

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 7(242)

Fizyka w szklance piwa <i>Bohdan Grzadkowski</i>	str. 1
Świat kwazicząstek <i>Tomasz Dieltl</i>	str. 1
O potęgach dwójki <i>Paweł Strzelecki</i>	str. 5
Mała Delta	str. 8
Badamy najprostsze zjawiska falowe <i>Stanisław Bednarek</i>	str. 9
Patrz w niebo	str. 12
Zadania	str. 13
Drobiazgi	str. 13
Klub 44	str. 14
Kącik olimpijski	str. 16
Epsilon	str. 17

### W następnym numerze:

Staszic i pioruny

Okładkę wykonał  
*Bernard BADZIOCH*

Wydawca:  
Uniwersytet Warszawski  
Krakowskie Przedmieście 26/28  
00-927 Warszawa

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Komitet Redakcyjny:  
Andrzej Białynicki-Birula  
Bogdan Cichocki  
Roman Duda  
Jan A. Gaj  
Tomasz Hofmokl  
Tadeusz Jarzębowski  
Marta Kicińska-Habior  
– przewodnicząca  
Marcin Kubiak  
Andrzej Mąkowski  
– wiceprzewodniczący  
Andrzej Pelczar  
Zbigniew Płochocki  
Zdzisław Pogoda  
Konrad Rudnicki  
Zbigniew Semadeni  
Grzegorz Sitarski  
Józef I. Smak  
Kazimierz Stępień  
Mieczysław Subotowicz  
Andrzej Szymacha  
Andrzej Woszczyk  
Wacław Zawadowski

Redaguje kolegium w składzie:

Krzysztof Biesaga  
Piotr Hajłasz  
Jan Kalinowski – z-ca red. nac.  
Krystyna Kordos – sekr. red.  
Marek Kordos – red. nac.  
Tomasz Kwast  
Krzysztof Rejmer  
Paweł Strzelecki  
Joanna Udalska

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7

02-678 Warszawa

tel. 43-02-43 wewn. 21

HAJLASZ@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Zakładach Graficznych  
w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja.

#### WARUNKI PRENUMERATY w AMOS-ie

Od stycznia 1993 r. prenumeratę „Deltę” prowadzi również firma AMOS, 01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21). Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w pierwszym półroczu 1994 roku wynosi 8 000,-zł, a w drugim półroczu 10 000,-zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru wynosi w pierwszym półroczu 1994 r. 20 000,-zł, a w drugim – 22 000,-zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** AMOS dostarcza „Deltę” pod wskazany adres nie pobierając dodatkowej opłaty. Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Blankiet pocztowy na prenumeratę „Deltę” w AMOS-ie zamieszczamy na str.11/12.

Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

#### WARUNKI PRENUMERATY w RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na IV kwartał 1994 r. wynosi 30 000,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
  - na teren kraju
    - jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
  - na zagranicę
    - „Ruch” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – **dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty**, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
  - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego  
do 20 II na II kwartał  
do 20 V na III kwartał  
do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 10 000,- zł

# Fizyka w szklance piwa

Bohdan GRZĄDKOWSKI

Każdy z Was, Drodzy Czytelnicy, obserwował kiedyś pęcherzyki gazu unoszące się do góry w szklance wypełnionej świeżym, chłodnym piwem (alkohol szkodzi zdrowiu!!!). Podobne zjawisko można zobaczyć w szklance z wodą sodową – dla ustalenia uwagi pozostaniemy jednak przy piwie. Postaramy się opisać tutaj wzrost i ruch bąbelków. Jak wiadomo, piwo jest nasycone dwutlenkiem węgla. Dopóki jest ono zamknięte w butelce (choć niektórzy wolą piwo z puszki) pod zwiększonym ciśnieniem, nic ciekawego się nie dzieje. Jednak w momencie gdy ją otworzymy, ciśnienie w butelce zmniejsza się na tyle, że  $\text{CO}_2$  uwalnia się w postaci pęcherzyków tworzących się na dnie i ściankach szklanki. Piwo, zaraz po otwarciu butelki znajduje się w stanie niestabilnym. Właśnie zmiana ciśnienia powoduje, że  $\text{CO}_2$  „woli” przechodzić w stan gazowy niż pozostawać rozpuszczone w piwie. Bąbelki tworzą się na drobnych nierównościach na powierzchni szklanki (to trochę tak, jak para wodna w chmurach kondensuje się na pyłkach znajdujących się w powietrzu i spada w postaci deszczu). Można sprawdzić, że po wsypaniu do szklanki, na przykład, pieprzu (!) lub cukru (już lepiej) szybkość powstawania bąbelków znacznie wzrasta. Na początku pęcherzyki rosną przyklejone do ścianek, dopiero gdy działająca na nie siła wyporu stanie się większa niż siła napięcia powierzchniowego utrzymująca je przy ściance, odrywają się i wędrują do góry. Wyobraźcie sobie, że problem bąbelków w piwie jest traktowany na tyle poważnie, że dwóch chemików ze Stanford University, Neil Shafer i Richard Zare, przeprowadziło doświadczenia, w których zmierzili szybkość powiększania się pęcherzyków w miarę wznoszenia i zależność ich położenia od czasu [1]. Spróbujmy zbudować model opisujący wzrost bąbelków, a nieco później zastanowimy się nad ich ruchem ku powierzchni. Dzięki wspomnianym chemikom będziemy w stanie porównać przewidywania modelu z danymi doświadczalnymi.

## Dlaczego pęcherzyki rosną?

Naiwnie narzucająca się odpowiedź brzmi: w miarę oddalania się od dna szklanki maleje ciśnienie hydrostatyczne (piwostatyczne), bąbelki są słabiej ściskane i dzięki temu rośnie ich objętość. Po chwili zastanowienia zauważymy jednak, że jest to wyjaśnienie błędne. Na powierzchni piwa panuje ciśnienie atmosferyczne 1 atm. Jak łatwo zauważyć gołym okiem, pęcherzyki wędrujące od dna do powierzchni zwiększają swoje rozmiary mniej więcej 2-krotnie (objętość rośnie 2<sup>3</sup>-krotnie). Z równania gazu doskonałego wiemy, że  $pV = \text{const}$ , zatem 8-krotne zwiększenie objętości nastąpiłoby pod wpływem tyleżkrotnego zmniejszenia ciśnienia. Ponieważ na powierzchni ciśnienie jest równe 1 atm, zatem na dnie szklanki musielibyśmy mieć aż 8 atm! Naturalnie jest to możliwe, ale taki kufel musiałby mieć około 80 m wysokości (piękny widok!). Musimy zatem takie rozwiązanie odrzucić.

Jak wiemy, bąbelki to dwutlenek węgla rozpuszczony w piwie, który po otwarciu butelki uwalnia się w postaci gazu. To właśnie kosztem nadmiaru (w warunkach zmniejszonego ciśnienia po otwarciu butelki)  $\text{CO}_2$  w piwie następuje przyrost objętości pęcherzyków, stanowią one „centra parowania”: całą swoją powierzchnią pochłaniają dwutlenek węgla rozpuszczony w piwie. W oparciu o to spostrzeżenie zbudujemy prosty model bąbelka oparty na następujących założeniach:

# Świat kwazicząstek

Tomasz DIETL

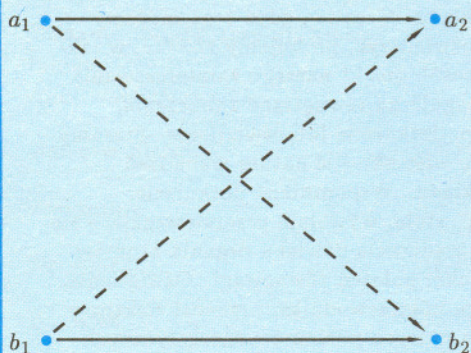
Przeglądając szkolne, a także akademickie podręczniki fizyki, można odnieść wrażenie, że nie przystają one zupełnie do otaczającej nas rzeczywistości. Opisują bowiem świat pojedynczych lub nieoddziałujących obiektów fizycznych, w najlepszym razie rozważane są w nich oddziaływania lub zderzenia dwóch ciał, podczas gdy nasze otoczenie – od materii jądrowej poprzez atomy, ciecze, ciała stałe i gwiazdy – zbudowane jest z wielkiej liczby gęsto upakowanych i omal nieprzerwanie zderzających się ciał – cząstek lub atomów. Wbrew dość powszechnemu przekonaniu, wywodzącemu się z klasycznego opisu gazów doskonałych, złożony ruch cząstek, np. elektronów w atomach lub metalach, bynajmniej nie zamiera w zerowej temperaturze. W tych warunkach układ nie przekazuje jedynie energii do otoczenia, gdyż znajduje się wówczas w stanie o swojej najniższej energii – w stanie podstawowym.

Z praktycznych względów rzadko interesują nas jednak własności całego układu. Częściej, gdyż tego możemy doświadczyć, próbujemy zbadać, w jaki sposób obiekt naszego zainteresowania reaguje na zewnętrzne zaburzenie, np. dotknięcie lub oświetlenie. Staramy się więc określić naturę wzbudzeń układu. Wspomniane dotknięcie, np. stołu, wywołuje przemieszczające się z prędkością dźwięku drgania atomów wokół położenia równowagi. Oświetlenie, np. półprzewodnika, przenosi elektrony do pustych poziomów energetycznych (z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa), wywołując powstanie par elektron-dziura. Zaburzony układ można więc opisać poprzez podanie rodzaju, energii i liczby wzbudzeń elementarnych, tzw. kwazicząstek, dających przyczynek do całkowitej energii wzbudzenia. W omówionych przykładach stanowiły je drgania sieci atomów, zwane fononami oraz powiązane przyciąganiem kulombowskim pary elektron-dziura, tzw. ekscytyny. Formalizm ten jest niesłychanie wygodny, gdyż przy niezbyt silnym zaburzeniu i w odpowiednio niskiej temperaturze liczba kwazicząstek jest na tyle mała, że można zaniedbać ich oddziaływania. A więc nauka wyniesiona ze szkoły lub z uczelni nie idzie na marne.

Kwazicząstki charakteryzuje ładunek  $q$ , spin  $s$  (wewnętrzny moment pędu w jednostkach  $\hbar$ , stałej Plancka  $h$  podzielonej przez  $2\pi$ ) oraz zależność

energii od pędu,  $\varepsilon(p)$ , lub – na mocy dualizmu korpuskularno-falowego – częstości własnej  $\omega = \varepsilon/\hbar$  od długości fali  $\lambda = h/p$ . W przypadku fononów  $q = 0$ ,  $s = 0$ ,  $\varepsilon = vp/\hbar$ , gdzie  $v$  jest prędkością dźwięku. Dla ekscytonu  $q = 0$ ,  $s = 0$ ,  $\varepsilon = p^2/2M$ , gdzie  $M = m_e^* + m_h^*$  jest sumą mas efektywnych elektronu w paśmie przewodnictwa i dziury w paśmie walencyjnym. Ze względu na wpływ potencjału pochodzącego od atomów tworzących półprzewodnik masy efektywne różniących się znacznie od masy swobodnego elektronu  $m$ ; w zależności od materiału  $m^*$  zmienia się w granicach od  $0,001m$  do  $2m$ .

Podobnie jak cząstki, kwazicząstki danego rodzaju są nierozróżnialne. Ta własność obiektów mikroświata, pozornie bez większego znaczenia, ma bardzo ważne konsekwencje. Zastanówmy się więc nad prawdopodobieństwem przejścia dwóch identycznych cząstek znajdujących się w punktach  $a_1$  i  $b_1$  do punktów  $a_2$  i  $b_2$ . Ze względu na nierozróżnialność cząstek musimy rozważyć zarówno proces „wprost”  $a_1 \rightarrow a_2, b_1 \rightarrow b_2$  (linie ciągłe na rysunku), jak i proces „wymiany”  $a_1 \rightarrow b_2, b_1 \rightarrow a_2$  (linie przerywane).



Można by więc sądzić, że proces wymienny zawsze zwiększa całkowite prawdopodobieństwo przejścia, przy czym, gdy  $a_2 = b_2$ , zwiększenie to jest dwukrotne. Rozumowanie to jest jednak równie błędne jak twierdzenie, że przy badaniu zjawiska interferencji metodą Younga otwarcie drugiej szczeliny zwiększy dwukrotnie natężenie światła na ekranie. Jak wiemy, w doświadczeniu Younga w zależności od punktu ekranu obserwujemy **wzmocnienie** (czterokrotne) bądź pełne **wygaszenie** światła. O tym, czy w punkcie  $r$  następuje wzmocnienie czy osłabienie, decyduje względna faza fal elektromagnetycznych pochodzących z dwóch szczelin; oznaczmy tę fazę przez  $\beta$ .

W przypadku dwóch cząstek musimy więc wiedzieć, jaka jest względna faza  $\beta$  procesu wprost i procesu wymiennego. Ponieważ, jak widać na rysunku, dwa następujące po

1. bąbelki są kuliste,
2. ciśnienie hydrostatyczne jest stałe (poprzednie rozważania pozwalają przyjąć to założenie, przynajmniej przy opisie doświadczeń wykonanych przy użyciu szklanek o normalnych rozmiarach),
3. szybkość pochłaniania  $\text{CO}_2$  jest wprost proporcjonalna do powierzchni pęcherzyka:

$$(1) \quad \frac{dN}{dt} = \gamma 4\pi r^2,$$

gdzie  $N$  jest liczbą cząsteczek  $\text{CO}_2$  w pęcherzyku,  $r$  jego promieniem, a  $\gamma$  stałym współczynnikiem proporcjonalności,

4. dodatkowo zakładamy, że ciśnienie  $\text{CO}_2$  spowodowane istnieniem napięcia powierzchniowego można pominąć,

Ciśnienie powierzchniowe w przypadku sfery zależy od promienia jak  $2\sigma/r$ , gdzie  $\sigma$  jest stałym współczynnikiem napięcia powierzchniowego. Widać stąd, że dla  $r$  bardzo małego (zgodnij sam, co to znaczy, Drogi Czytelniku) ten efekt może być istotny. Jeśli ograniczymy rozważania do bąbelków średnich rozmiarów (tak jak tutaj), to można przyjąć, że efekty związane ze zmianą napięcia powierzchniowego są pomijalne. W rzeczywistości jednak efektywnie uwzględniamy napięcie powierzchniowe zakładając kulistość bąbelków.

5. temperatura w szklance jest stała.

Zakładając w dodatku, że  $\text{CO}_2$  w pęcherzyku spełnia równanie gazu doskonałego:  $pV = kTN$ , gdzie  $p$ ,  $V$ ,  $T$ ,  $N$  to ciśnienie, objętość, temperatura i liczba cząsteczek  $\text{CO}_2$ , a  $k$  – stała Boltzmanna, dostajemy

$$(2) \quad \frac{dN}{dt} = \frac{p}{kT} \frac{dV}{dt} = \frac{p}{kT} 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

Korzystając z założenia 3. otrzymujemy proste równanie

$$(3) \quad \frac{dr}{dt} = \frac{\gamma kT}{p} = \text{const},$$

skąd

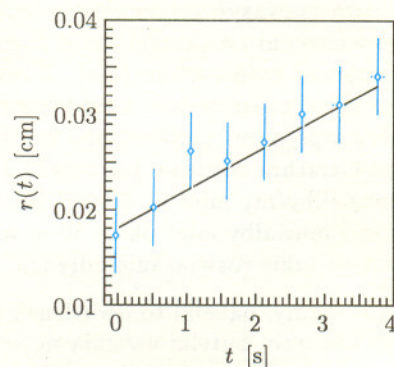
$$(4) \quad r(t) = r_0 + v_r t,$$

dla  $v_r = \frac{\gamma kT}{p}$ . Uwzględnienie napięcia powierzchniowego

prowadziłoby do pojawienia się w ostatnim równaniu dodatkowego wyrazu proporcjonalnego do  $\sigma \log\left(\frac{r}{r_0}\right)$ .

Chemicy, o których wspominałem, przeprowadzili pomiary zależności promienia pęcherzyka od czasu. Okazało się, że przedstawiony powyżej model świetnie opisuje dane doświadczalne przedstawione na rysunku 1.

Rys. 1. Promień unoszącego się bąbelka w zależności od czasu. Ramiona diamentyków ilustrują wielkość błędów doświadczalnych (odchylenie standardowe) popełnianych przy pomiarze rozmiarów bąbelków i czasu. Ciągła linia opisuje najlepsze dopasowanie przewidywań modelu (równanie (4)) do danych doświadczalnych (promień początkowy  $r_0 = 0,018 \pm 0,004$  cm, prędkość  $v_r = 0,004 \pm 0,001$  cm/s). Możemy powiedzieć, że nasz prosty model bardzo dobrze opisuje wyniki doświadczalne.



## Ruch bąbelków

Teraz spróbujemy odpowiedzieć na pytanie, jak zmienia się w czasie położenie pęcherzyka  $\text{CO}_2$  w szklance z piwem. Najpierw znajdziemy siły działające na pęcherzyk. Pierwsza z nich to siła wyporu

poniejszona o ciężar pęcherzyka, równa, zgodnie z prawem Archimedesesa:

$$(5) \quad F_W = V(\rho - \rho')g \simeq V\rho g,$$

gdzie  $\rho$ ,  $\rho'$  to gęstość piwa i gęstość  $\text{CO}_2$  w pęcherzyku, a  $g$  jest przyspieszeniem ziemskim. Pominięcie  $\rho'$  po prawej stronie powyższego wzoru jest uzasadnione. Załóżmy teraz dodatkowo, że prędkość ruchu pęcherzyków jest na tyle mała, że podczas ruchu zachowują one kształt sferyczny. Przy dużych prędkościach założenie to przestaje być słuszne, a z kul robią się poziomo spłaszczone dyski. Naturalnie, jak to w fizyce bywa, nie będziemy rozważać tego trudnego, realistycznego przypadku, lecz ograniczymy się do rozpatrzenia sytuacji, gdy bąbelki zachowują kształt sferyczny.

Podczas ruchu pęcherzyka, oprócz siły wyporu i ciężkości, działa na niego również siła oporu, a jej prawidłowy opis to najtrudniejszy punkt naszych rozważań. Zauważmy najpierw, że bąbelki poruszają się coraz szybciej; widocznie siła oporu rośnie wolniej niż siła wyporu  $F_W = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$ . Do opisu siły oporu posłużymy się tzw. prawem Stokesa, które mówi, że siła oporu działająca na sferyczną kulę poruszającą się w nieskończonym, lepkiem ośrodku wynosi

$$(6) \quad F_S = 6\pi\eta r \frac{dz}{dt},$$

gdzie  $\eta = 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ g/(cm}\cdot\text{s)}$  to współczynnik lepkości,  $r$  – promień kulki, a  $\frac{dz}{dt}$  – jej prędkość.

Zauważ, Drogi Czytelniku, że gdy ciecz jest nielepka ( $\eta = 0$ ), to  $F_S = 0$ , co jest na pierwszy rzut oka niezgodne z naszą intuicją. Jest to jednak zupełnie niezła intuicja, gdyż dość rzadko (nigdy) mamy do czynienia z nielepkiem przepływem, taka nielepka woda nazywana jest czasami suchą wodą.

Zakładając, że  $F_S$  opisuje siłę oporu działającą na pęcherzyk, jesteście teraz w stanie napisać równanie ruchu

$$(7) \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - 6\pi\eta r \frac{dz}{dt},$$

gdzie  $z$  oznacza pionową współrzędną bąbelka, natomiast  $m$  dane jest wzorem

$$(8) \quad m = \frac{\kappa}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho.$$

Zauważmy, że dla  $\kappa = 2$ ,  $m$  jest masą piwa (!) zawartą w kuli o rozmiarach pęcherzyka. W zasadzie, zamiast  $m$  powinniśmy wstawić tam masę pęcherzyka  $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho'$ , musimy jednak pamiętać, że obiekt poruszający się w lepkiem ośrodku „ciągnie” za sobą „przylepioną” do siebie ciecz. W porównaniu z nią rzeczywistą masę  $\text{CO}_2$  w bąbelku można pominąć. Właśnie dlatego w równaniu ruchu (7) pominęliśmy masę  $\text{CO}_2$ , a wprowadziliśmy sparametryzowaną wzorem (8) tę dodatkową, „przylepioną” masę piwa.

Współczynnik  $\kappa$  wprowadziliśmy po to, by sprawdzić, jak silnie ruch pęcherzyka zależy od wielkości „przylepionej” masy. Znalezione przez nas równanie daje się przepisać w wygodniejszej postaci:

$$(9) \quad \dot{\omega} = f(t)\omega + h,$$

gdzie  $\omega = \dot{z}(t)$ ,  $f(t) = -\frac{9\eta}{\kappa\rho r^2(t)}$ ,  $h = \frac{2g}{\kappa}$ . Standardowe metody rozwiązywania równań różniczkowych (zamiana zmiennych i uźmiennianie stałej) prowadzą do następującego wyrażenia

$$(10) \quad \omega = \frac{ah}{V} e^{-u} \int_{u_0}^u \frac{e^x}{x^2} dx,$$

sobie procesy wymienne są równoważne procesowi wprost, więc

$$\beta^2 = 1.$$

Widzimy zatem, że istnieją dwie możliwości,  $\beta = 1$  i  $\beta = -1$ . Pierwsza z nich zachodzi dla cząstek i kwazicząstek, dla których spin jest liczbą całkowitą. Nazywamy je bozonami. Ze względu na konstruktywną interferencję procesów wprost i wymiennych bozony są towarzyskie: prawdopodobieństwo przejścia bozonu do jakiegoś stanu jest tym większe, im więcej już ich w tym stanie jest. Jest to powód wielu niezwykłych zjawisk: akcji laserowej, nadciekłości i nadprzewodnictwa.

W przypadku lasera fotony krążące między zwierciadłami „wymuszają” taką rekombinację par elektron-dziura, która wiąże się z powstaniem fotonów o tej samej częstotliwości i fazie. W zjawisku nadciekłości i nadprzewodnictwa ruch atomów  $^4\text{He}$  lub par elektronowych odbywa się bez tarcia, bowiem wszystkie są w tym samym stanie kwantowym, maszerują w tym samym szeregu, z którego jest je bardzo trudno wyrwać.

W przeciwieństwie do bozonów fermiony – cząstki o spinie połówkowym – unikają się. Ze względu na destruktywną interferencję procesu wprost i wymiennego obowiązuje dla nich zakaz Pauliego: w tym samym stanie kwantowym może znajdować się co najwyżej jeden fermion. Zakaz Pauliego określa obserwowaną doświadczalnie budowę jąder atomowych i atomów. Leży więc u podstaw techniki jądrowej i chemii.

Chociaż kwazicząstki są bądź bozonami, bądź fermionami, wykryto zjawiska, w których następuje przemiana statystyczna – fermiony zamieniają się w bozony lub bozony w fermiony. Dla przykładu, ekscyton jest bozonem, ale w odpowiednio wysokiej temperaturze, nim elektron i dziura znikną (przekazując energię wzbudzenia np. fotonom lub fononom), nastąpić może dysocjacja ekscytonu na dwa niezależnie poruszające się fermiony – elektron i dziurę. Z kolei w niskiej temperaturze i przy dostatecznie dużej koncentracji ekscytonów (a więc przy dużym natężeniu światła i odpowiednio powolnej rekombinacji) w niektórych materiałach zachodzi „skroplenie” ekscytonów w ciecz (plazmę) elektronowo-dziurową. W cieczy tej pary elektron-dziura tracą całkowicie swoją indywidualność. Ciecz ta przypomina raczej stopiony metal, w którym zakaz Pauliego i siły kulombowskie między wszystkimi ładunkami wyznaczają ruchy

elektronów i dziur (dodatnich jonów w metalu). Innym przykładem przemiany statystycznej jest nadprzewodnictwo metali. Wiąże się ono z istnieniem obszaru odkształcenia sieci krystalicznej za poruszającym się elektronem, który może „spułapować” inny elektron. W dostatecznie niskiej temperaturze powstałe pary, bozony, nie rozpadają się, a więc staje się możliwa ich kondensacja – przejście do jednego stanu kwantowego.

Czy bozony i fermiony wyczerpują wszystkie możliwości? Czy istnieją kwazicząstki podlegające innej statystyce? W 1982 r. Frank Wilczek, fizyk amerykański o polskich korzeniach, wysunął przypuszczenie, że w przestrzeni dwuwymiarowej mogą istnieć kwazicząstki o innych statystykach, a co za tym idzie, o nie znanych dotychczas własnościach. Wilczek uważa, że w przestrzeni dwuwymiarowej dwa procesy wymienne **zawsze** wiążą się z okrążeniem jednej kwazicząstki przez drugą, a więc nie są równoważne procesowi wprost. Wynika stąd, że warunek  $\beta^2 = 1$ , a więc  $\beta = \pm 1$ , nie musi być spełniony. W szczególności względna faza  $\beta$  procesu wymiennego i wprost może przyjmować wartości ułamkowe! Wilczek nadał kwazicząstkom o takich własnościach nazwę **anyon** od angielskiego słowa *any*, w tym kontekście dowolny, każdy (w *Postęпах Fizyki* 6/1993 ukazał się interesujący artykuł poświęcony tym cząstkom, dla których wprowadzono nazwę **każdony**).

Można by sądzić, że ponieważ żyjemy w przestrzeni trójwymiarowej, spekulacje Wilczka mają charakter ciekawostki teoretycznej. Okazuje się jednak, że istnieje wiele materiałów, w których kwazicząstki poruszają się jedynie w pewnych płaszczyznach. Na przykład w wysokotemperaturowych nadprzewodnikach ruch kwazicząstek odpowiedzialnych za nadprzewodnictwo (dziur) ograniczony jest do płaszczyzn tworzonych przez tlenek miedzi  $\text{CuO}_2$ . Część badaczy wiąże nawet wysokie temperatury przejścia do stanu nadprzewodzącego w tych materiałach z ułamkową statystyką, chociaż intensywne poszukiwania bezpośrednich dowodów istnienia egzotycznych kwazicząstek nie dały dotąd pozytywnych wyników. Pojawiają się natomiast coraz bardziej przekonujące dowody na istnienie **anyonów** w silnym polu magnetycznym w... tranzystorach typu MOS-FET i HEMT. Te pierwsze, krzemowe tranzystory polowe z izolowaną bramką (*Metal-Oxide-Silicon – Field-Effect-Transistors*),

$$\text{gdzie } a = \frac{9\eta}{\kappa\rho v_r}, \text{ a } u = -\frac{a}{r}.$$

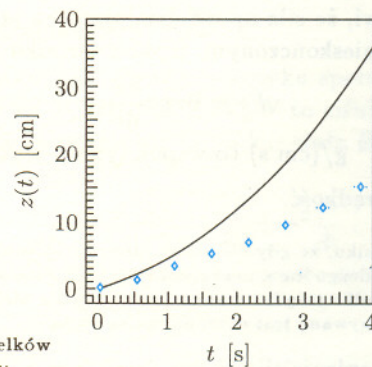
Kolejne całkowanie doprowadza nas do wyrażenia na położenie w zależności od czasu

$$(11) \quad z(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau.$$

Wyrażenie to można łatwo scałkować na kalkulatorze czy komputerze. Jednak zamiast pracowitego całkowania można również pomyśleć i zauważyć, że o ile  $\kappa$  nie jest za duże (okazuje się, że to znaczy nie większe niż  $10^2$ ), to w równaniu ruchu można pominąć wyraz  $m \frac{d^2 z}{dt^2}$  w porównaniu z pozostałymi, a wtedy równanie daje się łatwo rozwiązać:

$$(12) \quad z(t) = \frac{2}{27} \frac{g}{v_r} \frac{\rho}{\eta} [(r_0 + v_r t)^3 - r_0^3].$$

Numeryczne całkowanie równań może nas upewnić, że o ile  $\kappa < 10^2$ , to powyższe równanie bardzo dobrze przybliży dokładne rozwiązanie równania ruchu.



Rys.2. Położenie bąbelków w zależności od czasu: diamenciki – dane doświadczalne, linia ciągła – przewidywanie modelu.

Wprawdzie udało nam się rozwiązać równanie ruchu, ale nie nasz wyjściowy problem. Jak widzimy bowiem z rysunku 2, tym razem nasza „teoria” (linia ciągła) nie opisuje prawidłowo danych doświadczalnych. W rzeczywistości pęcherzyk porusza się znacznie wolniej, niż to przewiduje nasze rozwiązanie; siła oporu musi być zatem większa od danej przez prawo Stokesa. Zanim zostawię Cię, Drogi Czytelniku, z tym fundamentalnym problemem, przypomnijmy sobie, jakie założenia są robione przy wyprowadzeniu prawa Stokesa i zastanówmy się, czy przystają one do naszej bąbelkowej rzeczywistości:

- kulka jest sztywna – tymczasem nasz pęcherzyk rośnie, więc sztywny nie jest,
- prędkość (jej styczna i prostopadła składowa) na powierzchni kulki znika (ciecz nie wnika do wnętrza kulki, a z powodu lepkości nie płynie również po jej powierzchni) – w naszym przypadku składowa styczna prędkości piwa na powierzchni pęcherzyka mogłaby być różna od zera,
- ciecz jest nieskończona – tymczasem nasze piwo zawiera się w szklance.

Teraz już, Drogi Czytelniku, po uświadomieniu sobie naszych słabości zostawiam Cię, życząc wielu udanych eksperymentów i znalezienia prawidłowego modelu opisującego ruch bąbelków w piwie.

#### Literatura

- [1] N.E. Sharfer and R.N. Zare, *Physics Today*, October, 1991.

# O potęgach dwójki

Paweł STRZELECKI

Zacniemy od sformułowania ciekawego problemiku.

**Zadanie.** Rozpatrzmy ciąg  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  złożony z pierwszych cyfr kolejnych potęg dwójki:

1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, 8, ...

Czy w ciągu tym pojawi się kiedykolwiek siódemka?

Zadanie to (i różne jego warianty) można odnaleźć w wielu miejscach, np. w artykule Zbigniewa Marciniaka *Spacerujący matematyk* (*Delta* 7/1991) czy w słynnym podręczniku W.I. Arnolda *Równania różniczkowe zwyczajne*. Na ogół towarzyszą mu pewne wskazówki czy udowodnione fakty pomocnicze. Autor niniejszego tekstu nie zna jednak miejsca, gdzie wspomniane zadanie można znaleźć w towarzystwie kompletnego rozwiązania, takiego w stylu „kawę na ławę”. Spróbujmy temu zaradzić.

Na początek rozwiązanie rozpaczliwe: za pomocą ołówka i kartki papieru albo nieco nowszych wersji tego narzędzia (dobry kalkulator? komputer?) Wytrwały Czytelnik łatwo sprawdzi, że

$$2^{46} = 70\,368\,744\,177\,664.$$

Eksperymentując dalej można stwierdzić, na przykład, że siódemka jest pierwszą cyfrą liczb  $2^{56}$ ,  $2^{66}$ ,  $2^{76}$ ,  $2^{86}$  i  $2^{96}$  (ale  $2^{106}$  ma za pierwszą cyfrę ósemkę...). Strasznie to jednak niezadarny sposób.

Pora na rozwiązanie w miarę eleganckie, pozwalające na wyciągnięcie wielu wniosków. Na początek trzeba, oczywiście, zrozumieć, co to właściwie znaczy, że 7 jest pierwszą cyfrą liczby  $2^n$ . Odpowiedź jest łatwa: 7 jest pierwszą cyfrą liczby  $2^n$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego  $k \in \mathbb{N}$  mamy  $7 \cdot 10^k < 2^n < 8 \cdot 10^k$ . Aby otrzymać prostszy, równoważny zapis, logarytmujemy te nierówności stronami (przy podstawie 10); daje to  $k + \log 7 < n \log 2 < k + \log 8$ . Ponieważ  $0 < \log 7 < \log 8 < 1$ , to  $k$  jest częścią całkowitą liczby  $n \log 2$ , skąd ostatecznie

$$\log 7 < n \log 2 - [n \log 2] < \log 8.$$

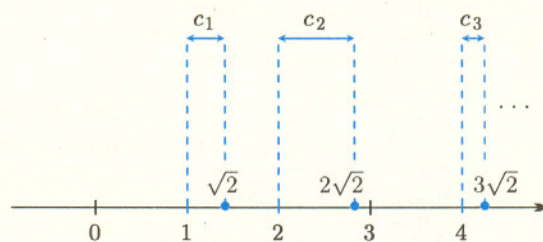
Żeby rozwiązać zadanie z początku artykułu, wystarczy teraz skojarzyć ze sobą kilka znanych faktów.

**Lemat 1.** Liczba  $\log 2$  jest niewymierna.

**Lemat 2.** Jeśli liczba  $x$  jest niewymierna oraz  $c_n := nx - [nx]$ , to dla dowolnych  $a$  i  $b$  spełniających  $0 \leq a < b \leq 1$ , nieskończenie wiele wyrazów ciągu  $c_n$  leży w przedziale  $(a, b)$ .

Zanim podamy dowody lematów, popatrzmy na ich konsekwencje. Po pierwsze, z Lematu 2 zastosowanego dla  $x = \log 2$ ,  $a = \log 7$ ,  $b = \log 8$  wynika, że siódemka jest pierwszą cyfrą nieskończenie wielu potęg dwójki. Jeśli zastosujemy Lemat 2 dla  $x = \log 2$ ,  $a = \log(77) - 1$ ,  $b = \log(78) - 1$ , pamiętając, iż  $1 = [\log 77] = [\log 78]$ , to przekonamy się, że na początku zapisu dziesiętnego liczby  $2^n$  mogą stać również dwie siódemki. Rozumując podobnie nietrudno stwierdzić, że na początku zapisu dziesiętnego liczby  $2^n$  może wystąpić dowolny skończony ciąg cyfr: 1994 albo 1234, albo 567890, itd... Dla niedowiarków prezentujemy na końcu niniejszego artykułu kalendarz ważnych dat zestawionych z odpowiednimi potęgami dwójki.

stanowią podstawowy element budowy „mózgu” kalkulatora lub zegarka. Z kolei tranzystory z wysoką ruchliwością elektronów (*High-Electron-Mobility-Transistors*) powszechnie wykorzystywane są do wzmacniania sygnału w antenach satelitarnych. „Sercem” tych tranzystorów jest kondensator, którego jedną okładkę stanowi półprzewodnik (Si w strukturze MOS-FET, GaAs w strukturze HEMT), a rolę dielektryka spełnia materiał o szerokiej przerwie energetycznej, odpowiednio  $\text{SiO}_2$  i  $\text{Al}_{0,3}\text{Ga}_{0,7}\text{As}$ . Przy odpowiedniej polaryzacji kondensatora w półprzewodniku – przy granicy z dielektrykiem – pojawiają się elektrony, które mogą poruszać się swobodnie jedynie w płaszczyźnie złącza. Dla pewnych szczególnych wartości strumienia pola magnetycznego, przypadającego na jeden elektron, elektrony ulegają przemianie w **anyony** – złożone kwazicząstki, w których skład wchodzi kwazielektron i całkowita liczba kwantów strumienia pola magnetycznego. I jeszcze jedno, ich obserwacja wymaga obniżenia temperatury do około 50 mK oraz przyłożenia pola magnetycznego rzędu 20 T, tj.  $4 \cdot 10^5$  razy większego od pola ziemskiego.



Rys. 1. Wyrazy ciągu  $(c_n)$  to części ułamkowe kolejnych wielokrotności  $x$  ( $x = \sqrt{2}$ ;  $n = 1, 2, 3$ ).



Co więcej, prawdziwy jest także

**Wniosek.** Jeśli liczba naturalna  $p > 1$  nie jest liczbą postaci  $10^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , to na początku zapisu dziesiętnego liczby  $p^n$  może pojawić się dowolny skończony ciąg cyfr.

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że liczba  $\log p$  jest niewymierna, i powtórzyć poprzednie rozważania.

**Dowód Lematu 1.** Gdyby dla pewnych  $l, m \in \mathbb{N}$  zachodziła równość  $\frac{l}{m} = \log 2$ , to wprost z definicji logarytmu mielibyśmy  $10^{l/m} = 2$ , czyli  $10^l = 2^m$ . To jest sprzeczność, bowiem  $10^l$  dzieli się przez 5, zaś  $2^m$  – nie. ■

**Dowód Lematu 2.** Zauważmy najpierw, że wszystkie wyrazy ciągu  $c_n$  są różne. Gdyby bowiem  $c_k = c_m$  dla  $m \neq k$ , to mielibyśmy  $(k - m)x = [kx] - [mx]$ . To jest sprzeczność, bowiem iloczyn różnej od zera liczby całkowitej  $k - m$  oraz liczby niewymiernej  $x$  nie może być liczbą całkowitą.

Weźmy teraz takie  $n \in \mathbb{N}$ , że  $\frac{1}{n} < b - a$ . Ponieważ liczby  $c_1, c_2, \dots, c_{n+1}$  są różne i należą do odcinka  $[0, 1]$ , więc z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że dla pewnych  $i$  oraz  $s$  takich, że  $1 \leq i < i + s \leq n + 1$ , mamy

$$(1) \quad 0 < \varepsilon := |c_i - c_{i+s}| \leq \frac{1}{n} < b - a.$$

Dalej wygodnie jest posłużyć się następującym wyobrażeniem.

Oś liczbową możemy zwinąć w okrąg  $\mathbf{T}$  o długości 1 z wyróżnionym punktem 0 (tak, jak pokazuje rys. 2). Dla  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  przez  $(\alpha, \beta)$  oznaczamy będziemy łuk okręgu  $\mathbf{T}$  odpowiadający przedziałowi  $(\alpha, \beta) \subset [0, 1]$ .

Niech  $f : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$  będzie obrotem o kąt  $2\pi x$  radianów w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Zamiast patrzeć na liczby  $c_n$  na odcinku  $[0, 1]$ , będziemy obserwować na okręgu  $\mathbf{T}$  obrazy punktu 0 pod działaniem kolejnych iteracji  $f$ . Chwila namysłu pozwala stwierdzić, że długość łuku  $(0, b_n)$ , gdzie

$$b_n := f^n(0) \equiv \underbrace{f \circ \dots \circ f}_n(0),$$

jest równa  $c_n$  (rys. 3). Zatem, dzięki nierównościom (1) wiemy, że długość łuku między punktami  $b_i$  oraz  $b_{i+s} = f^s(a_i)$  jest równa  $\varepsilon < b - a$ . Oznacza to, że  $f^s$  jest obrotem o kąt  $2\pi\varepsilon$  (rys. 4); kierunek tego obrotu nie ma dla nas znaczenia.

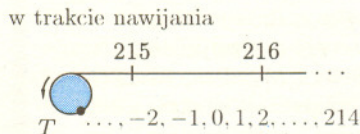
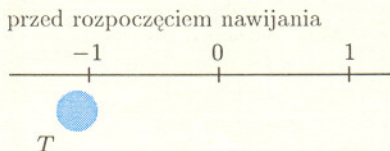
Wynika stąd, oczywiście, że nieskończenie wiele spośród punktów  $b_s, b_{2s}, b_{3s}, \dots$ , należy do łuku  $(a, b)$  zawartego między punktami  $a$  i  $b$ . Jeśli bowiem wyjdziemy z ustalonego punktu 0 i będziemy chodzić nieskończenie długo po okręgu  $\mathbf{T}$ , stale w tę samą stronę, stawiając kroczki o długości  $\varepsilon$ , to nieskończenie wiele razy staniemy na łuku  $(a, b)$ , bo jego długość,  $b - a$ , jest większa niż długość naszego kroku,  $\varepsilon$  (rys. 5). ■

A dlaczego wśród pierwszych wyrazów ciągu utworzonego z pierwszych cyfr kolejnych potęg dwójki nie widać siódemek? Dlaczego ten zdradliwy ciąg wygląda na okresowy? Powód jest prosty: liczba

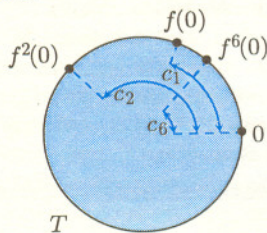
$$\log 2 = 0,3010299956 \dots$$

bardzo dobrze daje się przybliżyć liczbą wymierną  $0,3$ , a dla  $x \in \mathbb{Q}$  ciąg  $c_n = nx - [nx]$  jest okresowy. Dlatego właśnie po obejrzeniu kilkunastu początkowych wyrazów ciągu  $(a_n)$  można nabrać niesłusznego przekonania, że ów ciąg ma okres 10 i siódemka w nim nie występuje, ósemka zaś pojawia się dość często.

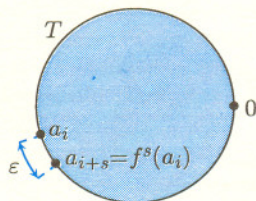
W 1910 roku Waclaw Sierpiński, Hermann Weyl oraz P. Bohl udowodnili niezależnie, że dla niewymiernego  $x$  ciąg  $c_n = nx - [nx]$  jest *równomiernie rozłożony* na odcinku  $[0, 1]$ . Dokładniej, jeśli weźmiemy dowolne  $a$  i  $b$ ,



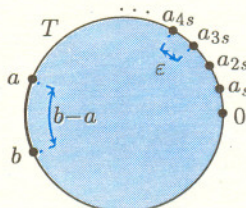
Rys. 2. Weźmy okrąg  $\mathbf{T}$  o obwodzie 1. Linie prostą wyobraźmy sobie jako nitkę (nieskończenie cienką). Nawiniemy tę „nitkę” na okrąg  $\mathbf{T}$  jak na szpulkę. Wówczas wszystkie punkty prostej odpowiadające liczbom całkowitym „skleją się” do jednego punktu na okręgu. Punkt ten będziemy oznaczać przez 0.



Rys. 3. Długość łuku  $(0, f^n(0))$  jest równa  $c_n$  (łuk od punktu 0 do  $f^n(0)$  trzeba prowadzić przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara).



Rys. 4.  $f^s$ , czyli  $s$ -ta iteracja  $f$ , jest obrotem o małą kątem  $2\pi\varepsilon$  (nie wiemy tylko, w którą stronę).



Rys. 5. Długość łuku pomiędzy punktami  $b_{ms}$  oraz  $b_{(m+1)s}$  jest równa  $\varepsilon < b - a$ . Gdy  $m$  rośnie, to punkty  $b_{ms}$  obiegają okrąg dookoła; na każdym okrążeniu przynajmniej jeden z nich wpada w „dziurę” na łuku  $(a, b)$ .

$0 \leq a < b \leq 1$ , i przez  $k_n(a, b)$  oznaczmy liczbę elementów zbioru  $\{c_i : 1 \leq i \leq n, c_i \in (a, b)\}$ , to wówczas

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n(a, b)}{n} = b - a.$$

Mówiąc obrazowo i niezbyt precyzyjnie, gdy długo chodzimy po okręgu długości 1 stawiając kroczki niewymiernej długości, to na każdą dziurę będziemy następować mniej więcej z częstością proporcjonalną do długości tej dziury.

Przetłumaczymy ten fakt na język potęg dwójki. Niech  $a_7(n)$  i  $a_8(n)$  oznaczają odpowiednio liczbę siódemek i ósemek wśród pierwszych  $n$  wyrazów ciągu  $a_n$ . Z równości (2) wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_7(n)}{n} = \log 8 - \log 7, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_8(n)}{n} = \log 9 - \log 8,$$

zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_7(n)}{a_8(n)} = \frac{\log 8 - \log 7}{\log 9 - \log 8} = 1,13370 \dots > 1.$$

Oznacza to, że obserwując odpowiednio długie fragmenty ciągu  $a_n$  złożonego z pierwszych cyfr kolejnych potęg dwójki zobaczymy nieco więcej siódemek niż ósemek.

Wspomniany wynik Bohla, Sierpińskiego i Weyla oraz nasz facyk o siódmkach i ósemkach są w istocie prostymi wnioskami z bardzo ogólnego i głębokiego twierdzenia ergodycznego G.D. Birkhoffa (pochodzącego z 1931 roku), ale to już zupełnie inna historia.

## Kalendarz z potęg dwójki

Wydarzenie	Rok	Potęga dwójki
Chrzest Polski	966	$2^{568} = \mathbf{9,6613} \dots \times 10^{170}$
Powstanie Uniwersytetu Jagiellońskiego	1364	$2^{3432} = \mathbf{1,3644} \dots \times 10^{1033}$
Unia Polski z Litwą	1385	$2^{3050} = \mathbf{1,3851} \dots \times 10^{918}$
Bitwa pod Grunwaldem	1410	$2^{3349} = \mathbf{1,4107} \dots \times 10^{1008}$
Sobieski pod Wiedniem	1683	$2^{709} = \mathbf{1,6832} \dots \times 10^{212}$
Wydanie „Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica” Newtona	1687	$2^{6143} = \mathbf{1,6875} \dots \times 10^{1849}$
Pierwszy rozbiór Polski	1772	$2^{921} = \mathbf{1,7726} \dots \times 10^{277}$
Drugi rozbiór Polski	1792	$2^{2479} = \mathbf{1,7920} \dots \times 10^{746}$
Trzeci rozbiór Polski	1795	$2^{1509} = \mathbf{1,7958} \dots \times 10^{454}$
Kongres Wiedeński	1815	$2^{931} = \mathbf{1,8152} \dots \times 10^{280}$
Powstanie Uniwersytetu Warszawskiego	1816	$2^{7339} = \mathbf{1,8160} \dots \times 10^{2209}$
Urodził się Stefan Banach	1892	$2^{8133} = \mathbf{1,8921} \dots \times 10^{2448}$
Wybuch II wojny światowej	1939	$2^{5522} = \mathbf{1,9392} \dots \times 10^{1662}$
Koniec II wojny światowej	1945	$2^{1931} = \mathbf{1,9450} \dots \times 10^{581}$
Narodziny Dety	1974	$2^{1549} = \mathbf{1,9745} \dots \times 10^{466}$
Dzień dzisiejszy	1994	$2^{3592} = \mathbf{1,9940} \dots \times 10^{1081}$

**Zadanie dla Czytelnika.** Dla jakiego  $n$  liczba  $2^n$  ma na początku cztery siódemki? A pięć siódemek? Jak oszacować z góry najmniejszą liczbę  $n$ , dla której zapis dziesiętny  $2^n$  rozpoczyna się od 1994 kolejnych siódemek?



### Rozwiązanie zadania M 708.

Tak. Proste rachunki przekonują nas, że funkcje

$f(x) = (\sqrt{2})^x$  oraz  $g(x) = \log_{\sqrt{2}} x$  spełniają wszystkie wymogi zadania.



### Rozwiązanie zadania M 709.

Szacując każdą z podstaw potęgi po lewej stronie nierówności przez  $\max(x, y)$  dostajemy natychmiast

$$\begin{aligned} x^{\sin^2 \alpha} \cdot y^{\cos^2 \alpha} &\leq \\ &\leq \max(x, y)^{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \\ &= \max(x, y) < x + y. \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest ostra, bo obie liczby  $x$  i  $y$  są dodatnie.



### Rozwiązanie zadania M 710.

Niech  $n$  oznacza liczbę kul białych w urnie,  $k$  zaś – liczbę kul czarnych. Zbiór zdarzeń elementarnych  $\Omega$  w naszym dwukrotnym losowaniu to produkt kartezjański  $U \times U$ , gdzie  $U$  jest zbiorem wszystkich kul w urnie. Zatem,  $|\Omega| = (n+k)^2$ . Łatwo stwierdzić, że zdarzeń sprzyjających jest  $n^2 + k^2$  (losujemy jedną z  $n$  kul białych, i za drugim razem też kulę białą, albo jedną z  $k$  czarnych i za drugim razem też czarną). Stąd

$$p = \frac{n^2 + k^2}{(n+k)^2} \geq \frac{1}{2}$$

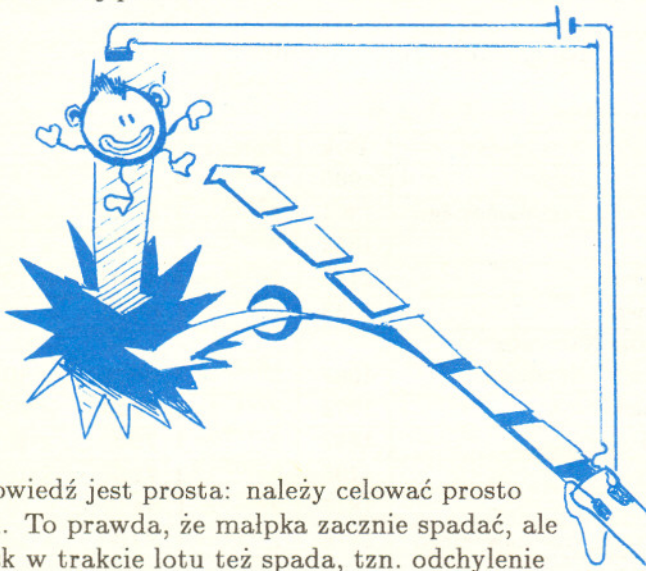
na mocy oczywistej nierówności  $n^2 + k^2 \geq 2nk$ .



# 8

# mała delta

Wyobraź sobie, że jesteś na polowaniu, ale takim trochę niezwykłym. W pewnym momencie spostrzegasz małpkę wiszącą na gałęzi. Celujesz więc do niej ze swojej broni palnej, ale ta broń też jest trochę niezwykła. Jest stara, czyni dużo huk i wyrzuca pocisk z prędkością dużo mniejszą niż prędkość dźwięku w powietrzu. Małpka usłyszy więc odgłos wystrzału dużo wcześniej, niż doleci do niej pocisk.



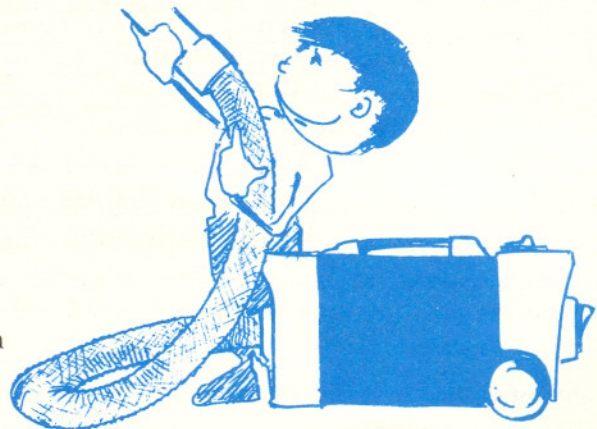
Odpowiedź jest prosta: należy celować prosto w cel. To prawda, że małpka zacznie spadać, ale pocisk w trakcie lotu też spada, tzn. odchylenie toru mierzone w pionie od linii prostej zmienia się w czasie tak samo, jak odległość małpki od gałęzi. Najprościej to zrozumieć rozważając najpierw przypadek bez siły ciężkości. Wówczas pocisk leci dokładnie po linii prostej, a małpka też nie spada. „Włączając” teraz płynnie siłę ciężkości widzimy, że działa ona tak samo na pocisk i na małpkę.

Możemy wykonać bardzo proste doświadczenie, które wykaże słuszność naszych rozważań. Musimy w tym celu skonstruować broń. Najprościej wziąć rurkę z dopasowanym pociskiem i odkurzacz – będzie to broń pneumatyczna. Regulując ciśnienie powietrza, z jakim odkurzacz wyrzuca kulkę z rurki, można zmieniać prędkość pocisku.

## Polowanie i fizyka

Dla uproszczenia możemy założyć, że prędkość dźwięku jest tak duża w porównaniu z prędkością pocisku, że małpka usłyszy wystrzał w momencie opuszczania lufy przez pocisk. Naturalne jest więc oczekiwać, że przestraszona małpka puści się gałęzi i zacznie spadać. Powstaje zatem pytanie: jak należy celować, aby trafić w cel? Czy należy celować prosto w małpkę, czy też należy uwzględnić fakt, że małpka będzie spadać i celować odpowiednio niżej?

Małpkę możemy zrobić z piłeczki pingpongowej z przyklejonym kawałkiem blaszki, aby mogła trzymać się elektromagnesu. Elektromagnes będzie odgrywał rolę gałęzi, na której wisi małpka. Potrzebne są jeszcze styki umocowane na końcu rurki (to znaczy na końcu lufy naszej broni), tak aby opuszczająca lufę kulka rozwarła styki i rozłączyła prąd w obwodzie elektromagnesu. (Szczegóły wykonania pozostawiamy inwencji Czytelników.) W ten sposób mamy zrealizowane warunki naszego problemu myśliwskiego i możemy rozpocząć bezkrwawe łowy. Szczególnie efektywny jest strzał z bardzo małą prędkością kulki, która trafia w piłeczkę dużo poniżej elektromagnesu, o ile celuje się prosto w elektromagnes.



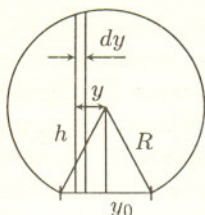
*Małą Deltę przygotował Jan KALINOWSKI*



Stanisław BEDNAREK

## Rozwiązanie zadania F 385.

Założmy dla uproszczenia, że zdeformowana kula ma kształt kuli ściętej.



Powierzchnia styku z podłożem wynosi  $S_0 = \pi y_0^2$ . Podzielmy kulę na cienkie współosiowe puszki o wysokości  $h$  i grubości  $dy$ , gdzie  $y < 0, y_0 >$ . Dla małych deformacji  $h \approx 2R$ . W procesie deformacji długość puszki skraca się o

$$\Delta h = \sqrt{R^2 - y^2} - \sqrt{R^2 - y_0^2} \approx \frac{y_0^2 - y^2}{2R}$$

Z prawa Hooke'a

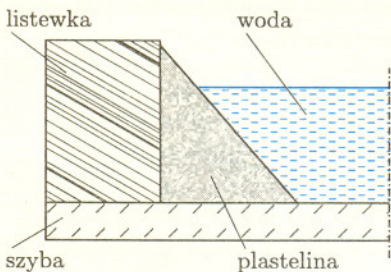
$$\frac{dF}{dS} = E \cdot \frac{\Delta h}{h}$$

gdzie  $dS = 2\pi y dy$ . Podstawiając  $h$  i  $\Delta h$  oraz całkując powyższe wyrażenie otrzymujemy

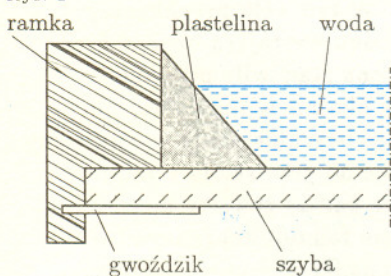
$$F = \frac{\pi E}{8R^2} y_0^4 = \frac{ES_0^2}{8\pi R^2}$$

Siła odkształcenia  $F$  jest równoważona przez siłę ciężkości  $F = mg = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ . Porównując ostatecznie otrzymujemy

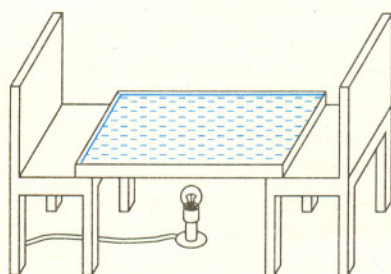
$$R = \left( \frac{3}{32\pi^2} \frac{ES_0^2}{\rho} \right)^{1/5} = 0,75 \text{ m.}$$



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Z falami spotykamy się bardzo często. Wszyscy zapewne słyszeli o falach morskich, dźwiękowych czy radiowych lub elektromagnetycznych. Fizycy określają fale jako rozchodzenie się w przestrzeni okresowego zaburzenia pewnych wielkości fizycznych, np. gęstości i ciśnienia w przypadku fal dźwiękowych czy natężenia pola elektrycznego i magnetycznego, gdy mowa o falach radiowych lub elektromagnetycznych. Spróbujmy bliżej poznać to interesujące zjawisko, jakim jest fala.

Bardzo przydatnym do tego celu rodzajem fal są fale rozchodzące się na powierzchni wody. Falę taką wytwarza każde dziecko, kiedy wrzuca kamyczki do stawu lub kałuży. Obserwuje wówczas współśrodkowe okręgi rozchodzące się od miejsca wpadnięcia kamienia do wody. Żeby przeprowadzić w warunkach laboratoryjnych, a raczej domowych, następne doświadczenie dokładniej zapoznające nas z rodzajami fal i zjawiskami powodowanymi przez fale, nie musimy przenosić kałuży czy stawu do pokoju. Wystarczy w tym celu płaskie naczynie z przezroczystym dnem. Fizycy nazywają je zwykle wanienką do badania fal na wodzie. W roli tej wanienki można wykorzystać niewielkie skrzydło okienne o wymiarach około  $40 \times 25$  cm, najlepiej z pojedynczą szybą. Może to być zwany z niemiecka „lufcirk“ (czasem zdarza się, że coś takiego stoi w starych domach na strychu lub w piwnicy). Szybą posłużymy nam jako przezroczyste dno naczynia, a drewniana rama jako jego ściany boczne zabezpieczające przed rozlaniem się wody.

Cóż jednak począć, kiedy nie mamy takiego lufcika albo rodzice nie pozwolą nam rozmontować okna? Potrzebny będzie wówczas kawałek szyby o podanych wymiarach i kilka kawałków listewki o wymiarach przekroju poprzecznego około  $1 \times 2$  cm. Z listewek odcinamy piłką do drewna cztery kawałki o takich długościach, żeby można było z nich utworzyć prostokątną ramkę o wymiarach zewnętrznych równych wymiarom szyby i wysokości około 2 cm. Ramkę tę zbijemy gwoździkami i przykleimy do szyby za pomocą cienkiej warstwy plasteliny. Od wewnętrznej strony ramki umieszczamy plastelinowy pasek o przekroju równoramiennego trójkąta prostokątnego. Jego zadaniem będzie wyeliminowanie fal odbitych od ramki, które komplikowałyby obserwacje. W przekroju brzeg gotowej wanienki będzie wyglądał tak, jak na rysunku 1.

Jako wanienkę można też wykorzystać ramkę z szybą stanowiącą oprawę jakiegoś starego obrazka. Obrazek oraz zabezpieczającą go od tyłu tekturę należy, oczywiście, wcześniej usunąć, żeby uzyskać przezroczyste dno. Szparę między wycięciem ramki i szybą należy uszczelnąć plasteliną, a jeżeli wewnętrzne ścianki ramki są prostopadłe do powierzchni szyby lub tworzą z nią duży kąt, trzeba, tak jak poprzednio, umieścić plastelinowy pasek od wewnętrznej strony ramki. Przekrój brzeg tej odmiany wanienki pokazany jest na rysunku 2.

Mając przygotowany jeden z rodzajów wanienki opieramy ją na dwóch krzesłach lub taboretach w sposób pokazany na rysunku 3 i nalewamy do niej wodę do wysokości około 1 – 1,5 cm (zobacz również rysunki 2 i 3). Na podłożu pod środkiem wanienki ustawiamy niską lampę nocną ze zdjętym abażurem albo lampę stołową z kloszem odwróconym do góry. Po włączeniu lampy do sieci cienie wszelkiego rodzaju zaburzeń na powierzchni wody będą widoczne na suficie. Taki sposób uwidaczniania zjawiska lub efektu fizycznego, w którym obserwujemy jego powiększony cień, nazywa się projekcją cieniową. Teraz możemy już przystąpić do badania zjawisk falowych.



**Rozwiązanie zadania F 386.** Ciężar samochodu ( $mg$ ) jest równy iloczynowi ciśnienia  $p$  i powierzchni styku opon  $S$ . Stąd

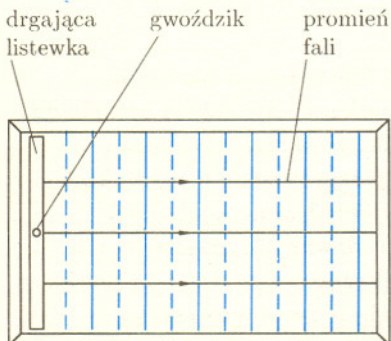
$$S = \frac{mg}{p}$$

Całkowita powierzchnia jezdnej części czterech opon wynosi

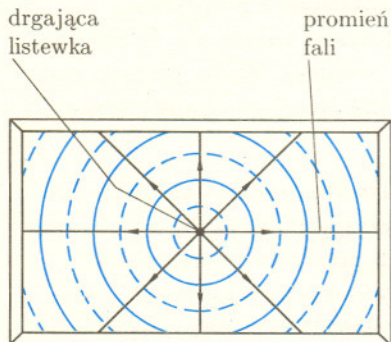
$$S_0 = 4 \cdot 2\pi r x$$

Stąd możemy obliczyć procent obwodu koła stykający się z jezdnią

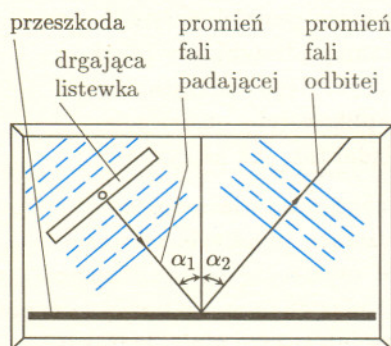
$$\epsilon = \frac{S}{S_0} = \frac{mg}{8\pi r x p} = 4,1\%$$



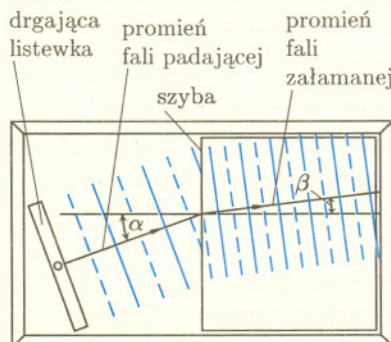
Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6



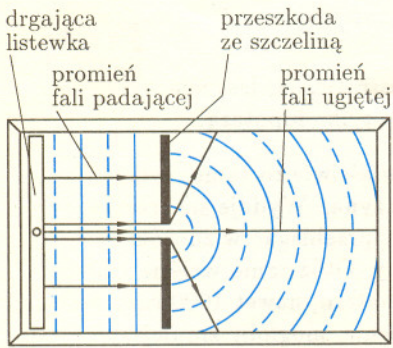
Rys. 7

Istnieją różne sposoby wytwarzania fal na powierzchni wody. Źródłem tych fal mogą być krople cieczy wypływające ze zbiorniczka zaopatrzonego w kranik i rurkę, kolec lub listewka zawieszona na sprężynce, albo bardzo wygodny w użyciu specjalny wibrator złożony z elektromagnesu lub głośnika, które zasilane są z generatora elektronicznego. My wybierzemy rozwiązanie, być może, nie najwygodniejsze, ale zapewne najprostsze i najtańsze. Będziemy wytwarzali fale uderzając regularnie w powierzchnię wody trzymaną w palcach listewką. W tym celu przytniemy kawałek listewki o wymiarach przekroju poprzecznego około  $1 \times 2$  cm i długości mniejszej o około 5 cm od szerokości naszej wanienki. W połowie długości listewki wbijemy w nią gwoździć służący do trzymania listewki w palcach. Przygotujmy jeszcze kilkucentymetrowy odcinek listewki, którego koniec zestrugamy na okrągło.

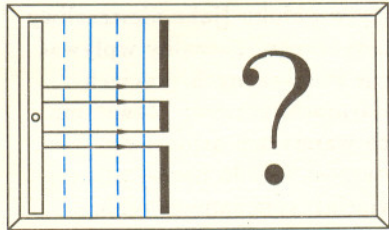
Uderzamy teraz rytmicznie w powierzchnię wody listewką trzymaną za gwoździć i umieszczoną tuż przy krótszym boku wanienki tak, jak na rysunku 4. Na suficie obserwujemy szereg równoległych odcinków poruszających się prostopadle do listewki w kierunku przeciwnego boku wanienki. Wytworzyliśmy w ten sposób falę liniową (rys. 4). Fala ta charakteryzuje się tym, że punkty ośrodka, w którym się rozchodzi, mające takie samo wychylenie z położenia równowagi i poruszające się w tę samą stronę (czyli – jak mówią fizycy – mające tę samą fazę), leżą na prostych równoległych. Ponieważ wanienka ma ograniczone rozmiary, w naszym doświadczeniu widzimy właśnie szereg równoległych odcinków. Przedstawiają one na przemian grzbiety i doliny, czyli największe wychylenia z położenia równowagi. (Na rysunkach grzbiety oznaczać będziemy linią ciągłą, a doliny przerywaną.) Gdyby udało się nam uwidocznic falę wytworzoną przez drgającą płaszczyznę, na przykład w zadymionym pokoju, wówczas otrzymalibyśmy falę płaską, dla której zbiorami punktów o stałych fazach, czyli powierzchniami fazowymi, byłyby wzajemnie równoległe płaszczyzny. Uogólnilibyśmy w ten sposób naszą dwuwymiarową falę liniową na przypadek trójwymiarowy. Linie wyznaczające kierunek rozchodzenia się fali nazywamy promieniami fali. Są one prostopadłe do powierzchni fazowych i w przypadku fali płaskiej lub liniowej wzajemnie równoległe.

Uderzamy teraz rytmicznie w środku powierzchni wody odcinkiem listewki o zestruganym na okrągło końcu. Otrzymujemy w ten sposób falę kolistą (rys. 5). Punkty o jednakowych fazach leżą na współśrodkowych okręgach, a promienie fali stanowią płaski pęk prostych zbiegających się w środku tych okręgów, czyli tam, gdzie „pracuje” źródło fali. Uogólnieniem na przypadek trójwymiarowy byłaby tu fala kulista, zwana też sferyczną, której powierzchnie fazowe są współśrodkowymi powierzchniami kul. Zobaczymy teraz, co dzieje się, gdy fala pada na przeszkodę. W tym celu przyklejamy plasteliną do dna wanienki wzdłuż jej dłuższego boku wystającą około 0,5 cm nad powierzchnię wody listewkę (rys. 6). Będzie ona stanowiła przeszkodę dla fal. Drugą listewkę z gwoździć ustawiamy ukośnie w rogu wanienki i seriami kilku szybkich rytmicznych uderzeń o powierzchnię wody wytwarzamy impulsy fali liniowej. Zauważamy, że dochodzą one do przeszkody i odbijają się od niej. Dokładniejsza obserwacja wskazuje, że kąt  $\alpha_2$  zawarty między prostą prostopadłą do tej przeszkody a promieniem fali odbitej (nazywany kątem odbicia) i kąt  $\alpha_1$  zawarty między tą prostopadłą a promieniem fali dochodzącej do przeszkody (nazywany kątem padania) są równe. W ten oto sposób odkryliśmy prawo odbicia fali.

Bardzo łatwo przekonać się, że prędkość rozchodzenia się fali na powierzchni wody zwiększa się, gdy głębokość wody jest większa. Wykorzystamy to do poznania następnego zjawiska falowego. W tym celu umieszczamy na dnie wanienki prostokątną szybę o grubości kilku milimetrów zakrywającą w przybliżeniu połowę powierzchni dna (rys. 7). Listewkę z gwoździć ustawiamy ukośnie w rogu wanienki i wytwarzamy falę liniową. Stwierdzamy, że w obszarze nad szybą, gdzie woda jest płytsza, fale stają się krótsze, zmniejsza się odległość między grzbiętami i dolinami oraz zmienia się kierunek



Rys. 8



Rys. 9

rozchodzenia się fal. Zjawisko to nazywamy załamaniem fal. Gdybyśmy zmierzili prędkości fal na płytszej i głębszej wodzie (oznaczając je odpowiednio przez  $v_2$  i  $v_1$ ), a także kąt  $\beta$  między prostą prostopadłą do linii rozdzielającej oba obszary wanienki i promieniem fali załamanej (nazywany kątem załamania) oraz określony analogicznie jak poprzednio kąt padania  $\alpha$ , otrzymalibyśmy prawo załamania fali w postaci

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}$$

Zbadamy jeszcze, co stanie się, gdy fala liniowa przechodzi przez przeszkodę z wąską szczeliną między dwoma kawałkami listewki przyklejonymi plasteliną w poprzek wanienki do jej dna (rys. 8). Szerokość szczeliny powinna wynosić 1 – 2 cm. Za pomocą listewki z gwóźdźkiem umieszczonej równoległo do przeszkody wytwarzamy falę liniową. Zauważamy, że po przejściu przez szczelinę w przeszkodzie staje się ona falą kolistą. To zjawisko zmiany kierunku rozchodzenia się fal, które przeszły przez otwory w przeszkodach lub obok krawędzi tych przeszkód, nazywamy dyfrakcją albo ugięciem fal.

Czy to już wszystkie zjawiska falowe? Ależ skądże! Co zaobserwujemy, gdy fala liniowa przejdzie przez dwie wąskie i położone blisko siebie szczeliny (rys. 9)? Jak nazywają się zjawiska, które tutaj występują? Co stanie się, jeżeli w układzie do badania zjawiska załamania fal (rys. 7) fala padająca będzie wytwarzana na płytszej wodzie i zostanie skierowana pod dużym kątem padania w stronę wody głębszej? Czy dla fali kolistej słuszne są odkryte wcześniej prawa odbicia i załamania? Co zaobserwujemy przy pewnej częstotliwości uderzeń, gdy listewkę do wytwarzania fal ustawimy równoległo do przeszkody bez szczeliny? To tylko niektóre problemy warte samodzielnego rozwiązania za pomocą zbudowanego przez nas układu. Okazało się, że – jak to zwykle w fizyce bywa – doświadczenia dają nie tylko odpowiedź na wcześniej postawione pytania, ale również przyczyniają się do sformułowania nowych problemów.

<p>Odcinek dla poczty</p> <p>Zł .....</p> <p>słownie złotych</p> <p>.....</p> <p>Dokładny adres .....</p> <p>wplacający .....</p> <hr/> <p>na .....</p> <p>r-k .....</p> <p>Dokładna nazwa .....</p> <p>01-806 Warszawa</p> <p>ul. Zuga 12</p> <hr/> <p>nazwa banku .....</p> <p>PKO VIII O/W-wa</p> <p>Nr r-ku .....</p> <p>1586-77578-136</p> <hr/> <p>stempel .....</p> <p>podpis przyjmującego .....</p>	<p>Odcinek dla posiadacza rachunku</p> <p>Zł .....</p> <p>słownie złotych</p> <p>.....</p> <p>Dokładny adres .....</p> <p>wplacający .....</p> <hr/> <p>na .....</p> <p>r-k .....</p> <p>Dokładna nazwa .....</p> <p>01-806 Warszawa</p> <p>ul. Zuga 12</p> <hr/> <p>nazwa banku .....</p> <p>PKO VIII O/W-wa</p> <p>Nr r-ku .....</p> <p>1586-77578-136</p> <hr/> <p>stempel .....</p> <p>podpis przyjmującego .....</p>	<p>Potwierdzenie dla wplacającego</p> <p>Zł .....</p> <p>słownie złotych</p> <p>.....</p> <p>Dokładny adres .....</p> <p>wplacający .....</p> <hr/> <p>na .....</p> <p>r-k .....</p> <p>Dokładna nazwa .....</p> <p>01-806 Warszawa</p> <p>ul. Zuga 12</p> <hr/> <p>nazwa banku .....</p> <p>PKO VIII O/W-wa</p> <p>Nr r-ku .....</p> <p>1586-77578-136</p> <hr/> <p>stempel .....</p> <p>podpis przyjmującego .....</p>
<p>Pobrano opłatę</p> <p>zł .....</p>	<p>Pobrano opłatę</p> <p>zł .....</p>	<p>Pobrano opłatę</p> <p>zł .....</p>

Spadek komety na Jowisza i moda na dinozaury pobudza ciągle do rozmyślań na temat, czy aby za wyginiecie tych zwierząt na Ziemi nie jest odpowiedzialny spadek czegoś w rodzaju planetoidy 65 milionów lat temu. Pod zanieczyszczoną wtedy tumanami pyłu atmosferą zapanowałby mrok, nastąpiłoby gwałtowne zahamowanie fotosyntezy, obniżenie temperatury i globalny kataklizm. Oczywiście, hipoteza ta nie jest nowa. Chyba najważniejsza hipoteza konkurencyjna głosi, że Układ Słoneczny dostał się w gęsty obłok materii międzygwiazdowej, co spowodowało zmniejszone nasłonecznienie Ziemi i katastrofalne w skutkach ochłodzenie się klimatu.

Za pierwszą hipotezą wydaje się przemawiać fakt, że w rozlicznych stanowiskach geologicznych, gdzie obserwuje się granicę między osadami kredowymi a trzeciorzędowymi, granica ta jest podejrzanie ostra. Ponadto warstwa graniczna wykazuje zwiększoną zawartość irydu, pierwiastka bardzo rzadkiego na Ziemi, a zdecydowanie obficie występującego w meteorytach. Przeciwko niej jest fakt, że – przynajmniej dotychczas – nie udało się jednoznacznie znaleźć śladu upadku na Ziemię sprawcy tego kataklizmu. Musiałoby to być ciało wielokilometrowe, a więc wybitny przez nie krater również byłby nie byle jaki. Badacze wskazują na Ziemi kilka miejsc kandydujących do rangi tego śladu, żadne z nich jednak nie ma wyraźnej przewagi.

Hipoteza ta, jako katastroficzna, jest więc frapująca, pozostaje jednak ciągle tylko hipotezą.

Hipoteza druga głosi właściwie to samo, tylko inna byłaby tego przyczyna. Wydaje się zresztą, że zjawisko to mogłoby przebiegać w sposób bardziej skomplikowany. Otóż samo wejście Układu Słonecznego w obłok materii, nawet 1000 razy gęstszej niż otaczająca nas obecnie, mogłoby zmniejszyć nasłonecznienie o kilka procent. Być może to jeszcze nie byłaby tragedia. Mogłoby to jednak pociągnąć za sobą następne fatalne zjawiska. Wiatr słoneczny przestałby nadążać z rozdmuchiowaniem tego obłoku, neutralny wodór zawarty w obłoku (jako niewrażliwy na działanie pola magnetycznego) zacząłby wpływać do ziemskiej atmosfery w zwiększonych ilościach tworząc wodę z tlenem atmosferycznym. Zawiesina wody (lodu) w wysokich warstwach atmosfery spowodowałaby wtedy wzrost albedo naszej planety (zdolności odbijania światła), tym samym mniej energii zaczęłoby docierać do gruntu. Wystąpiłby więc efekt „antycieplarniany”, a jego skutkiem byłoby globalne oziębienie klimatu i zagłada mniej wytrzymałych zwierząt i roślin. Ta hipoteza jest wprawdzie mniej efektowna, za to nie musi odwoływać się do tak rzadkich zjawisk, jakimi są spadki wielkich meteorytów. Chyba nieprędko poznamy prawdę.

*Tomasz KWAST*

Prenumerata „Delfy”  
za okres:

Prenumerata „Delfy”  
za okres:

Prenumerata „Delfy”  
za okres:



**M 708.** Czy istnieją takie funkcje ciągłe  $f, g: (2, 4) \rightarrow (2, 4)$ , że dla każdego  $x \in (2, 4)$  spełnione są jednocześnie trzy warunki:

$$f(g(x)) = g(f(x)) = x;$$

$$f(x)^{g(x)} = x^x;$$

$$f(x) \neq g(x)?$$

Rozwiązanie na str. 7

Zadanie zaproponował pan Krzysztof Oleszkiewicz.

**M 709.** Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich  $x, y$  oraz dla wszystkich  $\alpha \in \mathbf{R}$  zachodzi nierówność

$$x^{\sin^2 \alpha} \cdot y^{\cos^2 \alpha} < x + y.$$

Rozwiązanie na str. 7

**M 710.** W urnie znajduje się pewna liczba kul białych i pewna (być może inna) liczba kul czarnych. Wyciągamy kolejno, ze zwracaniem, dwie kule. Udowodnić, że prawdopodobieństwo  $p$ , wyciągnięcia dwóch kul jednego koloru, jest nie mniejsze od  $1/2$ .

Rozwiązanie na str. 7

*Redaguje Jarosław KULPA*

**F 385.** Aluminiowa kula stoi na dużo twardszym od niej podłożu. Oszacować promień tej kuli, wiedząc, że powierzchnia jej styku z podłożem wynosi  $1 \text{ mm}^2$ .

Moduł Younga oraz gęstość aluminium wynoszą odpowiednio:  $E = 7 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ ,  $\rho = 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

Rozwiązanie na str. 9

**F 386.** Jaka część obwodu koła standardowego samochodu osobowego styka się z jezdnią?

Dane dotyczące samochodu: nadciśnienie w oponach  $p = 2$  atmosfery, masa  $m = 1000 \text{ kg}$ , promień koła  $r = 30 \text{ cm}$ , jego szerokość  $x = 16 \text{ cm}$ . Założyć równomierne rozłożenie ciężaru samochodu na wszystkie cztery koła.

Rozwiązanie na str. 10



\* \* \*

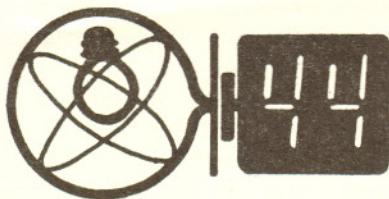
Astronomicznym odpowiednikiem słynnego problemu kury i jajka jest, na przykład, zagadnienie: czy uformowane wcześniej galaktyki zebrały się w gromady galaktyk, czy ogromne obłoki rozproszonej materii podzieliły się na fragmenty, z których dopiero powstały galaktyki. W świecie gwiazd sprawa wydaje się rozstrzygnięta: obłoki materii w miarę zagęszczania ogrzewają się, co sprzyja rozpadowi na mniejsze fragmenty, a z nich w końcu powstają gwiazdy. Na zdrowy rozum, mechanizm ten mógłby działać też w większej skali. Jednak obserwacje najbliższej gromady galaktyk, gromady w Pannie (Virgo), sugerują jakby coś przeciwnego. Gromada ma mianowicie dwie koncentracje, z których każda w centrum mieści wielką galaktykę eliptyczną. Koncentracje te najwyraźniej spadają na siebie – dowodzi tego rozkład przestrzenny galaktyk i ich prędkości radialne. Wreszcie galaktyki różnych typów są w tych podgromadach nie wymieszane: galaktyki eliptyczne (masywne) grupują się w pobliżu centrów, a spiralne (lżejsze) na peryferiach podgromad (nazywa się to efektem segregacji galaktyk, a występuje on w licznych gromadach). Ten fakt akurat można tłumaczyć dwójako. Może on oznaczać, że gromady nie osiągnęły jeszcze stanu równowagi, albo że właśnie są stare w skali kosmicznej, gdyż pojawianie się efektu segregacji z upływem czasu potwierdzają numeryczne symulacje mechanicznej ewolucji gromad. Badania ewolucji gromad stawiają dopiero pierwsze kroki.

T.K.

\* \* \*

Uciec tak na bezludną wyspę, z dala od wszelkich śladów cywilizacji! Ale gdzie? Na wyspie Acadia w atolu Ducie (na Pacyfiku, 293 mile od najbliższej zamieszkałej wyspy i ponad 300 mil od najbliższego kontynentu) na odcinku wybrzeża o długości 1,5 mili znaleziono 953 ślady cywilizacji: ponad 100 boi, 71 plastikowych butelek, 171 butelek szklanych z 15 krajów (w tym ponad 50 po whisky), 25 butów, 6 żarówek, 6 jarzeniówek, 2 rękawiczki, piłkę, inhalator dla astmatyków i wiele innych rzeczy.

J.K.



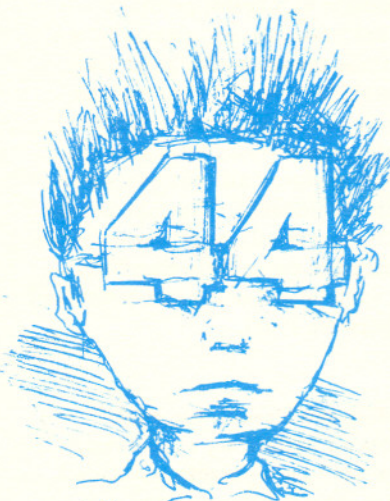
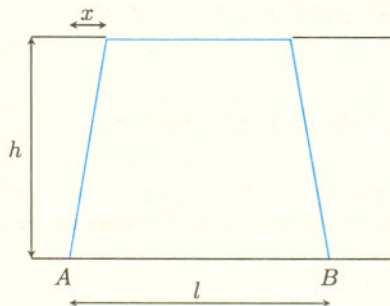
Czołówka ligi zadaniowej

**Klub 44 F**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 167 ( $WT=1,99$ ) i 168 ( $WT=2,59$ ) z numeru 11/1993

Przemysław Gworys	- Częstochowa	46,72
Tomasz Wietecha	- Tarnów	37,09
Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	34,04
Andrzej Borowski	- Aleksandrów K.	29,02
Aleksander Surma	- Myszków	15,66
Paweł Perkowski	- Szczecin	13,02

Gratulacje dla Pana Przemysława Gworysa, który po raz drugi zaliczył 44 punkty.



### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 3$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1994.

### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/1994

Redaguje Jerzy B. BROJAN

#### Przypominamy treść zadań:

**175.** Nad ziemią wieje poziomo wiatr, którego prędkość jest proporcjonalna do wysokości: na każde 100 m wysokości prędkość rośnie o 50 m/s. Prędkość dźwięku względem powietrza wynosi 330 m/s. Po jakim czasie sygnał dźwiękowy dotrze z punktu  $A$  do punktu  $B$  odległego o 2 km w kierunku wiatru?

**176.** Oto fragment artykułu z jednego z zeszytów numerów *Świata Nauki*, poświęconego pomiarom temperatury ziemi na różnych głębokościach i możliwościom odtworzenia w ten sposób historii zmian temperatury powietrza:

„Dobowe cykle ciepłych dni i chłodnych nocy wywołują zakłócenia jedynie w najwyższej, metrowej warstwie gleby czy skały, oscylacje zaś sezonowe (wynikające z pór roku) docierają na głębokość około 15 metrów. Cykl stuletni da się obserwować na głębokości około... metrów, a milenijny - około... metrów”.

Uzupełnić wartości wy kropkowane i uzasadnić. Wskazówka: Zastosować analizę wymiarową.

**175.** Załóżmy dla uproszczenia, że powyżej pewnego poziomu  $h$  wiatr wieje ze stałą prędkością  $\gamma h$  (w naszym zadaniu  $\gamma = 0,5 \text{ s}^{-1}$ ), a poniżej tego poziomu wieje ze stałą prędkością  $\frac{1}{2}\gamma h$ . Wtedy najszybsza droga sygnału składa się z trzech odcinków prostych (rys.). Wprowadźmy czas  $t$  przebiegu pierwszego (lub trzeciego) odcinka i kąt  $\alpha$  między kierunkiem przemieszczania się sygnału względem powietrza na jednym z tych odcinków a poziomem. Oznaczmy też prędkość dźwięku względem powietrza jako  $v_0$ , a odległość  $AB$  jako  $l$ . Wtedy przesunięcia pionowe  $h$  i poziome  $z$  możemy kolejno wyliczyć ze wzorów

$$h = tv_0 \sin \alpha, \quad z = t(v_0 \cos \alpha + \frac{1}{2}\gamma h),$$

a czas  $T$  przejścia całej drogi jest równy

$$T = 2t + \frac{l - 2z}{v_0 + \gamma h}.$$

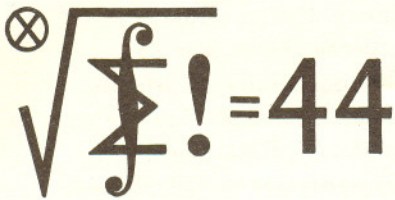
Minimum  $T$  jako funkcji dwóch parametrów  $\alpha$  i  $t$  można znaleźć prawdopodobnie tylko numerycznie. Otrzymuje się wartość  $T \approx 5,032 \text{ s}$  dla  $\alpha \approx 0,68 \text{ rad}$ ,  $t \approx 1,82 \text{ s}$  (zatem  $h \approx 378 \text{ m}$ ). Oczywiście, lepsze przybliżenie można by osiągnąć wprowadzając trzy lub jeszcze więcej warstw powietrza - nielato jednak znaleźć minimum funkcji, na przykład, czterech zmiennych.

**176.** Przepływ ciepła jest proporcjonalny do różnicy temperatur, a ściślej - do tzw. gradientu temperatury. Przedstawia to równanie

$$\frac{dQ}{dt} = \lambda S \frac{dT}{dx},$$

gdzie  $dQ$  jest ciepłem przepływającym w czasie  $dt$  w kierunku osi  $x$  przez prostopadłą do niej powierzchnię  $S$ ,  $dT$  jest różnicą temperatur między dwoma punktami odległymi o  $dx$ , a  $\lambda$  jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego materiału. Nietrudno sprawdzić, że wymiarem tego współczynnika jest  $\text{J s}^{-1}\text{m}^{-1}\text{K}^{-1}$ . Przepływ ciepła powoduje zmiany temperatury ośrodka, które są odwrotnie proporcjonalne do iloczynu gęstości materiału przez ciepło właściwe. Wymiarem tego iloczynu jest  $\text{J m}^{-3}\text{K}^{-1}$ , a kombinując go ze współczynnikiem  $\lambda$  możemy otrzymać wielkość o wymiarze  $\text{m}^2\text{s}^{-1}$  (tzw. współczynnik przewodzenia temperatury). Głębokość przenikania zmian temperatury musi być proporcjonalna do pierwiastka z iloczynu tego współczynnika przez okres wahań temperatury powierzchniowej. Zatem dla okresu stuletniego głębokość będzie dziesięciokrotnie większa niż dla rocznego, czyli równa 150 m, a dla okresu tysiącletniego - około 500 m.

**Uwaga.** Podane wartości mają charakter orientacyjny, gdyż głębokość przenikania zależy w pewnym stopniu od precyzji pomiaru temperatury warstw ziemi. Czytelnikom bliżej zainteresowanym przebiegiem zmian temperatury na różnych głębokościach polecamy artykuł w *Świecie Nauki* 8/1993 (zwłaszcza wykresy na str. 18).



Przypominamy treść zadań:

277. Ciąg  $(a_n)$  jest określony przez zależności

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{a_0 + \dots + a_n} - \sqrt{2} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Czy szereg  $\sum a_n$  jest zbieżny?

278. Rozwiązać w liczbach całkowitych  $x, y, z$  równanie

$$(x + y + z)^3 = 4(x^3 + y^3 + z^3) + 12xyz + 9.$$

277. Ciąg sum częściowych  $(s_n = a_0 + \dots + a_n)$  badanego szeregu spełnia zależność rekurencyjną

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} = s_n + \frac{1}{s_n} - \sqrt{2} = f(s_n),$$

gdzie

$$f(x) = x + \frac{1}{x} - \sqrt{2} \quad \text{dla } x > 0.$$

Jedynym punktem stałym funkcji  $f$  (tj. rozwiązaniem równania  $f(x) = x$ ) w przedziale  $(0; \infty)$  jest liczba  $\xi = 1/\sqrt{2}$ .

Wykażemy, że funkcja  $g(x) = f(f(x))$  spełnia nierówność:

$$(1) \quad \xi < g(x) < x \quad \text{dla } x \in (\xi; 1).$$

Funkcja  $f$  jest malejąca w przedziale  $(0; 1)$ ; zatem dla  $x \in (\xi; 1)$  mamy  $f(x) < f(\xi) = \xi$ , a stąd  $g(x) = f(f(x)) > f(\xi) = \xi$ ; uzyskaliśmy pierwszą z nierówności (1).

Dla dowodu drugiej przekształcamy różnicę

$$\begin{aligned} g(x) - x &= \left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}\right) + \left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^{-1} - \sqrt{2} - x = \\ &= \frac{-2\sqrt{2}x^3 + 6x^2 - 3\sqrt{2}x + 1}{x(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} = \frac{(1 - \sqrt{2}x)^3}{x(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} < 0 \end{aligned}$$

(na mocy założenia, że  $x > \xi$ , czyli  $\sqrt{2}x > 1$ ).

Nierówności (1) są więc wykazane. Wynika z nich, że ciąg

$$s_0 = 1, \quad s_2 = g(s_0), \quad s_4 = g(s_2), \quad s_6 = g(s_4), \quad \dots$$

leży w przedziale  $(\xi; 1)$  i jest malejący, więc zbieżny. Jego granicą musi być punktem stałym funkcji  $g$ , należącym do przedziału  $(\xi; 1)$ . Jedyną liczbą  $\xi$  spełnia te warunki (por. (1)). Zatem  $\lim s_{2k} = \xi$ . Stąd także  $\lim s_{2k+1} = \lim f(s_{2k}) = f(\xi) = \xi$ , i w konsekwencji  $\lim s_n = \xi$ .

Wniosek: badany szereg jest zbieżny do sumy  $\xi = 1/\sqrt{2}$ .

278. Wprowadźmy oznaczenia:

$$\begin{aligned} s &= x + y + z, & p &= yz + zx + xy, & q &= x^3 + y^3 + z^3, & r &= xyz, \\ u &= y + z - x, & v &= z + x - y, & w &= x + y - z. \end{aligned}$$

Zadane równanie przepisujemy jako

$$(2) \quad s^3 = 4q + 12r + 9.$$

Zachodzą tożsamości

$$\begin{aligned} s^3 &= x^3 + y^3 + z^3 + 3yz(y+z) + 3zx(z+x) + 3xy(x+y) + 6xyz = \\ &= q + 3yz(s-x) + 3zx(s-y) + 3xy(s-z) + 6r = \\ &= q + 3sp - 3r \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} uvw &= (s-2x)(s-2y)(s-2z) = \\ &= s^3 - 2s^2(x+y+z) + 4s(yz+zx+xy) - 8xyz = \\ &= -s^3 + 4sp - 8r. \end{aligned}$$

Wyznaczając z każdej z nich iloczyn  $sp$  oraz przyrównując otrzymane wyrażenia otrzymujemy związek

$$3uvw = s^3 - 4q - 12r.$$

Równanie (2) przybiera zatem postać

$$uvw = 3.$$

Ma ono w liczbach całkowitych następujące rozwiązania  $(u, v, w)$ :

$$(3, 1, 1), \quad (3, -1, -1), \quad (-3, -1, 1)$$

oraz ich permutacje. Otrzymujemy stąd następujące rozwiązania  $(x, y, z)$  równania wyjściowego:

$$(1, 2, 2), \quad (-1, 1, 1), \quad (0, -1, -2)$$

oraz ich permutacje.

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 267 (WT=1,07) i 268 (WT=1,96) z numeru 10/1993

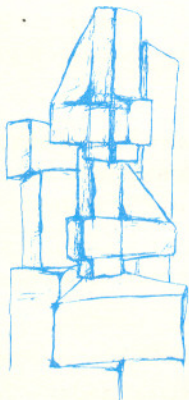
Leszek Gasiński	-	Stalowa Wola	46,99
Jan Ciach	-	Ostrowiec Św.	46,68
Jerzy Janowicz	-	Bolesławiec	44,40
Jan Kraszewski	-	Legnica	40,69
Mirosław Matłaga	-	Skoczów	40,30
Tomasz Kulpa	-	Katowice	38,94
Krzysztof Jedziniak	-	Katowice	36,64

Witamy w Klubie 44 M trzech Panów, reprezentujących trzy różne „generacje” uczestników ligi:

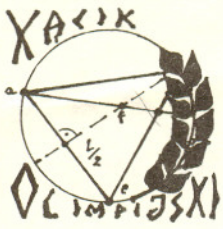
L. Gasiński – po raz pierwszy (!);

J. Ciach – po raz czwarty (!!);

J. Janowicz – po raz ósmy (!!!).







(4)

W dniach 11–15 listopada 1993 roku w stolicy Łotwy, Rydze, odbyły się Międzynarodowe Zespołowe Zawody Matematyczne *Baltic Way-93*. Pięciosobowe drużyny z ośmiu państw (Danii, Estonii, Finlandii, Islandii, Litwy, Łotwy, Polski i Szwecji) rozwiązywały te same 20 zadań. Zawody wygrała drużyna Polski (w składzie: Światosław Gal, Jan Gorski, Rafał Łochowski, Konrad Patkowski, Piotr Śniady), nieznacznie wyprzedzając zespoły Łotwy i Estonii.

Jednym z najtrudniejszych zadań okazało się następujące

**Zadanie 6.** Funkcje  $f, g: (2, 4) \rightarrow (2, 4)$  dla każdego  $x \in (2, 4)$  spełniają warunki

$$(1) \quad f(g(x)) = g(f(x)) = x,$$

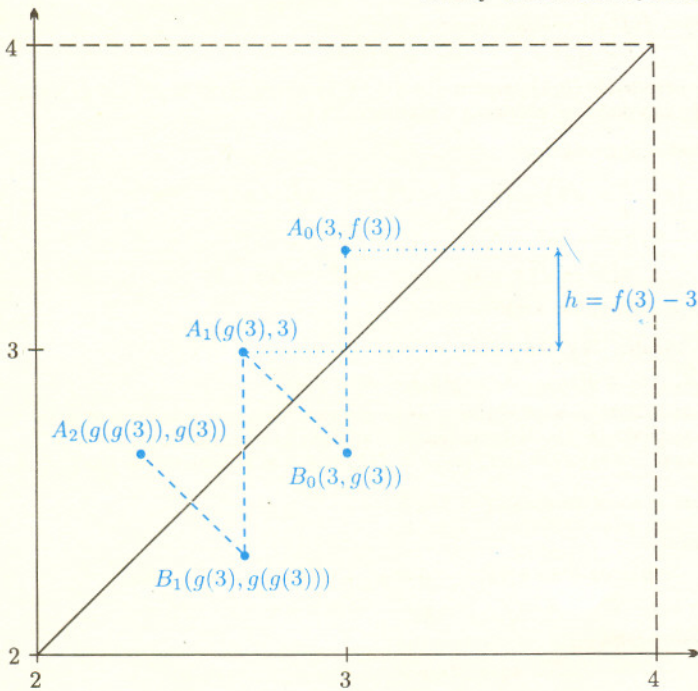
$$(2) \quad f(x) \cdot g(x) = x^2.$$

Udowodnić, że  $f(3) = g(3)$ .

**Rozwiązanie.** Zastąpmy warunek (2) przez (2'):

$$(2') \quad f(x) + g(x) = 2x.$$

Wtedy szkic rozwiązania można przedstawić na jednym rysunku.



Niech  $f(3) = 3 + h$ . Wówczas punkt  $A_0$  o współrzędnych  $(3, 3 + h)$  należy do wykresu funkcji  $f$ . Z warunku (2') wnioskujemy, że punkt  $B_0$  o współrzędnych  $(3, 3 - h)$  należy do wykresu funkcji  $g$ . Odbijając wykres funkcji  $g$  od prostej  $y = x$  otrzymamy wykres funkcji  $f$ , ponieważ warunek (1) mówi, że  $f$  i  $g$  są wzajemnie odwrotne. Zatem, punkt  $A_1 = (3 - h, 3)$  należy do wykresu funkcji  $f$ , czyli  $f(3 - h) = (3 - h) + h = 3$ . Powtarzając powyższe rozumowanie, otrzymamy całą rodzinę punktów  $A_1, A_2, \dots$  należących do wykresu  $f$ , przy czym punkt  $A_n$  będzie miał współrzędne  $(3 - nh, 3 - (n - 1)h)$ .

Z założenia  $f: (2, 4) \rightarrow (2, 4)$ , czyli wiemy, że cały wykres funkcji  $f$  jest zawarty w prostokącie  $(2, 4) \times (2, 4)$ . Toteż dla każdej liczby naturalnej  $n$  spełnione są nierówności

$$2 < 3 - nh < 4, \quad \text{czyli} \quad -\frac{1}{n} < h < \frac{1}{n}.$$

Jednakże wyrażenie  $\frac{1}{n}$  zbiega do zera dla  $n \rightarrow \infty$ . Stąd wnosimy, że  $h = 0$ , a więc  $f(3) = 3$ . Tak samo dowodzimy, że  $g(3) = 3$ . Po dokonaniu kosmetycznych zmian w zaprezentowanym rozumowaniu można wykazać, że w istocie dla każdego  $x \in (2, 4)$  zachodzą równości  $f(x) = g(x) = x$ . Teraz rozwiązanie zadania w jego oryginalnym sformułowaniu nie powinno już sprawić Czytelnikowi żadnych trudności. ■

Podczas sprawdzania rozwiązań przedstawionych przez zawodników okazało się, że drużyna Szwecji, wskutek pomyłki szwedzkiego członka Jury zawodów, otrzymała zniekształconą treść szóstego zadania; mianowicie, w warunku (1) wpisano osłabione założenie  $f(g(x)) = g(f(x))$  dla każdego  $x \in (2, 4)$ . Tak sformułowane zadanie jest, oczywiście, trudniejsze, jednak jego teza pozostaje prawdziwa.

Czytelnikowi proponujemy postawienie się w sytuacji zawodników ze Szwecji i rozwiązanie trudniejszej wersji zadania. Można też rozwiązać zadanie **M 708** ze str. 13.

Drużyna Szwecji chciała nawet spowodować unieważnienie wszystkich rozwiązań zadania 6. Zmieniłoby to zdobywców trzeciego miejsca. Opiekunowie polskiej ekipy przekonali jednak Jury, że po pierwsze błąd w sformułowaniu zadania został zawiniony wyłącznie przez szwedzkiego członka Jury, po drugie teza trudniejszej wersji zadania jest prawdziwa. Druga z tych czynności wymagała nieco wysiłku...

Krzysztof OLESZKIEWICZ

Jeżeli do likwidacji matematycznego analfabetyzmu naszego społeczeństwa nie przyłożymy ręki, to z pewnością dożyjemy czasów, kiedy zdystansowani w rozwoju ekonomicznym i społecznym przez rozmaite Patagonie, Wyspy Kanaryjskie i inne jeszcze nie liczące się kraje, załować będziemy naszej beczynności i nieporadności.

Zdzisław Opiał („Matematyka”, 1966)

27 lipca 1994 mija dwudziesta rocznica śmierci Zdzisława Opiała. Miał wtedy 44 lata.

Mimo że od jego śmierci minęło już tak wiele czasu, mimo że wśród pracowników Instytutu Matematyki UJ jest coraz mniej osób, które go znały, o Profesorze Opiału wciąż się w Krakowie mówi. Był osobą, o której się nie zapomina, wywierał wielki wpływ na swoje otoczenie. Był wspaniałym i niesłychanie wszechstronnym matematykiem. Zajmował się przede wszystkim równaniami różniczkowymi, ale nie tylko. W szczególności znakomicie znał się na historii matematyki, wiele czasu i trudu poświęcił dydaktyce i nauczaniu matematyki.

W języku polskim zostało tak niewiele – przede wszystkim znakomity, wielokrotnie wznawiany skrypt *Algebra wyższa* i dwie książeczki: niedawno ponownie wydane *Zbiory, formy zdaniowe, relacje* oraz (wspólna z Marianem Łuczyńskim) *O konstrukcjach trójkątów*. Poświęcono Opiałowi część tomu XXI *Wiadomości Matematycznych*. Przykre i smutne, że w Encyklopedii Szkolnej *Matematyka*, tak obszernej, o Opiału, którego działalność na rzecz szkoły była tak wielka, nie ma nawet wzmianki.

Chcielibyśmy podzielić się tu kilkoma spośród informacji, anegdot, które słyszeliśmy od innych. W dużej mierze po Człowieku zostaje to, co inni o Nim opowiadają.

Jeden z polskich matematyków kiedyś, będąc za granicą, potrzebował artykułu Opiała. Znalazł go w dziale odbitek biblioteki uniwersyteckiej, na półce zatytułowanej „Opiał”. Bardzo niewielu matematyków miało tam „własne” półki – a było to w roku 1960, gdy Opiał miał 30 lat.

Ongiś, podczas wizyty jednego z redaktorów *EPSILONA* w Edynburgu, w rozmowie z miejscowym matematykiem padło nazwisko Opiała. „Raz napisałem do niego z prośbą o odbitkę i przysłał mi wtedy chyba 20 prac” – powiedział gospodarz. Pokazał te prace i wtedy okazało się, że wszystkie one były wydane w jednym roku. A Opiał złych czy mało wartościowych prac nie pisał.

Panował w Krakowie zwyczaj, że Profesorowi Ważewskiemu jego uczniowie dawali, przed wysłaniem do publikacji, swoje prace. Te prace Ważewski nosił w teczce i po pewnym (nieraz długim) czasie oddawał – często z zaleceniem gruntownego przerobienia. Podobno nie zdarzyło się, by miał kiedykolwiek jakąś uwagę do prac Opiała; te z reguły przebywały w teczce bardzo krótko.

Ongiś Opiał jechał ze swym kolegą – matematykiem z Krakowa do Warszawy nocnym pociągiem (nie było wtedy super-ekspresów). Opiał stał na korytarzu, a jego towarzyszy podróży siedział w przedziale i drzemał. Opiał potem opowiadał: „on spał, a ja w tym czasie pracę napisałem”.

Pewne wydawnictwo przygotowywało przekład (z języka rosyjskiego) zbioru zadań z równań różniczkowych. Opiała (wówczas chyba studenta matematyki) poproszono, by rozwiązał wszystkie zadania i poprawił błędy

w odpowiedziach. Opiał zgodził się, wszystko przeliczył (nie trzeba chyba zaznaczać, jak miłym zajęciem jest rozwiązywanie wielu równań różniczkowych), zajęło mu to trochę czasu, błędów było dużo. Po pewnym czasie zbiór wydano. Ze wszystkimi błędami oryginału... A Opiał nie mógł nawet mieć pretensji – w polskim wydaniu nigdzie nie podano jego nazwiska, honorarium dostał.

Nie używał windy, wchodził na V piętro (gdzie mieści się Instytut Matematyki UJ) po schodach. Nie jeździł tramwajami, chodził piechotą po mieście – miał zwyczaj podczas tych spacerów myśleć o matematyce. Twierdził, że nigdy się nie przenieś z Krakowa (i nie przeniósł się), bo „nie będzie się innego miasta uczyć na pamięć”. Chodził szybko; gdy kiedyś grupa osób zdecydowała udać się z Instytutu Matematyki do pewnego miejsca (w miarę odległego), Opiał poszedł tam piechotą, inni skierowali się na przystanek tramwajowy. Opiał był na miejscu wcześniej.

Przypomnijmy w skrócie historię opisaną w *Delcie* nr 1/1978. Autor artykułu miał pewien problem dotyczący historii liczby  $e$ ; nikt nie potrafił mu udzielić odpowiedzi (a pytał wielu wybitnych matematyków). W końcu zdecydował się napisać do Opiała. Na list datowany 13. grudnia Opiał odpisał, wyjaśniając zagadnienie ze szczegółami, już 19. grudnia.

Jego wykłady były podobno rewelacyjne. Udało mu się kończyć je nie tylko w idealnie wyznaczonym czasie, ale też z reguły tak, że ostatnią kropkę stawał w prawym dolnym rogu tablicy.

Kiedyś na wykładzie Profesor opowiedział następującą historyjkę;

*Po lesie chodził zajączek i wołał: „Jestem królem zwierząt! Jestem królem zwierząt!”. Usłyszał to wilk i nieco się zirytował; poleciał zajączkowi zamilknąć. Zajączek nie postuchał i dalej wołał to, co poprzednio. Wilk zdenerwował się i powiedział: „Zajączku, przestań, bo będzie z tobą źle!” – „Tak? To chodź ze mną w krzaki!”*

*Poszli w krzaki, przez chwilę się coś w krzakach kottowało, po czym wyszedł z krzaków wilk w oplakanym stanie. Za wilkiem wyszedł, zacierając ręce, zajączek, a na końcu niedźwiedź, który zadał pytanie: „No co, czy ktoś ma jeszcze jakieś pretensje do mojego doktoranta?”*

*Morał – nie jest ważne, co się pisze w pracy doktorskiej, ważny jest promotor.*

Parę tygodni później Profesor zapytał na wykładzie studentów, czy pamiętają dokładnie pewne twierdzenie (było to twierdzenie, które studenci powinni byli znać). Na sali zaległa głucha cisza. Na to Profesor: „Ja tu opowiadałem kiedyś historyjkę o zajączku. Pamiętacie ją Państwo?”. Sala chórem: „Tak!” – „No to jak to? Głupią anegdotę Państwo pamiętacie, a podstawowego twierdzenia nie?”

A swoją drogą, historyjka też skłania do zadumy...