delta

$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$ $\pi = 3{,}141593$

CENA ZŁ 8000,-

NR 8 (231) 1993

PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X

POPULARNY MIESIĘCZNIK MATEMATYCZNO-FIZYCZNO-ASTRONOMICZNY

Haft Józefy Podgórskiej ok. 1915 r

Haftujemy na stronie 17.

W czerwcu Anglik Andrew Wiles ogłosił, że udowodnił
Wielkie Twierdzenie Fermata.
Sytuacja jest poważna,
gdyż środowisko matematyczne wierzy w poprawność tego wyniku.
Został on uzyskany poprzez badanie krzywych eliptycznych.

SPIS TREŚCI

NUMERU 8(231)

O „szczegółach technicznych" w rozwiązywaniu szkolnych zadań z teorii prawdopodobieństwa
Edward Stachowski str. 1

Wbrew zdrowemu rozsądkowi (VI)
Tomasz Hofmokl str. 1

Olimpiada Matematyczna Państw Bałtyckich str. 4

Zadania str. 5

Patrz w niebo str. 6

Fizyczny dowód twierdzenia Steinera str. 7

Mała Delta str. 8

Nierówność Ptolemeusza
Józef Banaś str.10

Dźwięki – muzyka i hałas
Stanisław Mrówczyński str.12

Klub 44 str.14

XLV Olimpiada Matematyczna str.16

Epsilon str.17

W następnym numerze:

Tajemniczy silnik

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

„Delta" – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21
DELTA@PLEARN.BITNET

Wydrukowano w Zakładach Graficznych w Warszawie, ul. Srebrna 16
Skład systemem TEX wykonała redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY w AMOS-ie

Od stycznia br. prenumeratę „Delty" prowadzi również firma **AMOS**, 01-506 Warszawa, ul. Szenwalda 1 (tel. 39-17-52). Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. Koszt trzech numerów wynosi 24 000,-zł (rocznika'93 – 96 000,-zł). Przy wpłacie prosimy zaznaczyć okres prenumeraty (co najmniej 3 miesiące).

Prenumerata zagraniczna trzech numerów wynosi 60 000,-zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! AMOS dostarcza „Deltę" pod wskazany adres nie pobierając dodatkowej opłaty. Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Blankiet pocztowy na prenumeratę „Delty" w AMOS-ie zamieszczamy na str. 5/6.

Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

WARUNKI PRENUMERATY w RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na IV kwartał 1993 r. wynosi 24 000,– zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
   – na teren kraju
     – jednostki kolportażowe „Ruch" S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
   – na zagranicę
     – „Ruch" S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – **dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty**, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
   – na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
     do 20 II na II kwartał
     do 20 V na III kwartał
     do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 8 000,– zł

O „szczegółach technicznych" w rozwiązywaniu szkolnych zadań z teorii prawdopodobieństwa

Edward STACHOWSKI

W elementarnej (szkolnej) teorii prawdopodobieństwa istnieje wiele zadań, które uważane są za trudne, czasami nawet bardzo trudne.

Dlaczego? Wynika to z tego, że rozwiązujący je uczniowie, niekiedy również nauczyciele, łatwe zadanie potrafią doprowadzić do takiej postaci, że staje się ono bardzo skomplikowane, a trudne pozostaje nadal trudne.

Dzieje się tak dlatego, iż w rozwiązaniu zadania bierze się pod uwagę „techniczną" stronę zagadnienia. Szufladkuje się po prostu zadanie do określonego typu i dalej (często bezmyślnie) stosuje ogólnie przyjęty schemat rozwiązywania tego typu zadań.

Uważam więc, że należy poświęcić kilka słów temu problemowi. Postaram się pokazać Czytelnikom, jak skomplikować zadanie – czyli z łatwego zrobić trudne i odwrotnie, jak można uprościć problem – czyli z trudnego zadania zrobić łatwe. Oto kilka przykładów.

Zadanie 1
Z pojemnika, w którym znajduje się sześć kul białych oraz siedem czarnych, losujemy kolejno, bez zwracania, dwie kule. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A – druga wylosowana kula będzie biała.

Poznajmy wzorcowe rozwiązanie tego zadania.

Zdarzeniem elementarnym jest ciąg dwuelementowy, różnowartościowy, o wartościach w zbiorze trzynastoelementowym. Zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. (Jest to schemat klasyczny.)

$$|\Omega| = 13 \cdot 12 = 156,$$

gdzie $|\Omega|$ oznacza moc zbioru Ω,
Ω – zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych,
$A = A_1 \cup A_2$, gdzie:
A – druga wylosowana kula będzie biała,
A_1 – wylosowano dwie kule białe,
A_2 – pierwsza wylosowana kula będzie czarna, a druga biała,
$A_1 \cap A_2 = \emptyset$,
$|A_1| = 6 \cdot 5 = 30$, $|A_2| = 7 \cdot 6 = 42$,
$|A| = |A_1| + |A_2| = 72$.
$P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{72}{156} = \dfrac{6}{13}$.

Zadanie 2
Z pojemnika opisanego w zadaniu 1 losujemy kolejno, bez zwracania, pięć kul. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A – piąta wylosowana kula będzie biała.

Nie będziemy tego zadania rozwiązywać w sposób ogólnie zalecany. Przeniesienie „wzorcowej" metody rozwiązania z zadania 1 spowoduje dużo komplikacji. (Zdarzenie A będzie sumą szesnastu zdarzeń – prawdopodobieństwo bezbłędnych obliczeń jest bliskie zera.)

Wbrew zdrowemu rozsądkowi (VI)

(Według wykładów radiowych z audycji IV programu – *Widnokrąg*)

Sztorm kwantowy

Tomasz HOFMOKL

Spotkaniom naszym nadałem ogólny tytuł: wbrew zdrowemu rozsądkowi. Nie dlatego, abym był zaciekłym przeciwnikiem zdrowego rozsądku. Jest to bardzo cenna cecha i szczególnie przydatna w życiu codziennym. Wyrabia się bowiem na podstawie doświadczeń i spostrzeżeń właśnie z życia codziennego. Celem moim jest uprzytomnienie Państwu, że oddalając się od obszarów doznań zwykłych dla codziennego życia musimy bardzo ostrożnie posługiwać się zdrowym rozsądkiem, ponieważ nie możemy zagwarantować jego uniwersalności.

Zacznijmy naszą historię w sztormowy dzień nad brzegiem morza. Wybierzmy wyjątkowo wietrzny dzień, w którym huragan gna bałwany ku brzegowi. Te zaś rozbijają się z hukiem o skaliste wybrzeże. Od czasu do czasu wyciu wichru i rykowi fal towarzyszy łoskot odrywających się skał. Obraz groźny, godny pędzla malarza marynisty. Chciałbym w tym obrazie zainteresować Państwa procesem fizycznym odrywania skał przez uderzające fale. Niewątpliwie trzeba do tego energii. Energię niesie fala wodna. Im większy bałwan, czyli mówiąc językiem fizycznym, im większa amplituda fali, tym większa energia uderzenia. Zależność jest nawet, jak się mówi, kwadratowa. Jeżeli amplituda fali wzrośnie dwukrotnie, jej energia wzrośnie czterokrotnie. Taki obraz fali padającej na brzeg jest nam bliski, bo poparty albo własnym doświadczeniem, albo łatwością wyobrażenia sobie tej sceny.

Wiemy już, że światło jest falą elektromagnetyczną, wiemy, że przenosi energię. Szczególnie dobrze to odczuwamy na plaży, gdy Słońce niemiłosiernie nas pali. Czy możemy spodziewać się sztormu słonecznego, w którym fale elektromagnetyczne uderzają o przeszkodę i wyrywają z niej elementy składowe?

Otóż takie zjawisko zaobserwowano już w roku 1887. Wtedy to Heinrich Rudolf

Hertz, w owym czasie profesor politechniki w Karlsruhe, badał oddziaływanie promieniowania nadfioletowego na wyładowania elektryczne. Promieniowanie nadfioletowe to niewidzialne dla oka promieniowanie o długości fali mniejszej niż długość fioletowych promieni z obszaru widzialnego. Promieniowanie to obecne w widmie słonecznym jest odpowiedzialne za nasze opalanie się. Hertz w swoim doświadczeniu zauważył, że przeskok iskry elektrycznej między cynkowymi kulkami iskiernika był znacznie łatwiejszy, jeżeli jedna z kulek była oświetlana światłem nadfioletowym. Wyjaśnienie zjawiska wydawało się stosunkowo proste. Światło jako fala elektromagnetyczna padało na powierzchnię cynku i udzielało swojej energii elektronom tak, że mogły się one oderwać od powierzchni metalu. Światło w takim obrazie wybija elektrony z metalu, tak jak fala morska odrywa w czasie sztormu kawałki skał. Nic więc dziwnego, że oderwane elektrony mogą jako iskra przelecieć do drugiej elektrody nawet przy niewielkim napięciu między kulkami. Stąd ułatwienie w przeskoku iskry.

Dotąd wszystko zdaje się być w zgodzie ze zdrowym rozsądkiem. Sprawa zaczęła się komplikować w miarę prowadzenia dokładniejszych badań tego zjawiska. Otóż już przed rokiem 1905 dzięki pracom niemieckiego fizyka Philippa Lenarda i innych autorów ustalono bardzo dziwną prawidłowość: energia kinetyczna wybijanych elektronów nie zależy od natężenia światła, ale od długości jego fali, czyli od koloru promienia. Im krótsza fala, czyli, jeżeli można obrazowo tak powiedzieć, im bardziej niebieskie jest światło, tym większą energię mają wybite elektrony. Natomiast liczba wybitych elektronów zależy od natężenia światła. To tak, jakby energia, z jaką wyrzucane są kawałki skał z nabrzeża morskiego, nie zależała od natężenia sztormu, ale za to zależała od tego, czy są to fale długie, oceaniczne, czy też krótsze, charakterystyczne dla płycizn. I to właśnie te krótkie fale robiłyby najwięcej szkody wyrywając z dużą energią kamienie z nabrzeża.

Omawiane zjawisko nazwano zjawiskiem fotoelektrycznym. Dokładne doświadczenia przeprowadzano oczywiście w lampie próżniowej, aby wybite elektrony nie napotykały na swojej drodze żadnych przeszkód i aby można było zmierzyć ich energię. Nie będę wchodził w szczegóły pomiarów. Zaufajmy badaczom

Jeżeli natomiast to zadanie rozwiązywać będziemy po sformułowaniu twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym, to sprawa nieco się uprości. Mamy pięć hipotez: H_0, H_1, H_2, H_3, H_4, gdzie H_i oznacza, że wśród pierwszych czterech kul będzie i kul białych, czyli też trzeba się będzie nieco narachować.

Przeanalizujmy treść obu zadań i zauważmy, że jest to jedno i to samo zadanie, różne są tylko „szczegóły techniczne". W obu przypadkach losujemy **jedną kulę ze zbioru trzynastu kul.** Na pytanie jak, odpowiemy nieco niegrzecznie: A co nas to obchodzi?

W obu zadaniach zdarzeniem elementarnym jest **podzbiór jednoelementowy** ze zbioru trzynastoelementowego (kul). **Zdarzenia elementarne są równoprawdopodobne** (symetria).
$|\Omega| = 13$, $|A| = 6$,
$P(A) = \frac{6}{13}$.

Jak widać, nie ma nic do roboty. (Czytelnik z łatwością wymyśli jeszcze kilkanaście wersji tego zadania podając bardziej wyrafinowane metody losowania.)

Przeanalizujmy teraz serię czterech zadań. (Seria ta może, oczywiście, być znacznie dłuższa. Dopisanie innych zadań pozostawiamy inwencji Czytelnika.)

Zadanie 3
Z talii 52 kart losujemy jedną kartę. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A – wylosowana karta będzie koloru pikowego.

Zadanie 4
Z talii 52 kart losujemy dziesięć kart i chowamy je do lewej kieszeni nie oglądając. Następnie z pozostałych kart losujemy jedną. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A – wylosowana karta będzie koloru pikowego.

Zadanie 5
Talię 52 kart dzielimy na sześć części (kupek). W kupkach o numerach 1, 2, 3, 4, 5 ma być po osiem kart, a w ostatniej, o numerze 6 – dwanaście kart.
Rzucamy kostką, a następnie losujemy jedną kartę z kupki o numerze równym liczbie oczek otrzymanych na kostce. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A – wylosowana karta będzie koloru pikowego. (Rozpatrzyć przypadek kostki symetrycznej i niesymetrycznej.)

Zadanie 6
Talia 52 kart leżała na stole. Na skutek przeciągu (wiał wiatr północno-wschodni) pewna liczba kart spadła na podłogę. Z kart, które pozostały na stole, losujemy jedną. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A – wylosowana karta będzie koloru pikowego. (Czy to się da rozwiązać?)

Mamy nadzieję, Czytelniku, że nie dałeś się nabrać i zauważyłeś, że jest to wciąż to samo zadanie. (Oczywiście, najprostsza jego wersja to zadanie 3.) W każdym z tych zadań doświadczenie polega na losowaniu jednej karty z talii 52 kart. Możemy to losowanie przeprowadzić na wiele różnych, mniej lub bardziej wyrafinowanych sposobów („szczegóły techniczne"). W każdym przypadku, niezależnie od metody losowania, **zdarzeniem elementarnym jest podzbiór jednoelementowy** ze zbioru kart. **Zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne** (symetria) i, oczywiście,

$$P(A) = \frac{1}{4}. \blacksquare$$

Podaliśmy tu najprostszą wersję. Jeżeli będziemy losowali nie jedną kartę, lecz kilka, to sposób rozumowania nie ulegnie zmianie.

Kilkanaście lat temu można było zagrać na loterii „Błyskawica". Losy kupowało się w kiosku „Ruchu", o ile mnie pamięć nie myli, los kosztował 10 zł. Losy były trzech rodzajów:
wygrywające – na szybie kiosku naklejona była tabela z numerami losów wygrywających,
przegrywające – numerów tych losów nie było w tabeli,
neutralne – dające wygraną 10 zł. W tym przypadku losowaliśmy jeszcze raz za darmo.

Liczba losów była, oczywiście, bardzo duża. Aby nie męczyć się z dużymi liczbami, rozwiążmy zadanie o takiej loterii w wersji uproszczonej.

Zadanie 7
Na loterii jest 10 losów wygrywających, 50 przegrywających oraz 40 „neutralnych" – dających prawo do dalszej gry. Obliczyć prawdopodobieństwo wygrania przy zakupie jednego losu i wykorzystaniu wszystkich możliwości (tzn. przy zakupie losu „neutralnego" wybieramy następny los).

Przy standardowym rozwiazaniu tego zadania pierwszym problemem, z którym się spotykamy, jest określenie, co jest zdarzeniem elementarnym. Jeżeli poradzimy sobie z tym problemem (lub nie) i zaczniemy brutalnie liczyć, korzystając z faktu, że zdarzenie A polegające na wygraniu jest sumą parami rozłącznych zdarzeń A_i (A_i – $(i-1)$ pierwszych losów będą to losy „neutralne", los o numerze i będzie wygrywający), to otrzymamy wynik postaci

$$P(A) = \frac{10}{100} + \frac{40}{100}\cdot\frac{10}{99} + \frac{40}{100}\cdot\frac{39}{99}\cdot\frac{10}{98} + \ldots + \frac{40}{100}\cdot\frac{39}{99}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{61}\cdot\frac{10}{60}.$$

Ile to jest? Oczywiście, $P(A) = \frac{1}{6}$. Zapytacie, dlaczego? To proste. Zdarzeniem elementarnym jest **podzbiór jednoelementowy ze zbioru sześćdziesięcioelementowego** (doświadczenie polega na losowaniu jednego losu **spośród losów rozstrzygających**, tzn. wygrywających lub przegrywających, sposób losowania jest może nieco dziwny, ale odgrywają tu rolę względy psychologiczne – jest to „szczegół techniczny").

Zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne (symetria)

$$|\Omega| = 60, \qquad |A| = 10, \qquad P(A) = \frac{1}{6}. \blacksquare$$

Mam nadzieję, że po przeczytaniu tego artykułu Czytelnik będzie umiał oczyścić problemy, z którymi się spotyka, ze „szczegółów technicznych" i sprowadzić, zdawałoby się, trudne i skomplikowane zadanie do banalnego. Tego Mu serdecznie życzę.

i prześledźmy wynik typowego eksperymentu nie zaciemniając opisu tym, jak go wykonano.

Otóż zaopatrujemy się w lampę, która może wysyłać promienie o dowolnej długości fali. Przypominam, że długość fal z zakresu światła widzialnego leży w granicach 0,7 milionowej części metra (granica czerwieni) do 0,4 milionowej części metra (kraniec fiołkowy widma). Czyli od 0,7 do 0,4 mikronów. Wybieramy określoną długość fali, na przykład, nieco poniżej 0,7 mikronów i oświetlamy elektrodę pokrytą sodem. Taki metal wybrał w jednym ze swoich doświadczeń R.A. Millikan. Staramy się zmierzyć energię wybitych z sodu elektronów. Ale cóż to ? Nie mamy czego mierzyć, bo żadne elektrony nie zostają wybite. Możemy dowolnie zwiększać natężenie naszej lampy, a tu nic. Zmieniamy więc barwę światła skracając długość fali. Dalej nic. Dopiero gdy lampa zostanie nastawiona tak, aby wysyłać promienie krótsze niż 0,5 mikrona, pojawią się pierwsze elektrony. Może być ich nawet dużo, ale będą bardzo powolne. Zwiększanie natężenia światła zwiększy liczbę wybitych elektronów, ale nie zmusi ich, aby były szybsze. Dalsze skracanie długości światła padającego powoduje zwiększanie energii elektronów i to w sposób wprost proporcjonalny do częstości światła. Im większa zaś częstość, tym krótsza fala. Taki wynik doświadczenia jest całkowitym zaskoczeniem. Trudno sobie wyobrazić, jak i dlaczego tak się dzieje.

Na gruncie fizyki klasycznej, która świetnie wyjaśnia rozbijanie nabrzeża w czasie sztormu, nie można wyjaśnić zjawiska wybijania elektronów z materii pod wpływem padającego światła. Trzeba więc wyjść poza zwykły zdrowy rozsądek i zaproponować coś całkiem nowego. To coś zaproponował już Max Planck w roku 1900. Wyprowadził on wzór na promieniowanie ciał rozgrzanych, (faktycznie promieniowanie ciała doskonale czarnego) postulując, że energia promienista może być emitowana i pochłaniana tylko porcjami zwanymi kwantami. Zrobił to sam z wielką niechęcią uważając, że jego pomysł jest sprzeczny ze zdrowym rozsądkiem. Opowiadałem o tym poprzednim razem. Zwariowany pomysł był więc gotów. W roku 1905 Albert Einstein uczynił krok dalej. Jeżeli godzimy się na pochłanianie i emitowanie porcjami – kwantami energii promienistej, to dlaczego od razu nie powiedzieć, że wiązka światła składa się z porcji energii o wielkości: stała h pomnożona przez częstość promieniowania. Stała ta nosi nazwę stałej Plancka. Światło ma więc strukturę ziarnistą, jest strumieniem cząstek (kwantów) i równocześnie falą. No i co Państwo na to? Łatwo to sobie wyobrazić? Chyba nie.

Ale musimy uwierzyć doświadczeniu. Jeżeli przyjmiemy zwariowaną hipotezę kwantów światła, to zjawisko fotoelektryczne staje się łatwe do wyjaśnienia. Każdy z elektronów jest jakoś związany w metalu. Inaczej natychmiast by uciekł. Aby pokonać to związanie, trzeba dostarczyć pewnej energii zwanej pracą wyjścia. Nic więc dziwnego, że dopóty, dopóki energia kwantu nie jest dostatecznie duża, a więc długość fali dostatecznie mała, możemy naświetlać sobie metal do woli. Nie potrafimy dostarczyć w pojedynczej porcji dostatecznej energii na wyrwanie elektronu z metalu. Natężenie światła, a więc liczba porcji kwantów nic tu nam nie pomoże, bowiem jest niezwykle mało prawdopodobne, aby elektron równocześnie połknął dwa kwanty. Dopiero skracając dostatecznie długość fali światła padającego, czyli zwiększając częstość fali doprowadzimy do tego, że w jednym kwancie będzie zawarta energia dostateczna do wyrwania elektronu z metalu. Potem proces jest już zrozumiały. Im większa częstość fali (mniejsza długość), tym większa energia kinetyczna wybitego elektronu. Przyjęcie jednej, wydawałoby się, niedorzecznej hipotezy, wyjaśnia całe zjawisko.

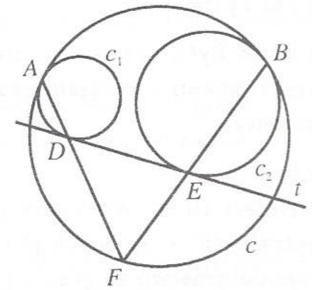
Może więc hipoteza nie była tak całkiem niedorzeczna? Uważnemu Czytelnikowi może się nasunąć pytanie, czy stała określająca wielkość porcji energii, czyli stała Plancka, którą wprowadzono aby wyjaśnić zjawisko promieniowania ciała doskonale czarnego, o którym mówiłem w poprzednim artykule, jest taka sama, jak stała potrzebna do wyjaśnienia zjawiska fotoelektrycznego. Warto sobie uświadomić, że próbujemy zrozumieć zjawiska, które pozornie nie mają ze sobą nic wspólnego. Z jednej strony badamy, jak zachowuje się rozgrzane ciało, a z drugiej, jakiemu prawu podporządkowują się elektrony wybijane przez światło z metalu. W obu doświadczeniach można wyznaczyć tę stałą, zwaną, jak mówiłem, stałą Plancka. Okazało się, że oba doświadczenia dają taki sam wynik liczbowy. To nas utwierdza jeszcze bardziej w tym, że pomysł Plancka,

Olimpiada Matematyczna Państw Bałtyckich

W dniach 5–9 listopada 1992 r., wraz z M. Bortnikiem, Ś. Galem, R. Łochowskim, R. Wojtczukiem oraz panami M. Bryńskim i H. Pawłowskim uczestniczyłem w Trzeciej Olimpiadzie Matematycznej Państw Bałtyckich, która odbyła się w Wilnie. W konkursie tym oprócz nas brały udział delegacje z Danii, Estonii, Islandii, Litwy, Łotwy, Szwecji i miasta Petersburg. Zawody miały charakter drużynowy. Odbyły się one 7 listopada, trwały 4 godziny, w ciągu których każda drużyna zmagała się z 20 zadaniami. Z wynikiem 73 pkt. zajęliśmy trzecie miejsce (za każde zadanie można było otrzymać 5 punktów) za drużyną Danii (83 pkt.) i miastem Petersburg (78 pkt.). Warto tu zaznaczyć, że Petersburg (dawny Leningrad) prowadzi własną olimpiadę, najstarszą spośród wszystkich turniejów i konkursów matematycznych organizowanych na terenie Wspólnoty Niepodległych Państw.

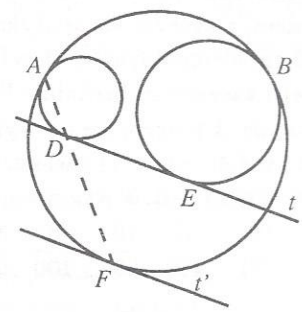
Poziom zawodów zilustrujmy jednym z zadań tej olimpiady.

Na płaszczyźnie dany jest okrąg C oraz nie przecinające się okręgi C_1 i C_2, styczne wewnętrznie do C w punktach A i B. Okręgi te leżą po jednej stronie prostej t stycznej do nich w punktach D i E. Wykazać, że proste AD i BE przecinają się w punkcie F leżącym na okręgu C.



Aby móc trafnie ocenić poziom zawodów, warto pokusić się o samodzielne rozwiązanie tego zadania, a dopiero potem zapoznać się z naszym rozwiązaniem:

Niech t' będzie taką styczną do okręgu C, równoległą do prostej t, że okręgi C_1 i C_2 nie leżą między prostymi t i t'. Punkt styczności prostej t' z okręgiem C oznaczmy przez F. Punkt A jest środkiem jednokładności okręgów C_1 i C.



Ponieważ proste t i t' są równoległe, więc przy jednokładności o środku A przekształcającej okrąg C_1 na C, punkt D przejdzie na punkt F. Stąd wniosek, że punkty A, D, F są współliniowe. Analogicznie dowodzimy, że punkty B, E, F są współliniowe – stąd teza.

Dziękujemy pani profesor Łucji Noniewicz i panu profesorowi Edwardowi Szpilewskiemu – matematykom pracującym na Litwie, oraz uczniom polskiej szkoły średniej nr 11 im. Adama Mickiewicza w Wilnie za zorganizowanie dla nas wielu interesujących wycieczek szlakiem polskich pamiątek.

Następna Olimpiada Matematyczna Państw Bałtyckich odbędzie się w listopadzie 1993 r. na Łotwie.

Waldemar POMPE

Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 676. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+zx=11 \\ xyz=6\,. \end{cases}$$

Rozwiązanie na str. 11

M 677. Udowodnić, że dla dowolnego n naturalnego liczba $a_n = 2^{5n+1} + 5^{n+2}$ jest podzielna przez 27.
Rozwiązanie na str. 7

M 678. Wykazać, że wśród dwóch kolejnych liczb nieparzystych zawsze przynajmniej jedna nie jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych.
Rozwiązanie na str. 7

Redaguje Jarosław KULPA

F 363. Korzystając z analizy wymiarowej oszacować masę Wszechświata, wiedząc że można ją przedstawić jako wyrażenie zawierające stałą grawitacji G, prędkość światła c i stałą Hubble'a $\mathrm{H} = (18 \text{ mld lat})^{-1}$. Wyrazić tę masę w jednostkach masy atomu wodoru $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.
Rozwiązanie na str. 13

F 364. Zegar atomowy umieszczono na sztucznym satelicie. W jakiej odległości od środka Ziemi musi krążyć ten satelita, aby jego zegar wskazywał ten sam czas, jaki pokazują zegary na Ziemi. (Czas w polu grawitacyjnym ulega spowolnieniu według wzoru: $\Delta t' = \Delta t\sqrt{1+\frac{2\phi}{c^2}}$, gdzie ϕ oznacza potencjał grawitacyjny.)
Rozwiązanie na str. 13

potem rozwinięty przez Einsteina, zawiera głębszą ideę. A to, że komplikuje nam życie, że świat nie jest tak prosty, jak byśmy to sobie wyobrażali, to trudno. Można się cieszyć, że w trudzie, bo w trudzie, ale jednak potrafimy uchylić rąbka tajemnic przyrody. Każdy z nas wolałby aby świat był łatwiejszy do zrozumienia.

Chciałbym przytoczyć Państwu na zakończenie dwa krótkie cytaty. Aleksander Pope, poeta angielski, najwybitniejszy przedstawiciel klasycyzmu w literaturze angielskiej osiemnastego wieku, zafascynowany wielkością Newtona i jego dzieła napisał kiedyś:

Przyrodę i jej prawa
krył nocy cień
Rzekł Bóg „niech będzie Newton"
i nastał dzień.

Opis świata w wydaniu Newtona był jednak zbyt prosty, więc Sir John Squire, współczesny Einsteinowi, pisze:

Lecz szatan nie śpi,
nie trwało długo to
„Niech będzie Einstein"
i wrócił status quo.

Nie jest chyba tak źle. Na przyszły raz pomówimy o cząstkach, które są falami.

Patrz w niebo

Wspaniałe opisy przyrody na Tytanie mieliśmy okazję przeczytać w książce Stanisława Lema *Fiasko*. Czy tak jest tam rzeczywiście — długo jeszcze nie będziemy wiedzieć. Faktem jest, że w skład atmosfery tego największego satelity Saturna wchodzi azot, wodór, argon oraz metan i drobne ilości innych związków organicznych, które w postaci aerozoli tworzą gęstą warstwę pomarańczowych chmur. Powierzchnia satelity pozostała niewidoczna nawet dla przelatujących w jego pobliżu sond. Panowało też przekonanie, że promieniowanie słoneczne powinno powodować stopniową przemianę metanu w bardziej złożone węglowodory, co z kolei wymagałoby stałego uzupełniania zawartości metanu w atmosferze. Jego źródłem mógłby być ocean ciekłego metanu utrzymujący atmosferę w stanie bliskim nasycenia metanem i umożliwiający przez to tworzenie się chmur.

Tymczasem zespół badaczy z NASA kilka lat temu poddał ponownemu opracowaniu podczerwone i radiowe obserwacje wykonane przez sondy podczas ich zbliżeń do Tytana. Stworzony został nowy model atmosfery satelity, który potwierdził, że istotnie w zakresie wysokości od 10 do 30 km nad powierzchnią (gruntu? oceanu?) może tworzyć się coś w rodzaju warstwy metanowych chmur.

Obliczenia jednak dowodziły, że krople powinny mieć rozmiary w każdym razie większe od 0,1 mm, a zatem przypominałyby bardziej deszcz niż chmury.

Chmury, jak wiadomo, powstają, gdy atmosfera jest bliska stanu nasycenia parą i jej masy unoszą się ku górze. Wskutek rozprężania się następuje wtedy ochładzanie się gazu, para przechodzi w stan przesycenia i jej nadmiar może tworzyć krople na tzw. jądrach kondensacji, którymi w ziemskiej atmosferze są m.in. cząstki rodzimego kurzu. Badacze Tytana zasugerowali, że w jego przypadku jądra kondensacji pochodzą, być może, nawet z otaczającej go przestrzeni kosmicznej, a podczas opadania z dużej wysokości krople metanu są w stanie osiągnąć rozmiary 3 mm. W wyniku tego warstwa „chmur” nie powinna promieniowania pochłaniać, lecz tylko rozpraszać, mając tym samym niewielki wpływ na bilans energetyczny atmosfery Tytana.

Jak widać, meteorologia Tytana jest nie mniej skomplikowana od meteorologii ziemskiej. Wydaje się nie ulegać wątpliwości, że metan gra tam rolę ziemskiej wody, a wtedy czymże przy tamtejszych deszczach są te nasze, ziemskie, zaledwie lekko kwaśne...

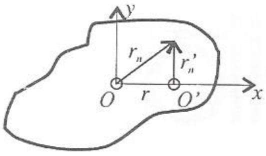
Tomasz KWAST

Prenumerata „Delty” za okres:

Prenumerata „Delty” za okres:

Prenumerata „Delty” za okres:

Fizyczny dowód twierdzenia Steinera



Rozważamy moment bezwładności I względem osi z przechodzącej przez środek masy O oraz moment bezwładności względem osi równoległej do z przechodzącej przez punkt O'.

Ponieważ jest kilka twierdzeń Steinera, więc aby nie było wątpliwości, o które twierdzenie nam chodzi, zacznijmy od jego sformułowania.

Moment bezwładności ciała sztywnego względem dowolnie dobranej osi jest równy sumie momentu bezwładności względem osi do niej równoległej przechodzącej przez środek masy oraz iloczynu masy ciała przez kwadrat odległości obu osi.

Dowód, który zwykle podaje się w szkole (patrz margines) ma charakter bardziej matematyczny niż fizyczny. Zakłada się, że ciało składa się z bardzo wielu malutkich kawałeczków i moment bezwładności przedstawia się w postaci sumy iloczynów mas tych kawałeczków przez kwadrat odległości od osi. Cały dowód sprowadza się do przekształcenia tej sumy.

$$m = \sum m_n,$$
$$I = \sum m_n r_n^2 = $$
$$= \sum m_n(x_n^2 + y_n^2),$$
$$I_1 = \sum m_n(r_n')^2 =$$
$$= \sum m_n((x_n + r)^2 + y_n^2) =$$
$$= I + mr^2 + 2r\sum m_n x_n,$$

gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich n.

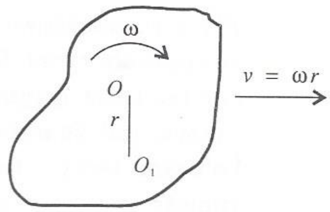
Ostatni składnik jest równy zeru – z definicji środka masy. Czyli

$$I_1 = I + mr^2.$$

Na studiach podaje się w zasadzie ten sam dowód, z tą jednak różnicą, że już nie mówi się o sumie, lecz o całce.

Dowód, który my podamy, nie będzie wykorzystywał żadnych sum ani całek, a jedynie wzór na energię ruchu środka masy i związaną z ruchem obrotowym.

Wyobraźmy sobie, że chcemy obliczyć moment bezwładności względem osi O_1 odległej o r od środka masy.



Oznaczmy przez O oś przechodzącą przez środek masy i równoległą do osi O_1. Momenty bezwładności względem O oraz O_1 oznaczmy przez I i I_1. Nadajmy ciału ruch będący złożeniem ruchu obrotowego z prędkością kątową ω względem osi O oraz ruchu prostoliniowego z prędkością $v = \omega r$ (w kierunku prostopadłym do osi). Wówczas energia kinetyczna ciała wynosi

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Z drugiej strony możemy tę energię obliczyć inaczej. Otóż, w momencie gdy oś O_1 znajduje się dokładnie pod osią O (w kierunku prostopadłym do prędkości $\vec{v}$ – tak jak na rysunku), oś O_1 jest chwilową osią obrotu (bowiem, jak łatwo zauważyć, w tym momencie wypadkowa prędkość osi O_1 jest równa zeru). Tak więc energia kinetyczna ciała wyraża się wzorem

$$E = \frac{1}{2}I_1\omega^2.$$

Stąd porównując wzory mamy

$$\frac{1}{2}m(\omega r)^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I_1\omega^2,$$
$$I_1 = I + mr^2.$$

Piotr HAJŁASZ

Rozwiązanie zadania M 678. Kwadrat liczby całkowitej daje z dzielenia przez 4 resztę zero lub jeden, zatem suma dwóch kwadratów — resztę zero, jeden lub dwa. Dwie kolejne liczby nieparzyste dają różne reszty z dzielenia przez 4: jedna z nich daje resztę jeden, a druga – resztę trzy. Stąd już wynika teza zadania.

Rozwiązanie zadania M 677. Zauważmy, że $5^2 = 27 - 2$ oraz $2^5 = 27 + 5$, zatem liczba a_n jest równa

$$2 \cdot (27+5)^n + 27 \cdot 5^n - 2 \cdot 5^n = 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 27^{n-k}5^k + 2 \cdot 5^n + 27 \cdot 5^n - 2 \cdot 5^n = 27 \cdot N$$

dla pewnego naturalnego N. (Można też, oczywiście, przeprowadzić prosty dowód indukcyjny.)

Siatka dyfrakcyjna z płyty kompaktowej

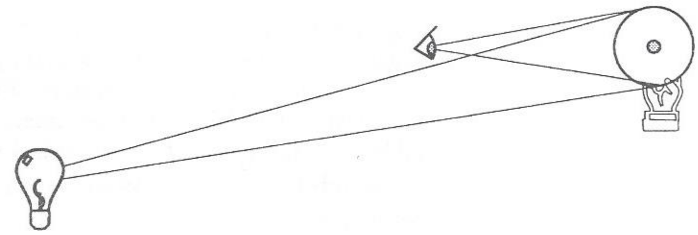
Płyty kompaktowe, zwane CD (od ang. *compact disc*) chyba już na dobre zawojowały rynek fonograficzny. Ich cena zbliża się do cen zwykłych płyt czy też kaset magnetofonowych, natomiast jakość odtwarzanej z nich muzyki jest znacznie lepsza. Zapewne ich wygląd – mienią się wszystkimi kolorami tęczy – też przyczynił się do ich popularyzacji. Na rynku można znaleźć towary, w których płyty kompaktowe wykorzystane są jako element dekoracyjny.

Skąd biorą się te wszystkie kolory, którymi mieni się płyta kompaktowa? Na starym krążku ebonitowym też można zauważyć kolory tęczy, ale efekt jest nieporównywalny. To spostrzeżenie pomoże nam znaleźć odpowiedź na powyższe pytanie.

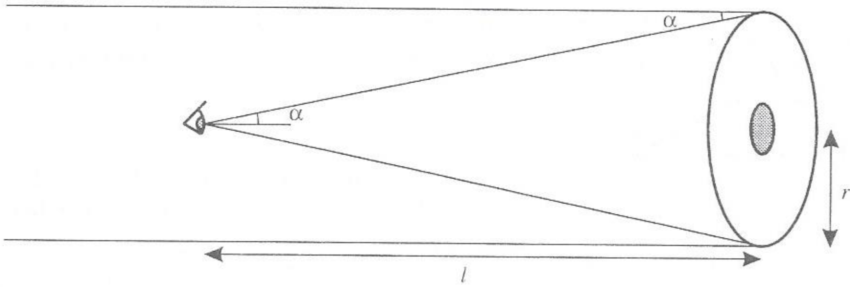
Na krążku ebonitowym dźwięk zapisany jest za pomocą wyrzeźbionego rowka schodzącego się spiralnie do środka. Płyta zachowuje się więc jak siatka dyfrakcyjna dla światła odbitego. Nie jest to dobra siatka, gdyż odstęp między sąsiednimi rowkami wynosi około 0,1 mm. Jest to bardzo dużo w porównaniu z długością fali światła widzialnego, dla którego ta długość wynosi 0,4 – 0,75 μm. Na płycie CD ścieżka dźwiękowa też ma kształt spirali, ale technika oraz wymiary zapisu są zupełnie inne. Zapis muzyki nie jest utrwalony na powierzchni płyty CD. W przezroczystej płycie na głębokości 1,2 mm pod powierzchnią znajduje się warstwa metalizowana, w której informacja jest zakodowana w formie zagłębień o szerokości 0,5 μm i głębokości 0,126 μm. Głębokość zagłębień jest równa 1/4 długości fali światła lasera, aby fala świetlna (której długość wewnątrz płyty wynosi 0,503 μm) odbita od dna zagłębienia była przesunięta w fazie o pół długości względem odbitej od powierzchni metalizowanej. Uzyskuje się w ten sposób efekt zero-jedynkowy: nie ma odbicia, gdy wiązka światła natrafia na odcinek ścieżki z zagłębieniem, i jest odbicie, gdy nie ma zagłębienia. Odstęp między sąsiednimi ścieżkami wynosi 1,6 μm, a więc jest porównywalny z długością fali świetlnej. Stąd płyta CD jest bardzo dobrą siatką dyfrakcyjną, o którą było tak trudno w czasach, gdy chodziłem do szkoły.

Jeśli mamy w domu płytę kompaktową, to możemy wykonać wiele ciekawych doświadczeń. Najprostsze to pomiar długości fali świetlnej.

Proponuję następujący „układ doświadczalny". Włącz zwykłą żarówkę, stań do niej tyłem w odległości około 2 m i w wyciągniętej ręce trzymaj płytę kompaktową.



Nie trzeba wcale zaciemniać pokoju. Płytę trzymaj tak, aby była oświetlona światłem od żarówki, a odbity obraz żarówki „ginął" w otworze płyty. Teraz powoli zbliżaj płytę do siebie, aż zobaczysz na zewnętrznym obwodzie płyty niebieski okrąg. Poproś kogoś, aby zmierzył odległość płyty od oka.

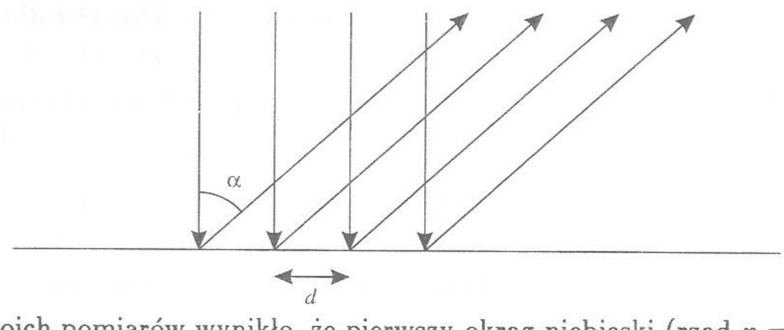


Zbliżając teraz płytę do oka możesz zaobserwować pojawianie się na obwodzie płyty kolejnych kolorów tęczy i schodzenie się ich do środka płyty. Zanotuj odległość płyty od oka dla kilku kolorów pojawiających się na obwodzie. Teraz możemy przystąpić już do wyznaczenia długości fali.

Warunek na wzmocnienie światła odbitego pod kątem α ma postać

$$d \sin\alpha = n\lambda\,,$$

to znaczy różnica dróg optycznych promieni odbitych musi być wielokrotnością długości fali światła λ. W tym wzorze $d = 1{,}6\ \mu$m jest stałą siatki (odległość sąsiednich ścieżek), a n – rzędem maksimum.



Z moich pomiarów wynikło, że pierwszy okrąg niebieski (rząd $n = 1$) pojawił się dla $l = 21$ cm, a czerwony – dla $l = 12$ cm. Przyjmując promień płyty równy 5,5 cm, dostaję, że długości fal odpowiadających tym kolorom wynoszą odpowiednio 0,4 i 0,67 μm.

Spróbujcie pobawić się płytą kompaktową. Może wpadniecie na inne ciekawe doświadczenia, które warto omówić w *Małej Delcie*.

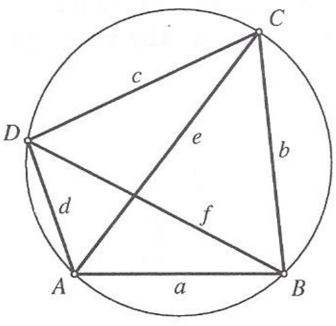
Małą Deltę przygotował Jan KALINOWSKI

Nierówność Ptolemeusza

Józef BANAŚ

W geometrii elementarnej można spotkać twierdzenie, zwane twierdzeniem Ptolemeusza. Twierdzenie to zostało podane przez znanego w starożytności matematyka i astronoma greckiego, Ptolemeusza, żyjącego w latach około 100 – 168. Warto przypomnieć, że Ptolemeusz był twórcą geocentrycznego systemu budowy świata, który opisał w słynnym dziele pt. *Almagest*. W dziele tym znajduje się również twierdzenie, o którym wyżej wspomniano. Brzmi ono następująco.

Twierdzenie Ptolemeusza. *Iloczyn długości przekątnych czworokąta wpisanego w okrąg równy jest sumie iloczynów długości boków przeciwległych.*



Rys. 1

Zatem, przy oznaczeniach z rysunku 1, twierdzenie to możemy zapisać w formie równości

$$ef = ac + bd.$$

Podamy teraz jeden z prostszych dowodów tego twierdzenia, oparty głównie na twierdzeniu cosinusów. Pozostając przy oznaczeniach z rysunku 1 zauważmy, że z trójkątów ABC i ADC otrzymujemy

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B\,,$$
$$e^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos D\,.$$

Ponieważ czworokąt jest wpisany w okrąg, więc $B + D = 180°$. Stąd dostajemy, że $\cos D = -\cos B$. Uwzględniając ten fakt w drugiej z powyższych równości otrzymamy

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B\,,$$
$$e^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos B\,.$$

Mnożąc teraz pierwszą równość przez cd, drugą zaś przez ab oraz dodając je później stronami uzyskamy następującą równość

$$\begin{aligned}(ab + cd)e^2 &= (a^2 + b^2)cd + (c^2 + d^2)ab = \\ &= a^2cd + b^2cd + c^2ab + d^2ab = \\ &= (ad + bc)(ac + bd)\,.\end{aligned}$$

Stąd

$$e^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}\,.$$

Zauważmy dalej, że rozpatrując z trójkąty DAB i DAC otrzymamy

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A\,,$$
$$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C\,.$$

Rozumując zupełnie analogicznie jak poprzednio dostajemy

$$f^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{bc + ad}\,.$$

Z otrzymanych wzorów na e^2 i f^2 mamy dalej

$$e^2f^2 = (ac + bd)^2\,.$$

Ostatecznie $ef = ac + bd$, co jest żądaną równością.

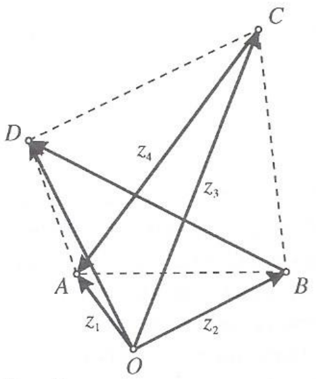
Proponujemy teraz Czytelnikowi zadanie, które można rozwiązać w prosty sposób korzystając z twierdzenia Ptolemeusza.

Obliczyć pole czworokąta wpisanego w okrąg i mającego boki o długościach a, b, c, d, wiedząc, że jego przekątne są prostopadłe.

Postawmy teraz pytanie: Co stanie się z równością w twierdzeniu Ptolemeusza, jeżeli odrzucimy założenie o tym, że czworokąt jest wpisany w okrąg?

Zauważmy, że gdybyśmy chcieli „pójść" poprzednią drogą, rachunki bardzo się skomplikują.

Natomiast bardzo skuteczną metodą okazuje się tutaj zastosowanie liczb zespolonych. Metoda ta jest często w geometrii stosowana z dużym powodzeniem.



Rys. 2

Załóżmy więc, że dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Wprowadźmy na płaszczyźnie czworokąta układ współrzędnych kartezjańskich. Wtedy każdy punkt (x, y) tej płaszczyzny może być uważany za liczbę zespoloną $z = x + iy$ lub też za wektor z zaczepiony w początku układu współrzędnych.

Zatem możemy uważać, że wierzchołki A, B, C, D rozważanego prostokąta są liczbami zespolonymi z_1, z_2, z_3, z_4 (porównaj rys. 2).

Wtedy $\overrightarrow{AB} = z_2 - z_1$, $\overrightarrow{BC} = z_3 - z_2$, $\overrightarrow{CD} = z_4 - z_3$, $\overrightarrow{AD} = z_4 - z_1$, $\overrightarrow{AC} = z_3 - z_1$, $\overrightarrow{BD} = z_4 - z_2$. Oznaczmy, podobnie jak poprzednio: $a = |z_2 - z_1|$, $b = |z_3 - z_2|$, $c = |z_4 - z_3|$, $d = |z_4 - z_1|$, $e = |z_3 - z_1|$, $f = |z_4 - z_2|$. Skorzystajmy następnie z łatwej do sprawdzenia tożsamości:

$$(z_2 - z_1)(z_4 - z_3) + (z_3 - z_2)(z_4 - z_1) = (z_4 - z_2)(z_3 - z_1).$$

Stąd, biorąc moduły z obu stron oraz korzystając z własności modułu, mamy

$$|z_3 - z_1||z_4 - z_2| \le |z_2 - z_1||z_4 - z_3| + |z_3 - z_2||z_4 - z_1|$$

lub inaczej

$$ef \le ac + bd.$$

Otrzymana nierówność nosi nazwę *nierówności Ptolemeusza*. Wypowiadamy ją geometrycznie w następujący sposób:

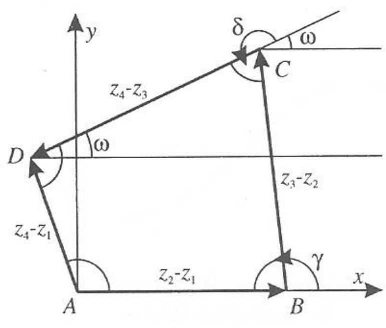
Iloczyn długości przekątnych czworokąta wypukłego jest nie większy od sumy iloczynów długości jego boków przeciwległych.

Zauważmy teraz, że z powyższego rozumowania możemy również uzyskać twierdzenie Ptolemeusza, a nawet coś więcej.

Rzeczywiście, łatwo zauważyć, że w powyższej nierówności równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|(z_2 - z_1)(z_4 - z_3) + (z_3 - z_2)(z_4 - z_1)| = |(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)| + |(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)|.$$

Z drugiej strony wiemy, że ostatnia równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\mathbf{u} = (z_2 - z_1)(z_4 - z_3)$ oraz $\mathbf{v} = (z_3 - z_2)(z_4 - z_1)$ są równoległe oraz mają ten sam zwrot. Symbolicznie będziemy to oznaczali $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$. Zobaczmy, kiedy to ma miejsce. Przyjmijmy w tym celu „wygodny" układ współrzędnych, a więc taki, jak na rysunku 3. Pozostańmy przy wprowadzonych oznaczeniach.



Rys. 3

Jeżeli mnożymy liczby zespolone $(z_4 - z_1)$ oraz $(z_3 - z_2)$, to otrzymamy liczbę zespoloną, która jako wektor tworzy kąt z dodatnią półosią osi OX równy $A + \gamma$ – dodajemy kąty, jakie tworzą z tą półosią poszczególne czynniki.

Podobnie $(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)$ tworzy kąt $0 + \delta = \delta$. A więc $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$ wtedy i tylko wtedy, gdy kąty $A + \gamma$ oraz δ różnią się o wielokrotność 2π. Otóż

$$\delta = \omega + \pi = \underbrace{A + D - \pi}_{\omega} + \pi = A + D,$$

$$A + \gamma = \pi - B + A,$$

skąd

$$\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \Leftrightarrow A + D = \pi - B + A (\operatorname{mod} 2\pi) \Leftrightarrow B + D = \pi.$$

Otrzymany związek oznacza, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

Zatem efektem powyższych rozważań jest następujący wniosek:

W nierówności Ptolemeusza równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy na czworokącie „skojarzonym z tą nierównością" można opisać okrąg.

Rozwiązanie zadania M 676. Zauważmy, że

$$(w - x)(w - y)(w - z) = w^3 - w^2(x + y + z) + w(xy + yz + zx) - xyz.$$

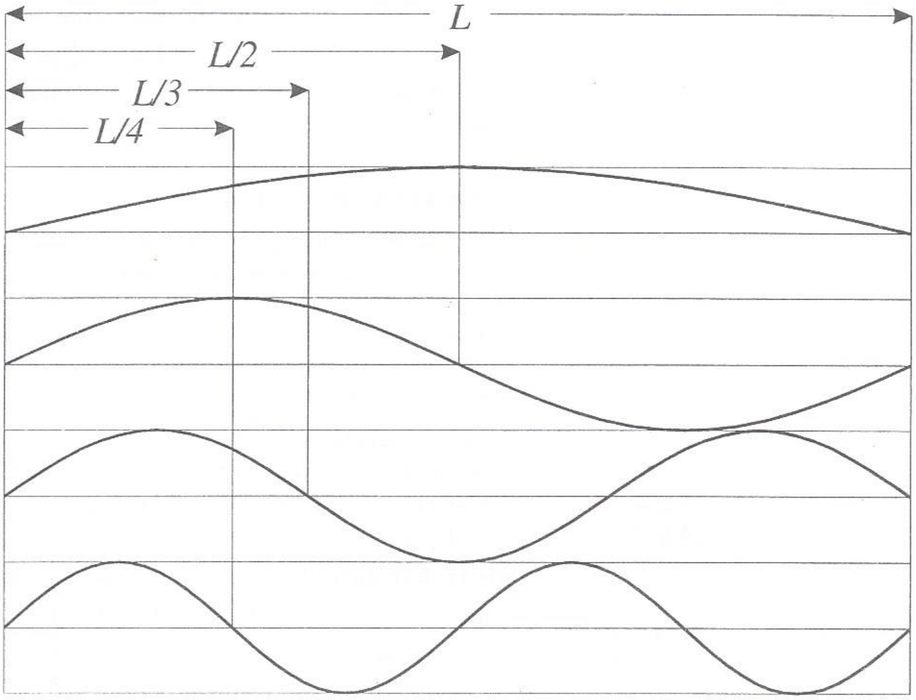
(To są po prostu wzory Viete'a dla równania trzeciego stopnia.) Zatem liczby x, y i z, spełniające rozpatrywany układ równań są pierwiastkami wielomianu $P(w) = w^3 - 6w^2 + 11w - 6$, który łatwo rozłożyć na czynniki: $P(w) = (w - 1)(w - 2)(w - 3)$. Ponieważ układ równań jest symetryczny ze względu na wszystkie niewiadome, to spełnia go sześć trójek liczb, które otrzymujemy jako (wszystkie) permutacje trójki (1,2,3).

Dźwięki – muzyka i hałas

Stanisław MRÓWCZYŃSKI

Żyjemy w świecie niezwykłego bogactwa dźwięków. Jedne odbieramy jako szum czy hałas, podczas gdy inne określamy mianem muzyki. A jaka jest właściwie różnica między zbiorem dźwięków tworzących melodię, a hałasem? Zasadniczą cechą muzyki, nawet tej bardzo hałaśliwej, jest to, że stosunki częstotliwości dominujących w niej dźwięków określone są według precyzyjnych reguł. Przy czym reguły te częściowo zależą od cywilizacji czy kultury, na której gruncie muzyka jest tworzona. Dlatego ludowa melodia tybetańska może wydać się Europejczykowi dziwnym jazgotem i podobne wrażenia może mieć Tybetańczyk słuchając Mozarta.

Podstawowa zasada porządkująca różnorodność dźwięków wydaje się być uniwersalna. Dźwięki, których częstotliwości są wielokrotnościami pewnej podstawowej, lecz dowolnej, częstotliwości odbieramy jako podobne, pokrewne. Uniwersalność wynika zapewne z naszego doświadczenia. Większość źródeł wytwarzając dźwięk o częstotliwości f produkuje jednocześnie dźwięki o częstotliwościach $2f$, $3f$ itd. Dzieje się tak z drgającą struną pokazaną na rysunku.



Długość struny (L) określa długość możliwych fal (stojących), które się wzbudzają. Najdłuższa fala ma długość $2L$, krótsza L, następna $2L/3$, jeszcze następna $L/2$ itd. Struna więc wytwarza podstawowy dźwięk (ton) o częstotliwości $f = c/2L$ (c jest prędkością dźwięku) i wyższe dźwięki (tony) harmoniczne o częstotliwościach $2f$, $3f$, $4f$ itd. Słyszymy więc tzw. wieloton harmoniczny. Ponieważ jednak drgająca struna, jak i inne źródła dźwięku, nie jest zwykle oscylatorem dokładnie harmonicznym, więc poza składowymi harmonicznymi mamy w dźwięku składowe anharmoniczne, których częstotliwości nie są związane z częstotliwością podstawową prostą regułą i zależą od konkretnego instrumentu, sposobu grania itp. Składowe harmoniczne i anharmoniczne nadają dźwiękowi barwę sprawiając, że to samo c grane na fortepianie czy skrzypcach brzmi odmiennie, że ten sam instrument w rękach różnych muzyków brzmi inaczej.

Wybrawszy podstawową częstotliwość f dzielimy cały zakres słyszalnych częstotliwości na przedziały $(f, 2f)$, $(2f, 4f)$, $(4f, 8f)$ itd. zwane oktawami. Podczas, gdy podział na oktawy ma charakter uniwersalny, różne cywilizacje i kultury dopracowały się różnych podziałów częstotliwości w ramach jednej oktawy. Ludy prymitywne dzieliły zwykle oktawę na kilka przedziałów: 5, 6 czy 7. Muzyka hinduska wyodrębnia natomiast aż 22 nierówne interwały. Pierwszy europejski system dwunastodźwiękowy pochodzący z VI w. p.n.e. stworzył Pitagoras wykorzystując doświadczenia starogreckich muzyków. Podstawą całego systemu były stosunki między pierwszymi trzema liczbami naturalnymi. Stosunek $1:2$ określa oktawę, $2:3$ zaś tzw. naturalną kwintę. Zbiór 12 dźwięków pitagorejskiego systemu znajdujemy odliczając 12 kolejnych kwint i transponując kolejne stopnie do jednej oktawy. Jeśli częstotliwość podstawową oznaczymy przez f, kolejne dźwięki oddalone o kwintę znajdujemy jako $f_n = f(3/2)^n$. Dźwięk, który znalazł się w k-tej oktawie tzn. w przedziale $(2^{k-1}f, 2^k f)$, transponujemy do pierwszej oktawy dzieląc jego częstotliwość przez 2^{k-1}.

W systemie pitagorejskim, zwanym również naturalnym, interwałom oktawy, kwinty, kwarty, tercji odpowiadają stosunki $1:2$, $2:3$, $3:4$, $4:5$. Miało to być wyrazem wyższego porządku, harmonii świata. Niestety system pitagorejski ma poważną wadę. Dwunasty stopień nie pokrywa się po transpozycji z pierwszym. Zamiast dźwięku o częstotliwości f znajdujemy $531441/524288\ f$. Ta niewielka różnica nazywana komatem pitagorejskim prowadziła do trudności w transponowaniu melodii z jednej oktawy do drugiej, szczególnie istotnych w późniejszej muzyce wielogłosowej. Kolejne systemy starały się na różne sposoby wyeliminować ten problem. Ostatecznie około roku 1700 ustalił się system równomiernie temperowany, w którym oktawa podzielona jest na 12 równych interwałów zwanych półtonami. Częstoliwości kolejnych stopni znajdujemy jako $f_n = f\,2^{n/12}$.

System równomiernie temperowany umożliwia łatwą transpozycję melodii z jednej oktawy do drugiej, natomiast interwały nie wyrażają się już stosunkami małych liczb naturalnych, nie są nawet liczbami wymiernymi. Tak np. kwintę, której w systemie naturalnym odpowiadał ułamek $2/3$, określa w systemie równomiernie temperowanym liczba rzeczywista $2^{-7/12} = 0,6674199\ldots$

Całość europejskiego repertuaru muzycznego wykorzystującego 8 oktaw można zagrać za pomocą dźwięków o 96 częstotliwościach podstawowych. Przez długi czas nie przywiązywano dużej wagi do precyzyjnego określenia absolutnych wartości owych częstotliwości. W roku 1850 przyjęto na mocy międzynarodowej umowy jednolity strój muzyczny z dźwiękiem a^1 o częstotliwości 435 Hz. Obecnie panujący strój wprowadzony w 1939 roku ustala a^1 jako 440 Hz.

Rozkład częstotliwości dźwięków tworzących szum charakteryzuje się brakiem wydzielonych częstotliwości i najczęściej opisywany jest zależnością $1/f^k$. W przypadku $k = 0$ mamy tzw. biały szum. Jednak ze względu na specyficzne działanie naszych uszu, jako biały obieramy szum typu $1/f$. Hałas to najczęściej połączenie szumu z kilkoma dominującymi częstotliwościami, które zwykle nie należą do muzycznego systemu dźwiękowego.

Ucho ludzkie odbiera dźwięki o częstotliwościach od kilkunastu do kilkunastu tysięcy drgań na sekundę tzn. od kilkunastu Hz do kilkunastu kHz. Instrumentem o najszerszej skali są, oczywiście, organy pokrywające aż 9 oktaw od dźwięku C_2 o częstotliwości 16,4 Hz do c^6 odpowiadającego 8372 Hz.

Z przedstawionych wywodów wynika, że analiza częstotliwości powinna umożliwić łatwe odróżnienie hałasu od muzyki. Ciekawe jak to wygląda w praktyce.

Rozwiązanie zadania F 363.
Zapisujemy wzór na masę Wszechświata w postaci

$$M \approx \mathrm{G}^{\alpha}\mathrm{H}^{\beta}\mathrm{c}^{\gamma}.$$

Podstawiając jednostki $[\mathrm{G}] = \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}$, $[\mathrm{H}] = \mathrm{s}^{-1}$, $[\mathrm{c}] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} \alpha = -1, \\ 3\alpha + \gamma = 0, \\ -2\alpha - \beta - \gamma = 0. \end{cases}$$

Rozwiązujemy ten układ i otrzymujemy: $\alpha = -1$, $\gamma = 3$, $\beta = -1$. Stąd

$$M \approx \frac{\mathrm{c}^3}{\mathrm{GH}} \approx 2,3\cdot 10^{53}\ \mathrm{kg}$$

oraz

$$\frac{M}{m} = 1,4\cdot 10^{80}.$$

Oznacza to, że we Wszechświecie mamy około 10^{80} atomów. W wyrażeniu na masę może występować współczynnik liczbowy, którego dokładnie nie znamy. Sądzi się jednak, że nie zmienia on powyższego oszacowania o więcej niż rząd wielkości.

Rozwiązanie zadania F 364.
Niech R oznacza promień Ziemi, M jej masę, r zaś promień orbity satelity. Uwzględniając prędkość v, z jaką porusza się satelita, wnioskujemy, że czas $\Delta t'$ wskazywany przez zegar pokładowy ulega spowolnieniu względem czasu Δt mierzonego przez nieruchomego obserwatora znajdującego się w nieskończoności zgodnie z zależnością

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\sqrt{1-\frac{2GM}{rc^2}}.$$

Względem tego samego obserwatora zegary na Ziemi ulegają też spowolnieniu

$$\Delta t'' = \Delta t\sqrt{1-\frac{2GM}{Rc^2}},$$

gdzie analogiczny czynnik z prędkością zegara umieszczonego na powierzchni Ziemi pominęliśmy, gdyż jest on znikomo mały. Z równania ruchu satelity

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

dostajemy prędkość satelity

$$v^2 = \frac{GM}{r}.$$

Żądając, by był spełniony warunek $\Delta t' = \Delta t''$ otrzymujemy w przybliżeniu $r = \frac{3}{2}R$ (w rozwiązaniu kwadrat małego wyrazu $\frac{GM}{rc^2}$ można pominąć).

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 1993

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1993.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 149 (WT=2,38) i 150 (WT=2,08)
z numeru 12/1992

Przemysław Gworys	– Częstochowa	32,92
Tomasz Wietecha	– Tarnów	32,90
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	21,97
Andrzej Borowski	– Aleksandrów K.	18,43

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Zadania z fizyki nr 161, 162

161. Zbrodnia w ciemni fotograficznej

Inspektor Wnikliwy przesłuchiwał Męczysława Rozwałkę, fotografa z dalekiego przedmieścia Czarny Koniec.

– A więc, jeśli to nie ty zamordowałeś twojego wspólnika Naiwińskiego, to kto to zrobił?

– Nie znam go, panie inspektorze. Widziałem go tylko przez krótką chwilę, i to w słabym świetle lampy ciemniowej. Wywoływałem właśnie odbitki, gdy nagle usłyszałem hałas. Odwróciwszy się zobaczyłem biednego Naiwka na podłodze z nożem w plecach, i tamtego drania uciekającego. Był raczej niskiego wzrostu, miał na sobie zielony sweter i niebieskie spodnie. W uchu zauważyłem błyszczący kolczyk.

– Wystarczy, Rozwałko. Wyjątkowo nieudolnie kłamiesz – widać, że brakuje ci podstawowych wiadomości z fizyki. To zeznanie będzie koronnym dowodem przeciw tobie. Sierżancie, odprowadźcie go!

W jaki sposób inspektor Wnikliwy zdemaskował mordercę?

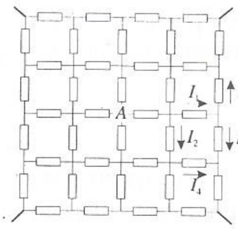
162. Strumień wody wypływa z poziomej rury. Prędkość wody w rurze zmienia się z odległością r od osi rury zgodnie ze wzorem $v(r) = v_0[1-(r/r_0)^2]$, gdzie r_0 jest promieniem rury, a maksymalna prędkość v_0 ma wartość 10 m/s. Zakładając, że dzięki siłom spójności strumień nie rozdzieli się, obliczyć wysokość spadku wody do chwili uderzenia w pionową ścianę odległą o 1 metr od wylotu rury.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/1993

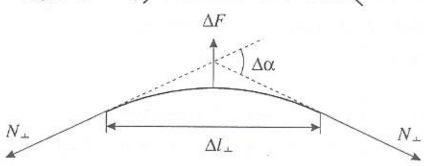
Przypominamy treść zadań:

157. W układzie 40 jednakowych oporników po 1 Ω (rys. 1) cztery rogi są zwarte. Ile wynosi opór zastępczy między tymi czterema rogami a środkowym punktem A?

158. Do dwóch punktów A i B odległych o d przymocowane są końce wiotkiego, nierozciągliwego przewodu o długości $l > d$, przez który płynie prąd o natężeniu I. Zbadać kształt przewodu i obliczyć siłę napinającą, jeśli przewód znajduje się w zewnętrznym jednorodnym polu magnetycznym $\vec{B}$ skierowanym równolegle do odcinka AB. Założyć, że własne pole magnetyczne przewodu jest pomijalnie małe w porównaniu z polem zewnętrznym.



Rys. 1



Rys. 2

157. Oznaczmy przez I całkowity prąd przepływający przez układ i przyjmijmy, że dodatni zwrot I jest od A do rogów. Z symetrii problemu wynika, że przez każdy z oporników dołączonych do A przepływa $I/4$, a przez każdy z oporników dołączonych końcem do jednego z rogów przepływa $I/8$. Jeśli wprowadzimy dodatkową zmienną I_1 (rys. 1), to z I prawa Kirchhoffa i z symetrii możemy wyznaczyć wszystkie pozostałe prądy:

$$I_3 = \frac{1}{2}I_1, \quad I_2 = I_4 = \frac{1}{8}I - \frac{1}{2}I_1 .$$

Wystarczy teraz zastosować II prawo Kirchhoffa do któregokolwiek z ośmiu oczek sieci, w których występują prądy I_1 i I_3. Otrzymujemy równanie

$$I_1 + I_3 = I_2 + I_4, \quad \text{zatem} \quad I_1 = \frac{1}{10}I .$$

Spadek napięcia od A do rogu może być wyliczony po dowolnej drodze, np. $U = R(I/4 + I_2 + I_4 + I/8) = \frac{21}{40}RI$, skąd $R_{zast} = \frac{21}{40}R = 0,525\ \Omega$.

158. Na każdy element $\Delta\mathbf{l}$ przewodu działa siła $\Delta\mathbf{F} = I\Delta\mathbf{l}\times\mathbf{B}$. Siła ta jest prostopadła do przewodu, skąd wynika wniosek, że siła działająca wzdłuż niego (siła napinająca) ma stałą wartość N na całej jego długości. Ponadto siła $\Delta\mathbf{F}$ jest prostopadła do $\mathbf{B}$, zatem składowa siły napinającej wzdłuż $\mathbf{B}$ ma także jednakową wartość wzdłuż przewodu. Stały musi być więc też kąt nachylenia przewodu względem pola, a także wartość prostopadłej składowej $N_\perp$.

Zbadajmy kształt, jaki tworzy rzut przewodu na płaszczyznę prostopadłą do $\mathbf{B}$. Siły działające na mały element przewodu muszą się równoważyć (rys. 2), czyli

$$N_\perp \Delta\alpha = I\Delta l_\perp B .$$

Uwzględniając, że I, B i $N_\perp$ są stałe, dochodzimy do wniosku, że zakrzywienie przewodu nie zmienia się – zatem jest on łukiem okręgu o promieniu $r = \frac{N_\perp}{IB}$. W przestrzeni przewód jest linią śrubową. Oznaczmy przez $l_\perp$ składową prostopadłą długości przewodu, tzn. $l_\perp = \sqrt{l^2 - d^2}$. Ponieważ siła napinająca jest równoległa do przewodu, więc

$$\frac{l_\perp}{l} = \frac{N_\perp}{N} = \frac{IBr}{N} .$$

Jeśli przewód utworzy n zwojów spirali, to $l_\perp = 2\pi r n$ i otrzymujemy wynik $N = \frac{IBl}{2\pi n}$. Autor sądzi, że powstanie tylko jeden zwój. Przemawia za tym warunek minimum energii: jeśli rozpoczynając od przewodu prostoliniowego będziemy stopniowo w jednym z punktów A lub B „popuszczać" przewód, to największą pracę wykona on dla $n = 1$, najbardziej zatem spadnie energia pola magnetycznego. Trudno byłoby jednak wykazać, że dla $n > 1$ równowaga przewodu jest nietrwała.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 249 (WT=2,83) i 250 (WT=1,68)
z numeru 11/1992

Tomasz Wietecha	– Tarnów	42,83
Jerzy Janowicz	– Bolesławiec	39,48
Mirosław Matlęga	– Skoczów	38,76
Leszek Gasiński	– Stalowa Wola	37,04

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Zadania z matematyki nr 263, 264

263. W każdym okienku tabeli prostokątnej o wymiarach 10×2 umieszczamy kółko lub krzyżyk tak, by żadne dwa krzyżyki nie znalazły się w okienkach sąsiednich (mających wspólny bok). Ile jest takich rozmieszczeń?

264. Udowodnić, że dla $x \in (0; \pi/4)$ zachodzi nierówność $\sin(\operatorname{tg} x) > x$.

Zadanie 264 zaproponował pan Józef Banaś z Rzeszowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/1993

Przypominamy treść zadań:

259. Dana jest liczba rzeczywista a. Wyznaczyć wszystkie czwórki liczb rzeczywistych (x_1, x_2, x_3, x_4) spełniające układ równań

$$\begin{cases} (x_1 + x_2 + x_3) \cdot x_4 = a \\ (x_2 + x_3 + x_4) \cdot x_1 = a \\ (x_3 + x_4 + x_1) \cdot x_2 = a \\ (x_4 + x_1 + x_2) \cdot x_3 = a. \end{cases}$$

260. Na okręgu danych jest pięć różnych punktów A, B, C, D, U. *Prosta Simsona* punktu U względem trójkąta ABC to prosta przechodząca przez rzuty punktu U na proste AB, AC, BC. Analogicznie określamy proste Simsona punktu U względem trójkątów ABD, ACD, BCD. Udowodnić, że rzuty prostokątne punktu U na te cztery proste Simsona są współliniowe.

259. Przyjmijmy, że liczby x_1, x_2, x_3, x_4 spełniają dany układ i oznaczmy sumę $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ przez s. Zatem $(s - x_i)x_i = a$ dla $i = 1, 2, 3, 4$, co oznacza, że każda z liczb x_i jest pierwiastkiem trójmianu kwadratowego $x^2 - sx + a$. Są więc wśród tych liczb co najwyżej dwie różne. Ponieważ układ jest symetryczny (niezmienniczy względem permutacji), wystarczy rozważyć następujące przypadki:
(1) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$;
(2) $x_1 = x_2 = x_3 \neq x_4$;
(3) $x_1 = x_2 \neq x_3 = x_4$.
W każdym z tych przypadków dalsze postępowanie jest oczywiste. Wyniki:
Przypadek (1) możliwy tylko dla $a \geq 0$ i wówczas $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \pm\sqrt{a/3}$;
przypadek (2) możliwy tylko dla $a = 0$ i wówczas $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, x_4 dowolne ($\neq 0$);
przypadek (3) możliwy tylko dla $a < 0$ i wówczas $x_1 = x_2 = -x_3 = -x_4 = \pm\sqrt{-a}$.

Uwzględniając wspomnianą symetrię układu otrzymujemy odpowiedź:
Dla $a = 0$ rozwiązaniem jest każda czwórka liczb postaci

$$(c,0,0,0),\ (0,c,0,0),\ (0,0,c,0),\ (0,0,0,c);\quad c \text{ dowolne;}$$

dla $a > 0$ układ ma dwa rozwiązania:

$$\left(\sqrt{a/3}, \sqrt{a/3}, \sqrt{a/3}, \sqrt{a/3}\right) \quad \text{oraz} \quad \left(-\sqrt{a/3}, -\sqrt{a/3}, -\sqrt{a/3}, -\sqrt{a/3}\right);$$

dla $a < 0$ układ ma sześć rozwiązań:

$$(q,q,-q,-q),\ (q,-q,q,-q),\ (q,-q,-q,q),$$
$$(-q,q,q,-q),\ (-q,q,-q,q),\ (-q,-q,q,q),\ \text{gdzie } q = \sqrt{-a}.$$

260. Użyjemy języka geometrii płaszczyzny zespolonej. Dla dowolnej pary różnych liczb zespolonych p, q równanie

$$(1) \qquad \left(\bar{p}q + \bar{q}z + \bar{z}p\right) - \left(p\bar{q} + q\bar{z} + z\bar{p}\right) = 0$$

(zmiennej z) przedstawia linię prostą przechodzącą przez punkty p i q. Oznaczmy przez $g(p,q)$ liczbę zespoloną przedstawiającą rzut punktu 0 (początku układu współrzędnych kartezjańskich) na tę prostą. Liczbę $z = g(p,q)$ wyznaczymy rozwiązując układ dwóch równań (z niewiadomymi z i $\bar{z}$): (1) oraz

$$(2) \qquad \frac{z}{p-q} + \frac{\bar{z}}{\bar{p}-\bar{q}} = 0$$

(równanie (2) mówi, że część rzeczywista liczby $z/(p-q)$ jest równa zeru; wyraża więc warunek prostopadłości wektora wodzącego punktu z do wektora kierunkowego prostej przechodzącej przez p i q). Z układu (1), (2) otrzymujemy dla $z = g(p,q)$ wzór

$$(3) \qquad g(p,q) = \frac{\bar{p}q - p\bar{q}}{2(\bar{p} - \bar{q})}.$$

Przyjmijmy, że rozważany w zadaniu okrąg ma równanie $|z - 1| = 1$, punkt U jest reprezentowany przez liczbę 0, a punkty A, B, C, D – przez liczby zespolone a, b, c, d. Podane równanie okręgu możemy przepisać w postaci $(z-1)(\bar{z}-1) = 1$, czyli

$$(4) \qquad z\bar{z} = z + \bar{z}.$$

Jeśli więc punkty p i q leżą na tym okręgu, to $\bar{p} = p/(p-1)$, $\bar{q} = q/(q-1)$, a zatem liczba $g(p,q)$ dana wzorem (3) równa się

$$(5) \qquad g(p,q) = \left(\frac{pq}{p-1} - \frac{pq}{q-1}\right)\left(\frac{2p}{p-1} - \frac{2q}{q-1}\right)^{-1} = \frac{pq(q-p)}{2(q-p)} = \frac{pq}{2}.$$

Wobec tego rzuty punktu 0 (czyli U) na proste AB, AC, BC są reprezentowane przez liczby $ab/2$, $ac/2$, $bc/2$. Aby się upewnić, że definicja prostej Simsona jest poprawna, należy ustalić, że te punkty są współliniowe. Wystarczy w tym celu sprawdzić równość (1) przyjmując za p, q, z iloczyny ab, ac, bc; w sprawdzeniu wykorzystujemy warunek (4) dla liczb a, b, c:

$$\begin{aligned} &\left(\overline{ab} \cdot ac + \overline{ac} \cdot bc + \overline{bc} \cdot ab\right) - \left(ab \cdot \overline{ac} + ac \cdot \overline{bc} + bc \cdot \overline{ab}\right) = \\ &= \left(a + \bar{a}\right)\bar{b}c + \left(c + \bar{c}\right)\bar{a}b + \left(b + \bar{b}\right)a\bar{c} - \\ &\quad - \left(a + \bar{a}\right)b\bar{c} - \left(c + \bar{c}\right)a\bar{b} - \left(b + \bar{b}\right)\bar{a}c = \\ &= a\bar{b}c + \overline{ab}c + \bar{a}bc + \bar{a}b\bar{c} + ab\bar{c} + a\overline{bc} - \\ &\quad - ab\bar{c} - \bar{a}b\bar{c} - a\bar{b}c - a\overline{bc} - \bar{a}bc - \overline{ab}c = 0. \end{aligned}$$

Stąd żądana współliniowość trójki punktów ab, ac, bc.

Oznaczmy proste Simsona punktu 0 względem trójkątów BCD, ACD, ABD, ABC odpowiednio przez l_a, l_b, l_c, l_d, a liczby zespolone przedstawiające rzuty punktu 0 na te cztery proste – przez u_a, u_b, u_c, u_d. Zadanie będzie rozwiązane, jeśli wykażemy, na przykład, współliniowość punktów u_a, u_b, u_c przy ustalonym d.

Zgodnie ze wzorem (5), prosta l_a przechodzi przez punkty $bd/2$ i $cd/2$; prosta l_b przechodzi przez punkty $ad/2$ i $cd/2$, a prosta l_c – przez $ad/2$ i $bd/2$. Stąd

$$u_a = g(bd/2, cd/2), \quad u_b = g(ad/2, cd/2), \quad u_c = g(ad/2, bd/2).$$

W takim razie, wobec (3),

$$\begin{aligned} u_a = g(bd/2, cd/2) &= \frac{(\overline{bd}/2)(cd/2) - (bd/2)(\overline{cd}/2)}{\overline{bd} - \overline{cd}} = \\ &= \frac{\bar{b}c|d|^2 - b\bar{c}|d|^2}{4\bar{d}(\bar{b} - \bar{c})} = \frac{d}{4}\left(\frac{\bar{b}c - b\bar{c}}{\bar{b} - \bar{c}}\right) = \\ &= (d/2) \cdot g(b,c) = (d/2) \cdot (bc/2) = bcd/4, \end{aligned}$$

i analogicznie $u_b = acd/4$, $u_c = abd/4$. Współliniowość trójki punktów u_a, u_b, u_c wynika więc natychmiast ze współliniowości trójki ab, ac, bc (stwierdzonej chwilę wcześniej). Dowód jest zakończony.

XLV OLIMPIADA MATEMATYCZNA

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria

1. Udowodnić, że układ równań
$$\begin{cases} a^2 - b = c^2 \\ b^2 - a = d^2 \end{cases}$$
nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich a, b, c, d.

2. Ciąg funkcji $f_0, f_1, f_2, \ldots$ jest określony następująco:
$$f_0(x) = |x| \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbf{R},$$
$$f_{n+1}(x) = |f_n(x) - 2| \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\text{oraz wszystkich } x \in \mathbf{R}.$$
Dla każdej liczby naturalnej n rozwiązać równanie $f_n(x) = 1$.

3. Dowieść, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, to
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \le$$
$$\le \frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{b+c-a}.$$

4. Dany jest okrąg o środku O, punkt A wewnątrz tego okręgu oraz cięciwa PQ, nie będąca średnicą, przechodząca przez A. Proste p i q są styczne do rozważanego okręgu odpowiednio w punktach P i Q. Prosta l przechodząca przez punkt A i prostopadła do OA przecina proste p i q odpowiednio w punktach K i L. Wykazać, że $|AK| = |AL|$.

II seria

5. Udowodnić, że jeżeli wielomian $x^3 + ax^2 + bx + c$ ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste, to wielomian $x^3 + ax^2 + \frac{1}{4}(a^2 + b)x + \frac{1}{8}(ab - c)$ także ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste.

6. Funkcja $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest ciągła. Wykazać, że jeżeli dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje taka liczba naturalna n, że
$$(\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n})(x) = 1,$$
to $f(1) = 1$.

7. Na zewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ budujemy trójkąty podobne APB, BQC, CRD, DSA, w ten sposób, że $|\angle PAB| = |\angle QBC| = |\angle RCD| = |\angle SDA|$, $|\angle PBA| = |\angle QCB| = |\angle RDC| = |\angle SAD|$. Dowieść, że jeśli czworokąt $PQRS$ jest równoległobokiem, to czworokąt $ABCD$ też jest równoległobokiem.

8. Dane są takie liczby naturalne a, b, c, że a^3 dzieli się przez b, b^3 dzieli się przez c, a c^3 dzieli się przez a. Udowodnić, że liczba $(a + b + c)^{13}$ jest podzielna przez abc.

III seria

9. W konferencji bierze udział $2n$ osób. Każdy uczestnik konferencji ma wśród pozostałych uczestników co najmniej n znajomych. Udowodnić, że wszystkich uczestników konferencji można zakwaterować w pokojach dwuosobowych tak, by każdy uczestnik mieszkał ze swoim znajomym.

10. Liczby dodatnie p i q spełniają warunek $p + q = 1$. Wykazać, że dla dowolnych liczb naturalnych m i n zachodzi nierówność
$$(1 - p^m)^n + (1 - q^n)^m \ge 1.$$

11. Trójkąt o obwodzie $2p$ jest wpisany w koło o promieniu R i opisany na kole o promieniu r. Dowieść, że $p < 2(R + r)$.

12. Udowodnić, że sumy przeciwległych kątów dwuściennych czworościanu są równe wtedy i tylko wtedy, gdy sumy przeciwległych krawędzi tego czworościanu są równe.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem **właściwego komitetu okręgowego Olimpiady** najpóźniej dnia

11 października 1993 r. | **10 listopada 1993 r.** | **10 grudnia 1993 r.**

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy komitetów okręgowych Olimpiady Matematycznej

Dla województwa elbląskiego, gdańskiego i słupskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny PAN, Oddział w Gdańsku, ul. Abrahama 18, 81-825 Sopot.

Dla województwa bielskiego, częstochowskiego i katowickiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.

Dla województwa krakowskiego, krośnieńskiego, nowosądeckiego i tarnowskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

Dla województwa bialskopodlaskiego, chełmskiego, lubelskiego, przemyskiego, rzeszowskiego, siedleckiego, tarnobrzeskiego i zamojskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Oddział Lubelski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, pok. 310, 20-031 Lublin.

Dla województwa kieleckiego, łódzkiego, piotrkowskiego, radomskiego, sieradzkiego i skierniewickiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

Dla województwa konińskiego, leszczyńskiego, pilskiego, poznańskiego i zielonogórskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, ul. Matejki 48/49, pok. 24, 60-769 Poznań.

Dla województwa gorzowskiego, koszalińskiego i szczecińskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, ul. Wielkopolska 15, 70-251 Szczecin.

Dla województwa bydgoskiego, ciechanowskiego, olsztyńskiego, płockiego, toruńskiego i włocławskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

Dla województwa białostockiego, łomżyńskiego, ostrołęckiego, suwalskiego i warszawskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.

Dla województwa jeleniogórskiego, kaliskiego, legnickiego, opolskiego, wałbrzyskiego i wrocławskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

epsilon

8/93
(30)

Niematematycy o matematyce

„Matematycy są zwykle tak pochłonięci swoją pracą, że zupełnie nie interesują się, kto nimi rządzi; prawdę mówiąc, nie mają nawet pojęcia, że rząd w ogóle istnieje."

(*John Boyd – „Ostatni statek z planety Ziemia"*)

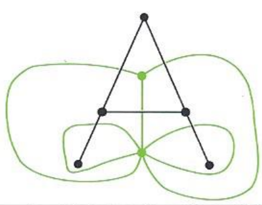
Teoria grafów a haftowanie monogramów

Czasami na dnie skrzyni lub szafy babuni odnajdujemy pościel lub bieliznę ozdobioną w narożniku — MONOGRAMEM. Zwykle są to połączone ze sobą, stylizowane litery, ozdobione motywami roślinnymi lub dziwnymi zakrętasami. Ale co to ma wspólnego z teorią grafów?

Każdy graf składa się z wierzchołków, zaznaczonych na rysunku punktami, oraz z krawędzi łączących niektóre wierzchołki, przedstawionych graficznie jako linie ciągłe biegnące od wierzchołka do wierzchołka. (Istnieje nawet graf bez krawędzi, tzw. pusty, ale bez wierzchołka nie ma grafu!) W ogólnym przypadku krawędzie mogą się przecinać, w grafach płaskich (narysowanych na płaszczyźnie) – nie mogą, a takimi właśnie zajmiemy się w dalszej części.

Mając dany graf płaski możemy utworzyć graf dualny do niego:
– wewnątrz każdego obszaru, wydzielonego z płaszczyzny krawędziami grafu, zaznaczamy punkt. Będzie to wierzchołek grafu dualnego.
– Każde dwa wierzchołki leżące w sąsiednich obszarach łączymy ze sobą tyle razy, ile krawędzi je oddzielało (każdą taką krawędź grafu płaskiego przecinamy krawędzią grafu dualnego).
– Jeśli krawędź nie rozgranicza dwóch różnych obszarów, ale zawiera się w jednym, to przecinamy ją pętlą (czyli krawędzią łączącą wierzchołek z samym sobą).

Weźmy pod uwagę graf płaski w kształcie litery *A*.

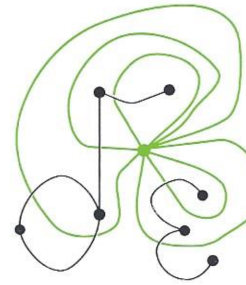


Narysujmy na tym samym rysunku graf dualny do grafu *A*. Będzie miał kształt stylizowanego kwiatu. Wystarczy tylko przenieść rysunek na materiał, wyhaftować i już mamy monogram.

Graf dualny do grafu w kształcie litery *A* będzie miał dwa wierzchołki, trzy krawędzie oraz dwie pętle.

Zauważmy jeszcze, że grafy dualne do grafów „literowych" mają tylko jeden wierzchołek, wyjątek stanowią litery *A*, *D*, *O*, *P*, *R* (dwa wierzchołki) oraz *B* (trzy). Liczba krawędzi w grafie dualnym jest taka sama jak w wyjściowym (pętla jest krawędzią).

Niektóre grafy mają ciekawą własność: z dowolnego, ustalonego wierzchołka można dotrzeć do każdego z pozostałych posuwając się (np. ołówkiem) tylko po krawędziach tego grafu. Nazywamy je grafami spójnymi. Dociekliwy Czytelnik po sporządzeniu kilku szkiców zauważy, że grafy dualne są zawsze spójne, bez względu na to, czy powstały z grafów spójnych, czy też nie. (Dlaczego?)



Zatem „kwiat" w kształcie grafu dualnego zawsze połączy w jedną całość litery wyhaftowane obok siebie (ale na tej samej sztuce materiału!).

ZADANIE: Zaprojektować monogramy z liter alfabetu greckiego.

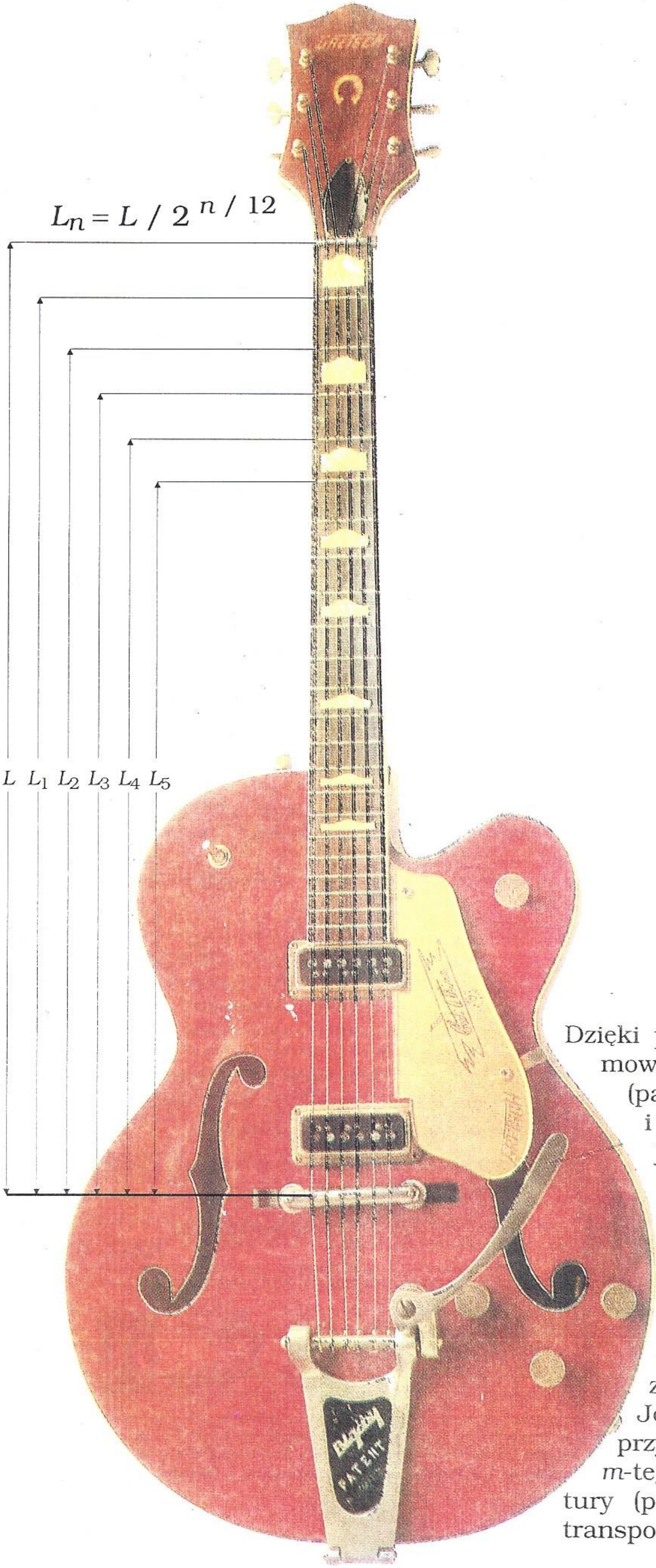
Życzę powodzenia!

Jolanta GRALA

EPSILON DELTA

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ϵ.

Dźwięk gitary



Dzięki przyjętemu w wieku XVIII systemowi równomiernie temperowanemu (patrz artykuł „Dźwięki — muzyka i hałas"), gitara skonstruowana jest tak, że długość drgającej części struny przyciśniętej do *n*-tego progu określa *n*-ty wyraz zapisanego powyżej szeregu geometrycznego. Względna wysokość dźwięków (stosunek częstotliwości) uzyskanych przy przyciśnięciu struny do *k*-tego i *l*-tego progu zależy jedynie od różnicy $k - l$. Jeśli za pomocą tzw. *kapodastra* przyciśniemy wszystkie struny do *m*-tego progu, to bez zmiany aplikatury (palcowania) graną melodię przetransponujemy o *m* półtonów w górę.