

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 5(240)

Fale grawitacyjne – Nobel z astrofizyki <i>Tadeusz Jarzębowski</i>	str. 1
Czy sukcesy chodzą parami? <i>Bolesław Kopociński</i>	str. 1
Zadania <i>Andrzej Pelczar</i>	str. 3
O środkach ciężkości brzegu i powierzchni trójkąta <i>Robert Hajlasz</i>	str. 4
Szkoła Nauk Ścisłych – niepaństwowa wyższa uczelnia <i>Tomasz Dietl</i>	str. 6
Mała Delta <i>Andrzej Pelczar</i>	str. 8
Całkiem prosta kosmologia <i>Stanisław Mrówczyński</i>	str. 10
Księżyc i nóż <i>Andrzej Pelczar</i>	str. 12
Patrz w niebo <i>Andrzej Pelczar</i>	str. 13
Klub 44 <i>Andrzej Pelczar</i>	str. 14
Wykonaj lub zawstydz się <i>Andrzej Pelczar</i>	str. 15
Kącik olimpijski <i>Andrzej Pelczar</i>	str. 16
Epsilon <i>Andrzej Pelczar</i>	str. 17

### W następnym numerze:

Kosmiczny kataklizm na Jowiszu

Okladkę wykonał  
*Bernard BADZIOCH*

Wydawca:  
Uniwersytet Warszawski  
Krakowskie Przedmieście 26/28  
00-927 Warszawa

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,  
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

#### Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula  
Bogdan Cichocki  
Roman Duda  
Jan A. Gaj  
Tomasz Hofmokr  
Tadeusz Jarzębowski  
Marta Kicińska-Habior  
– przewodnicząca  
Marcin Kubiak  
Andrzej Mąkowski  
– wiceprzewodniczący  
Andrzej Pelczar  
Zbigniew Plochocki  
Zdzisław Pogoda  
Konrad Rudnicki  
Zbigniew Semadeni  
Grzegorz SitarSKI  
Józef I. Smak  
Kazimierz Stępień  
Mieczysław Subotowicz  
Andrzej Szymacha  
Andrzej Woszczyk  
Wacław Zawadowski

Redaguje kolegium w składzie:

Krzysztof Biesaga  
Piotr Hajlasz  
Jan Kalinowski – z-ca red. nac.  
Krystyna Kordos – sekr. red.  
Marek Kordos – red. nac.  
Tomasz Kwast  
Krzysztof Rejmer  
Paweł Strzelecki  
Joanna Udalska

#### Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7  
02-678 Warszawa  
tel. 43-02-43 wewn. 21  
HAJLASZ@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Zakładach Graficznych  
w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem TeX wykonała Redakcja.

#### WARUNKI PRENUMERATY w AMOS-ie

Od stycznia 1993 r. prenumeratę „Deltę” prowadzi również firma AMOS, 01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21). Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w pierwszym półroczu 1994 roku wynosi 8 000,-zł, a w drugim półroczu 10 000,-zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru wynosi w pierwszym półroczu 1994 r. 20 000,-zł, a w drugim – 22 000,-zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** AMOS dostarcza „Deltę” pod wskazany adres nie pobierając dodatkowej opłaty. Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Blankiet pocztowy na prenumeratę „Deltę” w AMOS-ie zamieszczamy na str. 5/6.

Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

#### WARUNKI PRENUMERATY w RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na III kwartał 1994 r. wynosi 30 000,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
  - na teren kraju
  - jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
  - na zagranicę
  - „Ruch” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – **dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty**, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
  - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
  - do 20 II na II kwartał
  - do 20 V na III kwartał
  - do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 8 000,- zł

# Fale grawitacyjne

## – Nobel z astrofizyki

Tadeusz JARZĘBOWSKI

Pojęcie fal grawitacyjnych znane jest w świecie fizyki już od 75 lat; pojawiły się one na gruncie ogólnej teorii względności. Einstein, wysuwając w roku 1918 hipotezę istnienia tych fal, sam powątpiewał w możliwość zarejestrowania ich kiedykolwiek. A jednak stało się, fakt ich emisji już stwierdzono; ujawniły ją dwie obiegające się gwiazdy neutronowe naszej Galaktyki, odległe od nas o 25 tysięcy lat świetlnych. Fale grawitacyjne z domeny hipotez przeszły do fizycznych realiów.

Koncepcja fal grawitacyjnych (promieniowania grawitacyjnego) miała swe źródło w analogii między polem elektromagnetycznym i grawitacyjnym. Wiadome było od czasów Maxwella, że poruszająca się ruchem przyspieszonym cząstka naładowana jest źródłem fali elektromagnetycznej. Zgodnie natomiast z założeniami ogólnej teorii względności poruszające się ruchem przyspieszonym ciało obdarzone masą powinno być źródłem fal grawitacyjnych. Rolę ładunku elektrycznego przejmuje tutaj zatem masa. Ale wydajność mechanizmu emisji jest tu znikomo mała; dla przykładu, belka o masie 100 000 t i długości 3 km, wykonująca jeden obrót na sekundę, emitowałaby promieniowanie o mocy zaledwie  $10^{-24}$  W.

Z praw kwantowej teorii pola wynika, iż promieniowanie to powinno być skwantowane. Tak jak foton jest kwantem pola elektromagnetycznego, tak grawiton byłby kwantem pola grawitacyjnego. Masa spoczynkowa grawitonu (tak jak i fotonu) równa się zeru, z czego wynika, iż porusza się on z prędkością światła. Spin fotonu jest równy 1, spin grawitonu zaś 2.

Używając języka relatywistycznego powiedzielibyśmy, że fale grawitacyjne to zafalowania własności geometrycznych czasoprzestrzeni. Są to fale o zupełnie innej naturze niż elektromagnetyczne. Co się zaś tyczy częstotliwości, to dla rozważanych kosmicznych źródeł zawierałyby się one w zakresie od kiloherców do mikro- czy nawet nanoherców. Są to częstotliwości średnio znacznie niższe niż te ze znanych nam dziedzin widma elektromagnetycznego.

Jak można wykryć fale grawitacyjne? Otóż fale elektromagnetyczne mogą na przykład naświetlać kliszę czy też być rejestrowane przez antenę. Grawitacyjne natomiast przenikają poprzez materię, nie wywołując w niej reakcji. Umieszczona w przestrzeni kosmicznej komora iskrowa jest w stanie wyłapać prawie każdy wysokoenergetyczny foton gamma; gdy natomiast chodzi o grawitony, to szansa zarejestrowania ich jest przy dzisiejszych możliwościach praktycznie żadna.

Jedna z możliwości detekcji fal grawitacyjnych opiera się na fakcie, iż przechodząc przez materię powinny one wprawiać ją w drgania (rys. 1). W oparciu o to zjawisko prowadził badania Joseph Weber, anonsując przed dwudziestu kilku laty odkrycie tych fal pochodzących z centrum Galaktyki. Nie potwierdziły tego jednak późniejsze badania. Falom grawitacyjnym udawało się skrywać przed nami aż do odkrycia układu podwójnego z pulsarem PSR 1913+16 (o którym była mowa w *Delcie* 12/1993).

# Czy sukcesy chodzą parami?

Bolesław KOPOCIŃSKI

Dość powszechnie sądzi się, że sukcesy lub nieszczęścia zdarzają się seryjnie. Równocześnie w teorii prawdopodobieństwa i jego zastosowaniach lansuje się tzw. próby Bernoulliego, będące ciągami jednakowo prawdopodobnych i niezależnych zdarzeń losowych. Konflikt tych poglądów zaznacza się na przykład w genetyce, u podstaw której leży wspomniany schemat losowy Bernoulliego, a jednocześnie obserwuje się seryjny charakter zdarzeń, na przykład płci potomstwa. Oczywiście, każdy taki dylemat jest punktem wyjścia do subtelnych analiz. Tutaj zajmijmy się jednym z nich nadając mu postać dylematu pacjenta przed operacją. Podobne dylematy można by znaleźć w ubezpieczeniach, biznesie, sporcie itd.

Można mniemać, że lekarz mówiąc o prawdopodobieństwie powodzenia przy poważnej operacji ma na myśli iloraz liczby powodzeń przez liczbę przeprowadzonych operacji. Także pacjent na swój sposób ocenia swoje szanse, ale ponieważ nie dysponuje on żadnymi obserwacjami, zwykle pozostaje mu tylko wewnętrzne przekonanie, na przykład, że ma więcej szczęścia od innych. Często pacjent zapada po raz drugi na tę samą chorobę i staje powtórnie przed tym samym dylematem, a zdarza się, że sytuacja powtarza się wielokrotnie. Liczba dotychczasowych prób i taka sama liczba dotychczasowych sukcesów stanowią dane empiryczne, na których opiera podjęcie decyzji.

Zwykle w opisanej sytuacji zainteresowani przyjmują, że kolejne operacje można traktować jako próby niezależne, z tym samym prawdopodobieństwem sukcesu. My także przyjmijmy to założenie, ale postaramy się dokładniej je precyzować. Wielu wszakże jest przekonanych, że po kilku sukcesach prawdopodobieństwo sukcesu wzrasta. Wykażemy, że i ten pogląd jest także w pewnym sensie uzasadniony.

Przyjmijmy, że społeczność chorych jest zróżnicowana, podzielona na warstwy  $W_1, W_2, \dots, W_L$  ( $L \geq 2$ , liczba warstw  $L$  nie ma tu większego znaczenia), a w każdej warstwie jest inne prawdopodobieństwo powodzenia przy operacji. Niech prawdopodobieństwo tego, że pacjent należy do warstwy  $W_i$  będzie równe  $P(W_i) = f_i$ , natomiast

prawdopodobieństwo powodzenia dla osób należących do tej warstwy -  $p_i$ , gdzie  $i = 1, 2, \dots, L$ . Napiszmy jeszcze dla porządku, że suma prawdopodobieństw jest równa jedności

$$(1) \quad \sum_{i=1}^L f_i = 1.$$

Pacjent mówiąc o prawdopodobieństwie sukcesu ma na myśli prawdopodobieństwo  $p_i$  dla swojej warstwy. Lekarz mówiąc o prawdopodobieństwie sukcesu ma na myśli prawdopodobieństwo średnie

$$(2) \quad p = \sum_{i=1}^L f_i p_i.$$

Pacjent mówiąc o powtórzeniach ciągle myśli o sobie. Z założeń, które przyjął, wynika, że prawdopodobieństwo powodzenia jest stałe, a liczba przeżytych operacji nie ma znaczenia. Lekarz mówiąc o powtórzeniach ma na myśli różnych pacjentów zgłaszających się do niego na operację. Dla niego interesujące jest średnie prawdopodobieństwo  $p^*$  powodzenia dla pacjentów, którzy po pierwszym powodzeniu będą operowani po raz drugi. Wykażemy, że to prawdopodobieństwo jest nie mniejsze od  $p$ .

Unikając złożonego formalizmu teorii prawdopodobieństwa w naszych rozważaniach wykorzystamy intuicyjne pojęcie wartości oczekiwanej. Przypuśćmy że społeczność chorych liczy  $n$  osób. Należy zatem oczekiwać, że jest  $n f_1, n f_2, \dots$  osób w każdej warstwie. Biorąc pod uwagę prawdopodobieństwa powodzenia stwierdzamy, że należy oczekiwać  $n f_1 p_1, n f_2 p_2, \dots$  osób w warstwach po operacji, razem  $n p$  osób. Zatem prawdopodobieństwa przynależności do warstw w społeczności chorych pozostałych po pierwszym sukcesie są równe  $f_i^* = \frac{1}{n p} n f_i p_i = \frac{1}{p} f_i p_i, i = 1, \dots, L$ , a przez analogię do wzoru (2) otrzymujemy nowe prawdopodobieństwo średnie

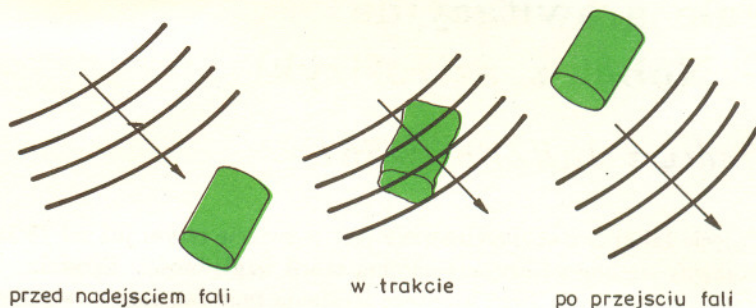
$$p^* = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^L f_i p_i^2.$$

Zauważmy, że nierówność  $p \leq p^*$  łatwo udowodnić, bowiem jest ona równoważna oczywistej nierówności

$$p(p^* - p) = \sum_{i=1}^L f_i (p_i - p)^2 \geq 0,$$

przy czym należy pamiętać o równościach (1) i (2).

Można zapytać, o ile wzrośnie średnia szansa powodzenia po pierwszej operacji.



Rys. 1. Fala grawitacyjna, przenikając przez metalowy cylinder, może wprawić go w drgania. Drgania takie ujawniałyby fakt przebiegu fali. Na takiej zasadzie mógłby działać „teleskop” do obserwacji fal grawitacyjnych.

Otóż, z ruchem orbitalnym ciał niebieskich powinna być związana emisja fal grawitacyjnych. Częstotliwość emitowanego promieniowania wynosi mianowicie  $1/(\text{okres obiegu dwóch ciał})$ . Emisja ta zachodzi kosztem energii ruchu tych ciał; konsekwencją tego powinno być zatem systematyczne kurczenie się orbit i skracanie okresu obiegu. W myśl teorii pochodna okresu obiegu  $P$  względem czasu jest określona zależnością

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{4\pi G^{5/3}}{c^5} \left(\frac{P}{2\pi}\right)^{-5/3} (1 - e^2)^{-7/2} (1 + 3e^2) m_1 m_2 (m_1 + m_2)^{-1/3},$$

gdzie  $m_1$  i  $m_2$  oznaczają masy obiegających się gwiazd,  $e$  zaś jest mimośrodem orbity.

W przypadku omawianego pulsara, gdzie  $m_1 = 1,44, m_2 = 1,38$  (w jednostkach masy Słońca) i  $e = 0,62$ , przewidywana teoretycznie wartość pochodnej wynosi

$$\frac{dP}{dt} = -2,402 \cdot 10^{-12}.$$

Natomiast wartość otrzymana z obserwacji wynosi

$$\frac{dP}{dt} = -(2,425 \pm 0,010) \cdot 10^{-12}.$$

Zgodność obserwacji z teorią jest więc znakomita. Rejestrowane przez nas zmiany okresu obiegu składników są niewątpliwie konsekwencją emisji fal grawitacyjnych. Pesymistyczne przypuszczenia Einsteina nie potwierdziły się.

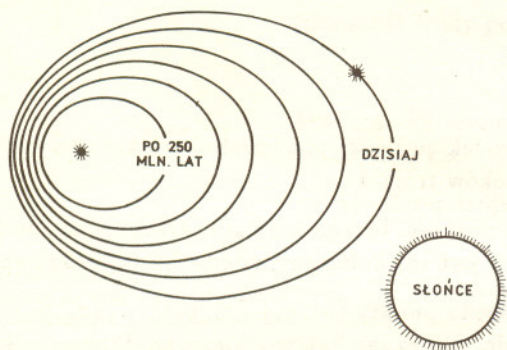
Przytoczonej tu wartości  $\frac{dP}{dt}$  odpowiada skracanie się okresu obiegu o około  $8 \cdot 10^{-5}$  sekundy rocznie. Jest to wartość niewielka i nie byłoby łatwo wykryć ją z bezpośrednich pomiarów okresu (dysponujemy dopiero obserwacjami z kilkunastu lat). Badania wykonuje się tu jednak pośrednio, wykorzystując inne zjawisko. Chodzi o to, iż zmianie okresu obiegu towarzyszą zachodzące na znacznie większą skalę zmiany w momentach przejścia przez punkt peryastronu. Za pomocą tej metody poznać można zmiany okresu obiegu ze znacznie większą dokładnością.

I jeszcze ciekawostka. Skoro orbity kurczą się (w naszym przypadku o 3,5 metra rocznie), to nasuwa się naturalne pytanie, jak długo układ takich dwóch gwiazd będzie istniał. Otóż ten tzw. czas zaniku  $\tau$  zdefiniowany jest następująco

$$\tau = \frac{\text{energia ruchu orbitalnego}}{\text{moc promieniowania grawitacyjnego}} \approx \frac{c^5 P^{8/3}}{(GM)^{5/3}}.$$

Dla omawianego układu przyszłość nie przedstawia się więc zbyt różowo. W następstwie emisji fal grawitacyjnych najpóźniej za jakies

300 milionów lat układ z pulsarem PSR 1913+16 przestanie istnieć (rys. 2).



Rys. 2. Orbita pulsara PSR 1913+16 względem gwiazdy towarzyszącej (która jest też gwiazdą neutronową). W następstwie emisji fal grawitacyjnych orbita kurczy się; pokazane są jej rozmiary po upływie kolejnych 50 milionów lat. Dla porównania średnica Słońca jest równa 1 400 000 km. Podkreślmy tu, że średnice pulsara oraz tej drugiej gwiazdy stanowią tylko około 0,00002 średnicy Słońca.

Wytracanie energii ruchu orbitalnego, zachodzące w następstwie emisji fal grawitacyjnych, występuje w każdym układzie obiegających się ciał niebieskich – ale czasy życia są na ogół znacznie dłuższe. Na przykład nasz bliski sąsiad, układ podwójny Syriusza, emituje promieniowanie grawitacyjne o mocy  $10^8$  W (niewiele to w zestawieniu z promieniowaniem optycznym przeciętnej gwiazdy, na przykład Słońca, równym  $10^{26}$  W); układ ten ma szanse istnienia przez około  $10^{22}$  lat. Fale grawitacyjne emitują, oczywiście, i planety naszego Układu Słonecznego, ale tu moc jest znikoma, jest to zaledwie kilka kilowatów; czas całkowitego skurczenia się Układu Słonecznego byłby najwyżej rzędu  $10^{23}$  lat. Możemy więc spać spokojnie.

Laureatami Nagrody Nobla z fizyki za rok 1993 są odkrywcy pulsara PSR 1913+16 Russel A. Hulse i Joseph H. Taylor z Uniwersytetu Princeton.



## Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

**M 702.** Ile jest podzbiorów zbioru  $A = \{1, 2, 3, \dots, 3n - 1, 3n\}$ , w których iloczyn wszystkich elementów dzieli się przez 3?

Rozwiązanie na str. 10

**M 703.** Która z liczb jest większa:  $37^{10}$  czy  $19^{24}$ ?

Rozwiązanie na str. 10

**M 704.** Udowodnić, że dla  $m \in \mathbb{N}$  liczba  $a = 1000^m - 1$  nie jest dzielnikiem liczby  $b = 1994^m - 1$ .

Rozwiązanie na str. 7

Redaguje Jarosław KULPA

**F 381.** Elektron porusza się po okręgu w polu magnetycznym  $B = 1$  T. Oszacować, po jakim czasie promień orbity kołowej zmniejszy się dwukrotnie, wiedząc, że cząstka o ładunku  $q$  poruszając się z przyspieszeniem  $a$  wysyła promieniowanie

elektromagnetyczne, którego moc wynosi  $P = \frac{2}{3} \frac{kq^2}{c^3} a^2$ , gdzie  $k$  oznacza stałą z prawa Coulomba.

Rozwiązanie na str. 13

**F 382.** Pulsary są szybko obracającymi się gwiazdami neutronowymi, których gęstość jest równa gęstości materii jądrowej  $\rho \approx 2,6 \cdot 10^{17}$  kg/m<sup>3</sup>. Najszybszy znany pulsar PSR 1937+214 ma czas obrotu równy 1,56 ms. Oszacować dolną granicę okresu obrotu pulsarów wokół własnych osi.

Rozwiązanie na str. 10

Oto przykład. Przypuśćmy, że społeczność chorych składa się z dwóch warstw równolicznych, na przykład po 1000 osób ( $f_1 = f_2 = 0,5$ ). Prawdopodobieństwa sukcesu w warstwach niech będą równe  $p_1 = 0,4$  i  $p_2 = 0,8$ . Prawdopodobieństwo średnie wynosi  $p = 0,6$ . Należy oczekiwać, że po operacji zostanie  $400 + 800 = 1200$  osób, dla których średnie prawdopodobieństwo powodzenia wynosi  $p^* = 0,66 \dots$ . Czytelnik zauważy, że przed pierwszą operacją pacjent ma jednakowe szanse należenia do obu warstw; po operacji szanse stają się nierówne:  $\frac{400}{1200} = \frac{1}{3}$  i  $\frac{800}{1200} = \frac{2}{3}$ . Kolejne operacje najszybciej eliminują ze społeczeństwa osoby z warstwy o mniejszym prawdopodobieństwie powodzenia, a więc średnie prawdopodobieństwo powodzenia w ciągu zabiegów zmierza do 0,8.

Czy sukcesy zdarzają się seryjnie? Tak, nielicznym szczęściarzom, jeśli szanse powodzenia są nierówne, bowiem porażki skutecznie eliminują nieszczęsnych z podejmowania większej liczby prób.



# O środkach ciężkości brzegu i powierzchni trójkąta

Robert HAJŁASZ

Powszechnie wiadomo, że środek ciężkości powierzchni trójkąta leży na przecięciu się środkowych boków trójkąta.

Zbadamy, gdzie leży środek ciężkości brzegu trójkąta. Okazuje się, że środki te są na ogół różne (gdy trójkąt jest równoboczny, wtedy środki pokrywają się).

Niech na płaszczyźnie dane będą punkty  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  o masach  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , odpowiednio. Wówczas, jak wiadomo, środkiem ciężkości tego układu jest punkt  $(\alpha, \beta)$ , gdzie

$$\alpha = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n},$$

$$\beta = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

Rozważmy trójkąt o bokach długości  $a, b, c$  (rys. 1).

Przyjmijmy, że jednostka długości ma masę 1. Zatem boki trójkąta mają masy  $a, b$  i  $c$ .

Aby wyznaczyć środek ciężkości układu złożonego z boków trójkąta, układ ten zastępujemy układem trzech punktów – środków boków – o masach  $a, b$  i  $c$ , odpowiednio. Jak wiadomo, oba układy mają wspólny środek ciężkości. Oznaczając przez  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  i  $(x_3, y_3)$  środki boków otrzymujemy, że ów środek ciężkości  $(\alpha, \beta)$  wyznaczają równości

$$\alpha = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}, \quad \beta = \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a + b + c}.$$

**Przykład.** Znaleźć środek ciężkości trójkąta o bokach długości  $4, 4, 4\sqrt{3}$ .

a) brzegu,      b) obszaru

**Rozwiązanie.** Umieścimy trójkąt w układzie współrzędnych tak jak na rysunku 2.

Ad a)

$$\alpha = \frac{4(-\sqrt{3}) + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} \cdot 0}{8 + 4\sqrt{3}} = 0,$$

$$\beta = \frac{4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 4\sqrt{3} \cdot 0}{8 + 4\sqrt{3}} = \frac{8}{8 + 4\sqrt{3}} = \frac{2}{2 + \sqrt{3}} = 4 - 2\sqrt{3}.$$

Zatem odpowiedź jest  $(0, 4 - 2\sqrt{3})$ .

Ad b) Środek ciężkości pełnego trójkąta leży w punkcie przecięcia się środkowych jego boków. Ponieważ przecinają się one w stosunku  $1 : 2$ , więc mamy od razu, że środkiem ciężkości jest punkt  $(0, \frac{2}{3})$ .

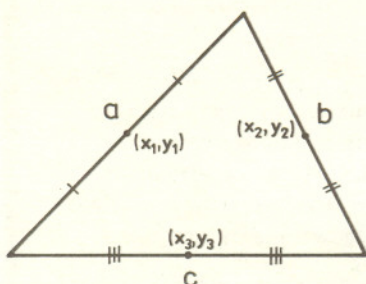
Pokażemy teraz, jak można innymi sposobami rozwiązać problemy a) i b).

## Pierwsza reguła Guldina

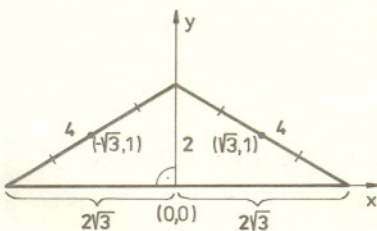
Jeśli linię płaską obrócimy dookoła osi leżącej w płaszczyźnie linii i nie przecinającej linii, to

(Pole powierzchni powstałej z obrotu linii) =

$$= (\text{długość linii}) \cdot (\text{droga środka ciężkości linii}).$$



Rys. 1



Rys. 2

## Druga reguła Guldina

Jeśli obszar płaski obrócimy dookoła osi leżącej w płaszczyźnie obszaru i nie przecinającej obszaru, to

$$(\text{Objętość bryły powstałej z obrotu obszaru}) = (\text{pole obszaru}) \cdot (\text{droga środka ciężkości obszaru}).$$

**Uwaga.** W obu regułach figura ma leżeć po jednej stronie osi, przy czym może tej osi dotykać.

Ad a). Brzeg trójkąta obracamy dookoła osi  $x$ . Mamy

$$\underbrace{2(\pi \cdot 2 \cdot 4)}_{\text{pole powierzchni dwóch stożków}} = \underbrace{(8 + 4\sqrt{3})}_{\text{obwód trójkąta}} \cdot \underbrace{2\pi\beta}_{\text{droga środka ciężkości brzegu trójkąta}}$$

Stąd

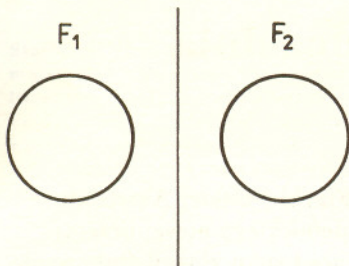
$$\beta = 4 - 2\sqrt{3}.$$

Ad b). Pełny trójkąt obracamy dookoła osi  $x$ . Mamy

$$\underbrace{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 2\sqrt{3}\right)}_{\text{objętość dwóch stożków}} = \underbrace{2\sqrt{3} \cdot 2}_{\text{pole trójkąta}} \cdot \underbrace{2\pi\beta'}_{\text{droga środka ciężkości pełnego trójkąta}}$$

Stąd

$$\beta' = \frac{2}{3}.$$



Rys. 3. Tu figura, składająca się z  $F_1$  i  $F_2$ , znajduje się po obu stronach osi. Dla niej reguła Guldina nie obowiązuje (proszę je zastosować!).

O zastosowaniu środka ciężkości w geometrii można przeczytać w wydanej przez WSiP w 1993 r. książce Ośrodka Kultury Matematycznej „Szkoła geometrii. Odczyty kaliskie”.

Odcinek dla poczty	
Zł ..... słownie złotych	
adres wpłacający .....	
<b>AMOS</b>	
01-806 Warszawa	
ul. Zuga 12	
nazwa banku <b>PKO VIII O/W-wa</b>	
Nr r-ku <b>1586-77578-136</b>	
Pobrano opłatę	zł .....
stempel ..... podpis przyjmującego	

Odcinek dla posiadacza rachunku	
Zł ..... słownie złotych	
Dokładny adres wpłacający .....	
na <b>AMOS</b>	
r-k 01-806 Warszawa	
Dokładna nazwa ul. Zuga 12	
nazwa banku <b>PKO VIII O/W-wa</b>	
Nr r-ku <b>1586-77578-136</b>	
Pobrano opłatę	zł .....
stempel ..... podpis przyjmującego	

Potwierdzenie dla wpłacającego	
Zł ..... słownie złotych	
Dokładny adres wpłacający .....	
na <b>AMOS</b>	
r-k 01-806 Warszawa	
Dokładna nazwa ul. Zuga 12	
nazwa banku <b>PKO VIII O/W-wa</b>	
Nr r-ku <b>1586-77578-136</b>	
Pobrano opłatę	zł .....
stempel ..... podpis przyjmującego	

# Szkoła Nauk Ścisłych

– niepaństwowa wyższa uczelnia

Tomasz DIETL

Polska Akademia Nauk składa się z dwóch w znacznej mierze niezależnych części: korporacji uczonych i placówek naukowych. Część korporacyjną stanowią wybitni naukowcy wybrani na drodze dość złożonej procedury kooptacyjnej. Według danych z 1992 roku, członkami PAN jest 339 uczonych polskich i 186 zagranicznych. Polska Akademia Nauk ma 83 placówki naukowe. Pracuje w nich ponad 1200 samodzielnych pracowników naukowych (doktorów habilitowanych i profesorów).

Poza uczelniami wyższymi i placówkami PAN badania naukowe – głównie o charakterze stosowanym – prowadzone są także w tzw. instytutach resortowych, nad którymi nadzór sprawują odpowiednie ministerstwa lub urzędy centralne. Rozdziałem funduszy przyznanych przez Sejm z budżetu Państwa na badania naukowe zajmuje się Komitet Badań Naukowych.

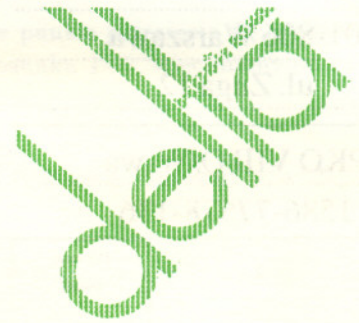
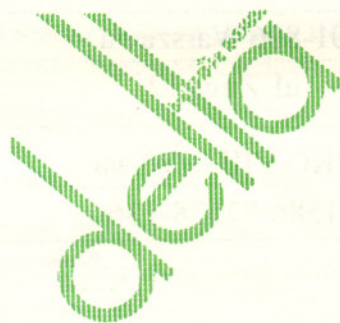

4 października 1993 roku w Audytorium Instytutu Fizyki Polskiej Akademii Nauk w Warszawie odbyła się inauguracja roku akademickiego nowej uczelni – Szkoły Nauk Ścisłych. Podczas uroczystości studenci I roku złożyli ślubowanie oraz otrzymali indeksy. W części naukowej spotkania prof. Andrzej Schinzel z Instytutu Matematycznego PAN wygłosił frapujący referat na temat słynnego Wielkiego Twierdzenia Fermata, sformułowanego 350 lat temu, a udowodnionego (jak się wtedy wydawało) – dopiero przed kilkoma miesiącami – przez pracującego w USA matematyka angielskiego Andrew Wileisa. Szkoła Nauk Ścisłych jest uczelnią niewielką. W 1993 roku studia rozpoczęło dwadzieścia osób, a w następnych latach planowane jest zwiększenie rekrutacji do czterdziestu osób rocznie.

Kto może studiować w Szkole i jakie otrzyma tam wykształcenie? Szkoła Nauk Ścisłych jest otwarta dla absolwentów szkół średnich, ze zdany egzaminem dojrzałości, którzy mają zdolności do nauk ścisłych i chcą swobodnie poruszać się w świecie współczesnych idei, techniki i technologii oraz wiązać karierę zawodową z przedsiębiorstwami i instytucjami o nowoczesnych metodach działania. Przyjęcie do Szkoły odbywa się na podstawie konkursu świadectw i rozmowy kwalifikacyjnej przeprowadzanej z kandydatami na początku lipca. Szkoła prowadzi wyłącznie studia dzienne. Program nauczania w czasie pierwszych dwóch lat studiów (a także w pewnym zakresie później) ma charakter interdyscyplinarny – łączy w skoordynowany sposób elementy chemii, fizyki i metod komputerowych. Celem nauczania jest wyrobienie umiejętności rozwiązywania, na drodze analitycznej i numerycznej, złożonych problemów w wielu dziedzinach, także w tych nie objętych formalnym wykształceniem.

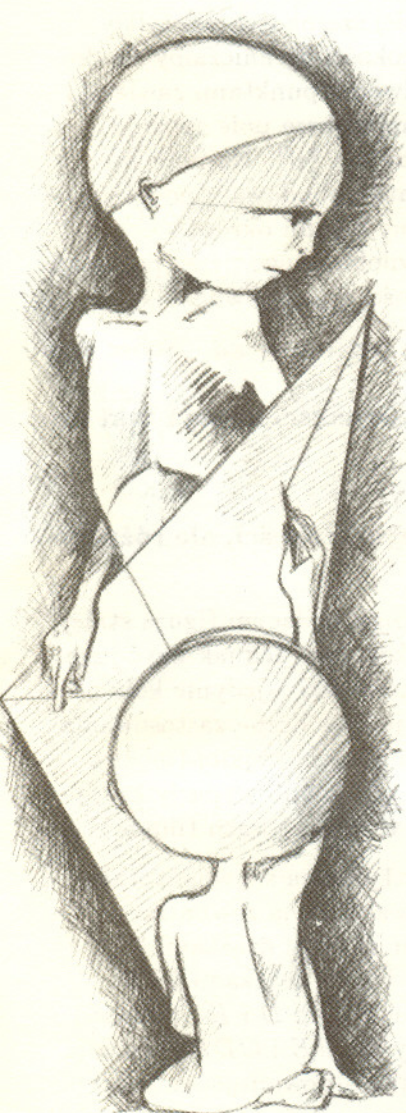
Prenumerata „Delt”  
za okres:

Prenumerata „Delt”  
za okres:

Prenumerata „Delt”  
za okres:



Stanisław Ulam (1909–1984), matematyk wywodzący się ze sławnej lwowskiej szkoły matematycznej. Po obronieniu doktoratu w 1933 roku, wyjechał do Princeton w USA. Z początkiem 1944 roku rozpoczął pracę w Los Alamos, gdzie zajmował się problemem działania bomby atomowej i odegrał kluczową rolę przy projektowaniu bomby wodorowej. Był uczonym o niespotykanej różnorodności zainteresowań naukowych – od matematyki poprzez podstawy informatyki, fizykę i astronomię do biologii, przy czym w każdej dziedzinie miał ważne osiągnięcia naukowe. Wystarczy przypomnieć tylko dwa z jego wielu dokonań – Ulam stworzył podstawy metody probabilistycznej, znanej powszechnie jako metoda Monte Carlo oraz był współautorem pionierskich prac w dziedzinie zjawisk nieliniowych.



Duży nacisk położony jest też na zajęcia laboratoryjne, które pozwolą studentom zdobyć umiejętności praktyczne oraz zrozumieć zasady obsługi i automatyzacji nowoczesnych urządzeń i procesów technologicznych. Ponadto, sporo godzin przeznaczono również na naukę języka angielskiego oraz teoretyczne i praktyczne zajęcia z mikroekonomii.

Obserwacja polskiego i zagranicznego rynku pracy wykazuje, że osobom o wykształceniu interdyscyplinarnym jest łatwo znaleźć ciekawą i dobrze płatną pracę. Wynika to z ich umiejętności samokształcenia, nastawienia innowacyjnego, a także przygotowania do rozwiązania niestandardowych problemów oraz umiejętności częstej zmiany metod i narzędzi pracy.

Studia w Szkole Nauk Ścisłych są wielostopniowe. Pierwszy etap to trzyletnie studia licencjackie. Ich ukończenie połączone będzie z otrzymaniem dyplomu z zakresu fizykochemii materiałów lub obsługi aparatury specjalnej, zgodnie ze specjalizacją wybraną po drugim roku studiów. W miarę rozwoju Szkoły uruchomione będą inne specjalności. Drugi etap stanowią dwuletnie studia magisterskie w dziedzinie matematyki, fizyki lub chemii. W tej chwili Szkoła ma uprawnienia do nadawania stopnia licencjata, a uzyskanie zgody na nadawanie stopnia magistra spodziewane jest w 1994 roku. Absolwenci Szkoły o zdolnościach i zamiłowaniu do pracy naukowej będą mogli otrzymać stypendium na podjęcie studiów doktoranckich, które od wielu już lat są prowadzone w instytutach badawczych wspierających Szkołę. Rady Naukowe poszczególnych instytutów mają prawo nadawać stopnie naukowe doktora i doktora habilitowanego z matematyki, fizyki, chemii i nauk technicznych.

Szkoła Nauk Ścisłych jest uczelnią niepaństwową, lecz nie jest przedsięwzięciem komercyjnym. Jej właścicielem jest Fundacja im. Stanisława Ulama, założona w 1992 roku przez grupę profesorów PAN, którzy byli inicjatorami powołania w Warszawie nowej uczelni. Szkoła Nauk Ścisłych uzyskała zgodę Ministerstwa Edukacji Narodowej na prowadzenie studiów wyższych. Jej studenci mają więc te same prawa i obowiązki, co ich koledzy z uczelni państwowych.

Działalność Szkoły jest wspierana przez wiele placówek naukowych PAN i niektóre instytuty resortowe. Grupę placówek wspierających stanowi Instytut Chemii Fizycznej PAN, Instytut Fizyki PAN, Instytut Matematyczny PAN, Centrum Fizyki Teoretycznej PAN oraz Instytut Technologii Elektronowej. Wsparcie polega na umożliwieniu znacznej grupie naukowców pracy w Szkole i udostępnieniu sal wykładowych, sieci komputerów, bibliotek oraz zaplecza socjalnego. Dzięki temu wsparciu udało się ustalić czesne na 1 mln zł za miesiąc oraz stworzyć warunki do jego częściowego lub całkowitego odpracowania. Niezwykle wysoki poziom kadry nauczającej, reprezentowany przez dużą liczbę uczonych pracujących w szkole, gwarantuje wysoki poziom nauczania. Dla przykładu, ćwiczenia rachunkowe z analizy matematycznej dla studentów I semestru prowadzi członek rzeczywisty PAN, prof. Iwo Białynicki-Birula. Ponadto możliwe jest przydzielenie każdemu studentowi indywidualnego opiekuna-pomocnika – tzw. tutora.

Zainteresowani studiami w Szkole mogą uzyskać dalsze informacje w rektoracie Szkoły, Al. Lotników 32/46 (budynek XV), 02-668 Warszawa, tel. (022) 437001 wewn. 175.



**Rozwiązanie zadania M 704.** Gdyby  $a$  było dzielnikiem  $b$ , to także liczba  $b - a = 1994^m - 1000^m = 2^m(997^m - 500^m)$  byłaby podzielna przez  $a$ . To nie jest możliwe, bo  $a$  jest nieparzyste oraz

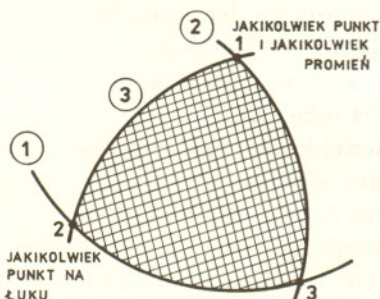
$$a = 1000^m - 1 > 997^m - 500^m.$$





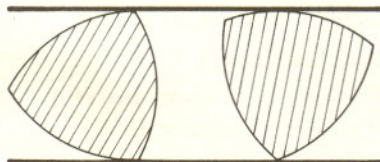
# mała delta

## Pożytki ze stałej szerokości



Szerokość figury  $\Phi$  (niech będzie ona płaska) w kierunku prostej  $k$  mierzy się tak. Bierzemy dwie proste prostopadłe do  $k$ , które wyznaczają pas możliwie małej szerokości, zawierający jednak figurę  $\Phi$ . Jego szerokość to właśnie szerokość  $\Phi$  w kierunku  $k$ . Jeśli figura w każdym kierunku ma tę samą szerokość, to mówimy, że jest figurą o stałej szerokości.

Wbrew pozorom jest bardzo dużo figur o stałej szerokości, nie tylko koło. Na ogół mówiąc o figurach o stałej szerokości ograniczamy się do figur wypukłych (czyli takich, które wraz z dwoma punktami zawierają cały łączący je odcinek). Wówczas koło ma największe pole spośród wszystkich figur o danej szerokości  $d$  – mianowicie  $\frac{\pi}{4}d^2$ . Najmniejsze pole ma natomiast trójkąt Reuleaux, który łatwo zbudować (podobnie jak koło) samym cyrkiem – jest on ograniczony łukami okręgów poprowadzonych z wierzchołków trójkąta równobocznego przez pozostałe wierzchołki. Pole trójkąta Reuleaux o szerokości  $d$  jest równe  $\frac{\pi - \sqrt{3}}{2}d^2$ .



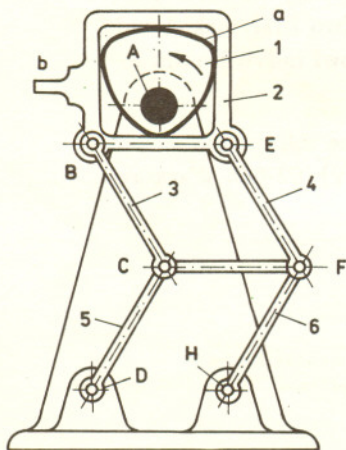
Obwód, zarówno koła, jak trójkąta Reuleaux, jest równy  $\pi d$ . Wobec tego pytanie do samodzielnego rozstrzygnięcia:

**Czy wszystkie figury wypukłe o stałej szerokości  $d$  mają taki sam obwód?**

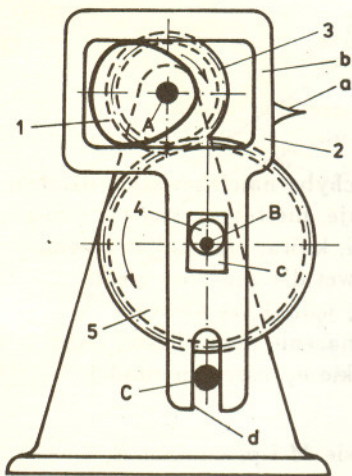
Następne zadanie (aby przybliżyć poprzednie):

**Narysować pięć wypukłych figur o stałej szerokości, ale różnego kształtu.**

Jeśli pod deskę podłożylibyśmy wałki o przekroju będącym figurą stałej szerokości, to deska ta toczyłaby się nie podskakując. Jednak użyć jako kółka na osi można – spośród figur o stałej szerokości – jedynie koła (dlaczego?). Figury o stałej szerokości mają jednak liczne zastosowania w technice. Trójkąty Reuleaux z lekko zaokrąglonymi rogami (można to zrobić nie psując stałej szerokości – jak?) już dawno wyparły krzyże maltańskie z urządzeń przesuwających taśmę w projektorach filmowych.



Oto pierwsze z używanych urządzeń. Trójkąt 1 obraca się wokół stałej osi  $A$  cały czas mieszcząc się w ramce 2 wyposażonej na zewnątrz w ząb  $b$ . Ramka ta jest połączona przegubami  $B$  i  $E$  z drążkami 3 i 4, które z kolei połączone są przegubowo ( $C$  i  $F$ ) z drążkami 5 i 6 zamocowanymi również przegubowo ze stałymi osiami  $D$  i  $H$ . Długości drążków i rozmiary ramki są tak dobrane, aby  $BCFE$  i  $CDHF$  (a więc i  $BDHE$ ) były równoległobokami. Obrót trójkąta powoduje, że ząb  $b$  wchodzi w perforację taśmy (jak głęboko?), przesuwa ją (o jaki odcinek?) i wychodzi.

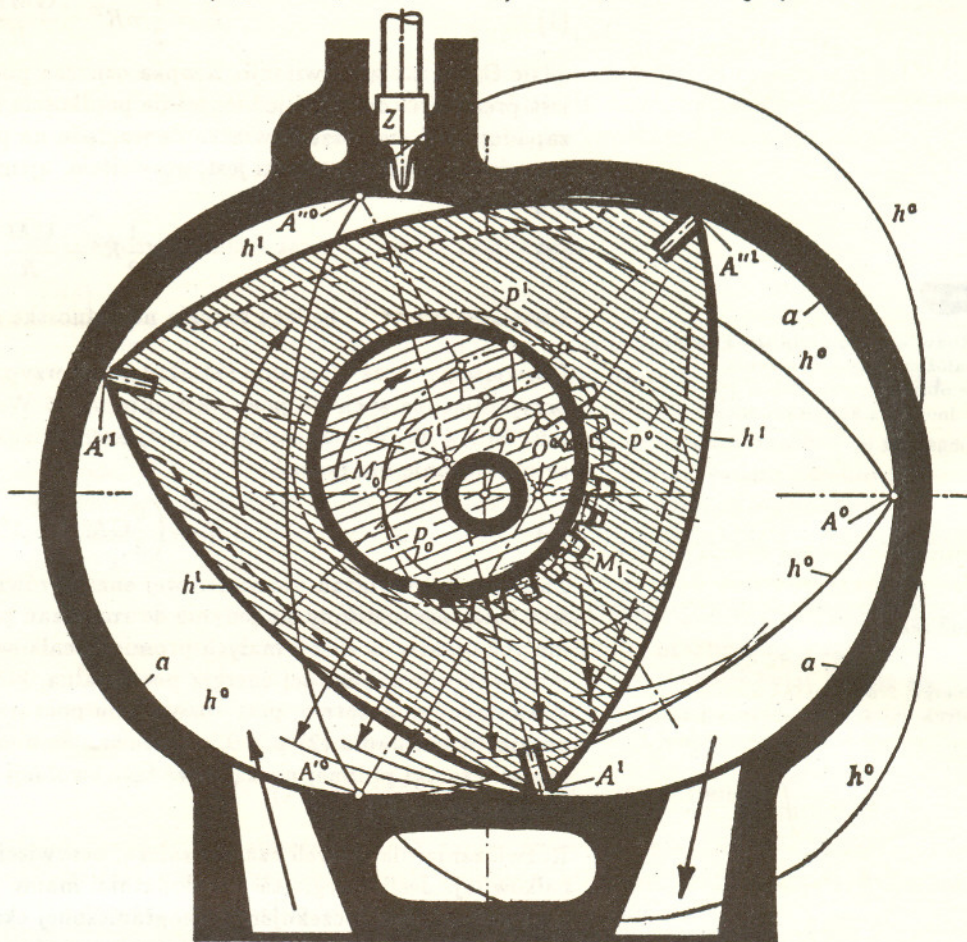


A oto odmienny sposób wykorzystania takiego samego trójkąta w tym samym celu. Teraz trójkąt 1 jest na stałe połączony z kołem zębatym 3 – oba obracają się wokół osi A. Ramka 2, w której się obraca trójkąt, jest tym razem zaopatrzona w inny ząb a i ma wystającą w dół część z dwoma otworami. W pierwszym z nich (c) porusza się tzw. ekscentryk, tj. koło z osią B zamocowaną poza geometrycznym środkiem. Do tejże osi jest przymocowane inne koło zębate 5, zazębione z kołem 3. Drugi otwór ślizga się po stałej osi C. Tutaj może być trudniej zauważyć, że ząb a wykonuje tę samą pracę, co poprzednio ząb b.

Następne zastosowanie wymaga uprzedniego rozwiązania ciekawego samego w sobie zadania:

**W jakiej najmniejszej figurze można obrócić dokoła trójkąta równoboczny ?**

Otóż wcale nie musi to być koło. Ściągawka to np. *Kalejdoskop matematyczny* Hugona Steinhausa (WSiP, 1989, str. 148). Podobne zadanie można (z podobnym wynikiem) rozwiązać dla trójkąta Reuleaux.



Jego rozwiązanie to silnik Wankla – spalinowy silnik wyposażony nie w tłok, lecz w rotor. Podobno ma to szereg zalet, a jak pracuje, to znowu zadanie do rozstrzygnięcia przez Czytelnika. W każdym razie wygląda ładnie.

Problemy dotyczące figur o stałej szerokości znalazły się w matematyce za sprawą Eulera i nigdy nie zajmując pozycji centralnej stale jednak są badane. O figurach o stałej szerokości można przeczytać również w *Delcie* 6/1992.

*Mała Delta* opracował Marek KORDOS posługując się książką: Marcel Berger, *Géométrie*

# Całkiem prosta kosmologia

Stanisław MRÓWCZYŃSKI



## Rozwiązanie zadania M 702.

Liczba wszystkich podzbiorów jest równa  $2^{3n}$ , liczba zaś podzbiorów, w których żadna z liczb nie dzieli się przez 3 jest równa  $2^{2n}$ . Odpowiedź jest zatem  $2^{3n} - 2^{2n}$ .



## Rozwiązanie zadania M 703.

Ponieważ  $37 < 2 \cdot 19$ , to

$$\left(\frac{37}{19}\right)^{19} < 2^{19} < 2^{20} = 16^5 < 19^5.$$

Stąd mamy  $37^{19} < 19^{19} \cdot 19^5 = 19^{24}$ .



## Rozwiązanie zadania F 382.

Załóżmy dla uproszczenia, że obracający się pulsar jest jednorodną kulą o promieniu  $R$

i masie  $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ . Całkowita energia pulsara musi być mniejsza od zera

$$E = E_g + E_k + E_n < 0,$$

gdzie  $E_k = \frac{I\omega^2}{2}$  jest energią obrotową,  $E_g$  – energią grawitacyjną,  $E_n$  zaś jest energią odpychania neutronów;  $E_n > 0$ , stąd też

$$E_g + E_k < 0.$$

Energję grawitacyjną możemy znaleźć odrywając kolejne warstwy pulsara i przenosząc je do nieskończoności

$$E_g = - \int_0^M \frac{Gm dm}{r},$$

gdzie  $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ ,  $dm = 4\pi r^2 \rho$ , stąd

$$E_g = - \int_0^R \frac{G(4\pi\rho)^2}{3} r^4 dr.$$

Po obliczeniu całki i podstawieniu wyrażenia na masę otrzymujemy

$$E_g = - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}.$$

Podstawiając  $I = \frac{2}{5}MR^2$  – moment

bezładności kuli,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,

$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$  otrzymujemy

$$T > \sqrt{\frac{9\pi}{G\rho}} = 1,26 \text{ ms}.$$

Kosmologia opisująca Wszechświat jako całość jest chyba najciekawszym działem fizyki (niektórzy sądzą, że astronomii). Wykorzystuje, niestety, relatywistyczną teorię grawitacji, inaczej – ogólną teorię względności, która, przy całym swoim pięknie, jest teorią, mówiąc najprościej, trudną i nawet dla znacznej części fizyków pozostaje „piękną nieznaną”. Okazuje się jednak, że niektóre rezultaty kosmologii można odtworzyć za pomocą znacznie nam bliższej teorii grawitacji Newtona. Poniżej przedstawię właśnie takie uproszczone modele Friedmana rozszerzającego się Wszechświata.

Wyobraźmy sobie cały Wszechświat jako kulę o masie  $M$  i promieniu  $R$ , a na powierzchni tej kuli cząstkę (tzw. cząstkę próbną) o masie  $m$ , która wraz z tą powierzchnią się porusza. Całkowita energia cząstki, będąca sumą energii kinetycznej i potencjalnej, jest stała w czasie i wyraża się wzorem

$$(1) \quad E = \frac{1}{2}m\dot{R}^2 - \frac{GMm}{R},$$

gdzie  $G$  jest stałą grawitacji. Kropka oznacza pochodną czasową, zatem  $\dot{R}$  jest prędkością cząstki i jednocześnie prędkością rozszerzającego się bądź zapadającego się Wszechświata. Ze względu na przyciąganie grawitacyjne energia potencjalna cząstki jest, oczywiście, ujemna. Zapiszemy równanie (1) w postaci

$$(2) \quad \varepsilon = \frac{1}{2}\dot{R}^2 - \frac{GM}{R}$$

z wielkością  $\varepsilon = \frac{E}{m}$  będącą energią na jednostkę masy.

Rozwiążemy teraz równanie (2) dla trzech przypadków:  $\varepsilon < 0$ ,  $\varepsilon = 0$  i  $\varepsilon > 0$ , przyjmując, że w chwili początkowej promień Wszechświata jest zerowy, tzn.  $R(0) = 0$ . W przypadku zerowej energii cząstki łatwo zauważyć, że rozwiązanie ma postać

$$(3) \quad R = \left(\frac{9}{2}GM\right)^{1/3} t^{2/3}.$$

Znalezienie rozwiązań dla niezerowej energii również nie jest bardzo trudne, lecz tutaj ograniczymy się jedynie do rozważań przybliżonych. Dla bardzo małych czasów, a więc i małych promieni, całkowita energia cząstki jest mała w porównaniu z jej energią potencjalną, która w chwili zerowej jest nieskończona. A zatem, przy rozważaniu początków Wszechświata możemy przyjąć w równaniu (2)  $\varepsilon = 0$ , co sprawia, że niezależnie od wielkości całkowitej energii cząstki próbnej początkowa faza ewolucji Wszechświata jest opisywana rozwiązaniem (3).

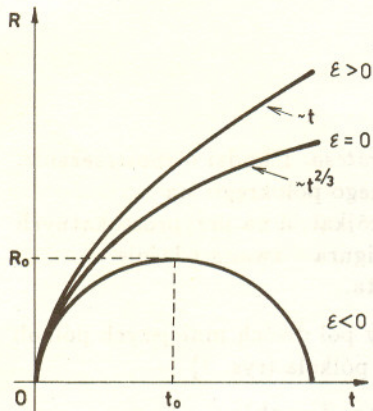
Rozwiązania dla dużych czasów zależą, oczywiście, istotnie od wielkości energii całkowitej. Jeśli energia ta jest dodatnia, mamy przewagę energii kinetycznej nad potencjalną i oczekujemy nieograniczonej ekspansji Wszechświata. Rzeczywiście, przy dostatecznie dużych promieniach energia potencjalna staje się bardzo mała w porównaniu z energią całkowitą. Gdy w równaniu (2) pominiemy energię potencjalną, rozwiązaniem będzie funkcja

$$R = \sqrt{2\varepsilon} \cdot t.$$

Mamy więc dla dużych czasów liniowy wzrost promienia Wszechświata.

Jeżeli całkowita energia jest ujemna, energia potencjalna dominuje w równaniu (2). A zatem grawitacja powstrzyma rozszerzanie się Wszechświata. Maksymalny promień zostanie osiągnięty, gdy prędkość, a z nią energia kinetyczna, spadnie do zera. Tak więc jest on równy

$$R_0 = \frac{GM}{|\varepsilon|}.$$



Prześledźmy, co się dzieje z naszym Wszechświatem, gdy jest on bliski swego największego rozmiaru. Rozwijamy w tym celu promień jako funkcję czasu w szereg Taylora wokół czasu  $t_0$ , przy którym promień jest największy

$$R = R_0 + \frac{1}{2} \ddot{R}(t_0)(t - t_0)^2.$$

Ponieważ przy  $t = t_0$  promień osiąga maksimum i pierwsza pochodna znika, pominęliśmy ją w rozwinięciu. Podstawiając powyższe wyrażenie do równania (2) znajdujemy rozwiązanie

$$R = R_0 - \frac{GM}{2R_0}(t - t_0)^2.$$

Widzimy, że po osiągnięciu największego rozmiaru Wszechświat zaczyna się zapadać. Ostatecznie skurczy się do punktu.

Opisane trzy rozwiązania równania (2), przedstawione na rysunku, a odpowiadające trzem modelom Friedmana znalezionym jako rozwiązania równań Einsteina ogólnej teorii względności, mają niezwykle ważną własność, szczególnie łatwą do zaobserwowania dla rozwiązań z zerową energią. Gęstość masy Wszechświata

$$(4) \quad \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{1}{6\pi G} \frac{1}{t^2}$$

nie zależy ani od jego masy, ani od promienia, a tylko od czasu i stałej grawitacji. Podobnie jest ze stałą Hubble'a  $H$ , którą określimy tutaj jako współczynnik proporcjonalności między prędkością rozszerzania się Wszechświata a jego promieniem, tzn.

$$\dot{R} = HR.$$

Dla rozwiązania z zerową energią znajdujemy

$$(5) \quad H = \frac{2}{3} \frac{1}{t}.$$

Ponieważ na cząstkę próbną działa tylko masa znajdująca się wewnątrz sfery, na której ta cząstka się znajduje, wyniki naszych rozważań nie ulegną zmianie, jeśli rozważymy cząstkę w dowolnym miejscu Wszechświata. Jedynie będziemy interpretować  $R$  i  $M$  nie jako promień Wszechświata i jego masę, ale jako radialne położenie cząstki i masę Wszechświata zamkniętą w sferze o promieniu  $R$ . Widzimy jednak, że dwie obserwowalne wielkości charakteryzujące Wszechświat – gęstość masy i stała Hubble'a – od parametrów  $R$  i  $M$  nie zależą.

Ponieważ gęstość masy Wszechświata i stała Hubble'a zależą jedynie od znanej stałej grawitacji, wieku Wszechświata  $t$  i energii  $\epsilon$ , moglibyśmy znając  $\rho$  i  $H$  wyznaczyć te dwie wielkości i rozstrzygnąć, czy Wszechświat będzie się w nieskończoność rozszerzał, czy też kiedyś zacznie się kurczyć. Niestety, gęstość masy i stała Hubble'a znane są niezbyt dokładnie. A mianowicie

$$\rho = (1 \div 5) \cdot 10^{-31} \text{ g/cm}^3, \quad H = (50 \div 100) \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}.$$

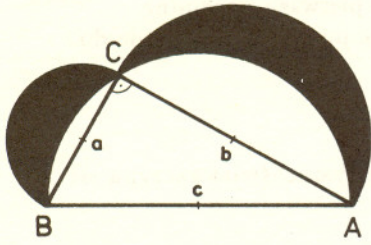
Sprawia to, że żadnego z trzech modeli wykluczyć nie możemy. W szczególności, związek między gęstością i stałą Hubble'a, który otrzymujemy w modelu o zerowej energii eliminując czas z równań (4) i (5), tzn.

$$\rho = \frac{3H^2}{8\pi G},$$

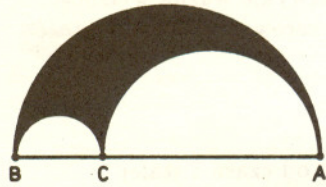
jest w przybliżeniu spełniony.

Podstawiając do równania (5) wartość stałej Hubble'a otrzymujemy wiek Wszechświata z przedziału 6,5–13 mld lat, co uwzględniając prostotę naszych rozważań, jest wynikiem zdumiewająco rozsądnym, bo w przybliżeniu zgodnym z wyrafinowaną analizą rozwiązań równań Einsteina. Oceny wieku Wszechświata otrzymywane na podstawie wieku gwiazd, czy też rozpowszechnienia pierwiastków radioaktywnych dają wielkości między 10 a 20 mld lat. Opisany tutaj model Wszechświata jest więc użyteczny nie tylko przy jakościowej, ale i ilościowej analizie problemów kosmologicznych.

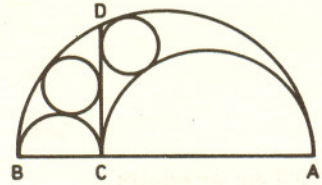
## Księżyc i nóż



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Dość powszechnie znaną figurą są *księżycy Hipokratesa*. Chodzi o spostrzeżenie, że gdy narysujemy na bokach trójkąta prostokątnego półokręgi: na przeciwprostokątnej po tej samej jej stronie, co trójkąt, a na przyprostokątnych – po przeciwnych stronach, to ograniczona nimi figura – zwana właśnie księżycami – będzie miała pole równe polu trójkąta.

Rachunek jest rozpaczliwie prymitywny. Od sumy pól dwóch mniejszych półkoli odejmujemy to, co wystaje poza trójkąt z dużego półkola (rys. 1)

$$\left( \frac{\pi}{2} \left( \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{\pi}{2} \left( \frac{b}{2} \right)^2 \right) - \left( \frac{\pi}{2} \left( \frac{c}{2} \right)^2 - \frac{ab}{2} \right),$$

co po otwarciu nawiasów i zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa daje wynik  $\frac{ab}{2}$ , czyli pole trójkąta.

Za ciekawszą figurę uchodzi *szewski nóż* – figura podobna do księżyców Hipokratesa, z tą jednak różnicą, że półokręgi rysujemy w sytuacji, gdy punkt  $C$  leży na odcinku  $AB$  (rys. 2). Trójkąta nie ma, więc nie ma z czym porównywać pola noża. Narysujmy jednak odcinek wspólnej stycznej dwóch mniejszych półokręgów od punktu styczności do przecięcia z dużym półkolem. Nóż został podzielony na dwie (na ogół różnej wielkości) części. I tu jest coś ciekawego – okręgi wpisane w każdą z tych części są tej samej wielkości. Nieprawdopodobne, a jednak (rys. 3). Oczywiście, nie będziemy polegać na obserwacji, choćby w dużej liczbie wykonywanych rysunków. Obliczymy, że tak być musi. Posłużymy się w tym celu układem współrzędnych. Punkty  $A$  i  $B$  będą w nim miały współrzędne, odpowiednio,  $(r, 0)$  i  $(-r, 0)$ . Oznaczmy też promień pierwszego półkola przez  $r_1$ , a drugiego przez  $r_2$ . I to są dane całkowicie wyznaczające warunki zadania. Oczywiście,  $r_1 + r_2 = r$ .

Zajmiemy się najpierw tylko prawą częścią noża. Odcinek  $CD$  leży na prostej o równaniu  $x = r - 2r_1$ .

Promień szukanego okręgu oznaczmy przez  $s$ , a jego środek przez  $(x, y)$ . Umieścimy go na dwóch okręgach i prostej.

Po pierwsze leży on na okręgu współśrodkowym z dużym półkolem, ale o promieniu o  $s$  mniejszym, czyli spełnia równanie

$$(1) \quad x^2 + y^2 = (r - s)^2.$$

Ponadto na okręgu współśrodkowym z mniejszym półkolem (jego środek to  $(r - r_1, 0)$ ), ale o promieniu o  $s$  większym, czyli spełnia również równanie

$$(2) \quad (x - (r - r_1))^2 + y^2 = (r_1 + s)^2.$$

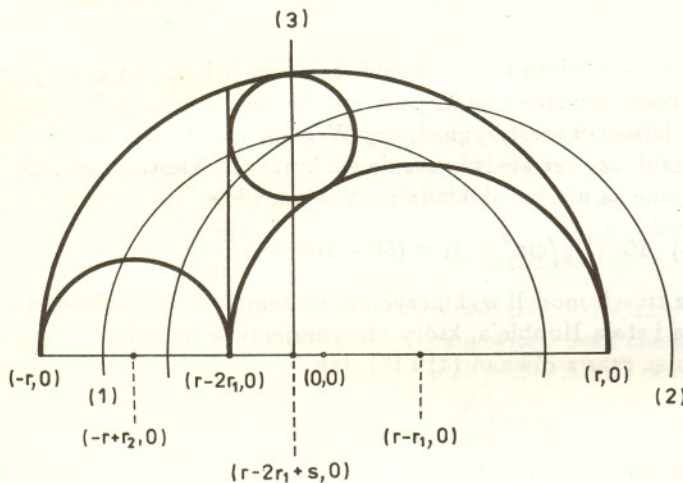
Wreszcie leży na prostej równoległej do odcinka  $CD$ , ale odległej od niego o  $s$ , czyli dodatkowo spełnia równanie

$$(3) \quad x = r - 2r_1 + s.$$

Wbrew pozorom nie jest chyba najlepiej podstawić od razu znaną wartość  $x$ ; lepiej jest zacząć od wyeliminowania  $y$  – chodzi nam przecież jedynie o znalezienie wartości  $s$ .

Odejmijmy (1) od (2)

$$(x - (r - r_1))^2 - x^2 = (r_1 + s)^2 - (r - s)^2.$$



Rys. 4

Stąd

$$2(r_1 - r)x + (r_1 - r)^2 = r_1^2 + 2sr_1 + 2sr - r^2.$$

Porządkując wyrazy otrzymujemy

$$(r_1 - r)x = r_1r - r^2 + sr_1 + sr = s(r_1 + r) + r(r_1 - r).$$

Teraz wstawiamy (3) i obliczamy  $s$

$$\begin{aligned} (r_1 - r)(r - 2r_1 + s) &= s(r_1 + r) + r(r_1 - r), \\ s(r_1 - r) + (r_1 - r)(r - 2r_1) &= s(r_1 + r) + r(r_1 - r), \\ -2rs &= 2r_1(r_1 - r) \end{aligned}$$

i ostatecznie

$$s = \frac{r_1(r - r_1)}{r} = \frac{r_1 \cdot r_2}{r}.$$

Symetria wzoru pokazuje, że obliczając promień okręgu wpisanego w drugą część noża otrzymamy ten sam wynik.

Ciekawe jest tu, że  $r \cdot s = r_1 \cdot r_2$ ; perfekcyjniści mogą jeszcze obliczyć (to już naprawdę chwilka jeno, bo  $x$  znamy) współrzędne środka jednego i drugiego wpisanego okręgu.

M. K.



### Rozwiązanie zadania F 381.

Elektron porusza się po okręgu, a więc indukcja magnetyczna jest skierowana prostopadłe do wektora prędkości elektronu. Siła działająca na elektron wynosi  $F = evB$ . Ponieważ  $F = ma_n$ , gdzie  $a_n = v^2/r$  jest przyspieszeniem dośrodkowym,

$$\text{więc } r = \frac{mv}{eB} \text{ oraz } a_n = \frac{evB}{m}.$$

Przyspieszenie  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t$ , gdzie

$a_t = \frac{dv}{dt}$  jest przyspieszeniem stycznym.

Przy powolnym przechodzeniu na mniejsze orbity kolowe zachodzi  $a_t/a_n \ll 1$ ,  $a \approx a_n$ . Moc wynosi

$$P = \frac{dE_k}{dt} = mv \frac{dv}{dt} \approx \frac{2}{3} \frac{ke^2}{c^3} a_n^2, \text{ stąd}$$

$$\frac{dv}{dt} = a_t = \frac{2}{3} \frac{ke^2}{c^3} \frac{a_n^2}{mv}.$$

Podstawiając  $a_n = \frac{evB}{m}$  otrzymujemy

$$\frac{a_t}{a_n} = \frac{2}{3} \frac{ke^3 B}{m^2 c^3} \ll 1,$$

gdyż

$$B \ll \frac{3}{2} \frac{m^2 c^3}{ke^3} \approx 3000 \text{ T},$$

co uzasadnia wcześniejsze założenie, że  $a_t \ll a_n$ . Równanie ruchu ma postać

$$mv \frac{dv}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{ke^2}{c^3} \left( \frac{qvB}{m} \right)^2,$$

(minus w równaniu różniczkowym oznacza zmniejszanie prędkości  $v$ )

$$\frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dt} = -Av^2, \text{ gdzie } A = \frac{2}{3} \frac{ke^4 B^2}{c^3 m^3}.$$

Podstawiając  $x = v^2$  mamy

$$\frac{dx}{x} = -2Adt. \text{ Całkując otrzymujemy}$$

$$v^2 = v_0^2 e^{-2At}. \text{ Ponieważ } r = \frac{mv}{eB}, \text{ więc}$$

$$r = r_0 e^{-At}. \text{ Promień } r \text{ zmniejsza się}$$

dwukrotnie po czasie

$$t = \frac{\ln 2}{A} = \frac{3 \ln 2 c^3 m^3}{ke^4 B^2} = 3,57 \text{ s}.$$

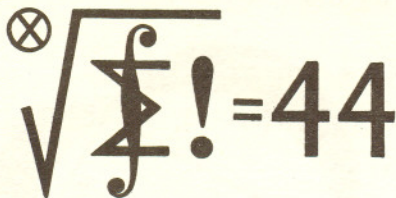
## Patrz w niebo

29 września 1989 roku zakończyła się pewna era w astronomii obserwacyjnej. Tego dnia mianowicie 5-metrowym teleskopem w Obserwatorium Palomarskim zostało wykonane ostatnie tradycyjne fotograficzne zdjęcie nieba. Amerykański astronom Sidney van den Bergh po godzinnej ekspozycji w głównym ognisku teleskopu uzyskał obraz słabo świecących włókien gazu otaczającego supernową z roku 1181, w miejscu której obecnie znajduje się też radioźródło 3C58. Co prawda zdjęcie tego samego obszaru nieba zostało powtórzone dobę później, jego jakość jednak okazała się zbyt niska wskutek niespokojnej atmosfery. W każdym razie dyrekcja Obserwatorium zdecydowała, że zdjęć fotograficznych tym teleskopem już więcej robić się nie będzie.

Pierwsze zdjęcie tymże teleskopem wykonał Milton Humason 13 listopada 1949 roku i przez następne 40 lat 5-metrowy teleskop przyczynił się do wielu przełomowych odkryć. Tak na przykład Walter Baade zaobserwował gwiazdy supernowe (a nie nowe!) w Wielkiej Mgławicy w Andromedzie wykazał, że odległości galaktyk są dwukrotnie większe, niż się to dotychczas astronomom zdawało. Następnie Allan Sandage wykorzystując zdjęcia odległych galaktyk wykazał, że najdalsze gwiazdy obserwowane przez Baadego są w istocie obłokami zjonizowanego wodoru, z czego wypływał wniosek, że odległości galaktyk jeszcze raz należy pomnożyć przez dwa. Tym też teleskopem Maarten Schmidt zidentyfikował pierwsze kwazary.

Od ponad czterech lat 5-metrowym teleskopem palomarskim obserwuje się już tylko za pomocą kamer CCD. Te półprzewodnikowe detektory mają przynajmniej dwie cechy zapewniające im bezwarunkowe zwycięstwo nad innymi odbiornikami światła: są dziesiątki razy wydajniejsze i mogą rozróżnić setki razy więcej stopni szarości niż najlepsze emulsje fotograficzne. Nie bez znaczenia jest też możliwość zautomatyzowania i skomputeryzowania obserwacji oraz pozbycie się kłopotliwej chemicznej obróbki zdjęć. Klisze fotograficzne w wielkich obserwatoriach wykorzystuje się obecnie właściwie już tylko do tzw. przeglądów nieba, tu bowiem klisza o rozmiarach na przykład  $36 \times 36 \text{ cm}$  (a takie stosowane są w palomarskiej kamerze Schmidta) ma zdecydowaną przewagę nad największymi nawet „kostkami” CCD. Jeżeli jednak wkrótce i tu zapanują półprzewodniki, to klisza fotograficzna stanie się w astronomii tym, czym już obecnie są mechaniczne zegary i suwaki logarytmiczne.

Tomasz KWAST



Członkwa ligi zadaniowej  
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 263 ( $WT=2,50$ ) i 264 ( $WT=2,28$ )  
z numeru 8/1993

Leszek Gasiński	-	Stalowa Wola	43,96
Jerzy Janowicz	-	Bolesławiec	43,33
Jan Ciach	-	Ostrowiec Św.	39,55
Mirosław Matłaga	-	Skoczów	39,44
Krzysztof Jedziniak	-	Katowice	35,57
Jan Kraszewski	-	Legnica	35,55

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 3$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymując nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1994.

### Zadania z matematyki nr 281, 282

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**281.** Mamy sześć komórek pamięci ponumerowanych od 1 do 6; w każdej komórce znajduje się (w chwili początkowej) liczba 0. Rzucamy kostką; jeśli wypadnie  $i$  oczek, zwiększamy o 1 zawartość  $i$ -tej komórki. Czynność tę powtarzamy do momentu, gdy we wszystkich komórkach pojawiają się liczby jednakowej parzystości.

(a) Wykazać, że z prawdopodobieństwem równym jedności pojawi się konfiguracja kończąca.

(b) Obliczyć wartość oczekiwaną liczby rzutów.

**282.** Wewnątrz czworościanu  $ABCD$  znajduje się punkt  $P$ . Jego odległości od wierzchołków  $A, B, C, D$  równe są odpowiednio  $R_A, R_B, R_C, R_D$ , a od ścian  $BCD, ACD, ABD, ABC$  - odpowiednio  $r_A, r_B, r_C, r_D$ . Dowieść, że

$$256 r_A r_B r_C r_D \leq (R_A + r_A)(R_B + r_B)(R_C + r_C)(R_D + r_D).$$

Kiedy zachodzi równość?

Zadanie **282** zaproponował pan Jan Ciach z Ostrowca Świętokrzyskiego.

### Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/1994

Przypominamy treść zadań:

**273.** Dany jest ciąg liczb rzeczywistych  $x_0, x_1, x_2, \dots$ . Tworzymy ciągi o wyrazach  $y_n = (x_{n-1} + x_{n+1})/2$  oraz  $z_n = (x_{n-2} + x_n + x_{n+2})/3$ . Udowodnić, że jeżeli  $x_n \leq y_n$  dla  $n = 1, 2, 3, \dots$ , to  $y_n \leq z_n$  dla  $n = 2, 3, 4, \dots$ .

**274.** Liczby naturalne  $a \geq 1$  i  $b \geq 1$  są względnie pierwsze;  $k \geq 1$  jest dowolną liczbą naturalną. Dowieść, że każdy dzielnik nieparzysty liczby  $a^{2^k} + b^{2^k}$  ma postać  $2^{k+1}t + 1$ , gdzie  $t$  jest liczbą całkowitą.

**273.** Ustalmy  $n \geq 2$ . Wykażemy, że z nierówności  $x_k \leq y_k$  dla  $k = n - 1, n, n + 1$  wynika nierówność  $y_n \leq z_n$ . Istotnie:

$$x_{n-1} \leq y_{n-1} \implies 4x_{n-1} \leq 2x_{n-2} + 2x_n;$$

$$x_{n+1} \leq y_{n+1} \implies 4x_{n+1} \leq 2x_n + 2x_{n+2};$$

$$x_n \leq y_n \implies 2x_n \leq x_{n-1} + x_{n+1}.$$

Dodajemy stronami te trzy nierówności i otrzymujemy

$$3(x_{n-1} + x_{n+1}) \leq 2(x_{n-2} + x_n + x_{n+2}),$$

czyli  $y_n \leq z_n$ .

**274.** Niech  $p \geq 3$  będzie dzielnikiem pierwszym liczby  $a^{2^k} + b^{2^k}$  i niech  $d = \text{NWD}(p - 1, 2^k)$ . Znajdujemy taką liczbę naturalną  $c$ , że  $bc \equiv 1 \pmod{p}$ . Obie strony kongruencji  $a^{2^k} \equiv -b^{2^k} \pmod{p}$  mnożymy przez  $c^{2^k}$  i otrzymujemy związek

$(ac)^{2^k} \equiv -1 \pmod{p}$ . Stąd oraz z „małego” twierdzenia Fermata

$$(-1)^{(p-1)/d} \equiv ((ac)^{2^k})^{(p-1)/d} = ((ac)^{2^k/d})^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

co oznacza, że  $(p - 1)/d = m$  jest liczbą parzystą.

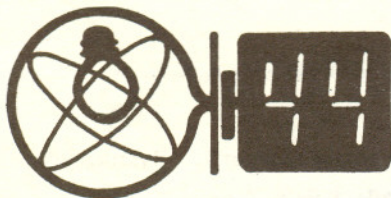
Liczba  $d$  jako dzielnik  $2^k$  ma postać  $2^\alpha$ , gdzie  $\alpha \leq k$ . Tak więc  $p - 1 = 2^\alpha m$  dzieli się przez  $2^{\alpha+1}$ . Stąd i z określenia  $d$  wnosimy, że  $d = 2^\alpha = 2^k$ , czyli  $\alpha = k$ , wobec czego  $p - 1$  dzieli się przez  $2^{k+1}$ .

Wykazaliśmy w ten sposób, że każdy nieparzysty dzielnik pierwszy liczby  $a^{2^k} + b^{2^k}$  ma postać  $2^{k+1}u + 1$ . Iloczyn liczb tej postaci też jest liczbą tej postaci:

$$(2^{k+1}u + 1)(2^{k+1}v + 1) = 2^{k+1}(2^{k+1}uv + u + v) + 1.$$

Stąd teza.

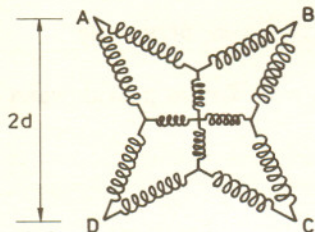




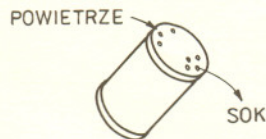
Czołówka ligi zadaniowej  
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 163 (WT=2,24) i 164 (WT=3,27)  
z numeru 9/1993

Przemysław Gworys	- Częstochowa	42,14
Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	32,78
Andrzej Borowski	- Aleksandr. Kuj.	27,03
Aleksander Surma	- Myszków	13,69
Paweł Perkowski	- Szczecin	11,63



Rys. 1



Rys. 2

**179.** Masa helikoptera wynosi  $m = 900$  kg, a promień wirnika  $r = 4$  m. Obliczyć minimalną moc silnika potrzebną do tego, aby helikopter wznosił się do góry z prędkością  $v = 3$  m/s. Gęstość powietrza jest równa  $\rho = 1,29$  kg/m<sup>3</sup>.

**180.** W przewodzącej powłoce kulistej o zewnętrznym promieniu  $R$  jest dziurka w kształcie koła o promieniu  $r$  znacznie mniejszym od  $R$ . Jeśli naładować powłokę pewnym ładunkiem elektrycznym, to jaka część tego ładunku będzie rozłożona na wewnętrznej stronie?

**Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/1994**

Przypominamy treść zadań:

**171.** Dwanaście sprężyn o stałej sprężystości  $k$  i długości swobodnej zero (tzn. przyjmujących długość  $l$  pod wpływem siły  $F = kl$ ) połączono jak na rysunku 1 i naciągnięto rozpinając je na czterech punktach  $A, B, C$  i  $D$  tworzących kwadrat o boku  $2d$ . Jaką siłę wywierają sprężyny na każdy z czterech punktów?

**172.** Aby przelać sok z puszki do szklanki, trzeba w wieczku wybić dziurki do wylewania soku i dziurki do wlotu powietrza (rys. 2). Jacek wybija dziurki o jednakowej średnicy (np. około 5 mm) i zastanawia się: więcej niż 10 dziurek nie chce mi się wybijać, więc ile z nich powinno służyć do wlotu powietrza, a ile do wylewania soku, żeby wylać go najszybciej?

**171.** Oznaczmy długość jednej z czterech środkowych sprężyn przez  $x$ ; wtedy długość jednej z pozostałych jest równa  $y = \sqrt{d^2 + (d-x)^2}$ . Warunek równowagi sił w węzle  $E$  (lub w którymkolwiek z trzech równoważnych) pozwala wyznaczyć  $x = \frac{2}{3}d$ ,  $y = d\sqrt{10}/3$ . Z twierdzenia cosinusów znajdujemy  $\cos \alpha = 2/\sqrt{5}$ , zatem szukana siła wywierana na jeden z rogów wynosi  $F = 2ky \cos \alpha = 4kd \frac{\sqrt{2}}{3}$ .

**172.** Oznaczmy ciśnienie słupa cieczy nad dolnymi dziurkami przez  $p$ , a ciśnienie powietrza w puszcze przez  $p'$ . Różnica ciśnień wtłaczająca powietrze przez górne dziurki jest równa  $p_p = p_{atm} - p'$ , a różnica ciśnień wypychająca ciecz przez dolne jest równa  $p_c = p + p' - p_{atm}$ , zatem  $p_p + p_c = p$ . Prędkość wypływu gazu lub cieczy przez otwór wyprowadza się z równania

Bernoulliego (tzn. z zasady zachowania energii) – wynikiem jest  $v = \sqrt{\frac{2p}{\rho}}$  ( $\rho$  – gęstość).

Zatem dla cieczy  $v_c = \sqrt{2p_c/\rho_c}$ , a objętość  $V$ , wypływająca na sekundę, otrzymujemy mnożąc  $v_c$  przez powierzchnię otworów wylotowych  $S_c$ . Objętość wypływającego powietrza jest taka sama i wyraża się analogicznym wzorem. Problem sprowadza się do maksymalizacji wyrażenia  $V$  w zależności od  $S_c$  i  $S_p$ , gdy spełnione są warunki

$$V = S_c \sqrt{\frac{2p_c}{\rho_c}} = S_p \sqrt{\frac{2p_p}{\rho_p}}, \quad S_c + S_p = \text{const}, \quad p_c + p_p = p = \text{const}.$$

Z obliczeń wynika, że  $V$  jest maksymalne, gdy

$$\frac{S_c}{S_p} = \left(\frac{\rho_c}{\rho_p}\right)^{1/3} \approx 9,2,$$

gdzie gęstość soku przyjęliśmy równą gęstości wody, a gęstość powietrza  $\rho_p \approx 1,29$  kg/m<sup>3</sup>. Zatem jedna dziurka powinna służyć do wlotu powietrza, a dziewięć do wypływu soku.

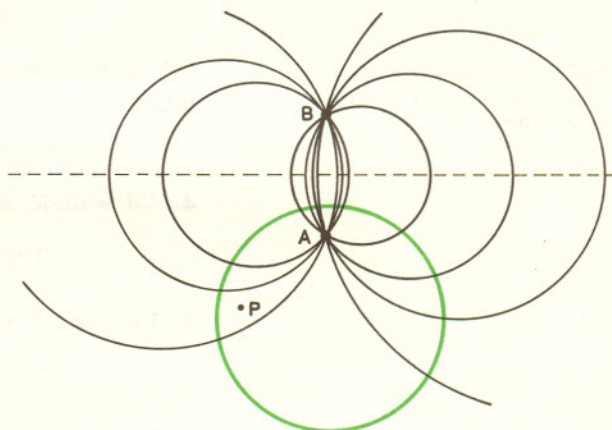
**Wykonaj lub zawstydz się!**

Nie zawsze umiemy zrobić użytek ze zdobytych w szkole wiadomości, nawet tych uzyskanych w szkole podstawowej. Oto propozycja sprawdzenia, czy intelekt nasz nie rozleniwiał się i czy nie biega tylko po tłumnie uczęszczanych szlakach.

Dana jest rodzina wszystkich okręgów przechodzących przez ustalone punkty  $A$  i  $B$ . Czy potrafisz

1. wykazać, że okrąg przecinający dwa z nich pod kątem prostym (na rysunku kolorowy) przecina pod kątem prostym wszystkie pozostałe?
2. wykazać, że przez każdy punkt nie leżący na symetralnej odcinka  $AB$  przechodzi dokładnie jeden taki okrąg?
3. skonstruować taki okrąg przechodzący przez dany punkt  $P$  (nie leżący, oczywiście, na tej symetralnej)?

Jeśli nie wiesz, czy potrafisz, to spróbuj!



Opracował M. K.





W tym miesiącu „kącik” poświęcamy nierównościom cyklicznym.

**Zadanie 1.**

Dane są liczby nieujemne  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  o sumie równej 1. Wyznaczyć maksymalną wartość wyrażenia  $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_5 + a_5a_6 + a_6a_1$ .

**Rozwiązanie.**

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_5 + a_5a_6 + a_6a_1 &\leq \\ &\leq (a_1 + a_3 + a_5)(a_2 + a_4 + a_6) \leq \\ &\leq \left( \frac{a_1 + a_3 + a_5 + a_2 + a_4 + a_6}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

gdyż  $x_1x_2 \leq \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2$ . Wyrażenie  $a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_1a_6$  przyjmuje wartość  $\frac{1}{4}$  na przykład dla  $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \dots = a_6 = 0$ . Zatem poszukiwana maksymalna wartość danego wyrażenia wynosi  $\frac{1}{4}$ . ■

**Zadanie 2.**

Udowodnić nierówności

$$1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$$

dla dowolnych liczb dodatnich  $a, b, c$ .

**Rozwiązanie.**

Pierwsza nierówność:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = 1.$$

Druga nierówność:

$$\begin{aligned} &\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} = \\ &= 3 - \left( \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} \right) < \\ &< 3 - \left( \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} \right) = 2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Propozycje zadań do samodzielnego rozwiązania.

**3.** (a) Dane są liczby nieujemne  $a_1, a_2, \dots, a_6$  o sumie równej 1. Wyznaczyć maksymalną wartość wyrażenia

$$a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + a_3a_4a_5 + a_4a_5a_6 + a_5a_6a_1 + a_6a_1a_2.$$

(b) Dane są liczby nieujemne  $a_1, a_2, \dots, a_n$  o sumie równej 1. Wyznaczyć maksymalną wartość wyrażenia

$$a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + \dots + a_{n-1}a_n a_1 + a_n a_1 a_2.$$

**4.** Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb  $a, b, c, d$  zachodzą nierówności

$$1 \leq \frac{a}{d+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a} \leq 2.$$

**5.** Udowodnić, że jeśli  $a, b, c$  są długościami boków trójkąta, to

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq 2.$$

Nie znamy rozwiązania części (b)  
- liczymy na pomoc ze strony naszych  
Czytelników.

Tych, którzy ucieszyli się z rozstrzygnięcia hipotezy Poincarégo, zaanonsowanego w *EPSILONIE* miesiąc temu, z prawdziwą przykrością informujemy, że problem dalej czeka na swojego pogromcę. Podana przez nas informacja była żartem primaaprilisowym, zaś ani wymienieni tam matematycy: van der Fool i Forster, ani wspomniany instytut w Portland nie istnieją. Prawdziwe były natomiast wszystkie „fakty z najnowszej historii matematyki” dotyczące słynnych hipotez.

## Kilka rekordów

Ustanawianie nowych rekordów jest cechą charakterystyczną sportu, ale nie tylko. W innych dziedzinach działalności ludzkiej równie chętnie odnotowuje się najkrótsze, największe, najszybsze i w ogóle wszystkie inne „naj”. Także w matematyce można poszukać rezultatów, które są w pewnym sensie rekordowe. O ile w sporcie rekord jest głównym celem zmagających się, to w matematyce rekordy bite są przeważnie zupełnie przypadkowo i przy okazji wykonywania zupełnie innych zadań. Matematyk, atakując jakiś problem, raczej nie myśli o pobiciu nowego rekordu.

Jakiego typu wyniki można by uznać za rekordowe? Naturalnie, jeśli poszukuje się sensacji, to zawsze się jakies znajdzie. Można, na przykład, zapytać o twierdzenie z najdłuższym dowodem. Tu mamy dwóch kandydatów: twierdzenie o czterech barwach oraz twierdzenie o klasyfikacji grup prostych. Pierwsze twierdzenie mówi, że każdą mapę na płaszczyźnie można pomalować czterema kolorami tak, aby sąsiednie obszary różniły się barwami. Pozytywne rozwiązanie tego problemu, ogłoszone przez Appela i Hakena w 1976 roku, wymagało ponad 1000 godzin pracy superkomputera. Ile zajęłoby ono stron standardowego maszynopisu? Nikt tego nie przeliczył. Później autorzy poprawiali jeszcze dowód dokładając pewną (dość jednak znaczną) liczbę przypadków.

Drugie twierdzenie dotyczy klasyfikacji specjalnych obiektów w algebrze zwanych skończonymi grupami prostymi. Dowody wszystkich przypadków mieszczą się podobno na trzynastu tysiącach stron (a przynajmniej tak było w chwili ogłoszenia rozstrzygnięcia ostatniego przypadku – po dziesięciu latach być może dokonano pewnych uproszczeń). Przy okazji absolutny rekord: największa sporadyczna grupa prosta ma  $2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$  elementów. Nic dziwnego, że niektórzy nazwali ją grupą monstrum.

Najkrótszym dowodem jest chyba dowód faktu, że w grupie istnieje dokładnie jeden element neutralny ( $e = e \cdot e' = e'$ ).

Kopalnią rekordów jest teoria liczb: tu można pytać o największą znaną obecnie liczbę pierwszą – na początek roku 1993 była to  $2^{756839} - 1$ . Jaka jest największa znana liczba doskonała – oczywiście,  $2^{756838} \cdot (2^{756839} - 1)$ , prawda? Jaki jest największy znany odstęp pomiędzy dwiema sąsiednimi liczbami pierwszymi? Jaka jest największa liczba pierwsza zbudowana z samych jedynek? Itd., itp.

Zresztą niemal każda liczba jest pod pewnymi względami rekordowa. Na przykład liczba 132 daje się przedstawić jako sumę wszystkich liczb dwucyfrowych zbudowanych z cyfr tejże liczby, czyli z 1, 2 i 3:

$$132 = 13 + 32 + 21 + 31 + 23 + 12$$

i jest to najmniejsza liczba o tej własności.

Rekordy mogą dotyczyć również samych matematyków. Leonhard Euler był autorem największej w dziejach liczby prac matematycznych, a Evariste Galois najmłodszym twórczo działającym matematykiem (choć podobno Pascal wszystkie swoje rezultaty uzyskał do osiemnastego roku życia, potem przestał zajmować się matematyką). Rodzina Bernoullich może się poszczycić największą liczbą członków zajmujących się matematyką (trzech sławnych i co najmniej ośmiu znanych). Przedstawiciele tego rodu przez ponad 100 lat bez przerwy zajmowali katedrę matematyki na uniwersytecie w Bazylei, a profesorami tegoż uniwersytetu na różnych katedrach członkowie rodziny byli ponad 200 lat.

Przykładów takich, podobnych lub zupełnie innych, można przytaczać jeszcze wiele. Jeśli ktoś z Czytelników słyszał o jakimś ciekawym rekordzie dotyczącym matematyki lub matematyków, to zachęcamy do napisania do *EPSILONA*.

Zdzisław POGODA

Uwaga: końcówka artykułu, dotycząca Galois i Bernoullich, wyraża wyłącznie opinię autora. Moim zdaniem, o rekordzie można mówić tylko wtedy, gdy stwierdzenie rekordu jest jednoznaczne. Bo co to znaczy, że najmłodszym twórczo działającym matematykiem był Galois? Przecież istnieją wyniki osiągnięte przez ludzi młodszych. Może mniej wybitne (choć kto ma prawo o tym zdecydować?) – ale z kolei różni matematycy wskazywałyby rezultaty, ich zdaniem, większej wagi, osiągnięte przez matematyków, na przykład, 24-letnich. Próbuując więc szukać najmłodszego twórczo działającego matematyka należałoby zacząć od wyznaczenia „rangi rezultatów”, od których począwszy człowiek jest zaliczany do kategorii twórczo działających, a tego zrobić się nie da, tu obiektywnie „wymierzyć” wartości rezultatu nie można. Podobnie z Bernoullimi – jaka jest definicja „zajmowania się” matematyką? I co rozumiemy przez rodzinę – czy ludzi spokrewnionych noszących to samo nazwisko, czy jedynie spokrewnionych – a co ze spowinowaconymi?

K. C.

Matematyk D., pracujący obecnie w Edynburgu, jest Australijczykiem. Po ukończeniu tzw. undergraduate studies w Australii postanowił rozpocząć studia doktoranckie w Cambridge. Miał wówczas 23 lata. Przed wyjazdem do Anglii poinformował o tej decyzji swojego nauczyciela matematyki. Usłyszał:  
– Chłopcze, ty chcesz zostać matematykiem? Gdy Galois był w twoim wieku, to od dwóch lat już nie żył!