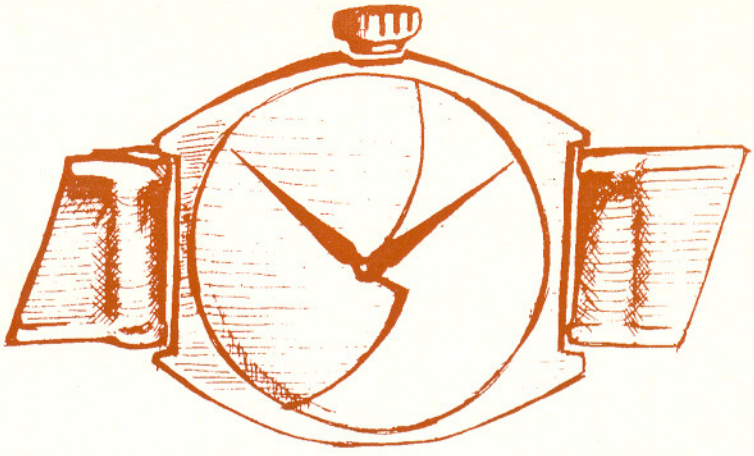
delta



SPIS TREŚCI
NUMERU 11(258)

O aproksymacjach diofantycznych
Kazimierz Szymiczek str. 1

Czy Księżyc spadnie na Ziemię?
Stanisław Kasperczuk str. 1

Równanie zegarka
Piotr Chrząstowski str. 5

Niebo przez lornetkę str. 7

Mała Delta str. 8

Zadania str.10

Szukamy dia- i paramagnetyków
Stanisław Bednarek str.11

Promieniotwórcze śmieci energetyki jądrowej
Maria Kaczmarczyk str.12

Kącik olimpijski str.15

Klub 44 str.16

Epsilon str.17

W następnym numerze:

Porozmawiajmy o kobietach

Okładkę i ilustracje wykonał
Bernard BADZIOCH

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski

„Delta" – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:
Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichocki
Roman Duda
Jan A. Gaj
Tomasz Hofmokl
Marta Kicińska-Habior – przewodnicząca
Krzysztof Maślanka
Andrzej Mąkowski – wiceprzewodniczący
Andrzej Pelczar
Zbigniew Płochocki
Zdzisław Pogoda
Michał Różyczka
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Mieczysław Subotowicz
Andrzej Szymacha
Andrzej Woszczyk
Wacław Zawadowski

Redaguje kolegium w składzie:
Krzysztof Biesaga
Jan Kalinowski – z-ca red. nacz.
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nacz.
Tomasz Kwast
Krzysztof Rejmer
Anna Rudnik
Paweł Strzelecki
Joanna Udalska

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21
PAWELST@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej w Warszawie, ul. Mińska 65
Skład systemem TEX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące**. Cena jednego numeru w 1996 roku wynosi 2 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru wynosi w 1996 r. 4 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Blankiet na stronach 9–10.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 1996 r. wynosi 6 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju:
   - a) jednostki kolportażowe „Ruch" S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób;
   - b) od osób zamieszkałych lub instytucji mających siedzibę w miejscowościach, w których nie ma jednostek kolportażowych RUCH, wpłaty należy wnosić na konto „RUCH" S.A. Oddział Warszawa w PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8^{00} – 14^{00}; dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską".
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej. Wpłaty przyjmuje „RUCH" S.A. na konto lub w kasach Oddziału. Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną ze zleceniem dostawy za granicę od osób zamieszkałych w kraju:
   do 20 XI na I kwartał roku następnego,
   do 20 II na II kwartał,
   do 20 V na III kwartał,
   do 20 VIII na IV kwartał.
6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH" S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-10-39, 620-10-19, 620-12-71 w. 2442, 2366.

Cena 1 egzemplarza 1 zł 50 gr, 15 000 zł

O aproksymacjach diofantycznych

Kazimierz SZYMICZEK

Artykuł jest skróconą i zmienioną wersją odczytu Autora na konferencji: Aproksymacje – XIV Szkoła Matematyki Poglądowej, Miętne, 27.01.–31.01.1995

Aproksymacje diofantyczne stanowią dział teorii liczb, którego głównym zagadnieniem jest badanie przybliżeń liczb rzeczywistych liczbami wymiernymi. Na pierwszy rzut oka zagadnienie wydaje się trywialne, gdyż liczby wymierne leżą gęsto w zbiorze liczb rzeczywistych, można więc liczby rzeczywiste aproksymować liczbami wymiernymi z dowolną dokładnością. Ten pierwszy odruch na myśl o przybliżeniach wymiernych liczby rzeczywistej θ można uściślić następująco:

Dla każdej liczby rzeczywistej θ i dla każdej liczby naturalnej q istnieje taka liczba całkowita p, że $|\theta - p/q| < 1/q$.

Wystarczy bowiem oś liczbową podzielić na przedziały $c/q \le x < (c+1)/q$, gdzie c jest dowolną liczbą całkowitą. Przedziały te mają długość $1/q$ i liczba θ należy do jednego z nich, powiedzmy $p/q \le \theta < (p+1)/q$, dla pewnej liczby całkowitej p. A więc odległość θ od liczby p/q jest mniejsza niż $1/q$.

Widzimy więc, że bardzo łatwo można stwierdzić istnienie przybliżenia liczby rzeczywistej liczbą wymierną o mianowniku $q > 0$ z dokładnością $1/q$. Powstaje jednak natychmiast pytanie, czy jest możliwe aproksymowanie liczb rzeczywistych liczbami wymiernymi o mianowniku $q > 0$ z dokładnością lepszą niż $1/q$, powiedzmy z dokładnością $1/q^2$ lub $1/q^3$? Znalezienie wyczerpujących odpowiedzi na te pytania zajęło matematykom ponad 100 lat. Przedstawimy tutaj kilka charakterystycznych rezultatów z tego zakresu.

Zasada szufladkowa i twierdzenie Dirichleta

Punktem wyjścia teorii aproksymacji diofantycznych jest następujące proste, ale nietrywialne twierdzenie Dirichleta.

Prawdopodobnie w dowodzie tego twierdzenia Dirichlet użył po raz pierwszy tak zwanej *zasady szufladkowej* Dirichleta. Zasada szufladkowa mówi, że jeśli mamy $Q+1$ przedmiotów i są one umieszczone w Q szufladkach, to przynajmniej jedna z szufladek zawiera 2 przedmioty. Jest zadziwiające, że ta prosta zasada rozumowania ma w matematyce bardzo liczne i głębokie konsekwencje.

Twierdzenie 1 (P.G.L. Dirichlet, 1842)
Niech θ będzie liczbą rzeczywistą. Dla każdej liczby naturalnej $Q > 1$ istnieją takie liczby całkowite p, q, że

$$|q\theta - p| < 1/Q \quad \text{oraz} \quad 0 < q \le Q\,. \tag{1}$$

Dowód. Dla dowolnej liczby rzeczywistej θ wprowadzamy oznaczenie $\{\theta\}$ dla mantysy liczby θ. A więc $\{\theta\} = \theta - [\theta]$, gdzie $[\theta]$ oznacza część całkowitą liczby θ, czyli największą liczbę całkowitą nie większą niż θ. Używając tego oznaczenia rozpatrzmy $Q+1$ liczb rzeczywistych

$$0 = \{0\theta\},\ \{\theta\} = \{1\theta\},\ \{2\theta\},\ \ldots,\ \{Q\theta\}\,.$$

Wszystkie one leżą w przedziale domknięto-otwartym $[0,1)$. Przedział ten rozbijamy na Q „szufladek", którymi są podprzedziały

$$i/Q \le x < (i+1)/Q, \quad i = 0, 1, \ldots, Q-1$$

o długości $1/Q$. A więc $Q+1$ liczb $\{i\theta\}$ leży w Q szufladkach.

Czy Księżyc spadnie na Ziemię?

Stanisław KASPERCZUK

To z inicjatywy Edmonda Halleya (1656–1742), sławnego dzięki komecie nazwanej jego imieniem, Isaac Newton (1642–1727) napisał wreszcie liczące 700 stron dzieło *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* i przesłał je do Royal Society 28 kwietnia 1686 r. W dziele tym, według opinii Towarzystwa Królewskiego, przeprowadzony został matematyczny dowód hipotezy Mikołaja Kopernika (1473–1543) w formie podanej przez Johannesa Keplera (1571–1630) oraz wyjaśnione zostały wszystkie ruchy planet na podstawie jednego założenia o ciążeniu odwrotnie proporcjonalnym do kwadratu odległości od środka Słońca. Towarzystwo podjęło decyzję o wydaniu dzieła Newtona na swój koszt, a odpowiedzialnym za jego wydrukowanie uczyniło Halleya. Niestety, jak się wkrótce okazało, druk kosztownego i niepoczytnego dzieła Francisa Willoughby'ego *The History of Fishes* zrujnował Towarzystwo Królewskie i manuskrypt *Principiów* został skazany na zapomnienie. Na szczęście Halley był synem zamożnego producenta mydła, a przy tym człowiekiem wielkodusznym, więc wydał to wiekopomne, trzytomowe dzieło własnym sumptem. W tym czasie sytuacja finansowa Newtona była całkiem przyzwoita. Choć pensja profesora i wówczas nie była wysoka, to drugie tyle przynosiła mu odziedziczona farma w Woolsthorpe, gdzie rosła sławna jabłoń. Newton żył samotnie prowadząc oszczędny tryb życia, nie zamierzał jednak trwonić pieniędzy na wydanie księgi.

W dowód uznania dla osiągnięć naukowych Newtona królowa Anglii i Irlandii, Anna, nadała mu w 1705 r. tytuł szlachecki. Z tej okazji wraz z małżonkiem Jerzym, księciem Danii, i całym dworem odwiedziła Uniwersytet w Cambridge, by upamiętnić dzień przyznania szlachectwa najznakomitszemu ze swych poddanych. Następnie królowa wydała uroczyste przyjęcie na cześć Sir Isaaca Newtona, choć musiała pożyczyć na ten cel 500 funtów.

Przez wiele lat najtrudniejszym problemem astronomicznym była teoria ruchu Księżyca, który ze względu na bliskie sąsiedztwo Ziemi mógł być dokładnie obserwowany. Średnia długość ekliptyczna l (odpowiednik długości geograficznej, gdy podstawowym kołem układu współrzędnych jest ekliptyka) Księżyca

w ruchu niezaburzonym rośnie w czasie liniowo, a więc wyraża się wzorem: $l = nt + l_0$, gdzie n i l_o są pewnymi stałymi. W przypadku istnienia zaburzeń wzór powyższy trzeba uzupełnić o wyraz P reprezentujący spowodowane przez nie okresowe zmiany długości ekliptycznej Księżyca. Znając z obserwacji wartości l w trzech różnych epokach (tak astronomowie nazywają wyróżnione chwile, zwłaszcza gdy dzieli je duży odstęp czasu) otrzymamy: $l_1 = nt_1 + l_0 + P_1$, $l_2 = nt_2 + l_0 + P_2$, $l_3 = nt_3 + l_0 + P_3$. Z pierwszych dwóch i ostatnich dwóch równań dostajemy:

(1) $\quad n = (l_2 - l_1 - P_2 + P_1)/(t_2 - t_1)\,,$

(2) $\quad n = (l_3 - l_2 - P_3 + P_2)/(t_3 - t_2)\,.$

W przypadku planet Układu Słonecznego te dwa wyrażenia, (1) i (2), dają tę samą wartość n z wysoką dokładnością. Gdy analogiczne rozważania przeprowadzimy dla Księżyca, to okaże się, że wartości ze wzoru (1) i (2) nie pokrywają się. Fakt ten po raz pierwszy zauważył Halley w 1693 r. Dokładność wartości n otrzymanych ze wzorów (1) i (2) zależy od przedziałów czasowych $t_2 - t_1$ i $t_3 - t_2$, dlatego Halley wybrał trzy epoki odległe możliwie najbardziej. Aby otrzymać dokładne wartości l dla czasów, gdy nie było jeszcze teleskopów, Halley wykorzystał zapisy o starożytnych zaćmieniach, bowiem podczas zaćmienia długość ekliptyczna Księżyca jest ściśle określona przez współrzędne Słońca. Jedna z grup zaćmień została wzięta z *Almagestu* Klaudiusza Ptolemeusza (około 100–168), drugą grupę stanowiły zaćmienia obserwowane przez astronomów arabskich w IX w. Trzecia epoka była współczesna Halleyowi. Stwierdził on, że w wyrażeniu na średnią długość ekliptyczną Księżyca występuje też wyraz z t^2. Mianowicie

(3) $\quad l = nt + l_0 + \mu\left(\frac{t}{100}\right)^2 + P\,,$

gdzie postać zależności od t^2 wynika z faktu, że tradycyjnie t liczymy w latach, natomiast μ w sekundach łuku na stulecie; $\mu = 10''/\text{wiek}^2$. Wielkość dwukrotnie większa to tzw. przyspieszenie wiekowe Księżyca (tak zresztą w astronomii nazywa się bardzo drobne, ale systematyczne odchyłki wszelkich ruchów od jednostajności). Jak mała jest to wartość, można zobrazować następująco: gdyby wskazówka sekundnika poruszała się z takim przyspieszeniem kątowym, to zegarek spieszyłby się o 1 s na 216 000 lat!

Ponieważ wiekowe przyspieszenie Księżyca zostało odkryte na drodze obserwacyjnej, powstał ważny problem, czy teoria ciążenia Newtona może wyjaśnić to zjawisko.

Istnieją więc dwie liczby $\{r\theta\}$ i $\{s\theta\}$, gdzie $r > s$, leżące w tej samej szufladce, czyli w tym samym podprzedziale o długości $1/Q$. Biorąc różnicę dwóch takich liczb otrzymujemy

$$\{r\theta\} - \{s\theta\} = r\theta - [r\theta] - (s\theta - [s\theta]) = (r-s)\theta - ([r\theta] - [s\theta]) = q\theta - p\,,$$

gdzie $q = r - s > 0$ i $p = [r\theta] - [s\theta]$ są liczbami całkowitymi oraz $|q\theta - p| = |\{r\theta\} - \{s\theta\}| < 1/Q$. Istnieją więc liczby całkowite p, q spełniające nierówności (1).

Zauważmy, że jeśli p i q spełniają nierówności (1), to także $|\theta - p/q| < 1/qQ \le 1/q^2$. A więc liczba wymierna p/q przybliża liczbę rzeczywistą θ z dokładnością $1/q^2$, co jest znacznie lepszym rezultatem niż nasza pierwsza obserwacja o możliwości przybliżania liczb rzeczywistych liczbami wymiernymi. Dokładniej, otrzymujemy następujący ważny wniosek.

Wniosek 2. *Dla każdej liczby niewymiernej θ istnieje nieskończenie wiele par liczb całkowitych p, q spełniających nierówność*

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}\,. \tag{2}$$

Dowód. Niech Q będzie liczbą naturalną i niech p, q spełniają nierówności (1). Wtedy liczby p, q spełniają także nierówność (2). Ponadto, ponieważ θ jest liczbą niewymierną, mamy także $0 < |q\theta - p|$.

Istnieje więc taka liczba naturalna Q_1, że $1/Q_1 < |q\theta - p|$. Dla liczby Q_1 dobieramy na podstawie twierdzenia Dirichleta liczby całkowite p_1, q_1 spełniające nierówności

$$0 < |q_1\theta - p_1| < 1/Q_1 \quad \text{oraz} \quad 0 < q_1 \le Q_1\,.$$

Wtedy mamy także $|\theta - p_1/q_1| < 1/q_1^2$, a więc p_1, q_1 jest rozwiązaniem nierówności (2), i jest to rozwiązanie różne od rozwiązania p, q, gdyż $|q_1\theta - p_1| < 1/Q_1 < |q\theta - p|$.

Postępując tak samo z parą p_1, q_1 znajdziemy rozwiązanie p_2, q_2 nierówności (2) spełniające nierówności

$$|q_2\theta - p_2| < |q_1\theta - p_1| < |q\theta - p|\,.$$

Kontynuując to postępowanie znajdziemy dowolnie długi ciąg rozwiązań nierówności (2). Ma ona więc nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych p, q.

Natomiast jeśli liczba θ jest wymierna, $\theta = a/b$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi oraz $b > 0$, to dla każdych liczb całkowitych p, q, takich, że $\theta \ne p/q$ oraz $q > 0$, mamy

$$|\theta - p/q| = \left|\frac{aq - bp}{bq}\right| \ge \frac{1}{bq}\,.$$

Jeśli więc spełniona jest nierówność (2), to otrzymujemy $1/bq \le |\theta - p/q| < 1/q^2$, skąd $q < b$. Stąd wynika, że nierówność (2) ma tylko skończoną liczbę rozwiązań w liczbach całkowitych p, q, takich, że $\theta \ne p/q$.

Za pomocą aparatu ułamków łańcuchowych można udowodnić, że każdą liczbę niewymierną θ można aproksymować liczbami wymiernymi z nieco większą dokładnością niż dają rozwiązania nierówności (2). Mamy bowiem następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3 (A. Hurwitz, 1891)
Jeśli θ jest liczbą niewymierną, to dla $c = \sqrt{5}$ nierówność

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{cq^2} \tag{3}$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych p, q.

Ale dla $c > \sqrt{5}$ istnieją liczby niewymierne θ, dla których nierówność (3) ma tylko skończoną liczbę rozwiązań. Można wykazać, że taką liczbą jest $\theta_1 = (\sqrt{5}+1)/2$, a także każda liczba z nią *równoważna*.

Tutaj liczbę θ uważamy za *równoważną* z liczbą α, jeśli istnieją takie liczby całkowite a, b, c, d, że

$$\theta = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} \quad \text{oraz} \quad ad - bc = \pm 1 .$$

Można udowodnić, że dla wszystkich liczb niewymiernych nierównoważnych z liczbą $\theta_1 = (\sqrt{5}+1)/2$ istnieje nieskończenie wiele rozwiązań nierówności (3) ze stałą $c = \sqrt{8}$.

Tutaj historia się powtarza: dla niewymierności kwadratowej $\theta_2 = \sqrt{2}$ i liczb z nią równoważnych nie można zamienić stałej $\sqrt{8}$ na żadną liczbę większą, natomiast po usunięciu wszystkich liczb równoważnych z θ_1 i θ_2 dla wszystkich pozostałych liczb niewymiernych θ nierówność (3) ma nieskończenie wiele rozwiązań ze stałą $c = \sqrt{221}/5$. Można udowodnić, że ten proces eliminowania pewnych niewymierności kwadratowych i powiększania stałej c jest nieskończony, jakkolwiek stała c zawsze spełnia nierówność $c < 3$.

Niewymiernością kwadratową nazywamy każdą liczbę niewymierną, która jest pierwiastkiem wielomianu stopnia 2 o współczynnikach wymiernych.

J. Liouville zauważył w 1844 roku, że dla *każdej* niewymierności kwadratowej θ istnieje taka stała $c > 0$, że nierówność (3) w ogóle nie ma żadnych rozwiązań w liczbach całkowitych p, q. Wyznacza to definitywną miarę możliwości przybliżania niewymierności kwadratowej θ liczbami wymiernymi o mianowniku q: istnieje nieskończenie wiele przybliżeń p/q liczby θ z dokładnością $1/q^2$, ale nie istnieją żadne przybliżenia p/q liczby θ z dokładnością $1/cq^2$, gdzie c jest stałą zależną od θ.

Rezultaty Liouville'a są znacznie ogólniejsze i dotyczą nie tylko rzeczywistych niewymierności kwadratowych, ale dowolnych rzeczywistych liczb algebraicznych.

Liczbą algebraiczną nazywa się każdą liczbę θ, która jest pierwiastkiem pewnego wielomianu o współczynnikach całkowitych, nierozkładalnego na wielomiany o współczynnikach wymiernych. Stopień takiego wielomianu zależy tylko od θ i nazywa się *stopniem liczby* θ.

Aproksymacje liczb algebraicznych

Udowodnimy teraz twierdzenie Liouville'a orzekające, że liczby algebraicznej θ stopnia $n > 1$ nie można aproksymować liczbami wymiernymi o mianowniku q z dokładnością rzędu $1/q^n$.

Twierdzenie 4 (J. Liouville, 1844)
Niech θ będzie rzeczywistą liczbą algebraiczną stopnia $n > 1$. Wtedy istnieje taka stała $c > 0$, zależna od liczby θ, że dla każdej liczby wymiernej p/q, takiej, że $q > 0$ oraz $|\theta - p/q| < 1$, zachodzi nierówność

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{cq^n} . \tag{4}$$

Dowód. Niech f będzie takim wielomianem stopnia n o współczynnikach całkowitych, że $f(\theta) = 0$. Wtedy f nie ma pierwiastków wymiernych, zatem dla dowolnych liczb całkowitych p, q, gdzie $q > 0$ mamy $f(p/q) \neq 0$. Ponadto, $f(p/q)$ jest liczbą wymierną o mianowniku q^n, zatem $|f(p/q)| \geq 1/q^n$. Z drugiej strony, na podstawie twierdzenia o wartości średniej, istnieje taka liczba rzeczywista a leżąca między p/q i θ, że

$$f(p/q) = f(p/q) - f(\theta) = (p/q - \theta) \cdot f'(a) .$$

Z założenia $|p/q - \theta| < 1$ wynika, że $a \in (\theta - 1, \theta + 1)$. Pochodna f' wielomianu f jest ograniczona w każdym przedziale skończonym, niech więc c będzie taką liczbą rzeczywistą, że $|f'(x)| < c$ dla każdego x w przedziale $(\theta - 1, \theta + 1)$. Mamy wówczas

$$\frac{1}{q^n} \leq |f(p/q)| < |p/q - \theta| \cdot c ,$$

skąd otrzymujemy nierówność (4).

Zagadnieniem tym zajmowali się w następnych stuleciach najwybitniejsi fizycy i matematycy. Dlaczego sam Newton nie podjął próby rozwiązania tego problemu? Przecież w *Principiach* analizował wpływ Słońca na ruch Księżyca wokół Ziemi. W 1770 r. Akademia Paryska wyznaczyła nagrodę za zbadanie problemu, czy teoria grawitacji może wyjaśnić wiekowe przyspieszenie Księżyca oraz czy zmiana orbity Księżyca nie doprowadzi do jego upadku na Ziemię.

Leonhard Euler (1707–1783) w pracy konkursowej *Nowa teoria ruchu Księżyca* z 1772 r. doszedł do wniosku, że ta anomalia ruchu naszego satelity nie może być spowodowana wzajemnym oddziaływaniem Ziemi, Księżyca i Słońca. Stwierdził ponadto, że przyspieszenie wiekowe Księżyca nie jest wynikiem oddziaływania grawitacyjnego z jakimkolwiek ciałem niebieskim. Euler sądził, że znalazł bezpośredni dowód na istnienie eteru. Pisał: *Tak więc nie ma wątpliwości, że obserwowane przyspieszenie wiekowe Księżyca jest wynikiem oporu ośrodka, w którym zachodzi ruch ciał niebieskich.* Teoria Eulera, błędna w przypadku Księżyca, może być zastosowana do ruchu sztucznych satelitów Ziemi. W 1774 r. problem wiekowego przyspieszenia podjął Joseph Louis Lagrange (1736–1813), niestety bezskutecznie. Jednak ważnym wynikiem Lagrange'a było wykazanie, że na skutek oddziaływania innych planet Układu Słonecznego na Ziemię mimośród jej orbity zmienia się okresowo z okresem 24 000 lat. Współczesne obliczenia wykazują, że mimośród orbity Ziemi zmienia się w granicach od 0 do 0,067735.

W 1786 r. Pierre Simon de Laplace (1749–1827) podał wyjaśnienie pochodzenia wiekowego przyspieszenia w ruchu Księżyca. Badając ruch satelitów Jowisza Laplace zauważył, że zmiany mimośrodu jego orbity prowadzą do przyspieszenia ruchu tych satelitów w długości ekliptycznej. Zakładając, że zmiany mimośrodu orbity Ziemi prowadzą do analogicznego efektu w przypadku Księżyca, Laplace obliczył wielkość μ wchodzącą do wzoru (3) otrzymując $\mu = 10'',18$, co dobrze zgadzało się z wynikami obserwacji. Uznano więc, że zjawisko wiekowego przyspieszenia Księżyca zostało wyjaśnione zadowalająco.

Z obliczeń Laplace'a wynikało, że przyspieszenie średniego ruchu kątowego Księżyca wywołane jest efektami czysto grawitacyjnymi, dlatego zarówno średni ruch kątowy, jak i duża półoś orbity

Księżyca powinny wykonywać długookresowe oscylacje z okresem 24 000 lat. W tej sytuacji pojawienie się wyrażenia wiekowego $\mu(t/100)^2$ we wzorze (3) może świadczyć jedynie o niedoskonałości aparatu matematycznego. Wydawało się, że problem konkursowy Akademii Paryskiej został definitywnie rozwiązany.

Jednakże John Couch Adams (1819–1892), współodkrywca Neptuna w 1845 r., wykazał, że obliczenia Laplace'a były niedokładne. Obliczona przez Adamsa w 1853 r. wartość μ wynosiła $5''{,}72/\text{wiek}^2$, tzn. połowę obserwowanego przyspieszenia. Ta jaskrawa rozbieżność wyników teoretycznych i obserwacyjnych oznacza, że na Księżyc działają inne siły, nie mające charakteru grawitacyjnego. „Fakt ten – pisał Adams – może wskazywać nam drogę do ważnego odkrycia fizycznego". W 1860 r. Charles Delaunay (1816–1872) przeprowadził obliczenia, które potwierdziły wynik uzyskany przez Adamsa.

Prawidłowe przypuszczenie co do przyczyn wiekowego przyspieszenia Księżyca wyraził sławny filozof z Królewca, Immanuel Kant (1724–1804). Stwierdził on, że obserwowany efekt powodują siły przypływowe w układzie Ziemia-Księżyc. (Na marginesie dodajmy, że równie celną przepowiednię znaleźć można w dziele Jonathana Swifta (1667–1745) *Podróże Guliwera*, gdzie autor stwierdza istnienie dwóch księżyców Marsa i dość precyzyjnie określa ich okresy obiegu wokół planety półtora wieku przed ich odkryciem.) W 1865 r. Delaunay przeprowadził analizę tego zagadnienia i potwierdził przypuszczenia Kanta. Udział sił przypływowych w ewolucji układu Ziemia-Księżyc został szczegółowo rozważony przez George'a Howarda Darwina (1845–1912), syna sławnego Charlesa Roberta. Przypływy obserwuje się nie tylko na morzach i oceanach, lecz również w skorupie i atmosferze Ziemi. Powierzchnia Ziemi wskutek przypływów księżycowych unosi się o kilkadziesiąt centymetrów. Darwin wykazał, że przypływy powodują tarcie we wnętrzu Ziemi i w konsekwencji prowadzą do zwolnienia jej obrotu wokół osi. Współczesne pomiary potwierdzają wiekowe zwalnianie obrotu Ziemi, a więc wydłużenie doby ziemskiej. Jest ono nieznaczne, wynosi bowiem $0''{,}0015/\text{wiek}$. Według Darwina zwalnianie obrotu Ziemi powoduje oddalanie się Księżyca od Ziemi, prowadzi zatem do efektu odwrotnego niż obserwowany obecnie. Rozważania Darwina nie są ścisłe i nie należy

Przykład 5. Jednym z najsławniejszych zastosowań twierdzenia Liouville'a jest dowód istnienia liczb przestępnych. Liczbę rzeczywistą nazywa się liczbą *przestępną*, jeśli nie jest ona pierwiastkiem żadnego (niezerowego) wielomianu o współczynnikach wymiernych. A więc liczba rzeczywista jest przestępna, jeśli nie jest liczbą algebraiczną.

Liouville podał następujący przykład liczby przestępnej. Niech

$$\theta = \sum_{i=1}^{\infty} 10^{-i!} = 0,11000100000000000000000100\ldots .$$

Wtedy mianownik n-tej sumy częściowej $s_n = \sum_{i=1}^{n} 10^{-i!}$ jest równy $q := q_n = 10^{n!}$, jeśli więc licznik tej sumy oznaczymy $p := p_n$, to mamy nierówność

$$0 < \theta - \frac{p}{q} < \frac{2}{q^{n+1}} .$$

Gdyby θ była liczbą algebraiczną stopnia N, to na podstawie twierdzenia Liouville'a mielibyśmy nierówność

$$\frac{1}{cq^N} < \theta - \frac{p}{q} ,$$

dla pewnej stałej $c > 0$. Stąd $q^{n+1-N} < 2c$. Ta nierówność ma zachodzić przy stałych c i N dla każdego naturalnego n oraz $q = 10^{n!}$, co jest sprzeczne. A więc θ nie jest liczbą algebraiczną, jest więc liczbą przestępną.

Wniosek 6. *Jeśli θ jest rzeczywistą liczbą algebraiczną stopnia $n > 1$, to dla każdej liczby $\mu > n$ nierówność*

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{\mu}} \tag{5}$$

ma tylko skończoną liczbę rozwiązań w liczbach całkowitych p, q, gdzie $q > 0$.

Dowód. Przypuśćmy, że $\mu = n + \varepsilon$, gdzie $\varepsilon > 0$, i nasza nierówność ma nieskończenie wiele rozwiązań. Wtedy istnieje stała $c > 0$ spełniająca nierówność (4), zatem

$$\frac{1}{cq^n} < \left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{n+\varepsilon}} ,$$

skąd $q^{\varepsilon} < c$ dla nieskończenie wielu naturalnych q, sprzeczność.

Skończoność liczby rozwiązań nierówności (5) interpretujemy jako niemożliwość aproksymowania liczby algebraicznej stopnia n liczbami wymiernymi p/q z dokładnością $1/q^{\mu}$ dla $\mu > n$. Czy jednak nie istnieje możliwość znalezienia nieskończenie wielu rozwiązań nierówności (5), gdy zażądamy nieco mniejszej dokładności? Okazuje się, że nawet dość znaczne zmniejszenie liczby μ nie zmienia sytuacji, którą opisujemy zwięźle mówiąc, że liczby algebraiczne nie dają się dobrze przybliżać liczbami wymiernymi.

Oto tabela wskazująca autorów kolejnych rekordów w wyznaczeniu najmniejszej liczby μ gwarantującej skończoność liczby rozwiązań nierówności (5) dla liczby algebraicznej θ stopnia n

Liouville (1844) $\mu > n$	Dyson (1947), Gelfond (1948) $\mu > \sqrt{2n}$
Thue (1909) $\mu > \frac{1}{2}n + 1$	Roth (1955) $\mu > 2$
Siegel (1921) $\mu > 2\sqrt{n}$	

Twierdzenie Rotha uniezależniło ostatecznie liczbę μ od stopnia n liczby algebraicznej θ. Brzmi ono następująco:

Twierdzenie 7 (K.F. Roth, 1955)
Niech θ będzie rzeczywistą liczbą algebraiczną stopnia > 1. Wtedy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ nierówność

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

ma tylko skończoną liczbę rozwiązań w liczbach całkowitych p, q.

Klaus F. Roth otrzymał za ten rezultat Medal Fieldsa na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Edynburgu w 1958 roku.

Równanie zegarka

Piotr CHRZĄSTOWSKI

Mam zegarek analogowy. Zegarek jest typu *Pobieda* i charakteryzuje się tym, że duża wskazówka jest prawie identycznej wielkości co mała. Wielokrotnie patrząc się na niego miałem wątpliwości, która z nich pełni jaką rolę. Nie zawsze jednak. Niekiedy sytuacja była klarowna. Na przykład o godzinie dokładnie piątej nie sposób się pomylić: najbliższa sensowna godzina wskazywana przez wskazówki zamienione rolami (godzinowa pokazuje minuty, a minutowa – godziny) to dwadzieścia pięć po dwunastej, ale wtedy, jeżeli przyjmiemy, że dolna wskazówka ma wskazywać dokładnie piątkę, to górna wskazówka powinna być prawie w połowie między dwunastą a pierwszą. Z kolei, na przykład, tuż przed w pół do dwunastej można się już zastanawiać, czy przypadkiem nie mamy do czynienia z mniej więcej za dwie i pół minuty szóstą.

Ciekawe, ile dokładnie jest takich mylących ustawień. Problem sformułujmy tak: dla zegarka analogowego, w którym obie wskazówki są nierozróżnialne, określić, ile razy w ciągu dwunastu godzin nie można mieć pewności co do pomiaru czasu.

Rozwiążemy ten problem odwołując się do ciekawego narzędzia, jakim jest wzór de Moivre'a $((\cos\phi + i\sin\phi)^x = \cos\phi x + i\sin\phi x)$, który znakomicie opisuje położenie wskazówek. Umieśćmy tarczę zegarka w płaszczyźnie zespolonej tak, żeby początek układu pokrywał się z osią zegarka, a końce wskazówek minutowej i godzinowej leżały na okręgu jednostkowym. Załóżmy też, aby być w zgodzie z „punktem zero", jakim jest godzina dwunasta oraz z kierunkiem obiegu wskazówek w tradycyjnych zegarkach, że oś rzeczywista jest skierowana do góry, a oś urojona – na prawo. Dwunasta to w naszym układzie godzina *jeden*.

Niech g oznacza liczbę zespoloną z okręgu jednostkowego, odpowiadającą położeniu wskazówki godzinowej, m zaś – minutowej. Ze względu na to, że wskazówka minutowa obiega środek zegarka dwunastokrotnie szybciej niż godzinowa, kąt, jaki zakreśla, jest dwunastokrotnie większy od godzinowego. Mamy zatem spełnione równanie zegarka

$$m = g^{12},$$

gdyż podnoszenie do potęgi na kole jednostkowym odpowiada, zgodnie ze wzorem de Moivre'a, odpowiedniemu zwielokrotnianiu kąta.

Wracając do naszego problemu: sytuacja, w której mamy wątpliwości, która z identycznych wskazówek pełni którą rolę, odpowiada jednoczesnemu spełnieniu dwóch równań: $m = g^{12}$ oraz $g = m^{12}$. Podstawiając pierwsze równanie do drugiego otrzymujemy $g = g^{144}$, a po podzieleniu przez g (różne od zera, jako że wzięte z okręgu jednostkowego) mamy $g^{143} = 1$. Rozwiązaniami tego równania są zatem wszystkie 143 pierwiastki z jedności, czyli wierzchołki 143-kąta foremnego o jednym wierzchołku w punkcie 1 (czyli o dwunastej). Oznacza to, że co 12/143 godziny mamy do czynienia z sytuacją niepewności.

W zasadzie powinniśmy odjąć jeszcze wszystkie te sytuacje, w których wskazówki się pokrywają (trudno się wtedy aż tak bardzo pomylić!). Ile jest takich sytuacji? Oczywiście, 11, co wie każdy, kto przeczytał *Lilavati*, ale możemy to też szybko wyprowadzić za pomocą naszego narzędzia. Wskazówki się pokryją, gdy wskazówka godzinowa będzie w tym samym położeniu co minutowa, czyli $g = g^{12}$, co po podzieleniu przez g daje $g^{11} = 1$, którego to równania rozwiązaniem jest wszystkie 11 odpowiednich pierwiastków z jedności.

Ostatecznie zatem sytuacje mylące następują tak naprawdę jedynie $143 - 11 = 132$ razy w ciągu 12 godzin.

Czasami budząc się nie wiem, czy patrzę na zegarek leżący na stoliku nocnym normalnie czy do góry nogami. Załóżmy, że tym razem zaopatrzeni jesteśmy w zegarek z dobrze rozróżnialnymi wskazówkami. Problemem jest więc jedynie stwierdzenie na podstawie samego oglądu tarczy, czy zegarek leży normalnie, czy jest odwrócony.

ich przyjmować bezkrytycznie. Oprócz przypływów pochodzących od Księżyca występują przypływy związane z działaniem grawitacyjnym Słońca na Ziemię. Relacje między przypływami słonecznymi i księżycowymi są dość złożone, czasem się wzmacniają, czasem osłabiają. Harold Jeffrey (1891–1989) wykazał w 1920 r., że różnica między obserwowaną wielkością μ a wartością otrzymaną przez Adamsa może być wyjaśniona przez uwzględnienie tarcia przypływowego w morzach Ziemi. Wywołane tym tarciem zwolnienie obrotu powoduje, według Jeffreya, przyspieszenie ruchu kątowego Księżca równe w przybliżeniu połowie przyspieszenia wyznaczonego z obserwacji.

Podejmowane były również próby uwzględnienia wpływu wzrostu masy Ziemi na ruch Księżyca. W szczególności Iwan Mieszczerski (1859–1935) obliczył w 1905 r., że powolny wzrost masy Ziemi powoduje przyspieszenie wiekowe w ruchu Księżyca. Efekt ten jest jednak nieznaczny. Według aktualnych danych na Ziemię spada 400 ton materii meteorytowej na dobę, co wywołuje przyspieszenie wiekowe w ruchu Księżyca równe $0'',0001/\text{wiek}^2$.

Pierwsze teorie ruchu Księżyca oparte na przybliżonym rozwiązaniu zagadnienia trzech ciał: Słońca, Ziemi i Księżyca, podali: Alexis Claude Clairaut (1713–1765), Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783) i Leonhard Euler. Rozwinięciem prac d'Alemberta i Clairauta była teoria Laplace'a, który podał tablicę położeń Księżyca z dokładnością do $0',5$. W późniejszych latach teoria ruchu Księżyca była udoskonalana przez wielu matematyków i astronomów. Współczesne teorie ruchu naszego satelity są rozwinięciem teorii Delaunaya i George'a Hilla (1838–1914). Modyfikacją teorii Hilla jest ILE (skrót od *Improved Lunar Ephemeris*) podana przez W.J. Eckerta ze współpracownikami w 1954 r. Metoda ta ma charakter czysto numeryczny i odznacza się dużą dokładnością otrzymanej efemerydy Księżyca. Rozwinięciem analitycznej metody Delaunaya jest ALE (*Analytic Lunar Ephemeris*), którą uzyskali A. Deprit, J. Henrard i A. Rom w 1970 r. Teoria ruchu Księżyca rozważa jedynie siły grawitacyjne, a efekty niegrawitacyjne uwzględniane są za pomocą poprawek empirycznych.

Od chwili odkrycia przez Halleya wiekowego przyspieszenia Księżyca minęło 300 lat, a wciąż nie potrafimy

odpowiedzieć na drugą część konkursowego pytania Akademii Paryskiej z 1770 r. Sytuacja ta jest typowa dla fizyki. Jest wiele problemów, na które nie potrafimy udzielić ścisłej odpowiedzi, mimo że znamy prawa rządzące danym zagadnieniem. Wynika to z faktu, że prawa w fizyce sformułowane są w języku równań różniczkowych, które są konsekwencją zasady najmniejszego działania. Niestety, równań tych nie umiemy rozwiązać nawet w wielu prostych sytuacjach fizycznych. Albert Einstein (1879–1955) ujął ten problem następująco: *Bóg stworzył świat według niecałkowalnych równań.*

Może powstać wątpliwość co do celowości tworzenia tak dokładnej teorii ruchu ciał Układu Słonecznego. Czy taka teoria może być wykorzystana? Oczywiście, rzetelność i precyzja mogą być celem samym w sobie. Należy jednak pamiętać, że dzięki dokładnej teorii ruchu planet Układu Słonecznego możliwe było stwierdzenie niewytłumaczalnego przez teorię klasyczną ruchu peryhelium Merkurego 60 lat przed sformułowaniem przez Einsteina ogólnej teorii względności. Urbain Joseph Leverrier (1811–1877), współodkrywca Neptuna, 12 września 1869 r. na posiedzeniu Akademii Paryskiej przedstawił list Herve Faye'a (1814–1902) opisujący wyniki obserwacji wykonanych przez autora listu. W liście zawarta była informacja o tajemniczym ruchu peryhelium Merkurego wynoszącym $38''$/wiek. Leverrier rozważał możliwość istnienia niezidentyfikowanego ciała pomiędzy Słońcem i Merkurym. Ruch peryhelium Merkurego oraz innych ciał niebieskich jest przedmiotem badań od 1850 r. do chwili obecnej. Wartość $43''$/wiek, otrzymana przez Simona Newcomba (1835–1909) dla Merkurego w 1882 r., jest aktualna do dzisiaj.

Obrót o 180 stopni odpowiada na płaszczyźnie zespolonej pomnożeniu liczby przez -1. Jeżeli zatem mielibyśmy wątpliwości, jak zorientowany jest zegarek, to powinna być spełniona para równań

$$m = g^{12} \quad \text{oraz} \quad -m = (-g)^{12},$$

gdyż zarówno na zegarku normalnym, jak i odwróconym chcemy widzieć poprawne ułożenie wskazówek. Ta para równań nie ma jednak rozwiązania na okręgu jednostkowym, zatem tylko jedno z nich może być prawdziwe. Oznacza to, że mając dostatecznie dobry wzrok nigdy nie popełnimy tego typu błędu. Radzę wszystkim posiadaczom zegarka spojrzeć na niego do góry nogami. Ręczę, że nikt nie zobaczy godziny, która jakkolwiek dałaby się sensownie zinterpretować.

Ciekawe, że znajomy Hindus, Raghu, kiedy rozmawiałem z nim o tej obserwacji, opowiedział mi, że w Indiach znany jest sposób szybkiego obliczania godziny, jaka panuje w danym momencie w stolicy Imperium. Należy mianowicie spojrzeć na zegarek do góry nogami i przesunąć wskazówkę godzinową w myślach do najbliższego sensownego położenia. Powiedzmy sobie, klarował mi Raghu, że mamy w Bombaju godzinę 10^{25}. Odwracamy zegarek i widzimy, że minutowa wskazówka pokazuje jakby „za 5 coś", a godzinowa leży mniej więcej w połowie między 4-tą a 5-tą. Popychamy więc ją w myślach do przodu i zgadujemy, że w Londynie jest za pięć piąta. Dlaczego do przodu, a nie do tyłu? – zapytałem. – Jeżeli jest mniej więcej tak samo dobrze do przodu, jak do tyłu, to popychamy do przodu – odpowiedział Raghu i zabraliśmy się za sprawdzanie tego fenomenu.

Różnica czasu między Bombajem a Londynem wynosi $5\frac{1}{2}$ godziny. (W Indiach, rozciągających się od 67° do 97° długości wschodniej, obowiązuje przez cały rok czas południka 82°, w przybliżeniu połowiącego ten wielki kraj.) Niech g_L oraz m_L oznaczają położenia wskazówek w Londynie, g_B i m_B zaś – w Bombaju. Wykażemy, że w Bombaju zawsze po odwróceniu zegarka do góry nogami oraz posunięciu samej wskazówki godzinowej o dokładnie pół godziny (czyli pomnożeniu jej przez $e^{\pi i/12}$) otrzymamy czas południka Greenwich. Aby tak było, muszą być spełnione równania:

$$g_L = -g_B e^{\pi i/12} \quad \text{oraz} \quad m_L = -m_B,$$

a jednocześnie musi być spełnione równanie zegarka dla Bombaju $m_B = g_B^{12}$. Sprawdźmy, czy będzie ono spełnione i dla Londynu. Korzystając ze wzoru Eulera, $e^{\pi i} = -1$, dostajemy

$$g_L^{12} = (-g_B e^{\pi i/12})^{12} = g_B^{12} e^{\pi i} = \\ = -g_B^{12} = -m_B = m_L.$$

Bomba! Zgodziło się. Oznacza to, że postępując w Bombaju w opisany sposób, zawsze otrzymamy poprawną godzinę, a ze względu na to, że wskazówka godzinowa została cofnięta w naszym algorytmie dokładnie o $5\frac{1}{2}$ godziny (6 godzin do tyłu przy obrocie zegarka i potem $\frac{1}{2}$ godziny do przodu), zawsze otrzymamy czas południka Greenwich.

Widać stąd od razu, jak należy postępować w Londynie, żeby otrzymać czas indyjski.

Szybko rozwiążmy jeszcze parę małych problemów. Po pierwsze, oglądając zegarek w lustrze zobaczymy zawsze sensowną godzinę (oczywiście, zakładamy, że na cyferblacie żadnych cyfr nie ma). Dzieje się właśnie tak, gdyż lustrzane odbicie to nic innego, jak przekształcenie symetryczne względem osi rzeczywistej, odpowiadające operacji sprzężenia liczby zespolonej. A że $g^{12} = m$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{g}^{12} = \bar{m}$, więc równanie zegarka będzie działało i dla „sprzężonej" tarczy. Radzę spojrzeć do lustra, aby się o tym przekonać.

Dalej, zakładając, że wskazówka sekundowa pokrywa się o godzinie 12 z dwiema pozostałymi, możemy wywnioskować, że taka sytuacja nie zdarzy się ponownie wcześniej niż za 12 godzin. Wystarczy zauważyć, że jeżeli s oznacza położenie wskazówki sekundowej, to dodatkowo $s = m^{60}$. Łatwo sprawdzić, że jedynym rozwiązaniem układu równań $g = m = s$, $m = g^{12}$, $s = m^{60}$ jest $g = m = s = 1$, czyli godzina dwunasta.

W epoce zegarków cyfrowych warto czasami z sentymentem wrócić do dawnych dobrych czasów, kiedy to czas odmierzał się w sposób ciągły. Co prawda, ciągłość ta cokolwiek była naciągana, gdyż większość mechanizmów i tak popychała wskazówki „kwantami" ruchu, zgodnymi bądź to ze spadaniem ziarenek piasku, bądź z rytmem wahnięć wahadła czy też sprężynkowego włosa, ale dla niedoskonałego oka było to znakomitą namiastką ciągłości. A poza tym były też mechanizmy (jak choćby spalanie świecy czy przelewanie się wody), które z ciągłością miały naprawdę wiele wspólnego. Miganie cyferek szatkuje niepotrzebnie czas.

Niebo przez lornetkę

Rozwiązanie zadania M 754. Jeśli obrócimy szachownicę o 45 stopni, okaże się, że wystarczy rozpatrywać ruchy „kulawego" gońca. Łatwo zauważyć, że można osobno rozważać pionową i poziomą składową ruchów gońca, bo są one niezależne. Prawdopodobieństwo tego, że dokładnie 10 razy goniec ruszy się w lewo i dokładnie 10 razy w prawo (aby składowa pozioma wróciła do stanu pierwotnego), wynosi, oczywiście,

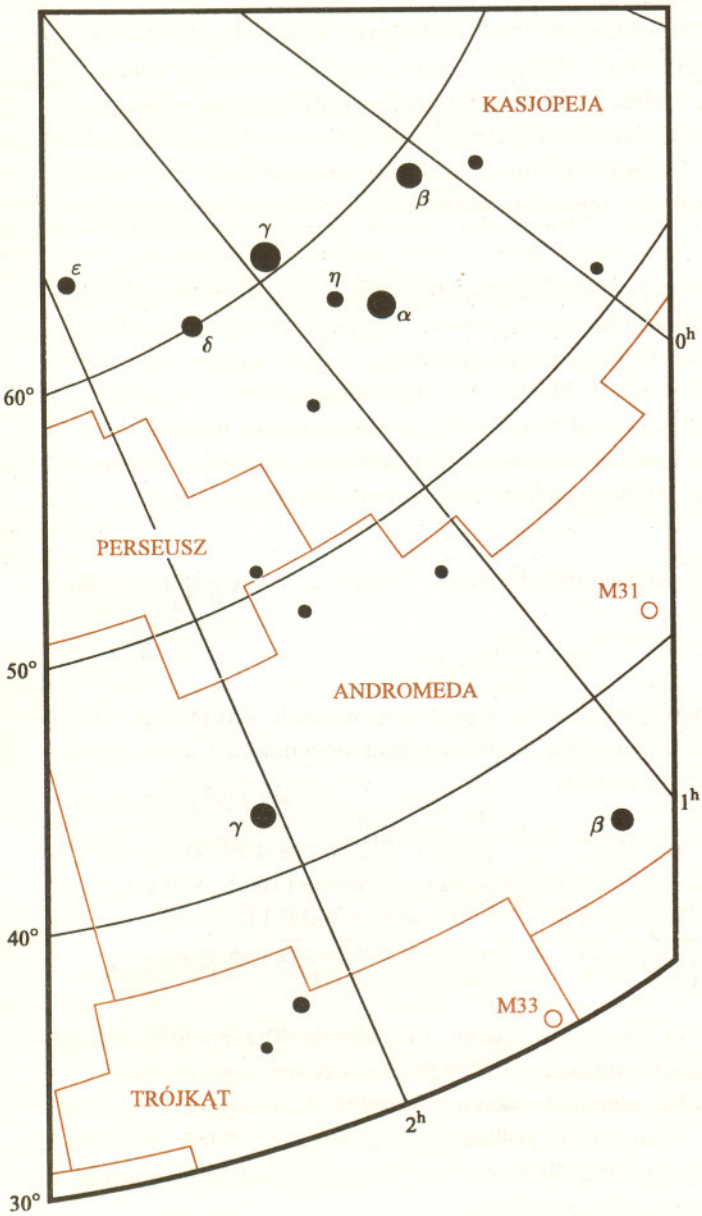
$$\frac{\binom{20}{10}}{2^{20}}.$$

Tyle samo jest równe prawdopodobieństwo, że dokładnie 10 razy goniec ruszy się w górę i dokładnie 10 razy w dół. Zatem odpowiedź brzmi:

$$p = \frac{\binom{20}{10}^2}{2^{40}}.$$

Przez ten zbliżający się do końca rok przesunęło się przed naszymi oczami właściwie już całe niebo. W listopadzie widzimy wieczorem wysoko Wielką Mgławicę Andromedy, czyli galaktykę M 31, o której pisaliśmy w styczniu. Widzimy też jeszcze charakterystyczne dla lata gwiazdozbiory Łabędzia, Lutni i Orła, a wschodnią i zachodnią część nieba spina łuk Drogi Mlecznej. Pomińmy jednak piękno takich widoków i zwróćmy uwagę na mało rzucający się w oczy fakt, o którym dotychczas nie mówiliśmy: gwiazdy są kolorowe. Przekonać się o tym można na dwa sposoby.

Sposób pierwszy. Najłatwiej go zastosować, gdy w aparacie fotograficznym, niewątpliwie używanym w czasie wakacji, jest jeszcze film z kilkoma niewykorzystanymi klatkami. Film, oczywiście, musi być kolorowy, a czy negatywowy, czy pozytywowy, to sprawa drugorzędna. Kładziemy aparat na ziemi lub na parapecie skierowany w dowolną okolicę nieba i otwieramy migawkę na 10 minut. Na takim zdjęciu gwiazdy zarysują łuki wskutek pozornego obrotu nieba i te właśnie łuki będą wyraźnie kolorowe. Co prawda, nie robiłem nigdy takich odbitek, więc nie jestem w stanie ocenić wyniku, natomiast gwarantuję wspaniały efekt na przezroczach.



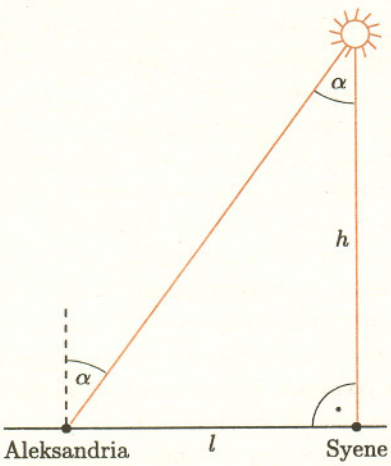
Drugi sposób to oglądanie gwiazd przez lunetę lub lornetkę. Jednak mając mało światła do dyspozycji oko ludzkie nie rozróżnia kolorów (w siatkówce ocznej działają wtedy tylko pręciki nieczułe na barwy) i gwiazdy rozsiane w polu widzenia lornetki będą robić zwyczajne wrażenie białych punktów. O bardzo nielicznych gwiazdach można od pierwszego spojrzenia orzec, że mają określoną barwę. Przykładem może tu być wspominana już przy innej okazji α Oriona, czyli Betelgeuse – ale jest ona jedną z najjaśniejszych. Aby zobaczyć barwy innych gwiazd, trzeba znaleźć np. ciasne pary gwiazd o różnych kolorach, które wtedy można rozróżnić dzięki kontrastowi. W środku widocznego w listopadzie łuku Drogi Mlecznej w pobliżu zenitu widzimy gwiazdozbiór Kasjopei, z którą od południa sąsiaduje Andromeda. Takimi bardzo jasnymi gwiazdami (parami gwiazd), demonstrującymi swoje kolory, mogą być np. η Kasjopei (łączna jasność 3,6 mag, odległość kątowa składników 9″,3, barwy: żółta i purpurowa) albo γ Andromedy (2,2 mag, 10″, czerwona i niebieska). Można też bardziej ku zachodowi odszukać β Łabędzia (3,1 mag, 35″, żółta i niebieska; to akurat nie jest fizyczny układ podwójny, tylko dwie niezależne gwiazdy leżące niemal w tym samym kierunku) albo γ Delfina (4,1 mag, 10″, żółta i niebiesko-zielona).

Warto wiedzieć, że ta rozmaitość barw wynika z faktu, że gwiazdy mają różne temperatury. Inne czynniki, jak skład chemiczny czy rozmiary gwiazdy, mają na jej barwę wpływ całkiem zaniedbywalny, a gwiazdy w pierwszym przybliżeniu są ciałami doskonale czarnymi (czyli ich widmo zależy jedynie od temperatury). Tu w całej okazałości przejawia się jedno z podstawowych praw fizyki: im gorętsze jest ciało, tym na krótsze fale przypada maksimum energii w jego widmie.

Tomasz KWAST

Czy Ziemia jest okrągła czy płaska i ile wynosi odległość jej od Słońca?

Jedna i ta sama obserwacja może doprowadzić do zupełnie odmiennych wniosków zależnie od przyjętych założeń. Stwierdzenie to doskonale ilustrują rozważania dwóch starożytnych mędrców.



Rys. 1.

Anaksagoras, żyjący w V wieku p.n.e, był pierwszym, który twierdził, że Księżyc świeci odbitym światłem Słońca. Wskazał też prawdziwą przyczynę zaćmień. Wierzył natomiast, jak i wielu jemu współczenych, że Ziemia jest płaskim dyskiem, Słońce zaś rozpalonym kamieniem. Czyż gorące meteoryty dowodnie na to nie wskazywały? Twierdził również, że Słońce jest wielkości Półwyspu Peloponeskiego, a do wniosku tego doprowadziło go przypuszczalnie następujące rozumowanie.

Anaksagoras wiedział, a przynajmniej mógł wiedzieć, że najdłuższego dnia lata, w południe Słońce wisi dokładnie nad głowami mieszkańców Syene – miasta nad górnym Nilem niedaleko dzisiejszego Assuanu – tak, że można jego odbicie zobaczyć w studni. Natomiast w Aleksandrii tego samego dnia, o tej samej porze promienie Słońca odchylają się od pionu o kąt α równy jednej pięćdziesiątej kąta pełnego. Przy założeniu płaskości Ziemi mógł z łatwością stwierdzić, rozważając trójkąt prostokątny (rys. 1), że wysokość Słońca nad Ziemią jest równa

$$h = l \operatorname{ctg} \alpha ,$$

gdzie l jest odległością z Aleksandrii do Syene. Ponieważ kąt α jest niewielki, znajdujemy

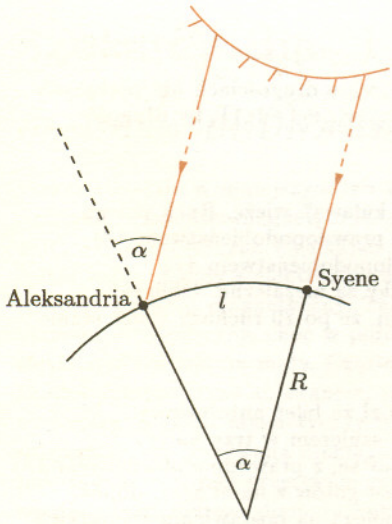
$$h \approx \frac{50}{2\pi} l \approx 8l .$$

Anaksagoras posunął się zapewne dalej w swych wywodach. Znając już odległość do Słońca oraz jego średnicę kątową β równą jednej siedemsetnej kąta pełnego, mógł wyliczyć promień Słońca jako

$$R_{\odot} = h \sin \frac{\beta}{2} \approx 0{,}035l .$$

Ponieważ dystans między Aleksandrią a Assuanem wynosi około 800 km, odległość do Słońca wedle tych obliczeń wyniesie $h \approx 6400$ km, a jego promień $R_{\odot}$ będzie miał około 29 km. Rozmiary Peloponezu są w istocie z grubsza dwa razy większe.

Anaksagoras przyjaźnił się blisko z potężnym Peryklesem. Przeciwnicy polityka uznali obrazoburcze poglądy uczonego, który Słońcu i Księżycowi odebrał atrybuty boskości, za dobrą okazję do ataku. Oskarżyli Anaksagorasa, podobnie jak później Sokratesa, o bezbożność, powodując jego wyjazd z Aten. Mędrzec dokonał żywota w rodzinnej Jonii. Swą ostatnią wolą zarządził, żeby rocznicę jego śmierci czcić dniem wolnym od szkoły.



Rys. 2.

Dwa wieki później Eratostenes wysnuł zupełnie inne wnioski ze wspomnianych informacji. Przyjął, zgodnie z dominującym już wówczas poglądem, że Ziemia jest kulą. Założył dodatkowo, że Słońce jest dostatecznie daleko, aby jego promienie docierające do Ziemi uznać za równoległe. Był świadom również, że Syene i Aleksandria leżą, w przybliżeniu, na tym samym południku. Rozważania Eratostenesa, wielokrotnie opisane w literaturze, a zilustrowane na rysunku 2, pozwoliły określić rozmiar Ziemi. Jeśli wycinek okręgu między Aleksandrią i Syene przybliżyć odcinkiem, to promień Ziemi jest równy

$$R = \frac{l/2}{\sin(\alpha/2)},$$

co dla małych kątów daje

$$R \approx \frac{l}{\alpha} \approx \frac{50}{2\pi} l \approx 8l.$$

Podstawiwszy liczbową wartość l otrzymujemy poprawną, oczywiście, wielkość promienia. Eratostenes podał swój wynik w stadiach, czyli stadionach. Jakkolwiek nie wiemy, ilu dokładnie kilometrom on odpowiadał, był z pewnością bliski rzeczywistości.

Widzimy, że Eratostenes znalazł tę samą wielkość co Anaksagoras, lecz ją zupełnie inaczej zinterpretował. Historia jemu przyznała rację, choć trudno przecież odmówić logiki domniemanemu rozumowaniu poprzednika.

Małą Deltę przygotował Stanisław MRÓWCZYŃSKI

Rozwiązanie zadania M 755. Zaproponowana strategia kończy się szczęśliwie z prawdopodobieństwem 1/3. Wykażemy, że na więcej nie można liczyć.

Obierzmy dowolną strategię. Niech $X_0 = 5$, X_n niech oznacza stan naszej kieszeni po n rozgrywkach, A_n niech będzie kwotą stawianą w n-tej rozgrywce, X zaś niech oznacza końcowy rezultat. Z nierówności Czebyszewa mamy $EX \geq 10P(X \geq 10)$, gdzie $P(X \geq 10)$ jest prawdopodobieństwem szczęśliwego zakończenia gry.

Ponieważ $EX_n = EX_{n-1} - EA_n/3$, więc

$$EX_n = EX_0 - \frac{E(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)}{3} = 5 - \frac{E(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)}{3}.$$

Stąd

$$EX = 5 - \frac{1}{3}E\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq 5 - \frac{1}{3}\cdot 5 = 10/3,$$

bo aby gra się zakończyła, musimy albo spłukać się do czysta, albo uciułać co najmniej dodatkowe 5 zł – tak czy inaczej musimy w czasie całej gry postawić co najmniej 5 zł. Przeto prawdopodobieństwo tego, że zyskami z hazardu wesprzemy przedsiębiorstwo komunikacyjne, jest równe

$$P(X \geq 10) \leq \frac{1}{10}EX \leq \frac{1}{3},$$

czego należało dowieść.

Odcinek dla poczty

Zł .....

słownie złotych

Dokładny adres wpłacającego .....

na r-k **AMOS**

Dokładna nazwa 01-806 Warszawa ul. Zuga 12

nazwa banku PKO VIII O/W-wa

Nr r-ku 1586-77578-136

stempel

Pobrano opłatę zł .....

podpis przyjmującego

Odcinek dla posiadacza rachunku

Zł .....

słownie złotych

Dokładny adres wpłacającego .....

na r-k **AMOS**

Dokładna nazwa 01-806 Warszawa ul. Zuga 12

nazwa banku PKO VIII O/W-wa

Nr r-ku 1586-77578-136

stempel

Pobrano opłatę zł .....

podpis przyjmującego

Potwierdzenie dla wpłacającego

Zł .....

słownie złotych

Dokładny adres wpłacającego .....

na r-k **AMOS**

Dokładna nazwa 01-806 Warszawa ul. Zuga 12

nazwa banku PKO VIII O/W-wa

Nr r-ku 1586-77578-136

stempel

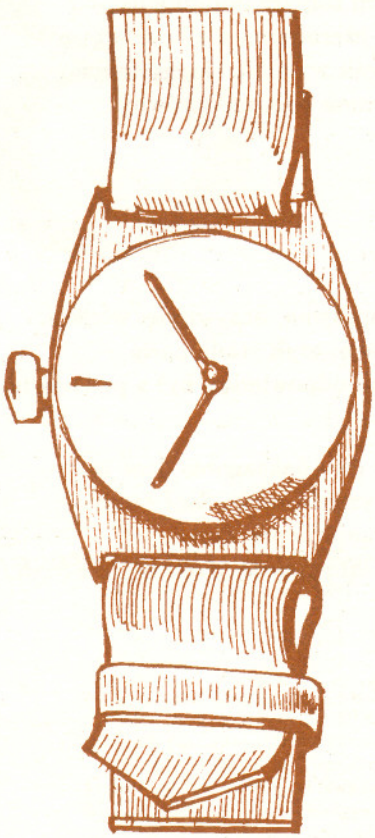
Pobrano opłatę zł .....

podpis przyjmującego

Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 753. Na płaszczyźnie dane są wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ o długościach nie większych niż 1. Udowodnić, że można tak dobrać znaki $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \{-1, 1\}$, by długość wektora $r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \cdots + r_n\mathbf{v}_n$ nie przekraczała 3.
Rozwiązanie na str. 15



M 754. Przesuwamy po nieskończonej szachownicy „kulawą" wieżę. Ruch polega na tym, że przemieszczamy ją o jedno pole do góry z prawdopodobieństwem 1/4, w dół z prawdopodobieństwem 1/4, w prawo z prawdopodobieństwem 1/4 i w lewo z prawdopodobieństwem 1/4. Wszystkie ruchy są niezależne. Obliczyć prawdopodobieństwo p zdarzenia polegającego na tym, że po 20 ruchach wieża stanie na polu, z którego wystartowała.
Rozwiązanie na str. 7

M 755. Mamy przy sobie 5 zł, a musimy zapłacić 10 zł za bilet autobusowy. Jedyna możliwość zdobycia brakujących 5 zł to gra z szulerem w trzy karty (z prawdopodobieństwem 2/3 przegrywamy tracąc stawkę, z prawdopodobieństwem 1/3 wygrywamy zyskując równowartość stawki). Szuler jest gotów z nami grać, dopóki mamy pieniądze. Udowodnić, że najlepsza strategia polega na postawieniu wszystkich pieniędzy w pierwszej rozgrywce.
Rozwiązanie na str. 9

Redaguje Adam KOROCIŃSKI

F 415. Znaleźć temperaturę, do jakiej nagrzeje się sztuczny satelita na orbicie Ziemi poddany bezpośredniemu działaniu promieni słonecznych. Założyć, że satelita jest kulistym ciałem doskonale czarnym o jednorodnej, bardzo dobrze przewodzącej ciepło powierzchni. Do obliczeń przyjąć, że: promień satelity wynosi $r_{sat} = 1$ m, promień orbity ziemskiej wynosi $R_{Z-S} = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m, promień Słońca wynosi $R_S = 7 \cdot 10^8$ m, a jego temperatura powierzchniowa jest równa $T_S = 6 \cdot 10^3$ K.
Rozwiązanie na str. 15

F 416. Eksperymentalnie zmierzone częstotliwości podstawowych drgań podłużnych molekuły CO_2 wynoszą $3{,}998 \cdot 10^{13}$ Hz oraz $7{,}042 \cdot 10^{13}$ Hz. Wyznaczyć współczynnik sprężystości składowych oscylatorów C–O w stanach o podanych częstotliwościach drgań. Przyjąć, że cząsteczka CO_2 jest prostoliniowym układem połączonych oscylatorów harmonicznych (atom węgla w środku), którego drgania są złożeniem podstawowych podłużnych drgań normalnych (to znaczy takich, w których drgania poszczególnych elementów układu są prostymi drganiami harmonicznymi o jednakowej częstości).
Rozwiązanie na str. 16

Prenumerata „Delty"
za okres:

Prenumerata „Delty"
za okres:

Prenumerata „Delty"
za okres:

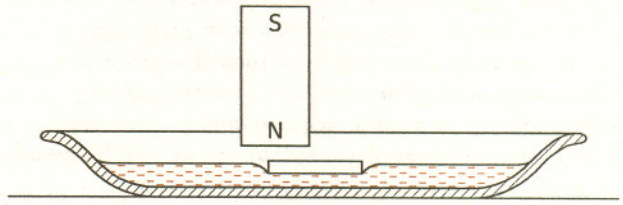
Szukamy dia- i paramagnetyków

Stanisław BEDNAREK

Wszystkie ciała w mniejszym lub większym stopniu wykazują własności magnetyczne. Atomy mają orbitalne momenty magnetyczne wynikające z ruchów elektronów wokół jąder. Każdy z elektronów ma swój własny, spinowy moment magnetyczny. Także jądro atomu ma moment magnetyczny, choć w porównaniu z momentem elektronowym jest on mały. Cząsteczki, z których zbudowana jest dana substancja, mogą mieć zerowy lub niezerowy moment magnetyczny. W pierwszym przypadku substancja jest nazywana diamagnetykiem. Zewnętrzne pole indukuje w niej przeciwnie skierowany moment magnetyczny, dlatego diamagnetyk jest wypychany z pola. Jeśli cząsteczki mają niezerowe momenty magnetyczne, to mogą być one rozłożone przypadkowo lub w pewien sposób uporządkowane. W pierwszym przypadku mamy do czynienia z paramagnetykiem. Zewnętrzne pole porządkuje cząsteczki zgodnie ze swoim wektorem indukcji, dlatego paramagnetyk jest wciągany w obszar pola magnetycznego. Zarówno dla dia-, jak i dla paramagnetyka ten indukowany moment magnetyczny jest nietrwały, znika wraz z zewnętrznym polem.

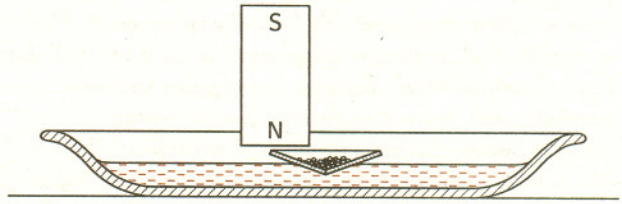
Ferromagnetykami nazywamy substancje, w których istnieje oddziaływanie długiego zasięgu porządkujące momenty magnetyczne cząsteczek wewnątrz obszarów nazywanych domenami. Ich rozmiary sięgają setnych części milimetra, można więc domeny obserwować pod mikroskopem. Zewnętrzne pole magnetyczne porządkuje domeny, a indukowany moment magnetyczny ferromagnetyka jest znacznie większy niż w przypadku dia- i paramagnetyków, poza tym może się utrzymywać nawet po zniknięciu pola zewnętrznego. Trzeba jeszcze dodać, że diamagnetyzm, jako związany z orbitami elektronowymi, jest uniwersalną cechą materii, tylko w przypadku para- i ferromagnetyków nakładają się na niego znacznie silniejsze efekty magnetyczne.

W codziennym doświadczeniu bez trudu potrafimy rozpoznać ferromagnetyki ze względu na ich silne właściwości. Inaczej jest w przypadku dia- i paramagnetyków. Nie znaczy to jednak, że nie jest to możliwe. Postarajmy się o możliwie silny magnes, na przykład ze starego głośnika. Napełnijmy wodą miseczkę, a następnie na powierzchni wody delikatnie połóżmy krążek wycięty z cienkiej aluminiowej folii. Dzięki siłom napięcia powierzchniowego odpowiednio położony nie utonie, lecz będzie pływał. W ten sposób znacznie zredukujemy siły oporu i siłę grawitacji. Poczekajmy, aż ustaną przypadkowe ruchy krążka; jeśli dopłynął do brzegu, możemy go przesunąć delikatnie zapałką na środek. Zbliżamy teraz do niego magnes, ostrożnie i powoli, tak by nie dotknąć ani krążka, ani powierzchni wody (rys. 1). Jeśli magnes jest dostatecznie silny, zaobserwujemy, że krążek się do niego przybliża, co świadczy o tym, że aluminium jest paramagnetykiem. Proponuję przeprowadzenie tego samego doświadczenia także dla innych substancji. W przypadku metali magnes należy przysuwać bardzo powoli, tak by zminimalizować powstawanie w próbce prądów wirowych, powodujących odpychanie próbki od magnesu.



Rys. 1

W przypadku substancji, których nie da się umieścić bezpośrednio na powierzchni wody (bo same są cieczami, rozpuszczają się lub mają zbyt dużą gęstość i toną), możemy zbudować „łódkę", w której będą pływać. Ze słabego dia- lub paramagnetyka wycinamy krążek, rozcinamy wzdłuż promienia, a następnie nakładamy na siebie brzegi rozcięcia i sklejamy wodoodpornym klejem (na przykład cyjanopanem lub butaprenem). Powstaje w ten sposób stożek o dużym kącie rozwarcia, w którym umieszczamy badaną próbkę (rys. 2). Możemy także wykorzystać małą zakrętkę lub pokrywkę ze sztucznego tworzywa.



Rys. 2

Jednak zanim przeprowadzimy doświadczenie, musimy sprawdzić, czy pusta łódka nie reaguje na działanie magnesu. Jeśli tak, musimy wykonać ją jeszcze raz z innego tworzywa. A teraz umieśćmy na dnie łódki badaną substancję. Może to być chlorek sodu, cukier, grafit, ołów, alkohol. Jeśli w szkolnej pracowni chemicznej znajdują się bizmut i różne sole żelaza, warto je wykorzystać, a następnie porównać wyniki z danymi zawartymi w tablicach fizycznych. Gdyby się okazało, że coś się nie zgadza, nie znaczy to, że tablice się mylą, lecz raczej badana próbka jest zanieczyszczona substancją o silniejszych i całkiem odmiennych własnościach magnetycznych.

Do grupy diamagnetyków należą między innymi: grafit, bizmut, ołów, chlorek sodu, miedź, woda, alkohol etylowy, polietylen.

Paramagnetykami są między innymi: wodorotlenek żelazowy, chlorek żelazowy i żelazawy, tlenek żelazowy, chrom, magnez, siarczan miedziowy, benzen, nadmanganian potasu, cyna.

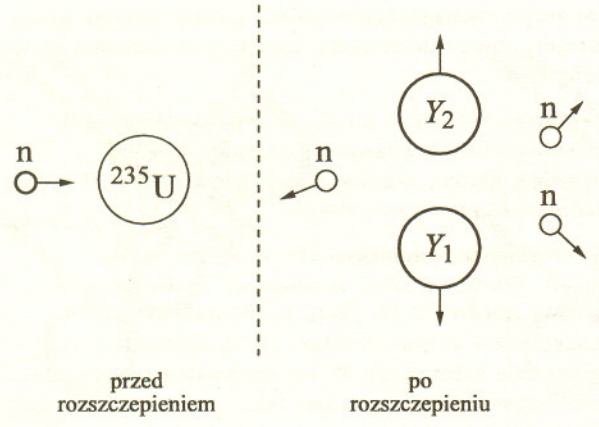
Najważniejsze ferromagnetyki to: żelazo, nikiel, kobalt. Warto wiedzieć, że obecność zanieczyszczeń w ilości zaledwie 0,2% około trzykrotnie osłabia magnetyczne własności żelaza (w stosunku do czystej chemicznie substancji). W bardzo niskich temperaturach ferromagnetykami są również takie pierwiastki, jak gadolin, dysproz i terb.

Promieniotwórcze śmiecie energetyki jądrowej

Maria KACZMARCZYK

Zjawisko rozszczepienia uranu po pochłonięciu powolnego neutronu zostało odkryte w 1938 roku przez dwóch fizykochemików niemieckich: Ottona Hahna i Fritza Strassmana. Otto Hahn badając to nowe zjawisko zidentyfikował w produktach przemiany uranu jądra baru $_{56}$Ba, które różnią się ładunkiem aż o 36 jednostek od jąder uranu $_{92}$U. Zostało to uznane za dowód rozszczepienia jądra atomu. Wynik ten był nieoczekiwany. Spodziewano się bowiem, że po pochłonięciu neutronu zostanie utworzony promieniotwórczy izotop uranu ^{239}U, rozpadający się przez emisję cząstek β^-. Otto Hahn za odkrycie zjawiska rozszczepienia otrzymał w 1944 roku Nagrodę Nobla w dziedzinie chemii.

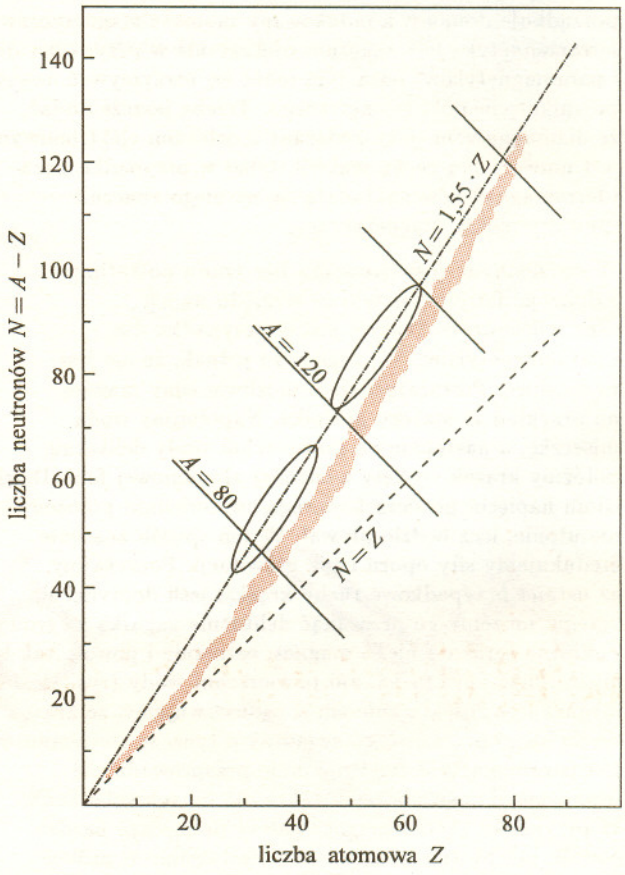
Rozszczepienie jako proces spontaniczny występuje w przyrodzie tylko dla jąder najcięższych i niezwykle rzadko, chociaż już dla jąder o liczbie atomowej $Z = 40$ i masowej $A = 90$ proces ten jest egzoenergetyczny, a więc nie wymagający dostarczania energii. Ale nawet dla najcięższych jąder zachodzi on z bardzo małym prawdopodobieństwem, bo np. wartości czasów połowicznego zaniku $T_{1/2}$ dla jąder uranu ^{238}U w wyniku samorzutnego rozszczepienia są rzędu 10^{16} lat. Prawdopodobieństwo rozszczepienia jądra znacznie wzrośnie, jeśli jądru dostarczona będzie pewna energia, zwana energią aktywacji rozszczepienia. Dla jąder najcięższych pierwiastków wynosi ona kilka megaelektronowoltów. Pochłanianie neutronów przez jądra jest jednym ze sposobów dostarczania tej energii. W przypadku ^{235}U już pochłonięcie neutronu powolnego dostarcza energii większej niż energia aktywacji, ale dla ^{238}U muszą to być neutrony prędkie o energii kinetycznej powyżej 1 MeV. Neutrony są cząstkami szczególnie dobrze nadającymi się do wywoływania rozszczepienia, ponieważ nie mają ładunku elektrycznego i dlatego mogą łatwo wnikać do jądra. Obecnie wiadomo, że w wyniku rozszczepienia jądra po pochłonięciu neutronu powstają dwa jądra o średnich masach, zwane fragmentami rozszczepienia, czemu towarzyszy natychmiastowa emisja 2–3 neutronów o średniej energii kinetycznej około 2 MeV. Sytuację tę dla ^{235}U ilustruje rysunek 1.



Rys. 1. Schematyczny przebieg rozszczepienia jądra ^{235}U.

Łączna energia wyzwolona podczas jednego aktu rozszczepienia jądra ciężkiego wynosi około 200 MeV, co stanowi około 0,1% energii spoczynkowej jądra rozszczepianego. Wydziela się ona głównie w postaci energii kinetycznej fragmentów rozszczepienia i emitowanych przez nie neutronów oraz w postaci promieniowania gamma i energii cząstek β oraz neutrin. Rozszczepieniu wszystkich jąder $(2{,}6 \cdot 10^{24})$ składających się na 1 kg ^{235}U towarzyszy wydzielenie $8 \cdot 10^{13}$ J ciepła. Jest to energia równoważna energii uzyskiwanej ze spalenia 2500 ton najlepszego węgla. Zatem energia z rozszczepienia 1 kg uranu ^{235}U jest 2,5 miliona razy większa od energii spalania węgla o takiej samej masie. Ten prosty rachunek wskazuje, o ile bardziej efektywne pod względem ilości wydzielonego ciepła jest paliwo jądrowe w porównaniu z węglem. Urządzenia służące do wyzwalania energii jądrowej (w sposób kontrolowany) nazywają się reaktorami jądrowymi. Paliwem w reaktorze jest najczęściej uran naturalny wzbogacony w uran ^{235}U lub pluton ^{239}Pu. Na całym świecie już obecnie pracuje około 500 reaktorów jądrowych (w 1989 roku – 434). Większość z nich przeznaczona jest do produkcji energii cieplnej, która następnie jest zamieniana na energię elektryczną.

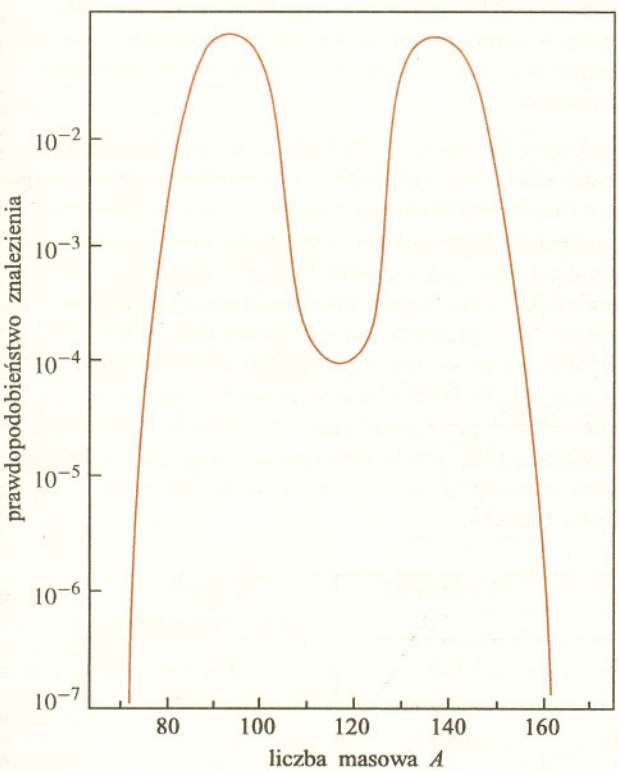
Podczas pracy reaktora jądra atomowe paliwa ulegają rozszczepieniu na fragmenty o niejednakowych Z i A.



Rys. 2. Uproszczony wykres ścieżki stabilności ze względu na rozpad beta oraz obszarów występowania fragmentów rozszczepienia ^{235}U (zaznaczone elipsami).

W procesie wypalania paliwa powstaje około 80 różnych produktów rozszczepienia. Na rysunku 2, wykreślonym we współrzędnych $x = Z$ (liczba protonów), $y = N$ (liczba neutronów), zestawiającym wszystkie jądra występujące w przyrodzie i stabilne ze względu na rozpady beta (nazywanym wykresem ścieżki stabilności beta), fragmenty rozszczepienia uranu ^{235}U są umiejscowione w obszarach objętych elipsami. Odpowiada im znaczny nadmiar neutronów w stosunku do liczby neutronów właściwej dla jąder stabilnych. Oznacza to, że fragmenty rozszczepienia są jądrami nietrwałymi i rozpadają się głównie przez emisję elektronów (rozpad beta minus).

W wyniku rozpadu promieniotwórczego fragmentów zostają wytworzone dalsze, zwykle również promieniotwórcze, izotopy o różnych wartościach okresów połowicznego zaniku. W sumie, podczas rozszczepienia paliwa jądrowego powstaje około 200 radionuklidów, które w układzie okresowym pierwiastków zajmują miejsca od, mniej więcej, cynku ^{72}Zn ($Z = 30$) do terbu ^{161}Tb ($Z = 65$). W wyniku rozszczepienia ^{235}U pojawiają się najczęściej fragmenty o liczbach masowych około 95 oraz około 140. Krzywa wydajności rozszczepienia uranu ^{235}U za pomocą neutronów, przedstawiona na rysunku 3, wskazuje na to, że prawdopodobieństwo natrafienia na fragmenty rozszczepienia jest bardzo zależne od ich masy.



Rys. 3. Rozkład mas fragmentów rozszczepienia ^{235}U.

Energetyka jądrowa, oparta na kontrolowanych reakcjach rozszczepienia, stwarza możliwości i nadzieje na zaspokojenie przez wiele kolejnych lat rosnącego zapotrzebowania ludzkości na energię. Co więcej, prawidłowo funkcjonujące elektrownie jądrowe są ekologicznie czystsze niż konwencjonalne elektrownie węglowe.

Jest jednak i druga strona medalu, a mianowicie, poważne kłopoty z wykorzystanym w reaktorze paliwem. W odróżnieniu od kotła elektrowni węglowej w reaktorze jądrowym nie udaje się osiągnąć całkowitego „spalenia" paliwa jądrowego. Zawiera ono nie wypalone do reszty paliwo, promieniotwórcze pierwiastki transuranowe (m.in. neptun i pluton), które powstały z paliwa po wychwycie neutronów i rozpadach beta, a przede wszystkim – ogromne ilości wysoce promieniotwórczych fragmentów rozszczepienia. Aktywność ich jest ogromna – wynosi $2 \cdot 10^{17}$ rozpadów na sekundę, na każdy megawat mocy cieplnej wytwarzanej przy długotrwałej eksploatacji reaktora. Te odpady produkcyjne elektrowni jądrowych mogą być w części przetwarzane dla wydobycia z nich resztek paliwa. Pozostała część, na którą składają się promieniotwórcze fragmenty rozszczepienia, stanowi „promieniotwórcze śmiecie" sprawiające sporo kłopotów z ich składowaniem w sposób nie stwarzający zagrożenia dla ludzi i środowiska. Te „promieniotwórcze śmiecie", wytwarzane podczas pracy reaktora, nie mogą przedostać się do środowiska, ponieważ stworzyłoby to ogromne zagrożenie dla człowieka. Odpady promieniotwórcze powstają w różnych postaciach: jako substancje gazowe, ciekłe i stałe. Ponieważ nawet po wypaleniu w reaktorze (z paliwem wzbogaconym w ^{235}U) w paliwie występuje procentowo więcej atomów ^{235}U, niż zawiera ich uran naturalny (0,72%), poddaje się je procesom przerobu w celu wydobycia z niego niewypalonego ^{235}U i plutonu.

W ten sposób zmniejsza się aktywność odpadów i uzyskuje się możliwość powtórnego wykorzystania surowców energetycznych. Przerób wypalonego paliwa jest poprzedzany okresem „schładzania" (6–12 miesięcy) w przyreaktorowych basenach wodnych. Tam w wyniku rozpadu krótkożyciowych izotopów-produktów rozszczepienia zachodzi zmniejszenie ich aktywności. Odpady promieniotwórcze (przed ich przerobem) mogą być też przechowywane na sucho, np. upakowane w kasetach ustawionych w podziemnych lub naziemnych zbiornikach betonowych, gdzie są chłodzone powietrzem lub innymi gazami (np. CO_2).

Głównym motywem rozwoju technologii przerobu paliwa wypalonego jest zmniejszenie w ten sposób ryzyka przy długoterminowym jego składowaniu. Podczas gdy okres $T_{1/2}$ ogromnej większości produktów rozszczepienia nie przekracza 30 lat, okres półrozpadu plutonu ^{239}Pu wynosi około 24 000 lat. Zagrożenie wnoszone przez odpady z procesu przerobu paliwa wypalonego po oddzieleniu od nich plutonu i zmagazynowaniu w podziemnych sztolniach zmniejsza się do poziomu zagrożenia wywołanego obecnością rudy uranowej dopiero po około 600 latach. Natomiast gdyby z odpadów nie został oddzielony pluton, to zagrożenie nimi, nawet po stu tysiącach lat, pozostałoby wyższe niż zagrożenie spowodowane rudami uranowymi. Pluton i inne aktynowce powinny być dlatego oddzielone od produktów rozszczepienia przeznaczonych do ostatecznego składowania, należy je również unieszkodliwić.

W przypadku energetyki jądrowej masa surowców potrzebna do uzyskania określonej ilości energii jest znacznie mniejsza niż masa surowców konwencjonalnych. Dlatego też odpadów promieniotwórczych powstaje nieporównanie mniej niż w innych dziedzinach energetyki opartej np. na spalaniu węgla. Niepalne odpady stałe poddaje się prasowaniu w celu maksymalnego zmniejszenia ich objętości. Następnie są one ładowane do beczek i zalewane cementem. Objętość odpadów palnych najskuteczniej redukuje się przez ich spalenie, a gazy spalania przepuszcza się przez system filtrów w celu oczyszczenia ich z pyłów i związków chemicznych mogących zawierać nuklidy promieniotwórcze. Popioły natomiast poddaje się wymieszaniu z cementem, piaskiem i wodą i załadowuje się do beczek. Przerób ciekłych odpadów promieniotwórczych polega na ich stężeniu do jak najmniejszej objętości, przetworzeniu w postać stałą i następnie np. zatopieniu w masie asfaltowej. Obecnie najbardziej perspektywiczną i sprawdzoną metodą przekształcania odpadów w postać stałą jest ich zeszkliwianie. Podczas prażenia ich w temperaturze 400–800°C sole azotowe produktów rozszczepienia przekształcają się w tlenki. Dalsze prażenie tlenków odpowiednio długo w temperaturze 900–1200°C prowadzi do powstania szkła borowo-krzemowego. Wytwarza się również szkła fosforowe przez odparowanie roztworów w obecności kwasu fosforowego i następnie prażenie w temperaturze 800–1100°C. Masę szklaną wylewa się do cylindrycznych pojemników ze stali nierdzewnej, które są hermetycznie zamykane i transportowane na składowiska odpadów radioaktywnych.

Z reaktora o mocy elektrycznej 1000 MW, który zużywa rocznie 30 ton paliwa uranowego, powstaje rocznie tylko około 4 m^3 wysoko aktywnych odpadów oraz około 300 m^3 odpadów ciekłych o niskiej i średniej aktywności. Żadnych z tych odpadów nie wyrzuca się po prostu do środowiska. Najlepszą lokalizacją składowisk odpadów są wyrobiska wyeksploatowanych kopalń, nie używane tunele komunikacyjne, stare fortyfikacje podziemne, złoża solne czy pokłady gliny na głębokości do 100 m. Składowiska odpadów lokalizuje się na obszarach, gdzie nie ma wody gruntowej, uskoków gruntu, pęknięć tektonicznych skorupy ziemskiej. Miejsca te nie powinny być zagrożone trzęsieniami ziemi.

Tak dobrane warunki przechowywania gwarantują w maksymalnym stopniu, że pojemniki zawierające zgromadzone „śmiecie" nie będą narażone na mechaniczne pęknięcia i uszkodzenia zagrażające rozsypaniem się ich w środowisku. Pewne zagrożenie może wiązać się z procesami zachodzącymi wewnątrz „śmieci", które np. na skutek tzw. uszkodzeń radiacyjnych zachodzących w materiałach zeszkliwionych mogą prowadzić do kruszenia szkła oraz osłon zewnętrznych, tj. samych pojemników.

Dla porównania, elektrownia węglowa o mocy 1000 MW spalając w roku 3 miliony ton węgla wytwarza ponad milion ton pyłów i szlaki, około 100 000 ton dwutlenku siarki i tlenków azotu oraz kilka milionów ton dwutlenku węgla, które trafiają na odkryte hałdy albo uchodzą w powietrze.

Analizy możliwości wydostania się na powierzchnię substancji radioaktywnych ze składowisk i wynikającego stąd zagrożenia ludności wskazują, że ryzyko związane ze zmagazynowanymi głęboko pod ziemią odpadami radioaktywnymi jest nieporównywalnie mniejsze od ryzyka wywoływanego przenikającym do środowiska radem ze złóż naturalnego uranu.

Stosowane obecnie metody przechowywania odpadów radioaktywnych należą do bezpiecznych. Obowiązujące w tym zakresie zasady są rygorystyczne. Gdyby na przełomie XIX i XX wieku zaczęły obowiązywać takie rygory w całym powstającym wtedy przemyśle – nie mielibyśmy obecnie w ogóle problemu zanieczyszczenia środowiska.

Większym zagrożeniem dla ludzi i środowiska mogą być awarie elektrowni jądrowych, podczas których wyzwalają się z rozhermetyzowanych prętów z paliwem jądrowym promieniotwórcze fragmenty rozszczepienia i wydostają się na zewnątrz jak z puszki Pandory, powodując skażenie środowiska substancjami promieniotwórczymi na dużych obszarach, sięgających czasami nawet tysięcy km^2. Podobnie rzecz się ma w przypadku wybuchu bomb atomowych. W środowisku rozprzestrzeniają się wtedy długożyciowe pierwiastki promieniotwórcze. Dotychczas największą taką awarią elektrowni jądrowej była awaria bloku energetycznego w Czernobylu w 1986 roku (*Delta* 1/1993).

Liczba atomowa	Symbol chemiczny	Okres półtrwania	Wydajność %	Rodzaj promieniowania
35	^{83}Br	2,39 godz.	0,5	β^-, γ
36	^{85}Kr	10,76 lat	0,293	β^-, γ
	^{88}Kr	2,84 godz.	3,57	β^-, γ
38	^{89}Sr	50,5 dni	4,79	β^-
	^{90}Sr	28,8 lat	5,77	β^-
	^{92}Sr	2,71 godz.	5,3	β^-
43	^{99}Tc	$2,13 \cdot 10^5$ lat	6,06	β^-
53	^{131}J	8,04 dni	3,1	β^-, γ
55	^{137}Cs	30,14 lat	6,15	β^-, γ
58	^{141}Ce	32,5 dni	5,7	β^-, γ
	^{144}Ce	284,9 dni	6,0	β^-, γ
62	^{151}Sm	90 lat	0,45	β^-, γ

Niektóre izotopy powstające w reakcji rozszczepienia ^{235}U.

Kącik olimpijski (13)

Rozwiązanie zadania F 415. Moc wypromieniowywana przez powierzchnię Słońca wynosi, zgodnie z prawem Stefana-Boltzmanna $P = 4\pi R_S^2 \cdot \sigma T_S^4$; $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 K^4}}$. Strumień energii przepływającej w jednostce czasu przez prostopadłą do kierunku promieni słonecznych powierzchnię jednostkową umieszczoną w odległości R od centrum Słońca wynosi $J_E(R) = P/4\pi R^2$. Dla satelity ziemskiego można przyjąć $R = R_{Z-S}$. W jednostce czasu satelita absorbuje więc energię $\frac{\Delta E}{\Delta t} = J_E(R_{Z-S})\pi r_{sat}^2$. Energia wypromieniowana z satelity w jednostce czasu wynosi $4\pi r_{sat}^2 \cdot \sigma T_{sat}^4$. Temperatura satelity będzie ustalona, gdy energia absorbowana i emitowana będą równe. Ostatecznie dostajemy więc

$$T_{sat} = T_S \cdot \sqrt{\frac{R_S}{2R_{Z-S}}} \approx 290\ \mathrm{K} = 17^\circ\mathrm{C}.$$

Rozwiązanie zadania M 753. Wprowadźmy na płaszczyźnie kartezjański układ współrzędnych i oznaczmy $|[x,y]| = \sqrt{x^2+y^2}$, $\|[x,y]\| = \max(|x|,|y|)$. Udowodnimy następujące twierdzenie: jeśli $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ są takimi wektorami płaszczyzny, że $\|\mathbf{v}_j\| \le 1$ dla wszystkich j, to można tak dobrać znaki $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \{-1, 1\}$, by $\|r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \cdots + r_n\mathbf{v}_n\| \le 2$. Z tego twierdzenia, oczywiście, wynika teza zadania, bo dla dowolnego wektora v zachodzą nierówności $\|v\| \le |v| \le \sqrt{2}\|v\|$, natomiast $2\sqrt{2} < 3$.

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że twierdzenie jest fałszywe i niech n będzie najmniejszą liczbą naturalną, dla której istnieje kontrprzykład, czyli takie wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ o długości nie większej niż 1, że dla dowolnego układu znaków jest $\|r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \cdots + r_n\mathbf{v}_n\| > 2$. Każdy z wektorów $\mathbf{v}_j$ należy do jednej z ćwiartek układu współrzędnych: $\{[x,y] \in \mathbf{R}^2 : x, y \ge 0\}$, $\{[x,y] \in \mathbf{R}^2 : x \ge 0 > y\}$, $\{[x,y] \in \mathbf{R}^2 : y \ge 0 > x\}$, $\{[x,y] \in \mathbf{R}^2 : x, y < 0\}$. Wykażemy, że do każdego z tych zbiorów należy co najwyżej jeden z wektorów $\mathbf{v}_j$. Istotnie, jeśli np. $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ należą do jednego z tych zbiorów, to łatwo sprawdzić, że $\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| \le 1$, a zatem układ wektorów $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n$ spełnia nasze twierdzenie. Istnieje więc taki układ znaków, że $\|r_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + r_3\mathbf{v}_3 + \cdots r_n\mathbf{v}_n\| \le 2$. Ale wówczas biorąc układ znaków r_1, $r_2 = -r_1$, $r_3, \ldots, r_n$ widzimy, że wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ również spełniają twierdzenie, wbrew założeniom.

Zatem, do każdej ćwiartki układu współrzędnych należy co najwyżej jeden wektor $\mathbf{v}_j$, zatem $n \le 4$ i wystarczy położyć $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 1$, aby otrzymać $\|r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \cdots + r_n\mathbf{v}_n\| \le 2$. Wykazaliśmy więc, przez sprowadzenie do niedorzeczności, że twierdzenie jest prawdziwe, co kończy dowód.

Taki jeden fakt, a ile zadań...

Niech n będzie liczbą naturalną, p dzielnikiem pierwszym liczby $n!$, a α – wykładnikiem, z którym p występuje w rozkładzie liczby $n!$ na czynniki pierwsze. Okazuje się, że

$$\alpha = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^s}\right],$$

gdzie s jest taką liczbą naturalną, że $p^s \le n < p^{s+1}$, a symbol $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x.

Istotnie, obliczmy najpierw, ile jest w ciągu $1, 2, \ldots, n$ liczb podzielnych przez p. Jeżeli takich liczb jest k, to liczba kp jest wśród nich największa i dlatego $kp \le n < (k+1)p$, czyli $k \le n/p < k+1$. A to oznacza, że $k = [n/p]$. Wśród liczb $1, 2, \ldots, n$ podzielnymi przez p są liczby $p, 2p, 3p, \ldots, [\frac{n}{p}]p$. Możemy więc napisać: $n! = p \cdot 2p \cdot \ldots \cdot [\frac{n}{p}]p \cdot M_1 = p^{[n/p]} \cdot [\frac{n}{p}]! \cdot M_1$, gdzie M_1 nie dzieli się przez p.

Jeżeli $[n/p] < p$, to $\alpha = [n/p]$. Jeśli natomiast $[n/p] \ge p$, to dalej wyodrębniamy liczby podzielne przez p w ciągu $1, 2, 3, \ldots, [n/p]$. Jest ich tam (proszę sprawdzić!) $\left[\frac{[n/p]}{p}\right] = \left[\frac{n}{p^2}\right]$. Stąd $\left[\frac{n}{p}\right]! = p \cdot 2p \cdot \ldots \cdot \left[\frac{n}{p^2}\right] p \cdot M_2 = p^{[n/p^2]} \cdot \left[\frac{n}{p^2}\right]! \cdot M_2$, gdzie M_2 nie dzieli się przez p. I znowu, jeśli $[n/p^2] < p$, to $\alpha = [n/p] + [n/p^2]$. W przeciwnym przypadku, tzn. gdy $[n/p^2] \ge p$, rozumujemy jak przed chwilą, dochodząc ostatecznie do żądanego wzoru.

Zastosujmy otrzymany wzór do rozwiązania kilku zadań olimpijskich.

1. (XVIII Olimpiada Matematyczna) Znaleźć najwyższą potęgę liczby 2 będącą dzielnikiem liczby $L_n = (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot 2n$, gdzie $n \in \mathbf{N}$.

Rozwiązanie: Niech α i β będą odpowiednio wykładnikami, z którymi liczba 2 występuje w rozkładzie liczb $n!$ i $(2n)!$ na czynniki pierwsze. Zgodnie z otrzymanym wzorem

$$\alpha = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{2^l}\right], \qquad \beta = \left[\frac{2n}{2}\right] + \left[\frac{2n}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{2n}{2^{l+1}}\right],$$

gdzie $2^l \le n < 2^{l+1}$. A ponieważ $L_n = (2n)!/n!$, więc w rozkładzie L_n na czynniki pierwsze liczba 2 występuje z wykładnikiem $\beta - \alpha = n$.

2. Iloma zerami kończy się liczba 1995! ?

Rozwiązanie: Trzeba znaleźć $\max\{k \in \mathbf{N}: 10^k \mid 1995!\}$. Ale $10 = 2 \cdot 5$, więc wystarczy wyznaczyć wykładnik potęgi liczby 5, z którym wchodzi ona w rozkład na czynniki pierwsze liczby 1995! (dlaczego?). A ten, jak już wiemy, jest równy

$$\left[\frac{1995}{5}\right] + \left[\frac{1995}{5^2}\right] + \left[\frac{1995}{5^3}\right] + \left[\frac{1995}{5^4}\right] = 399 + 79 + 15 + 3 = 496.$$

3. (XIV MOM) Niech m i n będą nieujemnymi liczbami całkowitymi. Dowieść, że liczba

$$\frac{(2m)! \cdot (2n)!}{n! \cdot m! \cdot (m+n)!}$$

jest całkowita.

Wskazówka: Wykazać, że dowolna liczba pierwsza p występuje w rozkładzie liczby $m! \cdot n! \cdot (m+n)!$ na czynniki pierwsze z wykładnikiem nie większym niż w rozkładzie liczby $(2m)! \cdot (2n)!$. W tym celu należy udowodnić najpierw nierówność $[2x] + [2y] \ge [x] + [y] + [x+y]$.

4. Wykazać, że dla żadnego $n \in \mathbf{N}$ liczba 2^n nie dzieli liczby $n!$.

5. Dowieść, że dla każdego $n \in \mathbf{N}$ liczba $(n!)!$ jest podzielna przez $(n!)^{(n-1)!}$.

6. (XLIII O.M.) Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej k liczba $(k!)^{k^2+k+1}$ jest dzielnikiem liczby $(k^3)!$.

7. Dowieść, że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych m i n liczba $\frac{(5m)! \cdot (5n)!}{m! \cdot n! \cdot (3m+n)! \cdot (3n+m)!}$ jest całkowita.

8. Wyznaczyć największą potęgę liczby 2, która jest dzielnikiem liczby $(2^n)!$, gdzie $n \in \mathbf{N}$.

Henryk PAWŁOWSKI

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.**
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1995.

Termin nadsyłania rozwiązań: 29 II 1996

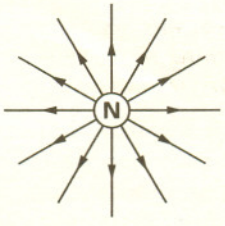
Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 293 (WT=1,11) i 294 (WT=3,12)
z numeru 1/1995
oraz
zadań 295 (WT=2,03) i 296 (WT=2,25)
z numeru 2/1995

Waldemar Pompe	– Warszawa	47,01
Tomasz Wietecha	– Tarnów	42,33
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	41,17
Janusz Olszewski	– Suwałki	40,79
Adam Czornik	– Bytom	39,26
Piotr Lipiński	– Radom	35,74
Tomasz Kulpa	– Katowice	34,45

Waldek Pompe: kolejna miła buzia w **Klubie 44** (numer 77).

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 193 (WT=3,36) i 194 (WT=1,53)
z numeru 2/1995

Zbigniew Galias	– Kraków	36,75
Artur Gawryszczak	– Dubeczno	35,84
Aleksander Surma	– Myszków	29,45
Dariusz Wilk	– Rzeszów	25,57
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	23,31
Przemysław Gworys	– Częstochowa	19,46



Zadania z matematyki nr 309 i 310

Redaguje Marcin E. KUCZMA

309. Elipsę $\{(x,y) : 49x^2 + y^2 \le 100\}$ dzielimy na dwie części prostą przechodzącą przez punkt (1,1). Obliczyć najmniejszą możliwą wartość pola mniejszej części.

310. Sześć par małżeńskich zasiada w rzędzie teatru. Ile jest możliwości rozsadzenia, przy których żaden mąż nie zajmuje miejsca obok swej żony?

Zadanie **310** zaproponował pan Mieczysław Jędrzejowski z Krakowa.

Zadania z fizyki nr 207 i 208

Redaguje Jerzy B. BROJAN

207. Fizyka teoretyczna dopuszcza możliwość istnienia tzw. monopoli magnetycznych – cząstek wytwarzających wokół siebie radialne pole magnetyczne analogiczne do pola elektrycznego cząstki naładowanej (jak dotąd, nie udało się tych cząstek wykryć doświadczalnie). Pole magnetyczne nieruchomego monopola o ładunku magnetycznym g byłoby opisane wzorem

$$\vec{B} = g\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Załóżmy, że do unieruchomionego (np. mającego bardzo dużą masę) monopola o ładunku magnetycznym g zbliża się cząstka o masie m i ładunku elektrycznym q. W chwili początkowej cząstka ma prędkość v, jej odległość od monopola jest równa r, a kąt między wektorem prędkości i wektorem wodzącym $\vec{r}$ wynosi θ (rysunek). Obliczyć minimalną odległość zbliżenia cząstki do monopola.

208. Aby belka podparta w środku nie przełamała się pod własnym ciężarem, jej długość nie powinna przekraczać wartości l_1. Jaką maksymalną długość l_2 może osiągnąć bez złamania belka podparta w dwóch punktach i w których punktach należy ją podeprzeć? Wymiary poprzecznego przekroju belek i rodzaj materiału są ustalone.

Rozwiązanie zadania F 416. Należy rozwiązać układ równań ruchu poszczególnych składników układu przyjmując, że całość wykonuje podłużne drgania normalne. Oznaczmy przez x_1, x_2, x_3 wartości wychyleń kolejnych atomów z położeń równowagi.

Siły harmoniczne działające na poszczególne atomy są proporcjonalne do względnych wychyleń atomów tworzących dany oscylator:

$$F_1 = m_O\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2),$$
$$F_2 = m_C\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3) = -k(-x_1 + 2x_2 - x_3),$$
$$F_3 = m_O\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_1).$$

Szukamy rozwiązania w postaci drgań harmonicznych $x_i = A_i\sin(\omega t)$. Po zróżniczkowaniu i podzieleniu stronami przez $\sin(\omega t)$ dostajemy układ trzech liniowych równań jednorodnych na trzy nieznane amplitudy.

$$\begin{array}{ccccc} (k - m_O\omega^2)A_1 & -kA_2 & 0\cdot A_3 & = & 0 \\ -kA_1 & (2k - m_C\omega^2)A_2 & -kA_3 & = & 0 \\ 0\cdot A_1 & -kA_2 & (k - m_O\omega^2)A_3 & = & 0 \end{array}$$

Nietrywialne rozwiązania takiego układu istnieją tylko wtedy, gdy wyznacznik macierzy współczynników jest równy zeru

$$\begin{vmatrix} k - m_O\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m_C\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m_O\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Jest to równanie szóstego stopnia i otrzymujemy trzy nieujemne wartości ω – częstości, dla których możliwe są drgania normalne powyższego układu – będące pierwiastkami tego równania:

$$\omega_I = 0, \quad \omega_{II} = \sqrt{\frac{k}{m_O}}, \quad \omega_{III} = \sqrt{k\left(\frac{2}{m_C} + \frac{1}{m_O}\right)}.$$

(Związki między amplitudami dla poszczególnych drgań podstawowych uzyskamy wstawiając do układu równań poszczególne wartości i rozwiązując go). Eksperymentalnie obserwowane częstości kołowe wyznaczymy ze związku z częstotliwością: $\omega = 2\pi\nu$. Zgodnie z przyjętym modelem, wyższą częstotliwość obserwowaną utożsamiamy ze stanem o częstości ω_{III}, a niższą z ω_{II} i otrzymujemy ostatecznie:

$$k' = m_O\omega_{II}^2 \approx 1670\ \mathrm{N/m},$$
$$k'' = \frac{m_O m_C}{2m_O + m_C}\omega_{III}^2 \approx 1420\ \mathrm{N/m}.$$

epsilon

11/95
(56)

Magia liczb

Liczby odgrywają w działalności ludzi rolę trudną do przecenienia. Nie sposób wyobrazić sobie istnienia i rozwoju naszej cywilizacji bez pojęcia liczby. Rozmaite systemy filozoficzne chętnie wypowiadały się na temat liczb i ich miejsca w rzeczywistości. Znane jest powiedzenie pitagorejczyków „wszystko jest liczbą" wyrażające przekonanie, iż całą rzeczywistość da się opisać przy użyciu liczb naturalnych. Innych wtedy nie uznawano; ułamki to były stosunki, proporcje liczb naturalnych. Liczbom od niepamiętnych czasów przypisywano też, oprócz ilościowego, znaczenie magiczne; miały one wyrażać także idee i siły. Każdej liczbie przypisano pewną osobowość i symbole.

Bardziej lub mniej świadomie także i obecnie przypisujemy przynajmniej niektórym liczbom rozmaite cechy nie mające raczej nic wspólnego z matematyką. Siódemkę chętnie uznajemy za liczbę szczęśliwą a trzynastkę wręcz przeciwnie. Mówimy: „do trzech razy sztuka" i nie kupujemy parzystej liczby kwiatów albo na odwrót – właśnie parzystą. Dziedziną działalności ludzkiej (bo trudno tu użyć określenia: nauka) zajmującą się znaczeniem liczb jest numerologia. Bardzo ważne są cechy liczb odpowiadające cyfrom od 0 do 9, gdyż z nich są zbudowane wszystkie inne liczby. Niestety brak tu jednoznaczności i tym samym liczbom przypisywane są często cechy sprzeczne.

Oto jakie cechy i znaczenie przypisywano niektórym liczbom naturalnym.

1. – Zaskakujące, ale jedynka nie była uznawana przez Starożytnych Greków za prawdziwą liczbę, stanowiła ona źródło innych prawdziwych liczb, które były z niej budowane. Starożytni nazywali ją monadą; uważali również, że jedność jest jednocześnie parzysta i nieparzysta, gdyż dodana do liczby parzystej daje liczbę nieparzystą i odwrotnie. Raz jedność oznaczała niewiele, tyle co nic: *nec Hercules contra plures*, innym razem – dużo, wiele: jedność większa od dwóch. W matematyce 1 też pełni wyróżnioną rolę – jest elementem neutralnym dla mnożenia oraz jest jedyną liczbą naturalną mającą jeden dzielnik.

2. – Dla Starożytnych to była pierwsza prawdziwa liczba, chociaż nie do końca doskonała, gdyż parzysta. Dwójce przypisywano cechy żeńskie; miała ona reprezentować pierwszy etap kreacji. Według pitagorejczyków wyrażała zasadę przeciwieństw: czerń i biel, ciepło i zimno, wodę i ląd itp; w naturze istnieją dwa czynniki, nie może być samej formy bez treści. Dwa jest najmniejszą liczbą pierwszą i do tego jedyną parzystą.

3. – Pierwsza prawdziwa, według Starożytnych Greków, liczba nieparzysta. Pierwsza liczba męska reprezentująca drugi poziom kreacji. Liczba ta symbolizuje bóstwo, świętość, wielkość, to, co najlepsze, siłę, akcję, natchnienie. Reprezentuje też naturę (narodziny, wzrost, rozkład). Trójka chętnie wykorzystywana jest w religiach, mitologiach, baśniach i folklorze (Trójca święta, trzej królowie, trzech synów Noego, trzy Mojry, trzy Gracje, Cerber – trzygłowy pies, trzej muszkieterowie, trzy córki króla Leara, trzy zaklęcia, trzy życzenia, do trzech razy sztuka itp).

Czego można się dowiedzieć o liczbach z encyklopedii? Zajrzeliśmy do Encyklopedii Popularnej (wyd. 1982). Czytamy:

LICZBA, w pierwotnym znaczeniu abstrakc. twór służący do oznaczania liczności wydzielonych partii przedmiotów (zbiorów); jedno z podstawowych pojęć matematyki, które w swym hist. rozwoju ulegało różnym uogólnieniom – od liczb naturalnych 1, 2, 3... począwszy, poprzez l. całkowite (dodatnie i ujemne), wymierne (ułamki liczbowe), rzeczywiste (l. wymierne i niewymierne), zespolone i inne, aż do l. kardynalnych i l. porządkowych.

Liczby pierwsze umieszczono pod literą P, liczby kardynalne pod literą K... Pod literą L są jeszcze hasła: LICZBA NAJBARDZIEJ ZŁOŻONA oraz LICZBY NORMALNE (inne liczby, o których tam mowa, to pojęcia chemiczne, językoznawcze i fotograficzne). Matematycy – czy wiecie bez zaglądania do encyklopedii, jak się definiuje liczby najbardziej złożone i normalne? W Encyklopedii Szkolnej „Matematyka" jest mowa o 36 rodzajach liczb (w tym np. o liczbach podwójnej dokładności), ale o takich nie!

Żyjemy w przestrzeni o trzech wymiarach geometrycznych. Problemy z topologii obiektów trójwymiarowych, obok czterowymiarowych często są wyróżniane ze względu na specyfikę metod i rozwiązania.

4. – Pierwsza liczba złożona, parzysto-parzysta jak mówili Starożytni. Czwórka symbolizowała Wszechświat materialny. Podobnie jak trójka często pojawia się w religiach, mitologiach, folklorze i literaturze. Mamy cztery strony świata, cztery żywioły, czterech ewangelistów, cztery cherubowie o czterech obliczach (Ezechiel), czterech jeźdźców Apokalipsy. Hebrajskie imię Boga składa się z czterech liter JHWH. U pitagorejczyków cztery pierwsze liczby dawały *tetraktys* – liczbę dziesięć zapisaną w postaci trójkątnej piramidy o podstawie cztery. Również według pitagorejczyków matematyka dzieliła się na cztery dziedziny: arytmetykę, geometrię, astronomię i muzykę. Często czwórka była liczbą niepomyślną jako podwojenie niezbyt fortunnej dwójki. W matematyce słynny jest między innymi problem czterech barw oraz wyjątkowe własności przestrzeni czterowymiarowej.

5. – Pitagorejczycy uważali piątkę, połączenie żeńskiej dwójki i męskiej trójki, za symbol człowieka-mikrokosmosu, harmonii, miłości i zdrowia. Dwie figury, pentagon – pięciokąt foremny oraz pentagram – pięciokąt gwiaździsty foremny, miały dla nich znaczenie magiczne. Do dziś pentagram znajduje się w godłach wielu państw i na wielu flagach. Figury te mają interesujące własności z punktu widzenia geometrii.

6. – Szóstka symbolizuje symetrię, równowagę, niezawodność, stałość, piękno, jedność strukturalną kosmosu i mikrokosmosu – jest liczbą doskonałą. W symbolice chrześcijańskiej była to liczba święta, bowiem Bóg stworzył świat w sześć dni, ale 666 jest symbolem Antychrysta i grzechu. Sześć jest liczbą doskonałą również w matematyce: liczby doskonałe to te, które dają się przedstawić jako sumy swoich dzielników (oczywiście, mniejszych od nich samych).

Tę wyliczankę można kontynuować. Siedem jest liczbą świętą i szczęśliwą, osiem symbolizuje porządek kosmiczny i nieskończoność, podobnie jak dziesięć, która u pitagorejczyków była liczbą najświętszą. Jedenaście oznacza nadmiar i nieumiarkowanie w przeciwieństwie do dwunastu, a trzynaście dysharmonię, śmierć, katastrofę i ruinę. Każdej z liczb można przypisać jakąś cechę. Każda ma pewne własności ciekawe z punktu widzenia matematyki. Z tym, że niektóre mają ich trochę więcej...

Ananiasz POŚMIECHOWSKI

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski, Marcin Poźniak.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.