Udowodnić, że za pomocą samej linijki nie można skonstruować środka danego koła.

Dowód przedstawiony poniżej jest trudny. Trzeba mu się trochę poprzyglądać, zanim stanie się oczywiste, że jest on poprawny.

Rozważmy dwie przecinające się płaszczyzny π_1 i π_2 (rys. 3). Niech narysowane na nich okręgi O_1 i O_2 będą symetryczne względem płaszczyzny dwusiecznej. Można wykazać, że okręgi O_1 i O_2 są przekrojami stożka o wierzchołku O (i eliptycznej podstawie) płaszczyznami π_1 i π_2 , jak na rysunku 4 (intuicyjnie jest to prawie oczywiste, ale jak to ściśle wykazać?). Przypuśćmy, że potrafimy narysować środek okręgu O_1 za pomocą samej linijki. Jeśli będziemy linijką rysować proste w płaszczyźnie π_1 , to przy rzutowaniu względem środka O będą one przechodzić na proste rysowane w płaszczyźnie π_2 . A więc cała konstrukcja środka okręgu O_1 za pomocą linijki przejdzie przy rzutowaniu względem środka O na konstrukcję środka okręgu O_2 . W szczególności środek okręgu O_1 przejdzie przy rzutowaniu względem O na środek okręgu O_2 , co, jak widać na rysunku, nie jest prawdą.

Uzyskana sprzeczność dowodzi niewykonalności powyższej konstrukcji.

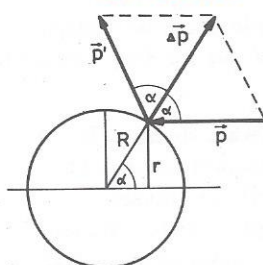
Łamanie symetrii

Jan KALINOWSKI



Rozwiązanie zadania F 361. Niech R oznacza promień kul, I zaś moc promieniowania przypadająca na jednostkę powierzchni. Siła, z jaką oddziałuje promieniowanie, jest związana ze zmianą pędu fotonów. Dla idealnie odbijającej kuli zmiana pędu wynosi

$$\Delta p = 2p \cos \alpha.$$



Rzut tej wartości na kierunek padania promieniowania wynosi

$$\Delta p_{\parallel} = 2p \cos^2 \alpha.$$

Siła oddziaływania promieniowania na kulę jest równa

$$F_o = \int \frac{2I}{c} \cos^2 \alpha dS_{\perp},$$

c - oznacza prędkość światła, a $dS_{\perp} = 2\pi r dr$ jest powierzchnią prostopadłą do strumienia światła. Podstawiając $r = R \sin \alpha$, $dr = R \cos \alpha d\alpha$ obliczamy

$$F_o = \frac{4\pi R^2}{c} I \int_0^{\pi/2} \cos^3 \alpha \sin \alpha d\alpha = \frac{I}{c} \pi R^2.$$

Dla ciała doskonale czarnego zachodzi $\Delta p = p$ (pochłanianie). Stąd siła F_c działająca na czarną kulę jest równa

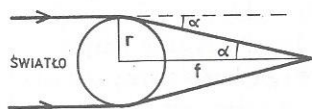
$$F_c = \int \frac{I}{c} dS_{\perp} = \frac{I}{c} \pi R^2.$$

Jak widać, na obie kule działają równe siły. Zauważmy, że dla krążków (zamiast kul) siły nie będą równe.



Rozwiązanie zadania F 362. Jeżeli galaktyka jako całość stanowi soczewkę grawitacyjną, możemy zająć się tylko jej brzegiem. Z równania ruchu dla gwiazd $\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$ wyznaczamy $\frac{GM}{r} = v^2$, skąd otrzymujemy $\alpha = \frac{4v^2}{c^2}$. Ponieważ $f \tan \alpha = r$ (rys., f oznacza ogniskową), otrzymujemy

$$f = \frac{c^2 r}{4v^2} = 3,6 \text{ mld lat świetlnych.}$$



Symetrie w fizyce odgrywają olbrzymią rolę. Z własności niezmienniczości teorii względem symetrii wynika bowiem, jak wykazała to Emma Noether, istnienie praw zachowania. Prawa zachowania mają tę przyjemną cechę, że nawet bez dokładnej znajomości dynamiki procesów fizycznych możemy na ich podstawie wiele powiedzieć o możliwym zachowaniu układu fizycznego, w szczególności możemy wykluczyć niektóre zdarzenia. Na przykład: z niezmienniczości (symetrii) względem przesunięć w przestrzeni wynika zachowanie pędu układu, więc stany o innej wartości pędu niż początkowa są wykluczone.

Warto może uściślić pojęcie symetrii, gdyż niezrozumienie jej istoty bardzo łatwo może doprowadzić nas do błędnych wniosków. Jako przykład rozpatrzmy ruch punktu w polu stałej siły. Wydawałoby się, że przesunięcie w przestrzeni $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{r}_0$ będzie transformacją symetrii takiego układu, gdyż równanie ruchu Newtona $\vec{F} = m\vec{a}$ nie zmienia się względem tego przekształcenia. Gdyby tak rzeczywiście było, to pęd powinien być zachowany. Ale przecież pęd nie jest zachowany, gdy działa zewnętrzna siła. W twierdzeniu Noether pojęcie symetrii związane jest z wielkością zwaną działaniem: transformacja symetrii nie zmienia działania. Dla punktu materialnego poruszającego się w polu potencjalnym działanie jest całką względem czasu z różnicy energii kinetycznej i potencjalnej. Energia potencjalna zależy od położenia punktu materialnego, działanie więc nie jest niezmiennicze względem przesunięć. Siły zewnętrzne pochodzą z reguły od innych ciał, toteż rozszerzenie rozważanego układu tak, aby objął on źródła tych sił, może doprowadzić do znalezienia prawa zachowania pędu całego układu.

Symetrie związane z przesunięciami i obrotami w przestrzeni oraz przesunięciami w czasie charakteryzują wszystkie układy odosobnione. W konkretnych przypadkach układ fizyczny może mieć szerszą klasę symetrii. Te dodatkowe symetrie często nazywa się dynamicznymi w odróżnieniu od wymienionych powyżej, tzw. kinematycznych symetrii. Przykładu takiej dodatkowej symetrii może dostarczyć ruch keplerowski w polu grawitacyjnym z potencjałem $V \sim -1/r$. Z symetrii względem obrotów wynika zachowanie momentu pędu, to znaczy ruch musi być płaski. Gdy energia całkowita E jest ujemna, to ciało porusza się po elipsie. (Zwróćmy uwagę, że symetria obrotowa potencjału nie wyklucza rozwiązań nie mających tej symetrii.) Należy zauważyć, że ustawienie elipsy nie ulega zmianie w czasie. Nie jest to już prawda dla potencjałów zmieniających się inaczej niż $1/r$ (z wyjątkiem jedynie potencjału $V \sim r^2$). Ruch keplerowski charakteryzuje się więc dodatkową symetrią dynamiczną. Można wykazać (patrz np. *Mechanika klasyczna* G. Białkowskiego), że gdy zdefiniujemy odpowiednio dodatkową czwartą składową położenia i pędu, ruch keplerowski będzie miał symetrię względem obrotów w czterech wymiarach. Warto dodać, że dodatkowa, dynamiczna symetria występuje jedynie dla energii ujemnych. Dla ruchów po hiperbolach ($E > 0$) symetria ta nie występuje. Widać więc, że typ symetrii zależy nie tylko od postaci sił, ale też od innych czynników.

Do tej pory mówiliśmy o symetriach przestrzeni położenia (lub jej rozszerzeniach w przypadku symetrii dynamicznych). W fizyce bardzo często wprowadza się pojęcie symetrii wewnętrznych. Pod tym pojęciem kryją się symetrie w zupełnie abstrakcyjnych przestrzeniach parametrów. Na przykład: do opisu sił jądrowych protonu i neutronu wprowadza się izospin, pod względem formalnym podobny do momentu pędu. Izospin jest wielkością wektorową „żyjącą” w abstrakcyjnej trójwymiarowej przestrzeni izospinowej. Proton i neutron opisywane są jako stany jednej cząstki elementarnej, zwanej nukleonem, o izospinie $1/2$. W mechanice kwantowej składowe wektora izospinu (i momentu pędu)



Rozwiązanie zadania M 673.

Dokonyamy obrotu krzywej o jedną ósmą część kąta pełnego, czyli o $\pi/4$:

$$x = X \cos \frac{\pi}{4} - Y \sin \frac{\pi}{4} = \frac{X - Y}{\sqrt{2}},$$

$$y = X \sin \frac{\pi}{4} + Y \cos \frac{\pi}{4} = \frac{X + Y}{\sqrt{2}}.$$

Równanie krzywej można zapisać $(x^2 - y^2)^2 + kxy(x^2 - y^2) - 4x^2y^2 = 0$. Wówczas łatwo zauważyć, że powyższe przekształcenie zachowuje tę krzywą, a zatem krzywa po obrocie o kąt $\pi/4$ nie zmienia się. Stąd wynika, że części, na które krzywa dzieli okrąg $x^2 + y^2 = 1$ zachowują się przy działaniu obrotu o $\pi/4$, a więc są równe. Sprawdźmy jeszcze tylko, ile jest punktów przecięcia; wstawmy w tym celu do równania krzywej $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$. Dostaniemy po przekształceniach równanie

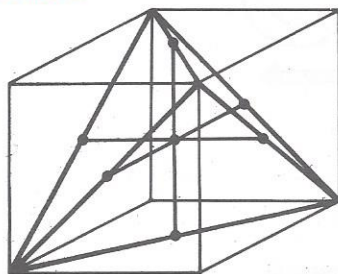
$$4 \cos 4\alpha + k \sin 4\alpha = 0,$$

które ma dokładnie 8 rozwiązań w przedziale $[0, 2\pi)$. Oznacza to, że krzywa dzieli okrąg na 8 równych części.



Rozwiązanie zadania M 674.

„Opiszmy” na czworoscianie sześcián — w ten sposób, by każda krawędź czworoscianu pokrywała się z przekątną jednej ze ścian sześciánu. Proste łączące środki skośnych krawędzi czworoscianu będą wtedy po prostu osiami symetrii sześciánu, a te, oczywiście, przecinają się pod kątem prostym.



Rozwiązanie zadania M 675.

Dodając stronami wszystkie równania układu, a następnie dzieląc otrzymane równanie przez 4, dostaniemy

$$x + y + z + t + s = 3.$$

Teraz wystarczy po prostu odejmować od tego równania po kolei wszystkie równania układu, by otrzymać rozwiązanie: $s = -4$, $x = 4$, $y = 2$, $z = 1$, $t = 0$.

są skwantowane i dla izospinu $1/2$ mogą przyjmować jedynie wartości $\pm 1/2$. Proton to nukleon z rzutem izospinu na dowolny kierunek $+1/2$, neutron to nukleon z rzutem izospinu $-1/2$. Stwierdzenie, że oddziaływania silne są niezmiennicze względem obrotów w przestrzeni izospinowej prowadzi do zasady zachowania izospinu w reakcjach jądrowych (tak jak niezmienniczość względem obrotów w zwykłej przestrzeni konfiguracyjnej prowadzi do zasady zachowania momentu pędu). Stąd można wyprowadzić wiele związków między różnymi procesami z protonami i neutronami.

Przeglądając tytuły artykułów lub książek naukowych bardzo łatwo natrafić można na słowo *symetria* w tytule. Ale często idzie ono w parze ze słowem *złamana*. Złamana symetria oznacza, że jej nie ma. Po co więc mówić o symetriach, których nie ma? Najpierw autorzy wprowadzają pewne symetrie do teorii, a następnie czynią wiele wysiłku, aby ich nie było.

Ścisła symetria teorii implikuje ścisłą zasadę zachowania. W przyrodzie występują różne procesy i oddziaływania. W niektórych pewne wielkości fizyczne są zachowane, w innych nie. Na przykład, izospin jest zachowany w oddziaływaniach silnych, a nie jest zachowany w oddziaływaniach elektromagnetycznych i słabych. Izospin nie jest więc zachowany i nie ma symetrii izospinowej. Ale w porównaniu z oddziaływaniami silnymi oddziaływania nie zachowujące izospinu dają niewielką poprawkę do siły oddziaływań jądrowych. Taka sytuacja, gdy możemy wyraźnie odróżnić oddziaływanie decydujące o przebiegu jakichś procesów fizycznych, i które wykazuje pewne symetrie, od innych, dających niewielkie poprawki i nie mających tych symetrii, jest dosyć typowa w fizyce, chemii, biologii. Pozwala to konstruować modele teoretyczne wychodząc najpierw z teorii ze ścisłą symetrią, aby opisać oddziaływanie dominujące. Następnie dodaje się do teorii człony łamiące symetrię w celu uwzględnienia innych oddziaływań. Współczynniki przy tych członach dają nam możliwość „kontrolowania, jak bardzo symetria jest złamana”.

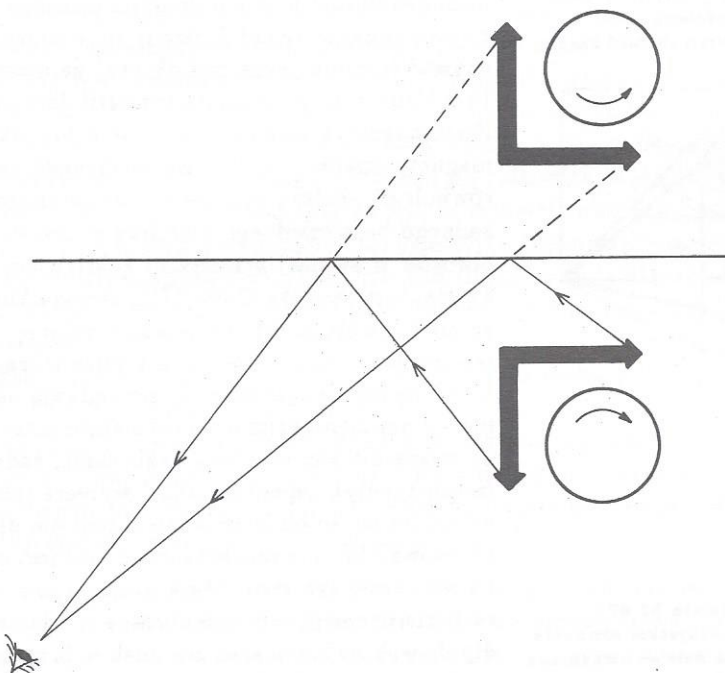
Łamanie symetrii przez dopisanie do teorii członów jawnie naruszających niezmienniczość nosi nazwę dynamicznego łamania symetrii. Jest jeszcze inny sposób łamania symetrii zwany spontanicznym. W zasadzie powinno się raczej używać terminu „symetria ukryta” zamiast „symetria spontanicznie złamana”. Przykładu takiego łamania symetrii dostarcza teoria ferromagnetyzmu. Ferromagnetyk można wyobrazić sobie jako zbiór oddziałujących dipoli magnetycznych. Oddziaływania magnetyczne dipoli dążą do ustawienia ich równolegle. Zależą więc od ich wzajemnego ustawienia, ale nie wyróżniają żadnego bezwzględnie kierunku w przestrzeni. Są symetryczne względem obrotów w zwykłej przestrzeni konfiguracyjnej. Powyżej pewnej temperatury, zwanej temperaturą Curie (T_c), energia kinetyczna dipoli jest na tyle duża, że nie pozwala na ich wzajemną korelację. Stan ferromagnetyka wykazuje więc też symetrię obrotową. Jeżeli temperatura spadnie poniżej T_c , to oddziaływania dipoli są już na tyle silne, że porządkują ustawienie dipoli i ferromagnetyk ma pewne namagnesowanie wyróżniające jakiś kierunek w przestrzeni. Powyżej T_c wszystkie kierunki były takie same, żaden nie był wyróżniony, poniżej T_c ferromagnetyk „spontanicznie” wybiera jakiś kierunek magnetyzacji. Zwróćmy uwagę na to, że oddziaływanie dipoli nie ulega zmianie, dalej ma symetrię obrotową. W tym sensie teoria nadal jest symetryczna. To stan ferromagnetyka nie wykazuje symetrii. Mała istota żyjąca wśród dipoli miałaby wielkie kłopoty ze stwierdzeniem symetrii obrotowej oddziaływań dipoli widząc, że wszystkie dipole wskazują ten sam kierunek w przestrzeni. Dlatego byłoby lepiej mówić o ukrytej symetrii niż o spontanicznie złamanej.

Powyższe przykłady łamania symetrii wyglądają na bardzo proste. Idea łamania symetrii pozwala na opis szerokiej klasy zjawisk z symetriami przybliżonymi. Cała sztuka polega jednak na niezwykłym wycuciu, co i kiedy jest zachowane i jakie człony należy dopisać do budowanej teorii, aby poprawnie opisać symetrie przybliżone.

Lustro

Lustrom przez wieki przypisywano diabelskie cechy. Gdy mnich Savonarola zdobył władzę w Republice Florenckiej, niszczone je publicznie. Również publicznie Savonarolę powieszono i spalono w roku 1498, a lustra nie przestają nas dziwić do dziś. Jak to się dzieje, że ten w lustrze to taki sam jak ty, tyle że twoja ręka prawa jest jego lewą, a lewa prawą. Przekonaj się o tym podając mu dłoń. Jeśli jednak lewa strona została zamieniona z prawą, to dlaczego góra nie została zamieniona z dołem i w lustrze stoimy na nogach, a nie na głowie? No właśnie, dlaczego?

Rysunek ilustruje działanie lustra.



Widzimy, że strzałki, które są równoległe do płaszczyzny lustra, nie zmieniają swej orientacji, gdy są widziane w lustrze. To właśnie sprawia, że nasze lustrzane odbicie stoi, jak my, na nogach, a nie na głowie. Dlaczego w takim razie lewa strona została zamieniona z prawą?

W istocie strony również nie zostały zamienione, lecz raczej w pewien szczególny sposób zostaliśmy odwróceniem tyłem do przodu, lustrzanie odbici właśnie. Nasze odbicie stoi twarzą do nas. Jak widzimy na rysunku, strzałki prostopadle do płaszczyzny lustra zmieniają orientację. To właśnie sprawia, że ręce się zamieniają.

Określenie lewej i prawej strony ma jedynie sens wtedy, gdy ustalony został kierunek „w przód” lub kierunek „w tył”. Często słyszana informacja typu: kino jest po prawej stronie ulicy, jest bezużyteczna, jeśli nie wiemy, jak jest zorientowany nasz informator. W przypadku człowieka jego „przód” i „tył” jest jasno wyróżniony, a zatem wiemy, która ręka jest lewa, a która prawa. Dla tych, którym to się myli, wyjaśniam: jeśli stoimy przodem ku północy, prawe ramię wskazuje wschód, a lewe zachód.

Wróćmy do lustra. Nasze odbicie jest odwrotnie niż my zorientowane, więc nasza ręka prawa jest jego lewą i odwrotnie. To wszystko. Pozostaje tylko do wyjaśnienia, czy ten w lustrze to ty, czy nie ty.

Jak już wyjaśniliśmy, ręka lewa zamienia się w lustrze w prawą. Jak istotna to zmiana łatwo się przekonać nakładając lewą rękawiczkę na prawą dłoń. Żebyśmy nie wiem jak się starali, odwrotnie założone rękawiczki czy buty nie będą pasowały. I tak też jest z lustrzanym odbiciem, niby podobne, a jednak istotnie inne.

Zamiana lewego na prawy okazuje się dużo poważniejsza, niż na pierwszy rzut oka mogłoby się wydawać i nie ogranicza się do kłopotów z rękawiczkami czy butami. Oto przykład. Istnieją dwa typy molekuł cukru nazywane lewymi i prawymi. Przy lustrzanym odbiciu jedna przechodzi w drugą. Jeśli sztucznie syntetyzować cukier, to w rezultacie otrzymujemy równą liczbę lewych i prawych molekuł. Natomiast w otaczającej nas przyrodzie występuje, z powodów niewiadomych, wyłącznie cukier prawy. Jeśli dać bakteriom cukier syntetyczny, to po pewnym czasie prawy zostanie zjedzony, a lewy pozostanie nietknięty. Skąd ta niechęć? Okazuje się, że przyroda wybrała „prawość” (nie mylić z prawicowością). Skomplikowane molekuły białek, kwasy nukleinowe tworzą prawoskrętne spirale. Lewoskrętne nakrętka nie pasuje do prawoskrętnej śruby, tak i „prawa” bakteria nie rozkłada „lewego” cukru.

Wszystko, co napisałem, pokazuje, że świat odbity w lustrze jest istotnie różny od naszego. Tutaj nie ma wątpliwości. Zachodzi natomiast pytanie, czy procesy w świecie będącym odbiciem naszego przebiegałyby tak samo jak w naszym? Czy np. zegary, z których jeden jest dokładną lustrzaną kopią drugiego, chodziłyby z taką samą prędkością? Problem to nader skomplikowany i nie będę udawał, że tak nie jest. Przez wieki sądzono, że jeśli A' jest odbiciem A , to wszelkie różnice między nimi sprowadzają się do zamiany lewego na prawy i odwrotnie. Okazało się jednak, że tam, gdzie działają specyficzne siły zwane słabymi, działające jedynie w mikroświecie, procesy będące lustrzanymi odbiciami mogą zachodzić różnie. Odpowiedź dotycząca zegara jest więc niejednoznaczna. Jeśli mechanizm zegara wykorzystuje oddziaływania grawitacyjne lub elektromagnetyczne, to zegar i jego lustrzana kopia będą chodzić zgodnie. Jeśli natomiast działają tam oddziaływania słabe, to mogą chodzić różnie. Podobnie jest ze światami.

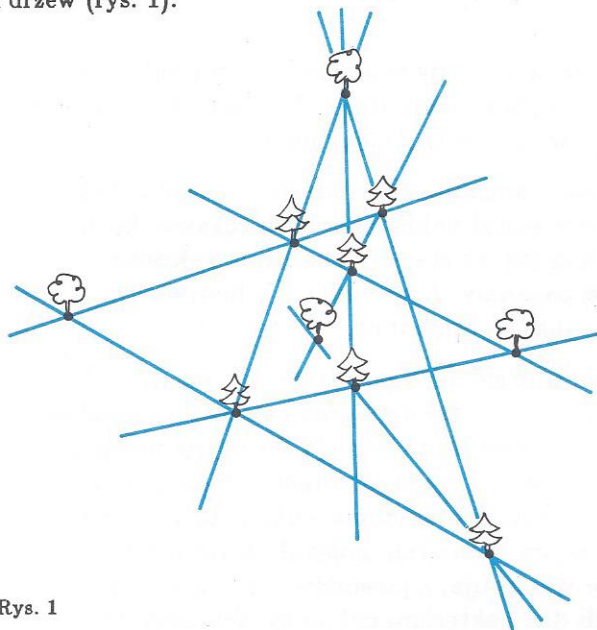
Na koniec pytanie. Które ucho obciął sobie Van Gogh? Autoportretem radzę nie wierzyć, bo są zwykle malowane z lustrzanego odbicia.

Małą Deltę przygotował Stanisław MRÓWCZYŃSKI

Symetryczne twierdzenia

Zdzisław POGODA

Czy w dziesięciu rzędach można tak posadzić dziesięć drzew, żeby w każdym rzędzie były dokładnie trzy drzewa? Oczywiście, jeśli wyobrazimy sobie rzędy jako równoległe grządki, to będzie kłopot z takim rozsądzeniem drzewek. Lecz gdy zrezygnujemy z równoległości rzędów (zachowując ich prostoliniowość), wtedy zadanie da się rozwiązać; otrzymujemy pewną konfigurację rzędów i drzew (rys. 1).



Rys. 1

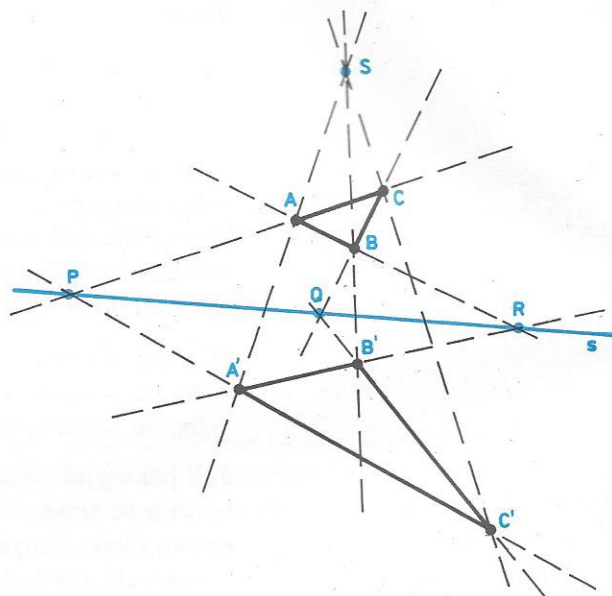
A co by było, gdyby w treści zadania zamienić słowa „rzędy” i „drzewa” miejscami, naturalnie tak, żeby całość miała sens? Brzmiałoby to mniej więcej tak: jak przez dziesięć drzew poprowadzić dziesięć rzędów, aby każde drzewo znalazło się w dokładnie trzech rzędach?

Zauważmy, że zaproponowana konfiguracja jest także i w tym przypadku dobra. Odznacza się ona swoistą symetrią ze względu na rzędy i drzewa. Tłumacząc otrzymany układ na język prostych (rzędy) i punktów (drzewa) dostaniemy konfigurację nazywaną czasem konfiguracją Desarguesa. Jest ona graficzną ilustracją pewnego ważnego twierdzenia, znanego jako twierdzenie Desarguesa.

Twierdzenie to można sformułować w następujący sposób:

Jeśli proste przechodzące przez odpowiednie wierzchołki trójkątów ABC i $A'B'C'$ przecinają się w jednym punkcie (S), to proste będące przedłużeniami odpowiednich boków tych trójkątów przecinają się w punktach leżących na jednej prostej (s) (rys. 2).

Może się zdarzyć, że jakaś para prostych nie przetnie się; dla prostych równoległych umówimy się, że przecinają się w nieskończoności. Przy takiej umowie twierdzenie zachowa swój sens również i w szczególnych przypadkach.



Rys. 2

Co się stanie, gdy wykonamy podobny eksperyment jak w przypadku drzew i rzędów i zamienimy w twierdzeniu miejscami słowa „punkty” i „proste”? W szczególności stwierdzenie „trzy proste przecinają się w jednym punkcie” zostanie zastąpione przez zwrot „trzy punkty leżą na jednej prostej” i ogólniej „prosta przechodzi przez punkt” należy wymienić na „punkt leży na prostej”. Ostateczny wynik jest taki, że założenia zamieniają się miejscami z tezą. Powstanie jakby lustrzane odbicie twierdzenia Desarguesa. I to twierdzenie jest również prawdziwe; nazwano je odwrotnym twierdzeniem Desarguesa.

Punkt S z twierdzenia nazywa się środkiem perspektywy trójkątów ABC i $A'B'C'$, a prosta s osią perspektywy tychże trójkątów. Możemy się też umówić, że trójkąt to trzy niewspółliniowe punkty i trzy łączące je proste.

Przyglądając się tym określeniom zauważymy, że przy zamianie punkty \leftrightarrow proste definicja środka perspektywy przejdzie w definicję osi i odwrotnie, natomiast poprzednio „spreparowana” definicja trójkąta jest nieczuła na takie zmiany.

Twierdzenie Desarguesa możemy teraz sformułować elegancko:

Dwa trójkąty mają środek perspektywy wtedy i tylko wtedy, gdy mają oś perspektywy.

Otrzymaliśmy twierdzenie odznaczające się ciekawą symetrią – zamieniając miejscami słowa „punkty” i „proste” (oraz odpowiednie zwroty) uzyskaliśmy to samo twierdzenie, tyle że lewa strona równoważności przejdzie na prawą i odwrotnie.

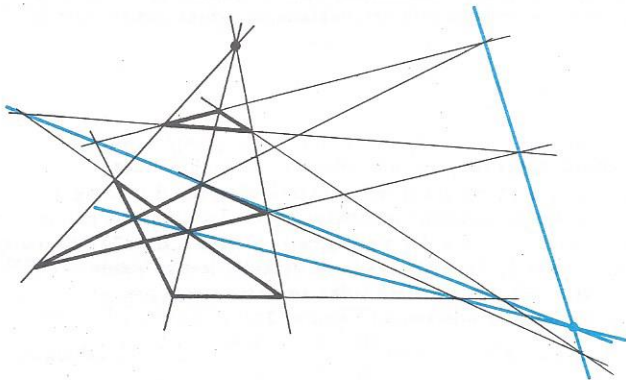
To dość niezwykle zjawisko charakterystyczne jest dla pewnego działu geometrii zwanego geometrią rzutową.

Twierdzenia z geometrii rzutowej charakteryzują się tym, że konfiguracje, które je opisują, nie zmieniają się przy rzutowaniu z płaszczyzny na płaszczyznę. Tak właśnie zachowuje się konfiguracja Desarguesa: gdy zrzutujemy ją na inną płaszczyznę, to nietrudno zauważyć, że powstanie tam analogiczna konfiguracja. Ale inną cechą tej teorii jest jej swoista symetria ze względu na zamianę słów „prosta” i „punkt”. Nie znaczy to, że każde twierdzenie ma tę własność co twierdzenie Desarguesa; zmiana powoduje, iż może powstać zupełnie nowe, nieoczekiwane zdanie, które jest również twierdzeniem geometrii rzutowej. Podobnie rzecz się ma z definicjami; z definicji jakiegoś obiektu otrzymujemy definicję na ogół innego obiektu czy też pojęcia geometrii rzutowej. Zauważmy, że obiektem „symetrycznym” do prostej traktowanej jako zbiór punktów będzie pęk prostych wyznaczonych przez ustalony punkt.

Opisane zjawisko nazwano zasadą dualności. Dodaje ona geometrii rzutowej osobliwego uroku.

Ilustracją może być wersja twierdzenia Desarguesa dla trzech trójkątów:

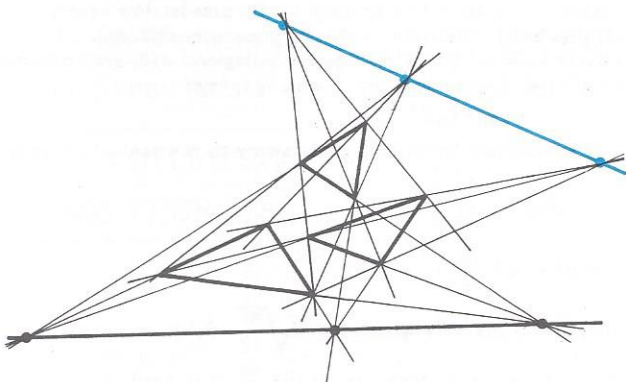
Jeśli odpowiednie wierzchołki trzech trójkątów leżą na trzech prostych przecinających się w jednym punkcie, to trzy osie perspektywy powstałe dla każdej pary trójkątów przecinają się w jednym punkcie (rys. 3a).



Rys. 3a

Tu „lustrzane odbicie” różni się od oryginału:

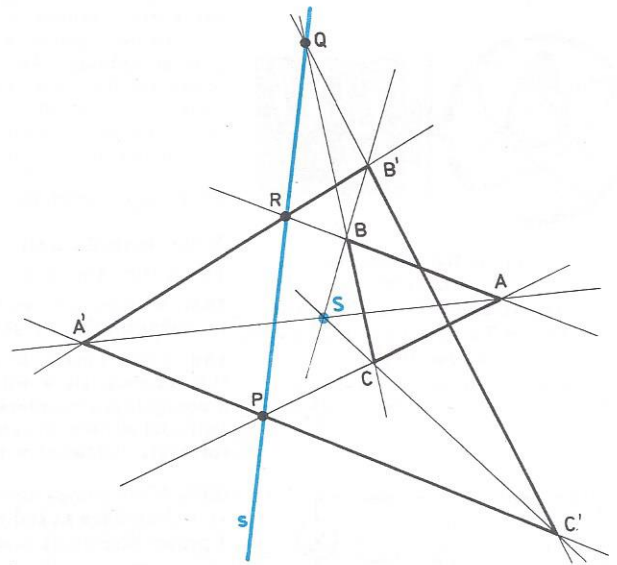
Jeśli odpowiednie boki trzech trójkątów przecinają się po trzy w trzech różnych współliniowych punktach, to trzy środki perspektywy powstałe dla każdej pary trójkątów leżą na jednej prostej (rys. 3b).



Rys. 3b

Dowody obu faktów są prostym zastosowaniem twierdzenia Desarguesa.

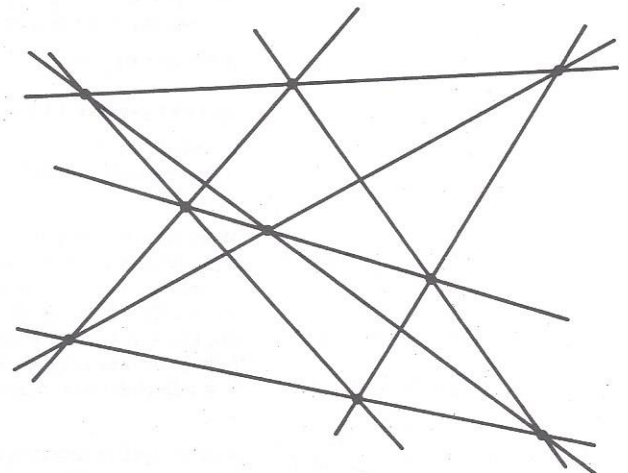
Wróćmy jeszcze na chwilę do konfiguracji Desarguesa. Ma ona jeszcze jedną niezwykłą cechę. Rolę środka perspektywy może grać dowolny punkt z konfiguracji wskazany przez nas. Potrafimy wtedy wyróżnić odpowiednie trójkąty i oś perspektywy (rys. 4).



Rys. 4

Podobnie dowolna prosta z konfiguracji może grać rolę osi perspektywy. Czy analogicznie zachowują się konfiguracje z pozostałych przedstawionych tu twierdzeń?

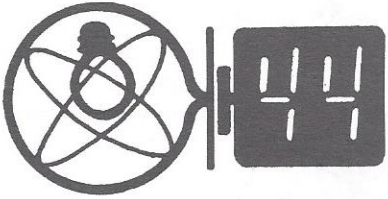
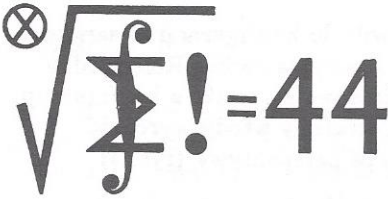
Na koniec jeszcze jedna konfiguracja zwana też konfiguracją Pappusa (rys. 5):



Rys. 5

Czytelnik zechce sam sformułować odpowiednie twierdzenie oraz twierdzenie dualne (czyli „symetryczne” do danego ze względu na zamianę prosta↔punkt). Tu także istnieje wersja w języku drzew i rzędów. Jaka?

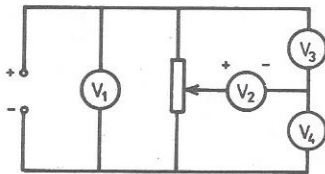
Klub 44



Czołwka ligi zadaniowej
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 147 ($WT=1,60$) i 148 ($WT=4,00$)
z numeru 10/1992

Przemysław Gworys - Czestochowa 29,41
Tomasz Wietecha - Tarnów 28,92



Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delta*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1993.

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/1993

Przypominamy treść zadań:

155. W obwodzie przedstawionym na rysunku 1 wszystkie woltomierze są jednakowe. Ile wskazują V_3 i V_4 , jeśli $V_1 = 12$ V, a $V_2 = 2$ V?

156. Ciało o masie M porusza się swobodnie z prędkością v_0 w kierunku nieruchomej ściany. Gdy znajduje się w odległości d od niej, następuje zderzenie z początkowo nieruchomą kulką o pomijalnych rozmiarach i masie m znacznie mniejszej od M . Zakładamy, że dalszy ruch kulki zachodzi wzdłuż tej samej prostej, co ruch ciała, a jej zderzenia z ciałem i ścianą są doskonale sprężyste. Obliczyć w przybliżeniu (dla $m \ll M$) minimalną odległość zbliżenia ciała do ściany.

155. Nie wymaga komentarza równanie $V_3 + V_4 = V_1$. Drugie równanie wynika stąd, że woltomierze są jednakowe - zatem napięcia są proporcjonalne do prądów i spełniają I prawo Kirchhoffa zastosowane do węzła między woltomierzami:

$$V_2 + V_3 = V_4.$$

Jeśli woltomierze są elektrostatyczne, tzn. mają nieskończony opór wewnętrzny, wówczas to samo równanie otrzymujemy z zasady zachowania ładunku zakładając jednakową pojemność woltomierzy. Rozwiązaniem jest

$$V_3 = \frac{1}{2}(V_1 - V_2) = 5 \text{ V}, \quad V_4 = \frac{1}{2}(V_1 + V_2) = 7 \text{ V}.$$

156. Ponieważ $M \gg m$, więc możemy podzielić ruch ciała i kulki na dwa częściowo nakładające się etapy: 1) ciało porusza się w przybliżeniu jednostajnie, kulka podczas kolejnych zderzeń nabiera prędkości, 2) prędkość kulki jest znacznie większa od prędkości ciała, czyli kulka zachowuje się jak gaz przy sprężeniu adiabatycznym. Zajmijmy się najpierw wyprowadzeniem zależności między prędkością v kulki a odległością x ciała („tłoka”) od ścianki w przybliżeniu określonym przez warunek 2), tzn. gdy prędkość v_k kulki jest znacznie większa od prędkości v_c ciała. Podczas każdego uderzenia o ciało kulka zwiększa swoją prędkość o $2v_c$ (znow przy założeniu $M \gg m$), a czas między uderzeniami wynosi $2x/v_k$. Zatem gdy ciało przesunie się o mały odcinek dx w czasie dx/v_c , nastąpi $\frac{dx}{v_c} : \frac{2x}{v_k} = \frac{dxv_k}{2xv_c}$ uderzeń i całkowity

przyrost prędkości kulki wyniesie $dv_k = \frac{dxv_k}{2xv_c} \cdot 2v_c = \frac{dxv_k}{x}$. W powyższych rachunkach pominęliśmy znaki - w rzeczywistości zmniejszeniu się x towarzyszy wzrost v_k , więc należy w tej równości dopisać minus i całkując otrzymujemy szukaną zależność

$$v_k x = \text{const}.$$

Wartość stałej znajdziemy rozpatrując etap 1). Jeśli ciało porusza się jednostajnie z prędkością v_0 , to kulka po pierwszym zderzeniu uzyska prędkość $2v_0$, po drugim $4v_0$, po trzecim $6v_0$ itd. Odległości ciała od ściany najprościej jest wyliczyć dla momentów, gdy kulka odbija się od ściany (można uznać, że są to z grubsza środki przedziałów czasu, dla których kulka ma odpowiednią prędkość). Nietrudno wyliczyć (szczegóły obliczeń pomijamy), że przy pierwszym odbiciu kulki od ściany ciało jest w odległości $d/2$, przy drugim - w odległości $d/4$, przy trzecim - $d/6$ itd. Zatem stała jest równa $v_0 d$, czyli

$$v_k x = v_0 d.$$

Aby znaleźć minimalną odległość zbliżenia ciała do ścianki, podstawmy to równanie do zasady zachowania energii

$$Mv_c^2 + mv_k^2 = Mv_0^2.$$

Otrzymujemy

$$Mv_c^2 + m \left(\frac{v_0 d}{x} \right)^2 = Mv_0^2.$$

Kładąc $v_c = 0$ (ciało się zatrzymuje) dostajemy rozwiązanie $x = d\sqrt{\frac{m}{M}}$. Ścisłe rachunki numeryczne wykazują, że wynik ten jest nieco zawyżony, ale już dla $\frac{M}{m} = 10$ błąd nie przekracza 5%, natomiast dla $\frac{M}{m} = 50$ błąd spada poniżej 1%.

Przemysław Gadziński - Środa Śl.	45,97
Tomasz Wietecha - Tarnów	38,89
Mirosław Matłega - Skoczów	38,76
Jerzy Janowicz - Bolesławiec	37,80
Leszek Gasiński - Stalowa Wola	37,04

Pan Przemek Gadziński zalicza drugą rundę.

Przypominamy treść zadań:

257. Czworoscian o krawędziach długości a, b, c, d, e, f jest wpisany w sferę o środku O i promieniu R . Niech O' będzie środkiem sfery przechodzącej przez środki ciężkości czterech ścian czworoscianu. Obliczyć odległość punktu O' od punktu O .

258. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych $\alpha \geq 1, x_1, \dots, x_n > 0$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{s - x_i} \right)^\alpha \geq \frac{n}{(n-1)^\alpha},$$

gdzie $s = x_1 + \dots + x_n$.

257. Oznaczmy przez A_1, A_2, A_3, A_4 wierzchołki czworoscianu, przez S_i - środek ciężkości ściany nie zawierającej wierzchołka A_i , i weźmy pod uwagę wektory

$$\vec{v}_i = \vec{OA}_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \text{ oraz } \vec{w} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^4 \vec{v}_i.$$

Wówczas $\vec{OS}_1 = \frac{1}{3}(\vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4) = \vec{w} - \frac{1}{3}\vec{v}_1$, i ogólnie

$$\vec{OS}_i = \vec{w} - \frac{1}{3}\vec{v}_i \text{ dla } i = 1, 2, 3, 4.$$

Punkt Q wyznaczony przez równość $\vec{OQ} = \vec{w}$ spełnia związek

$$\vec{QS}_i = \vec{OS}_i - \vec{OQ} = -\frac{1}{3}\vec{v}_i \text{ dla } i = 1, 2, 3, 4. \text{ Każdy z wektorów}$$

\vec{v}_i ma długość R . Wobec tego $|QS_i| = \frac{1}{3}R$ dla $i = 1, 2, 3, 4$, co oznacza, że punkt Q , jako jednakowo odległy od punktów S_i , pokrywa się z O' .

Tak więc szukana odległość równa się $|OO'| = |OQ| = |\vec{w}|$. Obliczamy:

$$\begin{aligned} 9|\vec{w}|^2 &= \left| \sum_{i=1}^4 \vec{v}_i \right|^2 = \sum_{i=1}^4 |\vec{v}_i|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \\ &= 4R^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (|\vec{v}_i|^2 + |\vec{v}_j|^2 - |\vec{v}_i - \vec{v}_j|^2) = \\ &= 4R^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} 2R^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq 4} |\vec{v}_i - \vec{v}_j|^2 = \\ &= 16R^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2). \end{aligned}$$

Stąd

$$|OO'| = |\vec{w}| = \frac{1}{3} \sqrt{16R^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2)}.$$

258. Funkcja $\phi(x) = x/(s-x)$ jest rosnąca w przedziale $(0; s)$. Zatem funkcja $f(x) = (\phi(x))^\alpha$ jest w tym przedziale wypukła, bo jej pochodna $f'(x) = \alpha x(s-x)^{-2} \phi(x)^{\alpha-1}$ jest funkcją rosnącą. Stosując do funkcji f nierówność Jensena otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \geq n f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = n f\left(\frac{s}{n}\right) = n \left(\phi\left(\frac{s}{n}\right)\right)^\alpha = \frac{n}{(n-1)^\alpha}.$$

Odcinek dla poczty

Zł

słownie złotych

Dokładny adres

na r-k AMOS

01-506 Warszawa

ul. Szenwalda 1

na r-k nazwa banku PKO VIII O/W-wa

Nr r-ku 1586-77578-136

stempel

..... podpis przyjmującego

Pobrano opłatę

zł

Odcinek dla posiadacza rachunku

Zł

słownie złotych

Dokładny adres

na r-k AMOS

01-506 Warszawa

ul. Szenwalda 1

na r-k nazwa banku PKO VIII O/W-wa

Nr r-ku 1586-77578-136

stempel

..... podpis przyjmującego

Pobrano opłatę

zł

Potwierdzenie dla wpłacającego

Zł

słownie złotych

Dokładny adres

na r-k AMOS

01-506 Warszawa

ul. Szenwalda 1

na r-k nazwa banku PKO VIII O/W-wa

Nr r-ku 1586-77578-136

stempel

..... podpis przyjmującego

Pobrano opłatę

zł



Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 673. Udowodnić, że dla dowolnego parametru $k \in \mathbb{R}$ krzywa o równaniu
$$x^4 + kx^3y - 6x^2y^2 - kxy^3 + y^4 = 0$$

dzieli okrąg $x^2 + y^2 = 1$ na osiem równych części.

Rozwiązanie na str. 7

M 674. Udowodnić, że proste łączące środki skośnych krawędzi czworościanu foremnego przecinają się pod kątem prostym.

Rozwiązanie na str. 7

M 675. Rozwiązać (najlepiej w pamięci!) układ równań

$$\begin{cases} x + y + z + t = 7 \\ y + z + t + s = -1 \\ z + t + s + x = 1 \\ t + s + x + y = 2 \\ s + x + y + z = 3 \end{cases}$$

Rozwiązanie na str. 7

Redaguje Jarosław KULPA

F 361. W równoległym strumieniu światła umieszczamy kulę o danym promieniu. Kiedy działa na nią większa siła: czy gdy jest doskonale czarna, czy też gdy idealnie odbija promieniowanie?

Rozwiązanie na str. 6

F 362. Pewna galaktyka stanowi soczewkę grawitacyjną, co oznacza, że promienie światła po przejściu przez nią zostają skupione. Prędkości gwiazd w zewnętrznych partiach tej galaktyki wynoszą 250 km/s, tyle samo, co prędkość Słońca w ruchu wokół jądra naszej Galaktyki. Promień galaktyki jest czterokrotnie mniejszy od promienia Drogi Mlecznej i wynosi $r = 100\,000$ lat świetlnych. Obliczyć ogniskową tej galaktyki wiedząc, że kąt ugięcia promieni będzie opisywany takim samym wzorem, jak ugięcie promieni w pobliżu gwiazd, mianowicie $\alpha = \frac{4GM}{c^2r}$, gdzie M jest masą galaktyki.

Rozwiązanie na str. 6

Prenumerata „Deltę”
za okres:

Prenumerata „Deltę”
za okres:

Prenumerata „Deltę”
za okres:

Żywa symetria

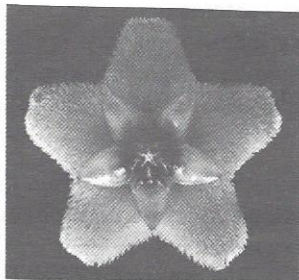
Regularności budowy roślin i zwierząt wynikają przeważnie z bardzo prostych, mechanicznych prawidłowości wszelkiego wzrostu. Stąd biorą się kształty tak liści, jak muszle ślimaków. Są jednak prawidłowości, które pochodzą z przypadku – po prostu jakiś organizm „na to wpadł”, a że udało mu się przeżyć i, co więcej, licznie się rozmnożyć, więc jego innowacja zaczęła być coraz szerzej obecna w świecie żywych stworzeń. Bo życie jest bardzo bezwzględne – wiele wskazuje na to, że żyjące dzisiaj organizmy wywodzą się od niewielu, bardzo niewielu przodków, że wymieranie gatunków i rodzajów jest zjawiskiem najbardziej typowym spośród towarzyszących życiu.

Chciałem zwrócić uwagę na takie przypadkowe, a bardzo rozpowszechnione prawidłowości. O tym, że są one przypadkowe, wnioskuję stąd, że choć są znane od wieków, jakoś nie udaje się wykryć istotnej ich przewagi nad innymi rozwiązaniami. Chodzi mianowicie o przeważającą w świecie wyższych roślin symetrię trój- i pięciokątną oraz przeważającą w świecie wyższych zwierząt symetrię dwu- i pięcioboczną.

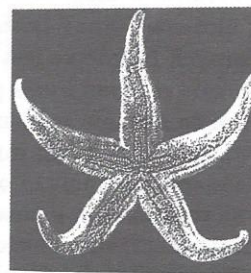
Symetria w budowie stworzeń żywych ma zapewne swe prąródło w trosce o niezawodność organizmu. Zaczęło się od konstrukcji typu toczek, gdzie trudno się zorientować czy to jedno stworzenie, czy też kolonia, potem były bardzo wielopromienne okrzemki wśród roślin, a otwornice i promienice wśród zwierząt – ich szkieleciki są tak podobne, że niefachowiec nie odróżni, co należy do fauny, a co do flory. Potem, wraz ze wzrostem niezawodności i ceny poszczególnych urządzeń zaczęto oszczędzać na ich dublowaniu się w jednym organizmie. U zwierząt skończyły się albo na liczbie 2, albo na liczbie 5. Tę ostatnią preferują szkarłupnie, spośród których najbardziej znane są rozgwiazdy i inne *frutti di mare*. U nich każda z pięciu części jest na tyle wieloczynnościowa, że zdarzały się przypadki, gdy z jednego ramienia odtwarzało się całe zwierzę.

Dwuboczności nie towarzyszy już tak pełne dublowanie poszczególnych organów. Mamy dwoje oczu, uszu, dwie ręce, nogi, nerki, ale tylko jedno serce czy wątrobę. W jednym nosie mamy jednak dwie dziurki itd.

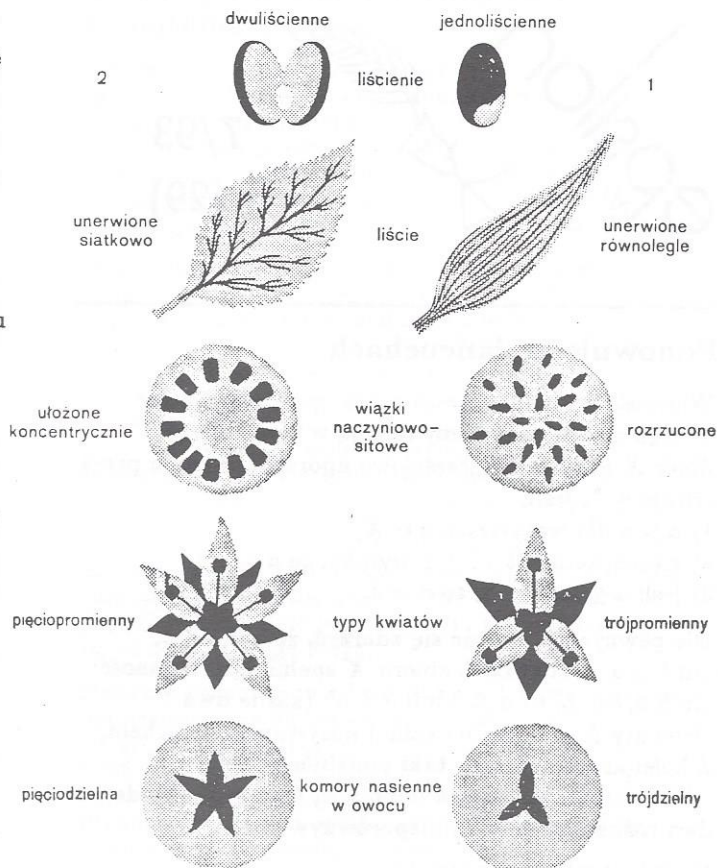
Zdarza się, że zwierzęta nie wiedzą, co czynić z niektórymi podwójnymi organami – np. prawie wszystkie węże mają (panowie) dwa członki lub (panie) dwie pochwy. Używają ich czasem na przemian, ale nie zdybano jeszcze tych dzieci szatana na używaniu obu jednocześnie. Dwuboczność występuje bardzo często i nie zawsze tak samo – małże mają dwie muszle i (bardzo do nich podobne z wyglądu) ramienionogi też; jednak pierwsze z nich mają je po bokach, a drugie z dołu i z góry.



To roślina – dwuliścienny woskowiec.



To zwierzę – bliski krewniak kręgowców, rozgwiazda pospolita.



Różnice symetrii występujących u roślin dwu- i jednoliściennych (wg Weisza *Zarys biologii*).

Pięcio- i trójpromienna symetria kwiatów wyraźnie wyróżnia dwie wielkie rodziny roślin (tzw. okrytonasiennych), co widać na przedstawionym schemacie. Do tych lewych należy większość spośród tego, co spotykamy: liściaste drzewa i krzewy, ale też sałata, mlecz, dynia, ziemniaki, groch. Nie lekceważyłbym jednak i prawych – to trawy (w tym zboża), ale też trzcina cukrowa, banany, daktyle, kokosy, ananasy – palce lizać.

Wśród roślin dwuliściennych zdarzają się nie tylko pięciopromienne kwiaty, lecz także czteropromienne (np. wawrzynek wilczełyko, dereń). Oczywiście, każda liczba płatków może być wielokrotnie podwajana. Ale liczba płatków np. stokrotki będzie się dzieliła przez trzy tylko wtedy, gdy ktoś część z nich wyrwie. Przyjemnym wyjątkiem w tym schematyzmie jest siódmaczek – jedyny kwiat o siedmiu płatkach: jest niewysoki (jak krzaczek poziomki), kwitnie białą i jest dość pospolity; znaleźć go można praktycznie przez całą wiosnę i lato w liściastych lasach i zagajnikach (jest odszczepieńcem dwuliściennych).

M.K.

Ponownie o łańcuchach

Własność posiadaną przez pewne pary elementów danego zbioru nazywamy relacją w tym zbiorze. Zbiór X nazywamy „częściowo uporządkowanym przez relację \leq ”, jeśli:

- 1) $a \leq a$ dla wszystkich $a \in X$,
- 2) z tego, że $a \leq b$ i $b \leq c$ wynika, że $a \leq c$,
- 3) jeśli $a \leq b$ i $b \leq a$, to $a = b$.

Dla pewnych a, b może się zdarzyć, że ani $a \leq b$, ani $b \leq a$. Podzbiór L zbioru X spełniający własność: „jeśli $a, b \in L$, to $a \leq b$ lub $b \leq a$ ” (każde dwa elementy L są porównywalne) nazywamy łańcuchem. Z kolei antyłańcuch to taki podzbiór A zbioru X , że: „dla $a, b \in A$, jeśli $a \leq b$ lub $b \leq a$, to $a = b$ ” (każde dwa różne elementy są nieporównywalne).

W *EPSILONIE* nr 9/1992 zaproponowałem Czytelnikom zadanie:

Zbiór $P(\mathbb{N})$ wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych \mathbb{N} jest częściowo uporządkowany przez relację zawierania. Czy istnieje w $P(\mathbb{N})$ łańcuch nieprzeliczalny?

(Zbiór jest przeliczalny, gdy jego elementy można ustawić w ciąg – np. zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny, a zbiór liczb rzeczywistych nie).

Oto rozwiązanie.

Liczby naturalne „ustawmy” na liczbach wymiernych (niech f będzie bijekcją \mathbb{N} na \mathbb{Q}).

Dla liczby rzeczywistej a okreśmy zbiór $K_a = \{n \in \mathbb{N} : f(n) \leq a\}$. Oczywiście, gdy $a < b$, to $K_a \subset K_b$. W ten sposób skonstruowaliśmy łańcuch, który ma tyle elementów, co zbiór liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie wydaje się bardzo proste, ale... Proponując zadanie Czytelnikom *EPSILONA* zaznaczyłem, że może ono sprawić kłopoty.

Niejednemu bowiem mogłoby się wydawać, że nieprzeliczalny łańcuch nie istnieje. To, że liczby wymierne można ustawić w ciąg, jest standardem matematycznym, ułożenie jednak liczb naturalnych na liczbach wymiernych (mimo że jest dokładnie tym samym!) znacznie rzadziej bywa przydatne.

Przez 6 lat dawałem to zadanie studentom I roku matematyki na ćwiczeniach z teorii mnogości (jako nadobowiązkowe zadanie do domu) i otrzymałem jedynie 4 poprawne rozwiązania – oraz bardzo dużo dowodów nieistnienia nieprzeliczalnego łańcucha.

Podobnie było i tym razem; wśród licznych

Tak się złożyło, że czterej finaliści ubiegłorocznej Olimpiady Matematycznej spotkali się wkrótce potem podczas finału Olimpiady Fizycznej. Efektem tych spotkań było zauważenie pewnej niewątpliwej wady pierwszej z wymienionych Olimpiad. Mowa o kompletnym braku w Olimpiadzie Matematycznej zadań doświadczalnych. Tę obserwację wspomniani panowie (prosząc o niepublikowanie ich nazwisk) przekazali redakcji *EPSILONA*.

Podzielamy pogląd, że niedopatrzenie jest dużej rangi i należy je naprawić. Być może przyczyną tej usterki jest brak odpowiednich wzorców. Ogłaszamy zatem konkurs na doświadczalne zadanie matematyczne. Wiemy wprawdzie, że wymyślić ciekawe zadanie nie jest łatwo (a co dopiero niestandardowe zadanie doświadczalne!), wierzymy jednak w Czytelników *Deltę*. Czekamy na listy. Oczywiście, ciekawsze zadania opublikujemy, proponując Czytelnikom ich rozwiązanie.

odpowiedzi, które nadesłali Czytelnicy *EPSILONA*, były jedynie dwie dobre – ich autorami byli Pan Artur Popławski oraz Czytelnik proszący o zachowanie jego nazwiska do wyłącznej wiadomości redakcji.

Zadanie to wysłałem kiedyś do kącika problemów czasopisma *The Mathematical Intelligencer*. Popeliłem jednak błąd, dołączając od razu rozwiązanie – redaktor kolumny uznał zadanie za zbyt proste, by prosić czytelników o nadsyłanie odpowiedzi i umieścić je w kolumnie *Quickie* szybkich, łatwiejszych problemów, których rozwiązań do pisma się nie przysyła. Nie wiem więc, jak tam wypadłaby statystyka...

Przy okazji dodam, że w związku z tekstem o Wielkim Twierdzeniu Fermata zamieszczonym w *EPSILONIE* dwa miesiące wcześniej nadesłano nam sporo dowodów Wielkiego Twierdzenia Fermata (więcej niż rozwiązań zadania z łańcuchem!). Niestety, w tym przypadku wszystkie dowody były jednak błędne.

Ciekawych zadań o łańcuchach jest więcej. Oto kolejne, też niebanalne:

W zbiorze częściowo uporządkowanym X każdy łańcuch jest zbiorem skończonym i każdy antyłańcuch jest zbiorem skończonym. Czy stąd wynika, że zbiór X jest skończony?

I następny problem – chyba trochę trudniejszy, dla tych, którzy znają podstawowe pojęcia teorii mnogości:

W nieskończonym zbiorze częściowo uporządkowanym X każdy łańcuch ma moc mniejszą od liczby kardynalnej m i każdy antyłańcuch ma moc mniejszą od m . Czy stąd wynika, że zbiór X ma moc mniejszą od m ?

Redakcja *EPSILONA* zachęca do zaatakowania tych zadań, a tych, którym uda się któreś z nich pokonać, do przysyłania szkiców rozwiązań.

Krzysztof CIESIELSKI

Matematyka i życie

Liczba 26! ma 27 cyfr. W Krakowie jest 26 liceów ogólnokształcących; można je uporządkować właśnie na 26! sposobów. Matematyka – w szczególności za pomocą liczb – ułatwia życie, preferując niektóre uporządkowania. Nowa książka telefoniczna województwa krakowskiego, wydana jesienią 1992 jako efekt współpracy Telekomunikacji Polskiej S.A. i szwedzkiej firmy *Nord Trans Handelshus AB* wymienia 26 krakowskich liceów ogólnokształcących w następującej kolejności (cudzysłowy, kropki oraz duże litery podajemy tak, jak w książce telefonicznej – opuszczamy jedynie adresy szkół i numery telefonów):

dla Pracujących nr IV

nr I, Prywatne

nr I, Społeczne

nr III

nr IV

nr IX

nr XI

nr XII

nr XIV

nr XV

nr XVI

nr XXI

„World” IV Prywatne

dla pracujących nr III

dla pracujących nr V

nr I

nr II

nr V

nr VI

nr VII

nr VIII

nr X

nr XIII

OO. „Pijarów”, prywatne

P.P. Prezentek

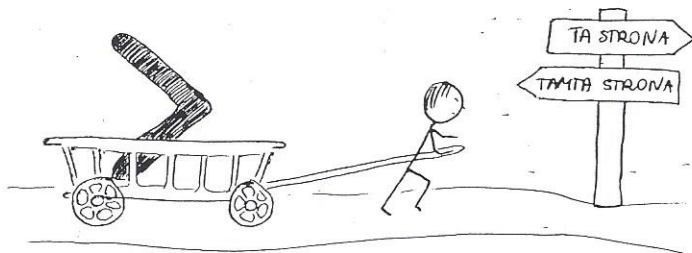
Społeczne nr III

EPSILON funduje specjalną nagrodę osobie, która wskaże logiczne uzasadnienie takiej właśnie kolejności. (Uwaga – licea nie zostały ułożone np. wg alfabetycznej kolejności adresów czy rosnących numerów telefonicznych).

Zgodnie z hasłami reklamowymi, książkę wydano w sposób istotnie unowocześniony. Radzimy ją czym prędzej nabyć, gdyż we wstępie zapowiedziano, że „następne wydanie spisu będzie zaktualizowane i nowocześniejsze” – kto wie, w jakiej kolejności zostaną tam umieszczeni indywidualni abonenci...

Galeria Jednego Cytatu

„... I ciągniemy nierówność w tę stronę”.



(Wykład o twierdzeniach granicznych rachunku prawdopodobieństwa.)

Rys. *Jolanta GRALA*

Mowa potoczna na zajęciach z matematyki

Dlaczego zabawne powiedzonka profesora pamiętasz dłużej niż treść jego lekcji? Dlaczego kumpel z poczuciem humoru w ciągu 5 minut wyjaśni ci to, co nauczyciel-nudziarz tłumaczył przez godzinę? Odpowiedź kryje się w fenomenie mowy potocznej. Naprawdę, warto ją stosować – także i w tak ścisłej i sformalizowanej nauce, jaką jest matematyka.

Język potoczny w cudowny sposób potrafi ożywić i ubarwić nawet najbardziej drętwą lekcję. Treści, które wyposażono w konkretne kształty i dowcipną fabułę, zawsze są łatwiejsze w odbiorze, bardziej zrozumiałe, a ponadto dłużej pozostają w pamięci. Jeśli na najniższym poziomie nauczania nikogo nie dziwi mowa potoczna i ożywianie pojęć abstrakcyjnych (gdy np. 3 mówi do 2: „ja jestem od ciebie o 4 mniejsza i co ty na to?”), to dlaczego miałoby kogoś gorszyć „bieganie punktu po brzegu obszaru” czy „wyduszanie wniosku z twierdzenia”.

„Nic nie jest (...) ani zbyt poetyczne, ani zbyt wulgarnie, gdy jakieś pojęcie abstrakcyjne trzeba uczynić jaśniejszym. Jeśli intuicja podpowie wam, by być w klasie nieco poetycznym lub nieco wulgarnym, to nie powstrzymujcie się od tego” (George Polya).

Strzeżmy się jednak przed nadużyciami! Żywa mowa może być ilustracją czy objaśnieniem do ścisłych rozważań, ale nie może ich zastąpić tam, gdzie są one konieczne. Tym bardziej nie może zastąpić poprawnego, ścisłego i precyzyjnego sposobu wypowiedzania się w matematyce. Brońmy się też przed pokusą tworzenia neologizmów (czyli wymyślenia własnych, nowych słów). Czasem dla ułatwienia rozważań warto coś sobie jakoś nazwać, ale lepiej unikać słownych dziwolągów, bo i tak wkrótce nie będziemy pamiętać, co one miały oznaczać.

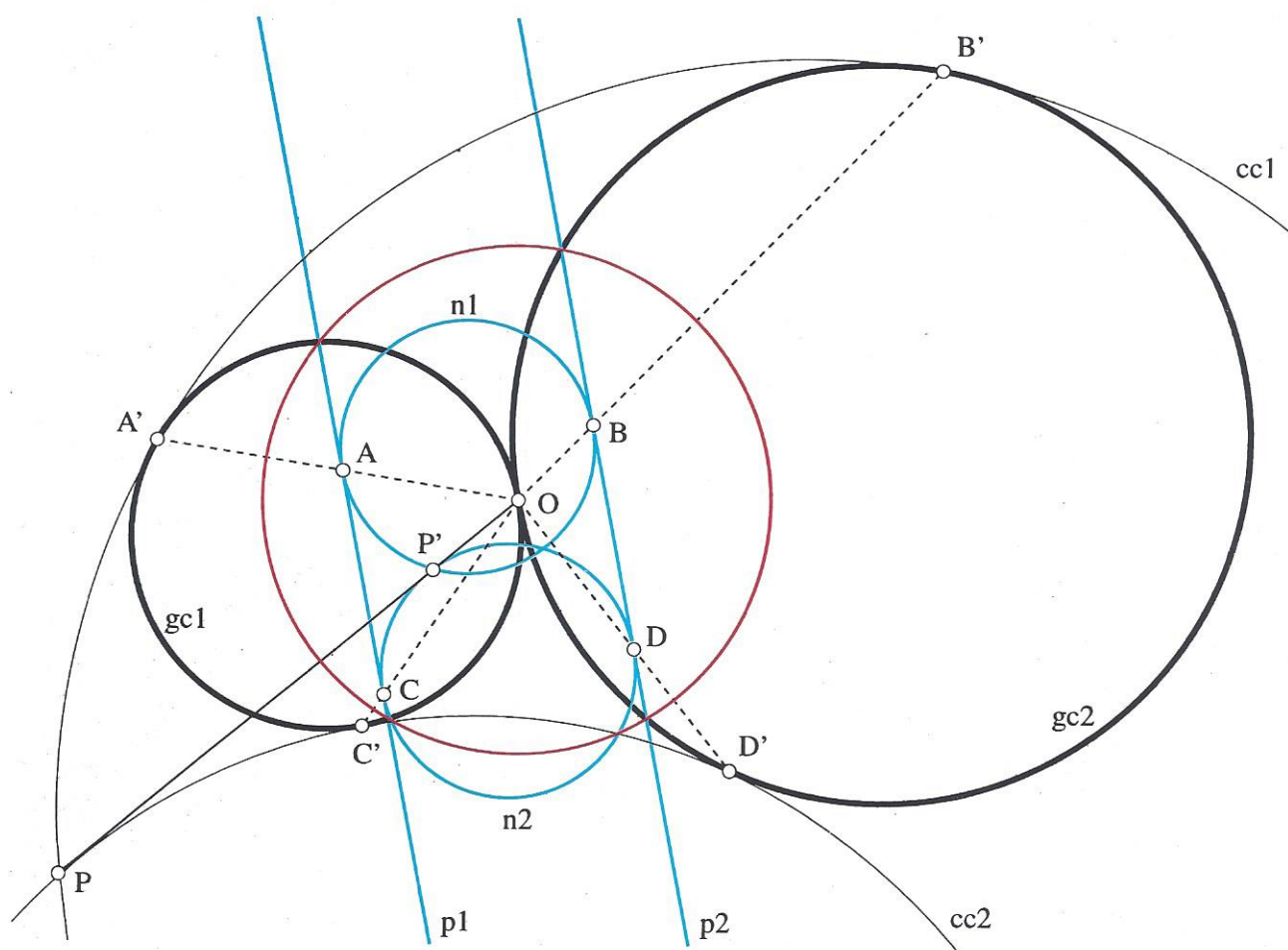
Może zamieszczone poniżej autentyczne przykłady stosowania mowy potocznej na zajęciach z matematyki zachęcą niektórych do odważniejszego i swobodniejszego traktowania języka nauk ścisłych?

- *Rozwiązanie już mamy, trzeba tu teraz tylko posprzątać [=przeprowadzić redukcję wyrazów podobnych].*
- *Metoda Monte Carlo jest najtańsza [=wymaga najmniej rachunków].*
- *Można tak zmienić tę funkcję, że własność ciągłości będzie uratowana.*
- *To zadanie jest płaskie [=dotyczy płaszczyzny].*
- *Teraz punkt puszczamy w ruch, czyli stawiamy pod duży kwantyfikator.*
- *W tym momencie dowodu poruszamy się po bardzo grząskim gruncie.*
- *Rozwiązanie zadania wymaga jeszcze paru zabiegów kosmetycznych.*
- *To była esencja, więc może ja ją teraz rozwodnię.*
- *Trochę to poupraszczailiśmy i już nie jest takie krzaczaste.*
- *Możemy to zrobić gołymi rękami.*
- *Macierz A definiuje pewne przekształcenie liniowe, jak zresztą każda uczciwa macierz na świecie.*
- *Odcinek $[-1, 1]$ z wyklutym punktem zero.*
- *Na szczęście po wykonaniu tej operacji żadna potęga się nam w tych iloczynach nie urodziła.*
- *Uzbrojeni w takie twierdzenie możemy bez obawy przystąpić do rozwiązania naszego zadania.*

Elżbieta BOBIK

Tekst o mowie potocznej przysłała nam Czytelniczka z Wrocławia, a rysunek do Galerii Jednego Cytatu Czytelniczka z Poznania. Dziękujemy.

Szczególny przypadek problemu Apoloniusza



Dane są dwa okręgi zewnętrznie styczne (na rysunku grube czarne) $gc1$ i $gc2$ oraz punkt P leżący poza ograniczonymi przez nie kołami. Oto metoda na znalezienie okręgu, który przechodzi przez P i jest styczny zarówno do $gc1$, jak i do $gc2$.

Rysujemy okrąg o środku w punkcie O — punkcie styczności $gc1$ i $gc2$. Promień bierzemy dość duży, ale taki, by ten (czerwony) okrąg przecinał oba dane okręgi w dwóch punktach. Przez punkty przecięcia z $gc1$ i $gc2$ prowadzimy proste $p1$ i $p2$ (okażą się równoległe). Na półprostej OP znajdujemy taki punkt P' , że $OP \cdot OP'$ jest równe kwadratowi promienia czerwonego okręgu. Przez P' prowadzimy (dwa) okręgi styczne do $p1$ i $p2$ — $n1$ i $n2$. Oznaczmy punkty styczności odpowiednio przez A i B oraz C i D . Półprosta OA przecina $gc1$ w punkcie A' , OB przecina $gc2$ w B' , OC przecina $gc1$ w C' i OD przecina $gc2$ w D' . Okręgi $cc1$ i $cc2$ przechodzące przez $PA'B'$ oraz przez $PC'D'$ są odpowiednio styczne wewnętrznie i zewnętrznie do obu okręgów $gc1$ i $gc2$. Ale dlaczego? Odpowiedź na to można posłużyć się jeszcze jednym pojęciem symetrii — inwersją względem okręgu.

Istnieje jeszcze trzeci okrąg styczny zarówno do $gc1$, jak i do $gc2$, który przechodzi przez P — jest to mianowicie okrąg styczny do $gc1$ i $gc2$ w punkcie O .

Ogólny problem Apoloniusza brzmi: *dane są dwa okręgi $o1$ i $o2$ i punkt P ; znaleźć wszystkie okręgi styczne do $o1$ i $o2$ oraz przechodzące przez P . Gdy się jednak zna podane wyżej rozwiązanie bardziej specjalnego problemu, to reszta jest już bardzo prosta.*