

## SPIS TREŚCI NUMERU 1(260)

Czego uczono w Starożytności  
 i Średniowieczu  
*Marek Kordos*

str. 1

Kometa kamikadze,  
 czyli zderzenie komety  
 Shoemaker-Levy 9  
 z Jowiszem  
*Krzysztof Ziolkowski*

str. 1

Patrz w niebo

str. 5

Kocie oczy, apoteoza  
 Celliniego i zroszona łąka  
*Krzysztof Rejmer*

str. 6

Ankiety ciąg dalszy  
*Jerzy Kuczyński*

str. 8

Zadania

str. 8

Mała Delta

str. 9

O twierdzeniach granicznych  
*Paweł Strzelecki*

str.10

Konkurs Uczniowskich Prac  
 z Matematyki

str.13

Klub 44

str.14

Kącik Olimpijski

str.16

Epsilon

str.17

**W następnym numerze:**

Stała grawitacji

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny  
 Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego  
 i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,  
 wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.  
 Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula  
 Bogdan Cichocki  
 Roman Duda  
 Jan A. Gaj  
 Tomasz Hofmokl  
 Marta Kicińska-Habior  
 – przewodnicząca

Krzysztof Maślanka  
 Andrzej Mąkowski  
 – wiceprzewodniczący

Andrzej Pelczar  
 Zbigniew Plochocki  
 Zdzisław Pogoda

Michał Różyczka  
 Konrad Rudnicki  
 Zbigniew Semadeni

Grzegorz Sitarski  
 Mieczysław Subotowicz  
 Andrzej Szymacha  
 Andrzej Woszczyk  
 Wacław Zawadowski

Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol  
 Krzysztof Biesaga  
 Jan Kalinowski – z-ca red. nac.  
 Krystyna Kordos – sekr. red.  
 Marek Kordos – red. nac.

Tomasz Kwast  
 Anna Ludwicka  
 Krzysztof Rejmer  
 Anna Rudnik

Paweł Strzelecki  
 Joanna Udalska

Adres Redakcji:  
 ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa  
 tel. 43-02-43 wewn. 21

PAWELST@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano  
 w Drukarni Naukowo-Technicznej  
 w Warszawie, ul. Mińska 65  
 Skład systemem  $\text{\TeX}$  wykonała Redakcja

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres  
 prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena  
 jednego numeru w 1996 roku wynosi 2 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu  
 prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**)  
 cena numeru wynosi w 1996 r. 4 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą  
 odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje  
 dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na II kwartał 1996 r. wynosi 6 zł.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju:

– a) jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub  
 siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób;

– b) od osób zamieszkałych lub instytucji mających siedzibę w miejscowościach,  
 w których nie ma jednostek kolportażowych RUCH, wpłaty należy wnieść

na konto „RUCH” S.A. Oddział Warszawa w PBK XIII Oddział Warszawa  
 370044-1195-139-11 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych

codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8<sup>00</sup> – 14<sup>00</sup>;  
 dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej

prenumeraty, tzn. „pod opaską”.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej.  
 Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. na konto lub w kasach Oddziału. Dostawa odbywa  
 się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy  
 drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.

5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną ze zleceniem  
 dostawy za granicę od osób zamieszkałych w kraju:

do 20 XI na I kwartał roku następnego,

do 20 II na II kwartał,

do 20 V na III kwartał,

do 20 VIII na IV kwartał.

6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą,  
 realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A.  
 Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-10-39, 620-10-19,  
 620-12-71 w. 2442, 2366.

**Cena 1 egzemplarza 2 zł, 20 000 zł**

Wydawca:

Uniwersytet Warszawski

# Kometa kamikadze, czyli zderzenie komety Shoemaker–Levy 9 z Jowiszem

Krzysztof ZIOŁKOWSKI

Zderzenie komety Shoemaker–Levy 9 z Jowiszem, którym to zderzeniem emocjonowaliśmy się w lipcu 1994 roku, było zjawiskiem znacznie okazałym i bardziej intrygującym, niż się spodziewano. Zanim jednak przedstawimy wyniki rocznych badań jego przebiegu i skutków, przypomnimy krótko wiadomości o tym niezwykłym ciele niebieskim, które zakończyło swój żywot w tak spektakularny sposób na oczach niemal całego świata.

Kometa Shoemaker–Levy 9 została odkryta w końcu marca 1993 roku w Obserwatorium Palomarskim w Kalifornii przez znanych amerykańskich łowców komet: Karolinę i Eugeniusza Shoemakerów oraz Dawida Levy’ego. O jej wyjątkowości przesądziły trzy fakty: że jest satelitą Jowisza, że składa się z około 20 części rozciągniętych w przestrzeni prawie wzdłuż linii prostej oraz że w lipcu 1994 r. zderzy się z Jowiszem. Z tak niezwykłym obiektem astronomowie jeszcze nigdy się nie spotkali. Wprawdzie znanych jest kilka przypadków przechwycenia przez Jowisza komety, która przez kilka lat była jego satelitą (np. kometa Gehrels 3 w latach 1968–1974 czy też kometa Helin–Roman–Crockett w latach 1973–1985), obserwowano też rozpady komet na fragmenty (np. komety Brooksa 2 po jej wielkim zbliżeniu do Jowisza w 1886 roku czy też komety Westa w 1976), ale uderzenia komety w planetę dotychczas nie widziano. Znane są jedynie liczne ślady takich wydarzeń z przeszłości w postaci kraterów uderzeniowych na powierzchniach różnych ciał Układu Słonecznego, w tym również i naszej planety. Na Ziemi odkryto już około 140 śladów. Ostatnio wielkie zainteresowanie budzą doniesienia o wykryciu na Jukatanie krateru o średnicy około 200 km, powstałego prawdopodobnie 65 mln lat temu wskutek uderzenia kilkukilometrowej bryły, które spowodowało wielkie spustoszenia i zmiany o charakterze globalnym, powszechnie uważane za przyczynę wyginięcia dinozaurów.

Od momentu odkrycia kometa Shoemaker–Levy 9 stała się więc przedmiotem bardzo intensywnych i wszechstronnych badań. Częste pomiary pozycji na niebie poszczególnych jej fragmentów umożliwiły stosunkowo dobre poznanie ich ruchu w przestrzeni. Okazało się, że wszystkie części komety przeszły przez peryjowium, czyli punkt orbity najbliższy Jowisza, prawie w tym samym momencie (7 lipca 1992) i prawie w tej samej odległości od planety (0,3 promienia Jowisza od jego powierzchni). Wynika stąd, że znalazłszy się w okolicy peryjowium kometa najprawdopodobniej rozpadła się w wyniku działania sił pływowych masywnego przecież Jowisza.

Brak jakichkolwiek obserwacji komety przed jej rozpadem w zasadzie uniemożliwia prześledzenie jej ruchu w przeszłości. Nieznany więc pozostaje mechanizm jej przechwytu przez największą planetę. Czynione są jednak różne próby rozwikłania tej zagadki. Statystyczna analiza trajektorii poszczególnych części komety, wykonana m.in. przez amerykańskich astronomów L.A.M. Bennera

## Przygody matematyki wśród ludzi (II)

(na podstawie wykładów wygłoszonych  
na antenie *Radia Bis*)

## Czego uczono w Starożytności i Średniowieczu

Marek KORDOS

Wśród tabliczek zapisanych klinowym tekstem – w pełniącym przez większą część Starożytności rolę języka nauki (tak, jak dziś angielski czy w Średniowieczu łacina) języku sumeryjskim – są takie, które pomogły nam zrozumieć naukę sprzed czterech czy trzech tysiącleci. Nazywa się je tabliczkami dydaktycznymi, ale nie dlatego, że nam pozwoliły się czegoś nauczyć, lecz dlatego, że służyły one nauczaniu. Zawierają z reguły najpierw zadanie, a potem dialog mędrca i adepta, nauczyciela i ucznia, w którym nauczyciel – polecając uczniowi wykonywanie kolejno prostych czynności – prowadzi go do rozwiązania. Z dzisiejszego punktu widzenia sposób, jaki stosuje nauczyciel, jest bardzo wadliwy: mówi, co uczeń ma zrobić, a nigdy nie mówi dlaczego.

Od razu trzeba powiedzieć, że nie jest to – w przypadku nauki sumeryjskiej, chaldejskiej, babilońskiej, jakkolwiek by ją nazwać – cecha nauczyciela, lecz cecha tej nauki. Tam zdobywano nie wiedzę, lecz wprawę, umiejętność była funkcją jedynie częstego powtarzania, a w przypadku nowych sytuacji – naśladowania tego, co się już kiedyś udało. I nauczanie w konsekwencji musiało być indywidualne, żadnych szkół nie było i być nie mogło.

Z nazw nadawanych nowożytnie różnym szkołom najdawniej pojawiła się nazwa *gimnazjum*. O ile jednak teraz oznacza ona szkołę średnią, to w Starożytności greckiej, gdzie się pojawiła, oznaczała uczelnię doskonalącą ciało (stąd *gimnastyka*), a nie ducha – ten był kształcony przez indywidualnych *pedagogów* (oczywiście, kształcono jedynie chłopców). Prawdziwe wykształcenie zdobywane było tylko przez tych nielicznych, którzy zdecydowali się być uczonymi – oni otaczali, jak mówiono: *siedzieli u stóp*, wybitnych mędrców, nieraz po lat kilkadziesiąt, i tym sposobem sami mędrcami z wolna się stawali (lub, oczywiście, nie).

Najznamienitsza tego rodzaju szkoła (dziś też się przecież mówi, że uczoney tworzy szkołę badawczą) to sofisci i ich znakomity przywódca – Sokrates. Całe przedsięwzięcie zorganizowane było w sposób, który bardzo by się spodobał dzisiejszemu Ministerstwu Edukacji – sofisci zarabiali na sobie, a badania prowadzili nad tym, jak to zarabianie udoskonalić. Uczyli oni mianowicie kandydatów na parlamentarzystów, jak wygrywać publiczne dysputy i to niezależnie od tego, jaka i czyja jest prawda. Szczytowym osiągnięciem w tym zakresie jest rezultat Sokratesa, dziś zaliczany do logiki, który orzeka, że biorąc jeden argument z prawa naturalnego (np. głosząc chwałę wolnego rynku), a drugi z prawa moralnego (np. miłość bliźniego) można uzyskać dowolny rezultat rozumowania, takie więc dobieranie przesłanek dalekie jest od uczciwości – podobne myśli można znaleźć w ostatniej książce papieża. Nic przeto dziwnego, że skazano go za bezbożność (oczywiście, Sokratesa, a nie papieża) na śmierć przez wypicie trucizny, co też uczynił był.

Tylko gdzie tu matematyka? Otóż – przypominam – matematyka to aż do połowy XIX wieku cała wiedza ścisła, w szczególności więc logika była matematyką. Sokrates, głoszący, iż jest matematykiem (czytaj – uczoneym) równocześnie (jak zeznaje naoczny świadek, Ksenofont, żołnierz, awanturnik i pisarz powieści przygodowych – polecam sensacyjną książkę *Anabasis*, dostępną w bibliotekach publicznych, a jeszcze są takie) nienawidził geometrii (cytuje za Ksenofontem): *zajmowanie się geometrią i rozważanie tematów trudnych do zrozumienia może zająć człowiekowi całe życie i odciągnąć go od pożytecznych umiejętności*. Jak widać, matematyka mogła być dość daleka od tego, co dziś matematyką nazywamy.

Fanatykiem geometrii natomiast był, choć mało ją znał, uczeń Sokratesa, Platon. Był on pierwszym uczoneym, który otaczającej go szkole uczniów nadał ramy organizacyjne – pierwszą uczelnią była założona przez niego Akademia. Jest to zresztą najdłużej, jak dotąd, działająca uczelnia: założona około –390 roku rozwiązana została przez cesarza bizantyńskiego, Justyniana, w 529 roku – trwała więc 920 lat (najstarszy z uniwersytetów, boloński, ma obecnie 875 lat). Na Akademii uczono całej wiedzy pitagorejskiej, wykształcenie więc dawała znakomite – to z niej pochodzili najwięksi bodaj matematycy wszechczasów

i W.B. McKinnona, wydaje się wskazywać, że kometa już od wielu lat krążyła wokół Jowisza, a najbardziej prawdopodobnym okresem, w którym mogła zostać przez niego schwyтана, jest przełom lat dwudziestych i trzydziestych naszego wieku.

Ciekawie na tym tle wyglądają wyniki obliczeń polskiego badacza ruchów komet, Grzegorza Sitarskiego. Przyjął on mianowicie, że danymi wyjściowymi do badania ruchu komety w przeszłości może być położenie i prędkość środka masy jej fragmentów w momencie rozpadu. Okazało się wtedy, że kometa dawniej mogła obiegać Słońce po prawie kołowej orbicie znajdującej się całkowicie poza orbitą Jowisza. Coraz silniejsze przyciąganie grawitacyjne doganiającego komety Jowisza doprowadziło na początku 1991 roku do takiej zmiany jej toru, że stała się jego satelitą, a wkrótce potem nastąpiło jej wielkie zbliżenie do planety 7 lipca 1992 roku. Trzeba jednak podkreślić, że rezultaty tych obliczeń wskazują na razie tylko na możliwości rozwiązania problemu i w żadnym razie nie mogą być uważane za ostateczne.

Podobnie rzecz ma się z opisem samego procesu rozpadu. Wśród różnych modeli rozpadu komety zwraca uwagę koncepcja amerykańskich fizyków J.M. Hahna i T.W. Rettiga. Drogą modelowania cyfrowego doszli oni do wniosku, że jeśli pierwotny obiekt miał gęstość około  $0,6 \text{ g/cm}^3$  i był zlepkiem co najmniej 500 luźno związanych bryłek, to w obłoku cząstek powstałym po rozpadzie będą się wskutek wzajemnej grawitacji tworzyć zgęszczenia i w czasie rzędu 10 godzin od rozpadu cały obłok skondensuje się właśnie w około 20 fragmentów rozlokowanych mniej więcej wzdłuż linii prostej przechodzącej przez środek Jowisza. Dodatkowym atutem tej propozycji jest dostarczenie poparcia hipotezie sformułowanej kilka lat temu przez P. Weissmana o jądrze komety jako rumowisku cząstek skalno-lodowych związanych bardzo słabymi siłami spójności (ang. *rubble pile*).

Spśród trzech wymienionych na początku osobliwości komety Shoemaker–Levy 9 największe zainteresowanie budzi jednak jej zderzenie z Jowiszem. Dolatujące do planety jej fragmenty rozciągnęły się w przestrzeni na dystansie około 2,5 mln km i dlatego bombardowanie przez nie Jowisza zajęło kilka dni – od 16 do 22 lipca 1994 roku. Miejsca uderzeń znajdowały się, niestety, po niewidocznej z Ziemi, nocnej stronie planety, ale na tyle blisko krawędzi jej tarczy, że już po mniej więcej 20 minutach od momentu każdego uderzenia można było oczekiwać pojawienia się jakichś jego skutków (okres obrotu Jowisza trwa niespełna 10 godzin). Ku wielkiemu zaskoczeniu obserwatorów pierwsze oznaki uderzenia dały się zauważyć kilkanaście minut wcześniej w postaci pojaśnienia na brzegu tarczy planety. Jasność tej poświaty szybko wzrastała, by po upływie 10–15 minut przerodzić się w spektakularny błysk, szczególnie efektowny w promieniowaniu podczerwonym. Zaskoczeniem było, że obłok gazów, powstałych w eksplozji kończącej spadek fragmentu komety z prędkością 60 km/s, wznosił się aż do wysokości 3000 km. Wierzchołek szybko unoszącego się pióropusza materii osiągnąwszy wysokość 400 km zaczynał być widoczny dla ziemskiego obserwatora wylaniając się spoza krawędzi tarczy planety. Znajdując się początkowo jeszcze w cieniu Jowisza świecił tylko własnym promieniowaniem gazów rozgrzanych do bardzo wysokiej temperatury, a później – po wyjściu z cienia – jego promieniowanie ulegało wzmocnieniu przez rozproszone w nim światło słoneczne.

W miarę obrotu planety coraz większa część tego pióropusza stawała się z Ziemi widoczna. Jednak po kilkunastu minutach jego blask zaczynał słabnąć w wyniku opadania i rozpraszania się szybko stygnących gazów. Po następnych kilku minutach ukazywały się na tarczy Jowisza niezwykle kształty plam pozostałych po całym wydarzeniu. Dodajmy, że dotychczas nie udało się znaleźć zadowalającego wytłumaczenia faktu, że uderzenia fragmentów kometarnych o różnej przecież wielkości i masie powodowały uniesienie pióropusza materii na taką samą mniej więcej wysokość.

Szybko rozprężająca się chmura materii o początkowej temperaturze rzędu 8000 K (czyli wyższej od temperatury powierzchni Słońca) stanowiła mieszaninę materii komety oraz pochodzącej z powierzchniowych warstw Jowisza, której cząsteczki musiały w najgorętszych miejscach ulec dysocjacji termicznej. Bardzo trudno jest więc określić jej skład chemiczny i stwierdzić, jakie zachodziły w niej procesy fizyko-chemiczne. Największe bodaj zdziwienie wywołuje wielka obfitość siarki, na której obecność – oprócz, oczywiście, cząsteczek  $S_2$  – wskazują zaobserwowane molekuly  $CS$ ,  $CS_2$ ,  $H_2S$ ,  $OCS$ ,  $SO$ ,  $SO_2$ . Wprawdzie przypuszcza się, że siarka występuje w głębszych warstwach atmosfery Jowisza w postaci wodorosiarczku amonowego ( $NH_4SH$ ), ale na razie nie znaleziono mechanizmu, który byłby zdolny unieść na taką wysokość stwierdzone ilości tego pierwiastka. W każdym razie nie wydaje się możliwe, by mogła być ona pochodzenia kometarnego, gdyż w kometach – według tego, co dotychczas o nich wiemy – siarki jest bardzo mało.

Od dawna natomiast wiadomo, że jednym z głównych składników komet jest lód wodny. Np. w jądrze najlepiej poznanej dotychczas komety Halleya stanowi on około 80% masy. Tymczasem pierwsze doniesienia wskazywały, że w pióropuszcach materii – unoszonej w wyniku uderzeń fragmentów komety – wody nie znaleziono. Wkrótce jednak okazało się, że obserwacje spektroskopowe, wykonane z pokładu samolotowego obserwatorium NASA im. G. Kuipera, potwierdziły jej obecność, choć w mniejszej, niż się spodziewano, ilości. Amerykański astronom G. Bjoraker dokonał obrazowego oszacowania, że z zaobserwowanej wody można by utworzyć kulę lodu o średnicy 400 m. Tak więc panuje pogląd, że najprawdopodobniej woda ta jest pochodzenia kometarnego. Wprawdzie oczekuje się też obecności wody w warstwie atmosfery Jowisza, położonej na głębokości około 50 km, jednak tak głęboko fragmenty komety chyba się nie zanurzyły.

Obserwacje spektroskopowe wskazały również na obecność m.in. krzemu, magnezu, żelaza, a nawet litu. Największym zaskoczeniem jest pojawienie się w materii pióropusza najlżejszego z metali, litu, którego obecności ani w kometach, ani na Jowiszu dotychczas nie stwierdzono. Odkryte metale pochodzą przypuszczalnie z ablacji fragmentów komety w początkowej fazie jej przelotu przez górne warstwy atmosfery Jowisza (tak nazywamy gwałtowne topienie się i odparowywanie materii ciała, które z wielką prędkością wpadło w atmosferę planety; na Ziemi prowadzi do zjawiska meteoru). Warto tu dodać, że w przypadku jednego z największych fragmentów komety (oznaczonego literą G) zaobserwowano silną dwuminutową emisję zjonizowanego magnezu już na cztery dni przed zderzeniem, a więc prawdopodobnie podczas pierwszego kontaktu z magnetosferą Jowisza (czyli obszarem dominacji plazmy okołoplanetarnej nad plazmą wiatru słonecznego).

(o czym była mowa w poprzednim wykładzie): Teajtetos i Eudoksos. Słowo *Akademia* oznacza jedynie, że mieściła się w gaju bożka Akademos.

Z niej też pochodził uznany za największego uczonego, tak przez współczesnych, jak później przez chrześcijan i muzułmanów, jedyny bodaj mędrzec ponad podziałami, Arystoteles. Miał on najpierw indywidualne doświadczenia dydaktyczne – był wychowawcą Aleksandra Wielkiego – później założył, w –335 roku, zakład naukowy pod nazwą *Liceum*. Nazwa ta znów nic nie znaczy – pochodzi od dzielnicy Aten, gdzie szkoła się mieściła. O tyle przerastała ona dzisiejsze licea, że miała pierwszą w Europie bibliotekę, i że jej uczniowie pod dyktando Arystotelesa napisali owo nieprzebrane morze jego dzieł, tak cenionych przez następne 1500 lat.

Liceum Arystotelesa (czy Akademię Platona) oddziela od następnych szkół czy uczelni znaczny odstęp czasu. Powstały w międzyczasie kościół chrześcijański (początkowo był jeden) stawia na indywidualne przyuczanie się swoich adeptów, tak do sztuki czytania i pisania, jak też do wszelkich innych intelektualnych sprawności. W tej sytuacji następny krok należy do muzułmanów. Od hidżry, czyli ucieczki Mahometa z Mekki do Medyny (622 rok), aż do bitwy pod Poitiers (732 rok) Arabowie zajmowali się podbijaniem wszystkiego, co było, i to podbijaniem skutecznym. Dopiero zatrzymani na terenie dzisiejszej Francji zajęli się innymi rzeczami. Wśród nich niemal od początku znalazła się nauka. Ich system nauczania strukturalnie przypominał Akademię platońską, a realizujące go instytucje nazywały się *Domami Nauki*.

Europa pozostawała daleko w tyle za muzułmanami. Kościół, a dokładniej benedyktyni, prowadzili wprawdzie szkoły, ale daleko im było choćby do Liceum Arystotelesa. Uczono w tych szkołach na dwóch poziomach. Niższy zwano *trivium*, gdyż zawierał trzy przedmioty: gramatykę, retorykę i dialektykę lub logikę, czyli uczono czytać, pisać i dawano jakieś wyobrażenie o zasadach rozumowania. Od *trivium* wywodzi się dzisiejsze określenie trywialny. Wyższy poziom szkół benedyktyńskich to *quadrivium*, czyli kanon pitagorejski (wspomniałem o tym poprzednim razem): arytmetyka, geometria, astronomia i muzyka.

Wyszkolenie wyższe reprezentowane było

przez pojedyncze dzieła w rodzaju napisanych przez Alkuina dla kandydatów na dworzan Karola Wielkiego *Zasad kształcenia umysłu*.

Poziom owego wykształcenia wyższego ilustruje znane zadanie o wilku, kozie i kapuście: jak przewieźć je przez rzekę łodzią, mieszczącą oprócz wiosłarza jeden jeno z tych obiektów, nie zostawiając na brzegu ani wilka z kozą, ani kozy z kapustą (powody są oczywiste).

Nic przeto dziwnego, że wykształcenie Europejczyki zdobywali wykształcenie w uczelniach arabskich, co początkowo miano im za złe – toczyła się wszak systematyczna wojna o wyzwolenie Półwyspu Pirenejskiego i organizowano niesystematyczne wprawdzie, ale permanentne wyprawy krzyżowe. Przełom (wymuszony groźbą ostatecznej zapaści cywilizacyjnej chrześcijaństwa) nastąpił prawie dokładnie 1000 lat temu, w 999 roku, gdy papieżem wybrano Francuza Gerberta (Sylwester II), mimo iż studia odbył on w arabskim Toledo. Następnym krokiem było zakładanie uniwersytetów. Pierwszy powstał w Rawennie, ale zaraz upadł i został reaktywowany dopiero 40 lat później, w 1150 roku. Wobec tego naprawdę zaczęło się od Bolonii (1119). We Francji pierwsza była Sorbona w Paryżu (1200) rozpędzona 25 lat temu przez Mitterranda (gdy był ministrem spraw wewnętrznych). W Anglii Cambridge (1209) i Oxford (1214). W Europie Wschodniej Praga (1348) i Uniwersytet Jagielloński w Krakowie (1364), założony, jak z samej nazwy wynika, przez Kazimierza Wielkiego.

Uniwersytety dały przede wszystkim kadry dla benedyktyńskich szkół tak liczne, że mogły te szkoły kształcić już nie tylko przyszłych księży. Pojawiła się grupa ludzi świeckich umiających pisać. Pisali oni z wielkim zapałem co tylko im się nasunęło pod pióro – była to w powszechnej opinii metoda osiągnięcia nieśmiertelności: nas już nie będzie, a nasze myśli będą nadal krążyły wśród ludzi.

Przykładem takich świeckich piszących XIII wieku są: Marco Polo, który w *Opisaniu świata* przekazał nam bardzo obszerne sprawozdanie ze swoich kupieckich podróży i pół wieku młodszy Leonardo Bonacci, zwany Fibonaccim (czyli synem Bonacciego). Od niego możemy się dowiedzieć, czego z arabskiej matematyki uczono podówczas w Europie. Mamy też w jego dziele *Liber abaci* – *Księga liczydeł* – zadanie, które później

Szybko wirujące wraz z planetą pole magnetyczne Jowisza działa jak akcelerator przyspieszając cząstki naładowane do prędkości bliskich prędkości światła. Są one z kolei źródłem promieniowania mikrofalowego Jowisza odbieranego na Ziemi za pomocą radioteleskopów. Bombardowanie Jowisza przez komety spowodowało znaczny wzrost natężenia tego promieniowania. Okazał się on zależny od długości fali i wynosił od 10% na falach 70–90 cm aż do około 45% dla fal 6–36 cm. Powrót do normalnego poziomu tej emisji trwał mniej więcej 3 miesiące. Obserwacje wykonane za pomocą Very Large Array w Socorro (USA) pokazały, że nadwyżka promieniowania pochodziła głównie z obszarów równikowych Jowisza o długościach jowigraficznych takich jak długości miejsc spadków fragmentów komety. Sugeruje to, że za obserwowany efekt odpowiedzialny jest raczej wzrost energii cząstek już obecnych w magnetosferze niż wzrost ich liczby w wyniku eksplozji.

Do nieoczekiwanych zjawisk związanych ze spadkiem komety można też zaliczyć pojaśnienie powierzchni planety w miejscach półkuli północnej położonych symetrycznie względem równika do miejsc półkuli południowej trafianych fragmentami komety. Najbardziej wiarygodnego wytłumaczenia tego efektu dostarcza mechanizm, który jest również odpowiedzialny za powstawanie zórz polarnych w atmosferze Ziemi. Wzbudzenie bowiem świecenia atmosfery planety najprawdopodobniej jest wywołane bombardowaniem jej przez elektrony i protony uwolnione podczas zderzenia oraz przyspieszone do prędkości relatywistycznych i przeniesione z półkuli południowej na północną wzdłuż linii pola magnetycznego Jowisza. Wywołane przypuszczalnie w ten właśnie sposób promieniowanie obserwowano do 7 sierpnia, przy czym maksimum jego natężenia zarejestrowano 27 lipca, czyli 5 dni po uderzeniu w planetę ostatniego fragmentu komety. Ta zorzowa aktywność Jowisza była także widoczna w zakresie rentgenowskim, co stwierdził sztuczny satelita Ziemi ROSAT.

Zdjęcia Jowisza wykonane za pomocą teleskopu kosmicznego Hubble'a ukazały pojawienie się kołowych pierścieni wokół miejsc uderzeń pięciu fragmentów komety (oznaczonych literami A, E, G, Q1 i R). Widoczne one były przez kilka godzin, kiedy rozprzestrzeniały się ze stałą mniej więcej prędkością 450 m/s. W przypadku fragmentów E i G dostrzeżono ponadto znacznie słabsze, wewnętrzne pierścienie ekspandujące z prędkością w granicach 180–350 m/s. Analizując te zjawiska amerykański „geolog” planetarny A.P. Ingersoll doszedł do wniosku, że obserwowane efekty mogą być wyjaśnione przez zaburzenia troposfery rozchodzące się poziomo w hipotetycznej warstwie bogatej w parę wodną, wzbudzone eksplozją fragmentu komety o rozmiarach rzędu 2 km.

Wśród pilnie poszukiwanych, a na razie nie wykrytych, efektów zderzenia trzeba wymienić fale sejsmiczne, których wzbudzenia w globie planety należało oczekiwać w wyniku uderzeń brył komety. Ich propagacja powinna ujawnić się poprzez subtelne zmiany temperatury na powierzchni planety. Negatywny wynik dotychczasowych badań każe sądzić, że średnice fragmentów komety nie mogły przekraczać 0,5 km (zakładając, że miały gęstość lodu). Z kolei nie wiadomo, jak eksplozja obiektu o tak małych rozmiarach byłaby w stanie wywołać niektóre spośród obserwowanych zjawisk, np. uniesienia pióropusza materii na wysokość aż 3000 km. Okazuje się więc, że tak podstawowa sprawa, jak określenie wielkości i masy poszczególnych części komety, pozostaje jeszcze ciągle jedną z najtrudniejszych do rozwikłania zagadek całego wydarzenia.

Podobnych znaków zapytania jest jeszcze dużo. Do uzyskania odpowiedzi przynajmniej na niektóre z już sformułowanych pytań, a także nowych, które niewątpliwie pojawią się w przyszłości, przyczyni się zapewne sonda Galileo. W grudniu 1995 roku stanie się<sup>(\*)</sup> ona sztucznym satelitą Jowisza i przez prawie dwa lata będzie badać planetę zbombardowaną przez komety Shoemaker-Levy 9 i jej otoczenie. Sonda ta, wystrzelona z Ziemi w 1989 roku, już dokonała różnych spektakularnych odkryć; była przy tym praktycznie jedynym przyrządem zbudowanym przez człowieka mogącym bezpośrednio obserwować uderzenia poszczególnych fragmentów komety w Jowisza. Trudno więc przecenić rolę uzyskanych przez nią danych w dalszej analizie całego wydarzenia. Co teraz zobaczy na powierzchni Jowisza w miejscach, które stały się poniekąd grobem komety-kamikadze, pokaże bliska już przyszłość.

(\*) Pisane latem 1995 roku.

znalazło się w *Burzliwym życiu Lejzorka Rojtszwańca* Ilii Erenburga. Chodzi o problem rozmnażania królików:  
*Ile par królików może spłodzić jedna para w ciągu roku, jeśli*  
*– każda para rodzi nową parę w ciągu miesiąca,*  
*– para staje się płodna po miesiącu,*  
*– króliki nie zdychają?*  
 Liczby uzyskane przez comiesięczne zliczanie liczby par królików z tego zadania, które gorąco Czytelnikom polecam, to liczby Fibonacciego, do dziś mające istotne zastosowanie tak w samej matematyce, jak i w matematycznym modelowaniu różnych zjawisk przyrody (nie tylko hodowli królików). Ale to już zupełnie inna historia.

## Patrz w niebo

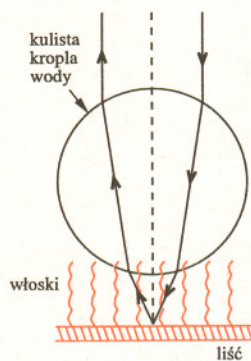


Wszystko wskazuje na to, że pulsary powstają w wyniku eksplozji supernowych. Należałoby zatem oczekiwać, że każdy pulsar będzie leżał w środku ekspandującej mgławicy stanowiącej efekt eksplozji. Przykładem takiego obiektu jest mgławica Krab (M1). Okazuje się jednak, że takie sytuacje są raczej wyjątkiem. Pozostałości po supernowych, tzn. te mgławice, są najczęściej wcale nie symetryczne, pulsary wcale nie są środkami takich mgławic, co więcej – w wielu mgławicach, najwyraźniej powstałych w wyniku wybuchu, w ogóle nie ma centralnego pulsara.

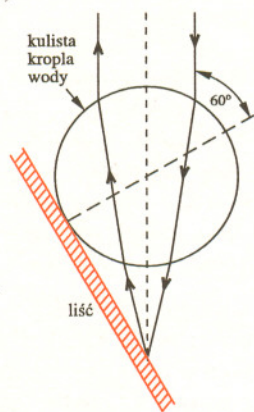
Jedno wytłumaczenie takiego stanu rzeczy można łatwo przedstawić. Przestrzeń międzygwiazdowa nie jest pusta. Ekspandująca mgławica spiętrza przed sobą materię międzygwiazdową, wobec tego prędkość jej ekspansji maleje, początkowo sferyczny bąbel wybuchu ugina się i załamuje na wszelkich niejednorodnościach otaczającej go materii i nic dziwnego, że w końcu pozostałość po supernowej może stać się obiektem zupełnie nieregularnym. Jeżeli w chwili wybuchu gwiazda miała znaczącą prędkość względem otaczającej ją materii, to mgławica musi rychło tę prędkość utracić jako obiekt wielki i silnie rozrzedzony, podczas gdy pulsar swoją prędkość zachowa, bowiem na jego ruch materia międzygwiazdowa nie ma żadnego wpływu. Z biegiem czasu pulsar może więc swoją mgławicę nawet opuścić. To samo rozumowanie dotyczy, oczywiście, również mgławic planetarnych i ich gwiazd centralnych.

W gwiazdozbiornie Strzelca znaleziono jednak pulsara (PSR 1757-24), który wraz ze swoją mgławicą tworzy obraz (zresztą radiowy, bo obiekt został wykryty w wyniku właśnie obserwacji radiowych) podobny do migawkowego zdjęcia pocisku przebijającego pomarańczę. Pulsar ten leży poza mgławicą, która ma nawet jeszcze dość regularny kształt i właściwie na podstawie samego obrazu nie można mieć pewności, że pulsar i mgławica mają ze sobą cokolwiek wspólnego. Jednak oszacowania odległości dają dla obu obiektów ten sam wynik (około 6 kpc), a pulsar od mgławicy się oddala i to z prędkością – tu uwaga! – 2300 km/s. Nie ma więc raczej wątpliwości, że właśnie widzimy pulsara, który porusza się szybciej niż, przynajmniej obecnie, ekspanduje mgławica po wybuchu (około 16 000 lat temu) jego macierzystej supernowej. Tak wielkiej prędkości gwiazda przed wybuchem mieć nie mogła, gdyż prędkość ta niemal o rząd wielkości przekracza prędkość ucieczki z Galaktyki. Pulsar musiał więc tę prędkość nabyć w momencie eksplozji, a to dowodzi, że eksplozje supernowych mogą zachodzić wysoce niesymetrycznie. Zapewne odrzut wywołany takim przebiegiem eksplozji nadał powstałemu wtedy pulsarowi prędkość stanowiącą niemal jeden procent prędkości światła. Jeżeli nie jest to przypadek wyjątkowy, to brak pulsarów w pozostałościach po supernowych staje się tym bardziej zrozumiałą.

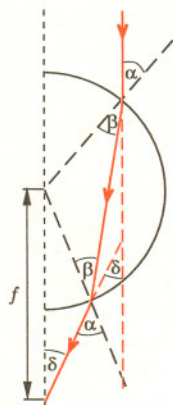
Tomasz KWAST



Rys. 1. Powstawanie zjawiska „Heiligenschein” według Lommela (1874 r.).



Rys. 2. Powstawanie zjawiska „Heiligenschein” według Mattssona (1872 r.).



Rys. 3. Połowa kulistej kropli wody o promieniu  $R$ . Promień światła padający na kroplę pod kątem  $\alpha$  po dwukrotnym załamaniu ulega odchyleniu o kąt  $\delta$ . Ogniskowa jest równa

$$f = \frac{\sin \alpha}{\sin \delta} R$$

i w ogólnym przypadku zależy od kąta  $\alpha$ . Dla małych kątów padania mamy

$$f \approx \frac{\alpha}{\delta} R = \frac{\alpha R}{2(\alpha - \beta)} = \frac{\alpha R}{2(\alpha - \alpha/n)} = \frac{nR}{2(n-1)}$$

gdzie  $n$  jest współczynnikiem załamania światła. Dla wody  $n \approx 1,3$ ,  $f \approx 2R$ .

*W czasie gdy byłem w więzieniu, miałem straszny sen... Nadto zdarzyło mi się coś, czego pominąć nie mogę, bo większa rzecz nie zdarzyła się nikomu z ludzi: dowód, że wszechmoc boska rozgrzeszyła mnie sama i uznała godnym objawienia mi swoich tajemnic. Mianowicie od czasu, gdy miałem to widzenie, pozostawał mi wokół głowy przedziwny blask, widoczny dla każdego, komu pokazać go uznałem za stosowne; takich jednak było niewielu.*

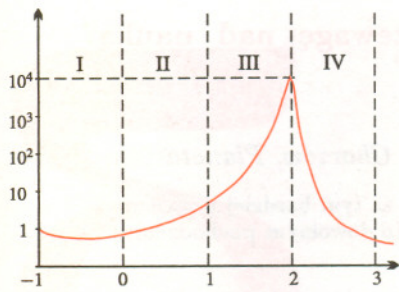
*Blask ten widać rankiem nad moim cieniem od wschodu słońca przez dwie godziny. Najlepiej widać go, gdy lekka rosa leży na trawie; widać go jednak również wieczorem o zachodzie słońca. Spostrzegałem go w Paryżu, we Francji, bo powietrze w tamtej okolicy jest wolniejsze od mgieł, więc widać go było daleko lepiej niż we Włoszech, gdzie mgły są o wiele częstsze. Mimo to widuję go wszędzie i mogę pokazać go też innym, jednak nie tak wyraźnie jak w owej okolicy.*

Benvenuta Celliniego żywot spisany przez niego samego  
(przełożył Leopold Staff)

Tak oto z wrodzoną sobie skromnością wielki renesansowy rzeźbiarz i złotnik opisał zjawisko zwane „Heiligenschein” (niem. aureola, dosłownie: certyfikat świętości), które obserwował w 1562 roku. Polega ono na powstawaniu bezbarwnej aureoli wokół cienia (wyłącznie) głowy obserwatora, jeśli cień pada na pokrytą rosą łąkę. W tym całkiem poprawnym opisie jedna rzecz jest nieprawdziwa: aureolę można obserwować jedynie wokół cienia własnej głowy.

Możemy wykonać bardzo proste doświadczenie, które pozwoli zrozumieć naturę „Heiligenschein”. Potrzebna jest kulista, szklana kolba wypełniona wodą, kartka białego papieru i silne źródło światła. Można wykorzystać światło słoneczne albo rzutnik do slajdów. Kolbę należy umieścić w strumieniu światła i obserwować w kierunku punktu przeciwsłonecznego, to znaczy wzdłuż padających promieni, mając Słońce (rzutnik) za plecami. Kartkę białego papieru należy umieścić za kolbą w odległości od środka równej w przybliżeniu średnicy kolby. Optymalne położenie kartki należy dobrać eksperymentalnie tak, by uzyskać możliwie jak najlepsze zogniskowanie światła na kartce. Patrząc w kierunku punktu przeciwsłonecznego lub w kierunku nieznacznie różniącym się od kierunku padających promieni zauważymy, że kolba jest jasno oświetlona promieniami odbitymi od kartki. Przy większej zmianie kąta obserwacji zjawisko znika. Dzieje się tak dlatego, że kolba działa jak soczewka, ogniskując na kartce padające promienie, a z promieni odbitych tworzy wiązkę równoległą o takim samym kierunku jak kierunek promieni padających. Ponieważ kolba nie jest idealną soczewką, promienie padające pod dużym kątem są ogniskowane w nieco innym punkcie niż promienie padające pod małym kątem, z tego powodu wiązka odbita jest nieco rozbieżna.

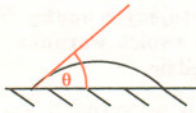
Pierwsze naukowe wyjaśnienie „Heiligenschein” podał w 1795 roku Winterfeld. Każda szorstka powierzchnia odbijająca światło jest najjaśniejsza, gdy oglądamy ją wzdłuż padających promieni, ponieważ każda jej nierówność oglądana z takiej perspektywy zakrywa obszary swojego cienia. Jest to rozumowanie poprawne, choć niepełne. Dotyczy ono tak zwanego suchego zjawiska „Heiligenschein”, trudnego do zauważenia i jeszcze trudniejszego do sfotografowania z powodu małych kontrastów świetlnych. We właściwym zjawisku „Heiligenschein”, tym, które opisał Cellini, podstawową rolę odgrywają kropelki rosy pokrywające trawę i liście roślin.



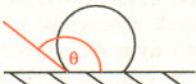
Rys. 4. Stosunek natężenia światła odbitego wstecz od liści pokrytych kropelkami wody do natężenia światła odbitego od niezroszonych liści jako funkcja odległości środka kropelki od liścia. Wyniki uzyskane przy założeniu, że kropelka wody załamuje światło jak cienka soczewka.

Wykres pochodzi z pracy: Alistair Fraser „The sylvanshine: refroreflection from dew-covered trees” *Applied Optics*, vol. 33, no 21 (1994).

I) Kropelki o kącie zwilżania  $\theta$  pomiędzy 0 a 90 stopni.



II) Kropelki o kącie zwilżania  $\theta$  pomiędzy 90 a 180 stopni.



III) i IV) Kropelki zawieszane nad powierzchnią liścia w odległości mniejszej (III) i większej (IV) niż ogniskowa.



Działają one jak szklana kolba w opisanym powyżej doświadczeniu, rolę kartki odgrywają liście. W doświadczeniu kartka znajdowała się w pewnej odległości od kolby. Krople rosy także mogą znajdować się nie bezpośrednio na listkach, ale ponad nimi. Tak jest wtedy, gdy liście pokryte są drobnymi włoskami, na których osadza się rosa (rys. 1). To tłumaczy, dlaczego nie na każdej łące można oglądać „Heiligenschein”. Powyższe wyjaśnienie zostało po raz pierwszy podane w 1874 roku przez Lommela. W 1824 roku Brandes podał inne wyjaśnienie, tłumacząc zjawisko odbiciem (wewnętrznym i zewnętrznym) światła przez krople rosy. Wyjaśnienie to jest niepoprawne, a mimo to można je znaleźć w literaturze do dziś. Całkiem niedawno, bo w 1972 roku Szwed Mattsson zauważył, że w pewnych warunkach także rośliny, których liście nie są pokryte włoskami, mogą być źródłem aureoli. Dzieje się tak, gdy rosa nie zwilża liści tworząc na nich kuliste kropelki, a światło pada pod kątem  $60^\circ$  (szczegóły przedstawia rysunek 2).

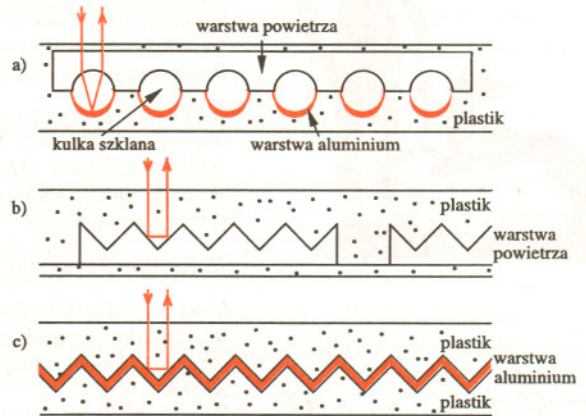
Zdumiewające jest, że choć zjawisko „Heiligenschein” jest znane od bardzo dawna, a od stu lat istnieje jego proste wytłumaczenie, to wszystkie wyjaśnienia (zarówno poprawne, jak i błędne) mają jedynie jakościowy charakter. W bogatej literaturze poświęconej optyce atmosferycznej udało mi się znaleźć zaledwie jeden (sic!) artykuł analizujący zagadnienie od strony ilościowej.

A co to wszystko ma wspólnego z tytułowymi kocimi oczami?

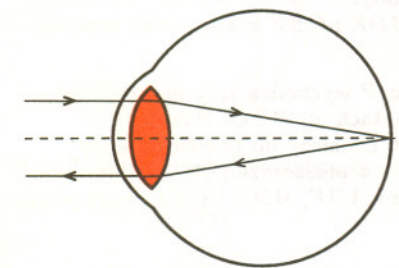
Otóż wiele. Każdy, kto ma w domu czworonoga (wszystko jedno – kota czy psa) wie, że w ciemności zwierzakowi oczy się „świecą”. Oczywiście, nie jest to prawdziwe świecenie, jest to światło odbite przez siatkówkę oka, a czerwone zabarwienie pochodzi od barwnika zwanego purpurą wzrokową, który jest istotnym czynnikiem procesu widzenia. Niewielka zmiana położenia obserwatora lub ruch oczu naszego ulubieńca, i zjawisko znika. Nie jest ono typowe wyłącznie dla zwierząt, o czym możemy się łatwo przekonać oglądając zdjęcia robione przy użyciu lampy błyskowej. Niejednemu fotoamatorowi śnią się po nocach te czerwone źrenice! Wyeliminowanie owego nieco koszmarnego, a na pewno irytującego efektu, jest dość proste; wystarczy odsunąć lampę błyskową od obiektywu lub też skierować jej światło w bok zamiast na fotografowanego. Każdy uważny Czytelnik będzie potrafił wyjaśnić, dlaczego.

To samo zjawisko, które jest ciekawostką na łące, niepożądanym artefaktem w fotografii, ma całkiem inne praktyczne zastosowanie. Powierzchnia odbłaskowego znaku drogowego pokryta jest mikroskopijnymi szklanymi kulkami. Ponieważ szkło ma większy współczynnik załamania niż woda, światło zostaje zogniskowane już na granicy szkła i podłoża (odstęp taki jak dla wody jest niepotrzebny), a po odbiciu ma kierunek prawie taki sam jak ten, z którego padało, o czym najlepiej można przekonać się nocą na szosie. (Współczynnik załamania kulek powinien być równy 2.) Gwoli ścisłości dodać trzeba, że nie jest to jedyne rozwiązanie stosowane w budowie znaków odbłaskowych.

Rys. 6. Powierzchnia znaku odbłaskowego pokryta kulkami ze szkła o współczynniku załamania  $n = 2$  (rys. a). Promienie reflektorów samochodowych padające na znak ogniskowane są w odległości  $f \approx R$  od środka kuli (rys. 3) i odbite w kierunku nadjeżdżającego samochodu. Rysunki b i c pokazują inne rozwiązania stosowane w znakach odbłaskowych.

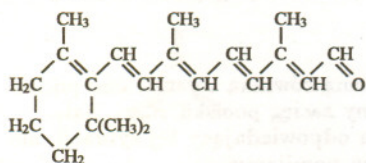


Charakterystyczną cechą „Heiligenschein” jest to, że (jak słusznie podkreśla Cellini) można je oglądać jedynie wcześniej rano lub przed zachodem słońca. W ciągu dnia moglibyśmy je zobaczyć jedynie na pochyłym górnym stoku lub z pokładu samolotu. Wyjaśnienie, dlaczego tak jest, pozostawiam dociekliwości Czytelnika.



Rys. 5. Świecenie kocich (i nie tylko) oczu w ciemności.

Barwniki wzrokowe zbudowane są z różnych odmian retinenu (aldehid witaminy A) i białka zwanego opsyną. W pręcikach siatkówki występuje rodopsyna (purpura wzrokowa), która pod wpływem światła rozkłada się na żółty karotenoid i bezbarwne białko – skotopsynę.



Budowa chemiczna retinenu.



# Czemu zawdzięcza w chwili obecnej paranauka swoją przewagę nad nauką?

Na jedno z pytań jubileuszowej ankiety (*Delta* 3/1995) odpowiada

Jerzy KUCZYŃSKI – Chorzów, Planetarium Śląskie.

Odpowiedź na pytanie, czemu paranauka zawdzięcza swą przewagę nad nauką, wydaje mi się oczywista: zawdzięcza ją nauce. Dokładniej – zawdzięcza ją szeroko pojętej edukacji i jej instytucjom, ze szkołą na czele; niebagatelny jest też udział popularyzacji: książek, filmów, czasopism popularnonaukowych. Aby nie było niejasności – przewagę paranauki upatruję nie w braku (nieistnieniu lub słabości) powyższych, ale właśnie w ich istnieniu i sposobie oddziaływania na ludzi.

Aby uzasadnić ten pogląd, sprecyzuję, czym – moim zdaniem – różni się nauka od paranauki. Obie przecież proponują społeczeństwu pogląd na świat, formułują sądy, rozstrzygają wątpliwości. Zasadnicza różnica polega na stosunku do głoszonych (odpowiednio przez naukę i paranaukę) prawd.

Nauka swoje prawdy formułuje warunkowo. Oznacza to nie tylko obwarowanie każdego sądu długą listą warunków, bez których spełnienia nie ma on waloru prawdy (choćby doświadczenie go potwierdziło), lecz także świadomość, że każda teoria dopiero wtedy zasługuje na miano naukowej, gdy podaje precyzyjne stwierdzenia, jakie to mianowicie wyniki badań każą ją odrzucić. Innymi słowy, teoria naukowa to taka, którą można obalić, której metody wskazują, w jakiej sytuacji należy od niej odstąpić i przystąpić do budowania nowej.

Paranauka – przeciwnie – nie daje żadnych sposobów obalenia wypowiedzianych w jej obrębie sądów, a każdy

z nich proponuje uznać za tym bardziej prawdziwy, im więcej argumentów (o dowolnym pochodzeniu) na jego rzecz da się odnaleźć.

Obalony sąd naukowy to sukces – jest to początek (a przynajmniej może być) budowy nowej teorii. Obalony (lepiej pasuje do sytuacji słowo *odrzucony*) sąd paranauki to koniec jej istnienia przynajmniej w pewnym zakresie – a więc klęska.

Nieszczęście polega na tym, że ludzie upowszechniający naukę w społeczeństwie posługują się metodami właściwymi dla paranauki: nie dowodzą, lecz agitują, nie przekonują o swych racjach, lecz je narzucają (najczęstszy błąd nauczycieli), sprawę przejścia od jakiejś teorii do teorii lepszej traktują jako rzecz wstydlivą. I tak należy mierzyć rozmiar sukcesów paranauki: zdołała ona narzucić swój styl (agitacja zamiast rozumowania, wiara zamiast dowodu) ludziom prezentującym naukę. Nic przeto dziwnego, że walcząc na swoich warunkach paranauka wygrywa właściwie wszędzie.

Jedynym rozwiązaniem w tej sytuacji jest przywrócenie nauce jej własnego języka, przedstawianie jej jako tworzenia coraz to bliższych rzeczywistości teorii, wskazanie, jak bardzo istotnym elementem rozwoju nauki jest znajdowanie błędów w tym, co zostało dotąd zrobione. Wymagałoby to jednak zmian w mentalności zarówno nauczycieli (i pewnego przeformułowania programów), jak i popularyzatorów. Osobiście nie sądzę, aby te zmiany mogły, w dającej się przewidzieć przyszłości, nastąpić.



## Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

Zadania zaproponował Tadeusz FIGIEL

**M 759.** Na bokach trójkąta  $ABC$  wybrano trzy punkty:  $D \in \overline{AB}$ ,  $E \in \overline{BC}$  i  $F \in \overline{AC}$ . Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach  $ADF$ ,  $BDE$  i  $CEF$  mają punkt wspólny. Rozwiązanie na str. 13

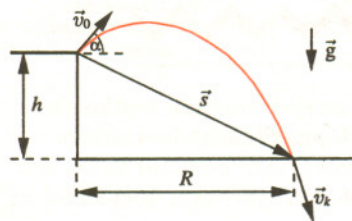
**M 760.** Dana jest sfera. Z należącego do niej punktu  $P$  wychodzą trzy niewspółliniowe półproste  $a$ ,  $b$  i  $c$  odpowiednio przecinające ją w punktach  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Punkt  $D$  należy do przecięcia sfery z płaszczyzną  $ABP$ , punkt  $E$  należy do przecięcia sfery z płaszczyzną  $BCP$ , punkt  $F$  zaś – do przecięcia sfery z płaszczyzną  $ACP$ . Udowodnić, że okręgi powstałe z przekroju tej sfery płaszczyznami  $ADF$ ,  $BDE$  i  $CEF$  mają punkt wspólny. Rozwiązanie na str. 12

**M 761.** Dany jest czworościan  $ABCD$ . Punkty  $E, F, G, H, I, J$  leżą wewnątrz odcinków  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AD}$ ,  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  i  $\overline{BD}$ , odpowiednio. Na czworościanach  $AEFG$ ,  $BGHJ$ ,  $CEIF$  i  $DIJF$  opisane są sfery  $a, b, c$  i  $d$ , odpowiednio. Udowodnić, że sfery te mają punkt wspólny. Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Krzysztof REJMER

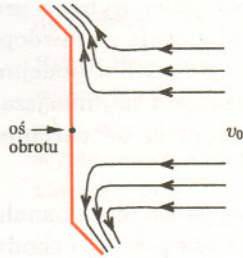
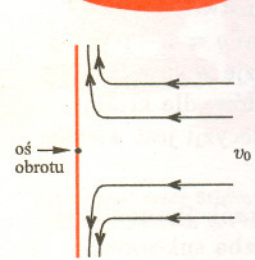
**F 419.** Znaleźć opóźnienie maksymalnej rocznej temperatury gruntu na głębokości 4 m w stosunku do maksymalnej rocznej temperatury na powierzchni, jeśli amplituda rocznych zmian temperatury wynosi na powierzchni  $19,5^\circ\text{C}$ , a na głębokości 4 m jest równa  $2,6^\circ\text{C}$ . Rozwiązanie na str. 16

**F 420.** Z krawędzi urwiska o wysokości  $h$  ponad poziomą równiną wystrzelono pocisk z prędkością początkową  $v_0$  (rys.). Znaleźć maksymalny zasięg pocisku  $R_{\max}$ , kąt, pod jakim pocisk należy wystrzelić, oraz czas przelotu odpowiadający tej sytuacji, nie posługując się rachunkiem różniczkowym. Opory ruchu pomijamy. Rozwiązanie na str. 13



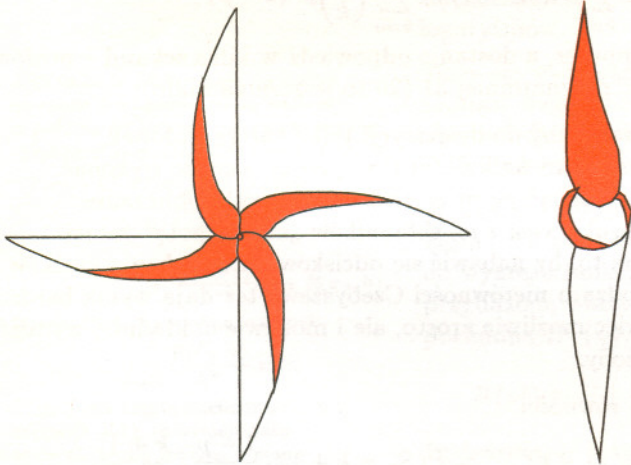


## Śmigielko, skrzydełko i... pranie

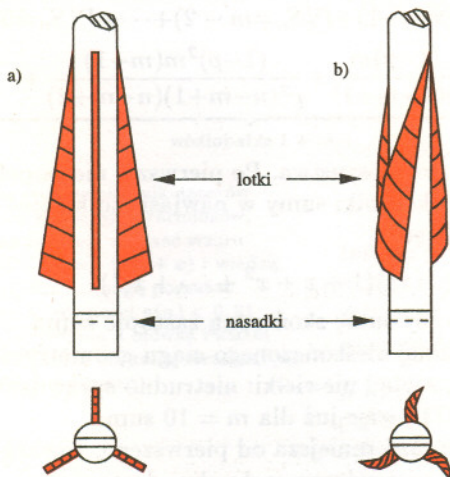


Rys. 1a. Wiatraczek o płaskich skrzydłach ( $v_0$  – prędkość wiatru).

Rys. 1b. Wiatraczek o skrzydłach zgiętych.



Rys. 2. Wiatraczek jako zabawka dziecięca.



Rys. 3. Strzała – widok z boku i „od tyłu”: a) dawniej, b) współcześnie.

Jedną z najciekawszych zabawek dziecięcych jest wiatraczek. W miarę szybki ruch obrotowy oraz łatwość jego zmian czyni wiatraczek atrakcyjną zabawką i ciekawym obiektem prostych doświadczeń. Gdyby skrzydełka wiatraczka były proste, nie mogłyby on wirować w jednorodnym strumieniu powietrza. Na rysunku 1a przedstawiona jest taka właśnie sytuacja. Momenty sił działających na dolne i górne skrzydełko równoważą się (oczywiście, inaczej byłoby, gdyby strumień powietrza padał tylko na jedną, na przykład, dolną jego część). Jeżeli skrzydełka wiatraczka są wygięte jak na rysunku 1b, to przekaz pędu jest większy w przypadku dolnego skrzydełka, a zatem momenty sił nie równoważą się i wiatraczek zaczyna wirować. Ważne jest też, by skrzydełka miały opływowe kształty, w przeciwnym przypadku wystąpią niepotrzebne straty energii.

Innym przedmiotem mającym skrzydełka jest strzała łucznicza. Na jej końcu znajdują się lotki, których kształt i położenie zmieniały się podczas stuleci. Rysunek 3 przedstawia dwa typy lotek: płaskie i zakrzywione. Podczas ruchu strzały powietrze opływa lotki, i jeśli są one zakrzywione, efekt jest taki sam jak w przypadku wiatraczka, strzała zaczyna wirować wokół swej osi. Ten ruch obrotowy ma istotne znaczenie dla celności strzału. Efekt żyroskopowy (zasada zachowania momentu pędu) powoduje, że strzała ma stałe położenie w stosunku do kierunku lotu. Nie jest więc łatwo zaburzyć jej ruch.

A co z tytułowym praniem?

Wśród wielu proszków do prania konkurujących na rynku są i takie, które w opakowaniu zawierają dozownik. Podczas prania w pralce automatycznej następuje nieustanna wymiana wody: nabieranie i wylewanie. Znaczna część proszku do prania zwyczajnie marnuje się. Dzięki dozownikowi proszek może zostać wykorzystany w ekonomiczny sposób. Część tego dozownika jest podobna do wiatraczka. Czy wiecie, dlaczego?

Jeśli nie – spróbujcie poeksperymentować!

*Małą Deltę przygotował Kazimierz MIKULSKI*

# O twierdzeniach granicznych

Paweł STRZELECKI

Los każdego z nas zależy często od kolejalnych decyzji podejmowanych w głosowaniu przez najrozmaitsze ciała. Dlatego nie od rzeczy będzie rozważyć następujący

**Problem.** Parlament złożony z  $n = 2m + 1$  osób podejmuje decyzję w drodze głosowania (zwykłą większością głosów). Załóżmy dla wygody, że istnieje obiektywnie określony *dobry wybór decyzji*. Przypuśćmy, że każdy z posłów w parlamencie rozpoznaje ów dobry wybór z prawdopodobieństwem  $p = 0,7$ , a przeciw dobremu wyborowi głosuje z prawdopodobieństwem  $q = 1 - p = 0,3$ . Przyjmijmy wreszcie, że każdy z posłów podejmuje swą decyzję w sposób niezależny. Pytanie brzmi: jaka jest najmniejsza liczba  $n$  posłów, dla której prawdopodobieństwo podjęcia przez ów parlament słusznej decyzji jest większe od 0,99?

Wielu licealistom problem wyda się może banalny. Mamy  $n$  prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu  $p = 0,7$  i chodzi o to, by liczba sukcesów  $S_n$  była większa niż liczba porażek. Należy zatem sprawdzić, dla jakiego nieparzystego  $n$  zachodzi nierówność  $P(S_n \geq m + 1) > 0,99$  albo równoważnie  $P(S_n \leq m) < 0,01$ . Cóż prostszego, gdy jest jawny wzór,

$$(1) \quad P(S_n \leq m) = \sum_{k=0}^m P(S_n = k) = \sum_{k=0}^m \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Kto chce, niech włączy komputer, a dostanie odpowiedź w kilka sekund – posłów w parlamencie powinno być przynajmniej 31 (29 to jeszcze za mało).

Wyobraźmy sobie jednak, że mamy do dyspozycji tylko kartkę i ołówek, no i może jeszcze dość prymitywny kalkulator (taki, co to pomoże wykonać cztery działania i jeszcze wyciągnąć pierwiastek kwadratowy). Obliczanie długiej sumy, a nawet któregośkolwiek z jej składników „na piechotę” raczej odpada: to dobra metoda na to, by nabawić się odcisków od naciskania guzików kalkulatora. Narzędzia w rodzaju nierówności Czebyszewa też dają wynik bardzo niedoskonały. Spróbujmy więc możliwie prosto, ale i możliwie dokładnie, wyrazić sumę (1) w sposób przybliżony.

Wystartujemy z oczywistej równości

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = P(S_n = k + 1) \cdot \frac{1-p}{p} \cdot \frac{k+1}{n-k}.$$

Korzystając z niej wielokrotnie, sprawdzamy, że

$$\begin{aligned} P(S_n \leq m) &= P(S_n = m) + P(S_n = m-1) + P(S_n = m-2) + \dots + P(S_n = 0) = \\ &= P(S_n = m) \left( 1 + \frac{(1-p)m}{p(n-m+1)} + \frac{(1-p)^2 m(m-1)}{p^2 (n-m+1)(n-m+2)} + \dots \right). \end{aligned}$$

$m + 1$  składników

Dokonajmy teraz podwójnego drobnego oszustwa. Po pierwsze, nie popełniając wielkiego błędu, można przyjąć, że składniki sumy w nawiasie to kolejne potęgi tej samej liczby  $x = \frac{1-p}{p} \cdot \frac{m}{n-m+1}$ . Stąd

$$P(S_n \leq m) \approx P(S_n = m)(1 + x + x^2 + \dots + x^m).$$

Drugie uproszczenie polega na tym, by sumę skończoną zastąpić sumą nieskończoną. Zysk jest spory, bo sumę nieskończonego ciągu geometrycznego oblicza się łatwiej niż skończonego, a błąd niewielki: nietrudno sprawdzić, że w naszym przypadku  $x \in (0, (3/7))$ , więc już dla  $m = 10$  suma  $x^{m+1} + x^{m+2} + \dots$  jest ponad 1000 razy mniejsza od pierwszego, równego jeden, składnika w nawiasie. W efekcie, po nietrudnym rachunku, dostaniemy

$$P(S_n \leq m) \approx \frac{P(S_n = m)}{1-x} = P(S_n = m) \frac{(n+1)p - mp}{(n+1)p - m} \approx \frac{p}{2p-1} P(S_n = m).$$



Nierówność Czebyszewa stwierdza, że dla dowolnej zmiennej losowej  $X$  i dla  $\varepsilon > 0$  mamy

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} D^2 X.$$

Gdy  $X = S_n$  jest liczbą sukcesów w schemacie  $n$  prób Bernoulliego, to wartość oczekiwana i wariancja dane są dobrze znanymi wzorami

$$ES_n = np, \quad D^2 S_n = np(1-p).$$

W naszym przypadku, prawdopodobieństwo  $P(S_n \leq m)$  nie przekracza lewej strony nierówności Czebyszewa, gdy położymy  $\varepsilon = ES_n - m$ . Prosty rachunek pokazuje, że dla takiej wartości  $\varepsilon$  wyrażenie  $D^2 S_n / \varepsilon^2$  jest mniejsze od 0,01 dla  $m \geq 260$ , albo równoważnie dla  $n \geq 521$ .

Zastępując sumę w nawiasie sumą postępu geometrycznego zostawiamy bez zmian jej dwa największe składniki.

W trzecim składniku w miejsce ułamka  $\frac{m-1}{n-m+2}$  wpisujemy  $\frac{m}{n-m+1}$ . Można sprawdzić, że w ten sposób zwiększamy wartość całej sumy o mniej, niż  $\frac{2}{5m}$ . Dociekliwy Czytelnik zechce samodzielnie ocenić, jaki błąd popełniamy w przypadku kolejnych składników.



Dokładniej, wzór Stirlinga (pochodzący z lat trzydziestych XVIII wieku) mówi, że

$$n! = n^n e^{-n+\rho(n)} \sqrt{2\pi n},$$

gdzie  $\rho(n)$  jest liczbą z przedziału  $(\frac{1}{12n+1}, \frac{1}{12n})$ .

Jeśli funkcja  $f$  ma ciągle pochodne do rzędu  $k$  włącznie, to jej wartości w pobliżu ustalonego punktu  $x_0$  można przybliżyć korzystając ze wzoru Taylora,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + R(x_0, h).$$

Reszta  $R(x_0, h)$  spełnia warunek

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(x_0, h)}{h^k} = 0.$$

O ile  $f$  ma ciągłą pochodną rzędu  $(k+1)$ , to istnieje taka stała  $C$ , że dla małych  $h$  mamy  $|R(x_0, h)| < C|h|^{k+1}$ . Do przybliżania wartości funkcji  $H$  stosujemy obok wzór Taylora dla  $k=1$ , a nieco dalej – dla  $k=2$ .

Wrogowie stosowania kalkulatorów i miłośnicy spokojnych rachunków, którzy nie boją się wypisać wzoru Taylora dla funkcji  $\ln(1+x)$  i wiedzą, że  $e = 2,7182\dots$ , mogą poszukać rozwiązań nierówności  $a(n) < 0,01$  korzystając jedynie z ołówka i kartki papieru (to wcale nie takie straszne, jak by się mogło wydawać).

Tym samym sprowadziliśmy problem obliczenia wartości długiej sumy do obliczenia największego składnika i pomnożenia go przez liczbę  $p/(2p-1)$ . W dalszych rachunkach pomoże nam

**Lokalne twierdzenie graniczne.** Załóżmy, że  $0 < m < n$  i oznaczmy przez  $p^*$  ułamek  $\frac{m}{n}$ . Jeśli  $m, n \rightarrow \infty$  w ten sposób, że również  $n-m \rightarrow \infty$ , to zachodzi wtedy przybliżony wzór

$$(2) \quad P(S_n = m) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi n p^* (1-p^*)}} \cdot \exp(-nH(p^*)),$$

gdzie  $H(x) = x \ln \frac{x}{p} + (1-x) \ln \frac{1-x}{1-p}$ .

Znak  $\simeq$  w równości (2) należy rozumieć w ten sposób, że stosunek lewej strony do prawej dąży do jedności dla  $m, n \rightarrow \infty$ .

**Szkic dowodu.** Lokalne twierdzenie graniczne jest prostą konsekwencją wzoru Stirlinga, pozwalającego na przybliżone obliczanie wartości silni,  $n! \simeq n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ . Skorzystajmy z tego wzoru, by wyrazić wszystkie silnie występujące w definicji prawdopodobieństwa  $P(S_n = m)$ . Dostaniemy w efekcie równość przybliżoną

$$P(S_n = m) \simeq \sqrt{2\pi m(n-m)} \cdot \frac{n^n}{m^m (n-m)^{n-m}} \cdot p^m (1-p)^{n-m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n p^* (1-p^*)}} \cdot \left(\frac{p}{p^*}\right)^m \cdot \left(\frac{1-p}{1-p^*}\right)^{n-m}.$$

Stąd już każdy bez kłopotu dowęduje do tezy twierdzenia: wystarczy posłużyć się zależnością  $a = e^{\ln a}$  i wiedzieć, że logarytm iloczynu dwóch liczb to suma ich logarytmów.

Może się wydawać, że lokalne twierdzenie graniczne oferuje wzór bardzo zawiły zamiast względnie prostego i elementarnego. To jednak tylko pozór, bowiem do obliczeń dla dużych wartości  $n$  znacznie wygodniej jest użyć formuły (2) niż definicji rozkładu Bernoulliego.

W naszym przypadku liczba  $p^* = \frac{m}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$  niewiele się różni od  $\frac{1}{2}$ . Zamiast więc obliczać  $H(p^*)$  bezpośrednio, wypiszemy równanie stycznej do wykresu funkcji  $H$  w punkcie  $(\frac{1}{2}, H(\frac{1}{2}))$  i odczytamy z owego równania przybliżoną wartość  $H(p^*)$ . Ponieważ współczynnik kierunkowy stycznej to pochodna  $H'(\frac{1}{2})$ , mamy

$$H(p^*) \approx H\left(\frac{1}{2}\right) + H'\left(\frac{1}{2}\right) \left(p^* - \frac{1}{2}\right) = -\ln \sqrt{4p(1-p)} - \frac{1}{n} \ln \sqrt{\frac{1-p}{p}}.$$

Podstawiając tę wartość do wzoru (2), i jeszcze raz wykorzystując fakt, że  $p^* \approx \frac{1}{2}$ , dostajemy

$$P(S_n \leq m) \approx \frac{p}{2p-1} P(S_n = m) \approx \frac{p}{2p-1} \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \cdot \exp\left(n \ln \sqrt{4p(1-p)} + \ln \sqrt{\frac{1-p}{p}}\right) = \sqrt{\frac{2p(1-p)}{\pi n}} \cdot \frac{(4p(1-p))^{n/2}}{2p-1}.$$

Posługując się kalkulatorem otrzymamy

$$P(S_n \leq m) \approx 0,914\dots \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot (0,916\dots)^n = a(n).$$

Jest to już przybliżenie nadające się do rachunków na kalkulatorze. Spośród wszystkich liczb nieparzystych  $n$  najbliższej liczby rzeczywistej  $x$ , spełniającej zależność  $a(x) = 0,01$ , leży właśnie  $n = 31$ . Lawina drobnych „oszustw” nie była więc wcale niebezpieczna.

Z naszych rachunków można wywnioskować więcej. Mianowicie, jeśli liczba prób  $n$  jest duża, to powinniśmy oczekiwać uzyskania około  $E(S_n) = np$  sukcesów. W takim przypadku  $p^* = m/n$  niewiele się różni od  $p$ . Obliczmy więc, jaka jest przybliżona wartość funkcji  $H(p^*)$  dla  $p^* \approx p$ . Jak poprzednio, użyjemy wzoru Taylora – tym razem biorąc o jeden wyraz więcej, bo tyle trzeba wziąć, żeby uzyskać nietrywialny wynik. Mamy  $H(p) = H'(p) = 0$ , zaś

$H''(p) = \frac{1}{p(1-p)}$ . Zatem

$$H(p^*) = \frac{1}{2p(1-p)}(p^* - p)^2 + R(p^*),$$

przy czym reszta  $R$  spełnia warunek  $|R(p^*)| \leq C(p^* - p)^3$  dla  $p^*$  bliskich  $p$ . Podstawiając tę wartość do wzoru (2), dostaniemy

$$P(S_n = m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \cdot \exp\left(-\frac{n(p^* - p)^2}{2p(1-p)}\right)$$

albo, oznaczając  $z = n(p^* - p)$ ,  $\delta = 1/\sqrt{np(1-p)}$ ,

$$P(S_n = m) \approx \delta\phi(\delta z), \quad \text{gdzie } \phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}.$$

Co to znaczy? Interpretacja nie jest trudna. Jeśli prób jest wiele, to interesują nas raczej zdarzenia  $\{a \leq S_n \leq b\}$ , a nie (znikomo prawdopodobne) zdarzenia  $\{S_n = m\}$ . Gdy skorzystamy z ostatniego wzoru, to dostaniemy równość przybliżoną

$$P(a \leq S_n \leq b) \approx \sum_{a-np \leq z \leq b-np} \delta\phi(\delta z).$$

Suma po prawej stronie nie bez powodu przypomina sumę całkową Riemanna funkcji  $\phi$  – Czytelnik sam zechce sprawdzić, po jakim przedziale odbywa się „całkowanie”.

Dotarliśmy do końca – w tym momencie wypada sformułować

**Twierdzenie graniczne de Moivre’a–Laplace’a.** *Jeśli  $S_n$  oznacza liczbę sukcesów w  $n$  próbach Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu  $p$ , to*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\alpha \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \beta\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-t^2/2} dt$$

dla dowolnych  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ,  $\alpha < \beta$ .

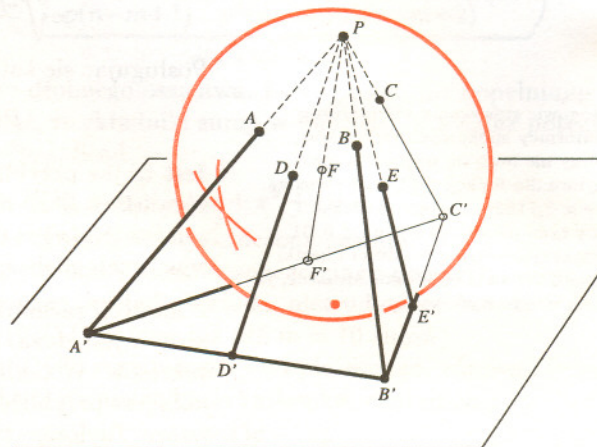
Twierdzenie de Moivre’a–Laplace’a ma dziś całą masę uogólnień o dużym znaczeniu tak teoretycznym, jak i praktycznym. Rachunkowi prawdopodobieństwa trudno byłoby się obyć bez tego rezultatu.

Ci Czytelnicy, którzy znają wzór Taylora oraz definicję całki Riemanna, nie powinni mieć kłopotu z zamienieniem treści niniejszego artykułu na ścisły i nie nazbyt długi dowód. Można będzie wtedy powiedzieć: „Rzeczywiście, nietrudne – nic dziwnego, że Laplace umiał to zrobić ponad 180 lat temu.”



#### Rozwiązanie zadania

**M 760.** Wykonajmy rzut stereograficzny naszej sfery z punktu  $P$  na płaszczyznę i oznaczmy obrazy punktów  $A, B, C, D, E$  i  $F$  odpowiednio przez  $A', B', C', D', E'$  i  $F'$ . Punkty  $A', D'$  i  $B'$  są współliniowe, podobnie – punkty  $B', E'$  i  $C'$  oraz punkty  $A', F'$  i  $C'$ . Obrazami okręgów opisanych w treści zadania są okręgi (jest to znana własność rzutu stereograficznego). Na mocy zadania M 759 mają one punkt wspólny. Odwrotny rzut stereograficzny tego punktu (z płaszczyzny na sferę) jest szukany punktem wspólnym okręgów leżących na sferze.



Jeśli funkcja  $f$  jest (np.) ciągła na przedziale  $[a, b]$ , to tzw. sumy całkowe Riemanna,

$$\sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

są zbieżne, dla  $n \rightarrow \infty$ , do całki

oznaczonej  $\int_a^b f(x) dx$ . Ten fakt ma

interpretację geometryczną: pole pod wykresem (odpowiednio porządną) funkcji można z dowolną dokładnością przybliżać sumą pól cienutkich prostokątów.



## Protokół posiedzenia Jury

### Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki, obradujące dnia 13 września 1995 r. w Toruniu, w składzie: Jerzy Bednarczuk, Antoni Leon Dawidowicz – przewodniczący, Marek Kordos, Andrzej Mąkowski, Agnieszka Wojciechowska, Michał Wojciechowski i Jarosław Wróblewski,

wziąwszy pod uwagę dobór tematu, poziom pracy i przebieg obrony postanowiło przyznać:

- 1) złoty medal i nagrodę w wysokości 250 złotych Tomaszowi Osmanowi, uczniowi klasy trzeciej I LO im. Stefana Żeromskiego w Kielcach za pracę *Wielowymiarowe uogólnienie twierdzenia Bezouta*,
- 2) srebrny medal i łączną nagrodę w wysokości 200 złotych Krzysztofowi Krupińskiemu, uczniowi klasy czwartej I LO im. Stefana Żeromskiego w Jeleniej Górze oraz Karolowi Tokarczykowi, uczniowi klasy czwartej XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu za wspólną pracę *Nakładanie się wielu figur wewnątrz wielokątów*,
- 3) brązowy medal i nagrodę w wysokości 150 złotych Rafałowi Łochowskiemu, uczniowi klasy piątej Zespołu Szkół Elektronicznych im. Bohaterów Westerplatte w Radomiu za pracę *Zależności między zbieżnością lub rozbieżnością pewnych szeregów*,
- 4) wyróżnienie i nagrodę 80 złotych Ewie Mazurkiewicz, uczennicy klasy trzeciej I LO im. Stanisława Staszica w Lublinie za pracę *Wzory Viete'a w trójkącie*,
- 5) dyplom uczestnictwa w finale Rafałowi Kałuży, uczniowi klasy drugiej LO im. majora H. Sucharskiego w Sierpcu,
- 6) nagrody w wysokości 80 złotych każda opiekunom prac: Barbarze Białeckiej, Tadeuszowi Hajdakowi, Zbigniewowi Karczmarczykowi i Jerzemu Zarembie.

(-) podpisy członków Jury

Tradycyjnym zwyczajem redakcja *Delty* ogłasza Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki. Zachęcamy uczniów zainteresowanych matematyką do opracowywania swoich matematycznych rozważań i nadsyłania rezultatów do redakcji *Delty*. Poniżej przypominamy szczegółowo regulamin konkursu.

### Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

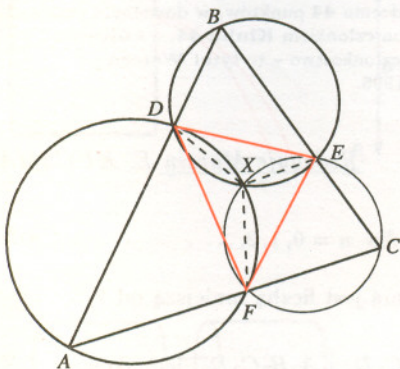
1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.
3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.
4. W eliminacjach bierze udział każdy uczeń, który w terminie do 1 maja prześle pod adresem redakcji *Delty* jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, klasa, nazwa i adres szkoły; imię, nazwisko i adres opiekuna pracy.
5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.
6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Jury Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną zakwalifikowane przez Jury do finału. Finał odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.
7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac i ich opiekunom przed końcem roku szkolnego.
8. Finałisti i opiekunowie ich prac otrzymają od Zarządu Głównego PTM zaproszenia do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.
9. Finał polega na wygłoszeniu (nie odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne ufundowane przez Ministerstwo Edukacji Narodowej.
11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.
12. Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.
13. Jury Konkursu jest powoływane przez Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delty*.



#### Rozwiązanie zadania M 759.

Punkt wspólny okręgu opisanego na trójkącie  $ADF$  i okręgu opisanego na trójkącie  $BDE$ , różny od  $D$ , oznaczmy przez  $X$ . Na czworokątach  $ADXF$  i  $BEXD$  można opisać okręgi, więc

$$|\angle DAF| + |\angle DXF| = |\angle DBE| + |\angle DXE| = 180^\circ.$$



Zatem

$$\begin{aligned} |\angle FCE| + |\angle FXE| &= \\ &= (180^\circ - |\angle BAC| - |\angle ABC|) + \\ &+ (360^\circ - |\angle DXF| - |\angle DXE|) = \\ &= 540^\circ - (|\angle DAF| + |\angle DXF|) - \\ &\quad - (|\angle DBE| + |\angle DXE|) = \\ &= 540^\circ - 180^\circ - 180^\circ = 180^\circ, \end{aligned}$$

więc i na czworokącie  $CFXE$  można opisać okrąg. Punkt  $X$  leży zatem również na okręgu opisanym na trójkącie  $CEF$ , co trzeba było wykazać.



#### Rozwiązanie zadania F 420.

Ponieważ pocisk porusza się ze stałym przyspieszeniem  $g$ , możemy napisać

$$\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_0 = \mathbf{g}t, \quad \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_0 = \frac{2\mathbf{s}}{t}.$$

Mnożąc te równania skalarnie i wektorowo dostajemy

$$v_k^2 - v_0^2 = 2g \cdot s, \quad \mathbf{v}_k \times \mathbf{v}_0 = \mathbf{g} \times \mathbf{s}.$$

Ostatnie równanie można napisać w postaci:  $v_k v_0 \sin \beta = gR$ , gdzie  $\beta$  jest kątem pomiędzy wektorami prędkości końcowej i początkowej.

Z zasady zachowania energii mamy  $v_k = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ . Widać, że zasięg jest maksymalny, gdy  $\sin \beta = 1$ , tzn. gdy prędkość końcowa jest prostopadła do początkowej. Jest on równy

$R_{\max} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ . Mnożąc pierwsze z równań skalarnie i wektorowo przez  $v_0$  dostajemy

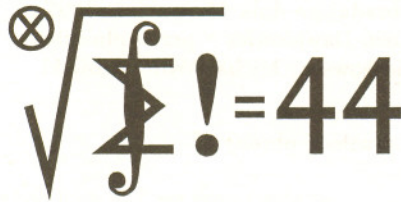
$$\text{oraz} \quad v_0 = gt_{\max} \sin \alpha_{\max}$$

$$\text{a stąd} \quad v_k = gt_{\max} \cos \alpha_{\max},$$

$$\text{oraz} \quad \operatorname{tg} \alpha_{\max} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}$$

$$t_{\max} = \frac{1}{g} \sqrt{2(v_0^2 + gh)}.$$

Termin nadsyłania rozwiązań:  
30 IV 1996



## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 3$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1995.

Czołówka ligi zadaniowej

### Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 299 ( $WT=1,77$ ) i 300 ( $WT=2,06$ )  
z numeru 4/1995

Janusz Olszewski – Suwałki	44,62
Tomasz Wietecha – Tarnów	42,33
Piotr Lipiński – Radom	37,82
Lesław Skrzypek – Rzeszów	37,19
Tadeusz Józefczyk – Poznań	36,66
Jan Ciach – Ostrowiec Św.	35,69
Krzysztof Zapisek – Warszawa	35,10

Z panem Olszewskim matematyczny  
**Klub 44** liczy szesnastu Weteranów.

## Zadania z matematyki nr 313, 314

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**313.** Ciąg  $(x_n)$  jest określony rekurencyjnie:

$$x_0 = \pi/3, \quad x_{n+1} = x_n \cos x_n \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Wykazać, że szereg  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^3$  jest zbieżny i że jego suma jest liczbą mniejszą od  $7/3$ .

**314.** Na płaszczyźnie dane są dwa kwadraty  $A_1B_1C_1D_1$  i  $A_2B_2C_2D_2$ , jednakowo zorientowane oraz położone tak, że  $A_1 \neq A_2$ ,  $C_1 \neq C_2$ . Udowodnić, że proste  $A_1A_2$  i  $C_1C_2$  są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy  $|B_1B_2| = |D_1D_2|$ .

Zadanie **314** zaproponował pan Waldemar Pompe z Warszawy.

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/1995

Przypominamy treść zadań:

**305.** Wysokość  $CD$  trójkąta ostrokątnego  $ABC$  ma długość  $h$ ; punkty  $O$  oraz  $I$  są środkami okręgów opisanego (o promieniu  $R$ ) oraz wpisanego (o promieniu  $r$ ). Punkt  $P$ , leżący na odcinku  $CD$ , ma tę własność, że prosta wyznaczona przez jego rzuty na boki  $AC$  i  $BC$  przechodzi przez punkty  $O$  oraz  $I$ .

**305. (a)** Oznaczmy przez  $K$  i  $L$  rzuty punktu  $P$  na boki  $AC$  i  $BC$ , a przez  $E$  – koniec średnicy  $CE$  okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ . Przyjmijmy też zwykle oznaczenia:  $|BC| = a$ ,  $|AC| = b$ ,  $|\angle BAC| = \alpha$ ,  $|\angle ABC| = \beta$ . Zachodzą równości:  $|\angle OCL| = |\angle OCB| = 90^\circ - |\angle BEC| = 90^\circ - |\angle BAC| = 90^\circ - \alpha$ .

Na czworokącie  $CKPL$  da się opisać okrąg; zatem

$$|\angle OLC| = |\angle KLC| = |\angle KPC| = 90^\circ - |\angle KCP| = \alpha.$$

Trójkąt  $COL$  jest więc prostokątny:  $CO \perp OL$ .

Oznaczmy przez  $F$  rzut punktu  $I$  na prostą  $CD$ . Skoro

$$|\angle FCK| = |\angle DCA| = 90^\circ - \alpha = |\angle OCL|,$$

zatem dwusieczna  $CI$  kąta  $ACB$  jest zarazem dwusieczną kąta  $OCF$ . Wobec tego trójkąty prostokątne  $COI$  i  $CFI$  są przystające i otrzymujemy

$$h = |CD| = |CF| + |FD| = |CO| + |FD| = R + r;$$

jest to szukany związek.

**(b)** Z równości  $|\angle OLC| = \alpha$ ,  $|\angle LPC| = 90^\circ - |\angle LCP| = \beta$  wnosimy, że

$$h = a \sin \beta = 2R \sin \alpha \sin \beta = 2R \cdot \frac{|CL|}{|CP|} \cdot \frac{|CO|}{|CL|} = \frac{2R^2}{|CP|}.$$

Stąd, na podstawie znanej nierówności  $r \leq \frac{1}{2}R$ , dostajemy oszacowanie

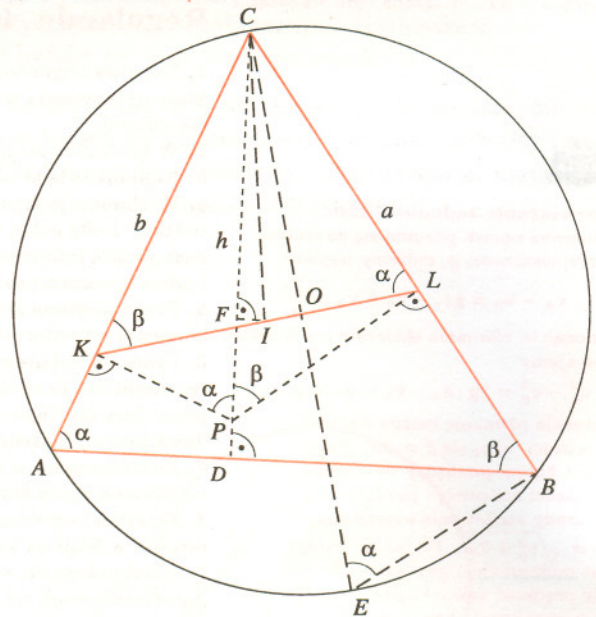
$$|CP| = \frac{2R^2}{h} = 2h \left(\frac{R}{h}\right)^2 = 2h \left(\frac{R}{R+r}\right)^2 \geq 2h \left(\frac{R}{R+\frac{1}{2}R}\right)^2 = \frac{8}{9}h,$$

przechodzące w równość dla trójkąta równobocznego. W takim razie minimalna możliwa wartość stosunku  $|CP| : h$  wynosi  $8 : 9$ .

**(a)** Znaleźć związek między liczbami  $R$ ,  $r$ ,  $h$ .

**(b)** Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość stosunku  $|CP| : h$ .

**306.** Dana jest liczba pierwsza  $p > 2$ . Dla  $k = 1, 2, \dots, p-1$  oznaczmy przez  $r_k$  resztę z dzielenia liczby  $k^p$  przez  $p^2$ . Obliczyć sumę  $r_1 + r_2 + \dots + r_{p-1}$ .



**306.** Zauważmy, że

$$(p-k)^p = \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} p^j (-k)^{p-j} \equiv -k^p \pmod{p^2}.$$

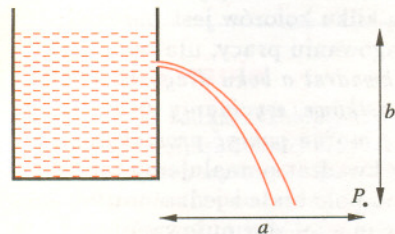
Wobec tego  $r_{p-k} = p^2 - r_k$ , skąd ostatecznie

$$\sum_{k=1}^{p-1} r_k = \sum_{k=1}^{(p-1)/2} r_k + \sum_{k=1}^{(p-1)/2} r_{p-k} = \sum_{k=1}^{(p-1)/2} p^2 = \frac{p^2(p-1)}{2}.$$

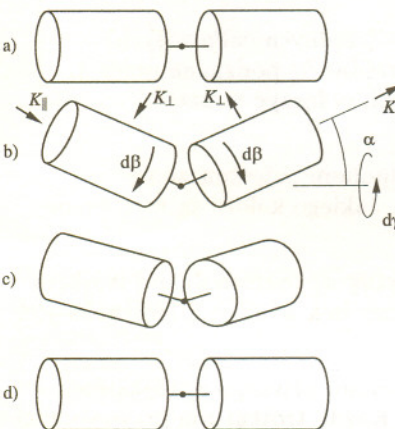


## Zadania z fizyki nr 211, 212

Redaguje Jerzy B. BROJAN



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

211. Punkt  $P$  znajduje się w odległości  $a$  od pionowej ścianki naczynia, a różnica wysokości między nim a poziomem cieczy w naczyniu jest równa  $b$  (rys. 1). Jaki warunek muszą spełniać  $a$  i  $b$ , żeby strumień cieczy wytryskującej przez otworek w ściance nie mógł osiągnąć punktu  $P$ , niezależnie od położenia otworka?

212. Cewkę umieszczono w zewnętrznym niejednorodnym polu magnetycznym, gdzie płynący przez nią prąd o natężeniu  $I$  powoduje wystąpienie wypadkowej siły  $F$ . Przyjmijmy założenie, że taka sama siła działa na cewkę w każdym miejscu pewnego obszaru  $\Omega$ . Wykazać, że jeśli cewka jest bezoporowa i nie może się obracać (a jedynie przesuwać równolegle), to po jej zwarciu i pchnięciu w kierunku siły  $F$  będzie się ona w obrębie  $\Omega$  poruszała ruchem drgającym. Znaleźć częstotliwość tych drgań, jeśli masa cewki jest równa  $m$ , a indukcyjność  $L$ .

### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/1995

Przypominamy treść zadań:

203. Aby objaśnić mechanizm umożliwiający obrót kota w powietrzu (i spadek na cztery łapy), przedstawmy ciało kota w postaci dwóch jednorodnych i jednakowych walców o promieniu  $r$  i wysokości  $h$  osadzonych na ośkach połączonych przegubowo (rys. 2). Przyjmijmy, że początkowo układ walców był nieruchomy, dalej nastąpiło zgięcie w przegubie o kąt  $2\alpha$ , następnie walce obróciły się o jednakowy kąt  $\beta$  względem układu związanego z ośkami, a po zakończeniu obrotu oski się wyprostowały. O jaki kąt obróciły się walce względem układu inercyjnego? Pominąć oddziaływanie z powietrzem.

Pytanie dodatkowe: O jaki kąt i w jakiej płaszczyźnie obróciłyby się układ walców, gdyby obrót o kąt  $\beta$  nastąpił z przeciwnym zwrotem (rys. 3)?

204. Ocenić orientacyjnie maksymalny ładunek, jakim można naładować kulkę stalową o średnicy 2 cm, aby nie uległa ona rozerwaniu pod wpływem odpychania elektrostatycznego (ewentualnie także – aby nie oderwała się od niej warstwa powierzchniowa).

203. W fazie b–c (rys. 2) ruch każdego z walców jest złożeniem dwóch obrotów: cały układ walców wraz z ośkami obraca się wokół osi poziomej, a jednocześnie walce obracają się na ośkach. Niech kąt obrotu całości w ciągu nieskończonego małego przedziału czasu  $dt$  będzie równy  $d\gamma$ , a odpowiedni kąt obrotu walców względem osiek –  $d\beta$ . Ponieważ prędkość kątową można – jak każdy inny wektor – dodawać wektorowo i rozkładać na składowe, więc wzdłuż swojej osi walce obracają się względem układu inercyjnego z prędkością kątową

$$\omega_{\parallel} = \frac{d\beta}{dt} - \frac{d\gamma}{dt} \cos \alpha,$$

natomiast wzdłuż osi prostopadłej – z prędkością kątową  $\omega_{\perp} = \frac{d\gamma}{dt} \sin \alpha$ . Składowe  $K_{\parallel}$  i  $K_{\perp}$  momentu pędu walców znajdujemy mnożąc  $\omega_{\parallel}$  i  $\omega_{\perp}$  przez momenty bezwładności

$I_{\parallel} = \frac{1}{2}mr^2$  i  $I_{\perp} = \frac{1}{4}m\left(r^2 + \frac{h^2}{3}\right)$ . Całkowity moment pędu pozostaje stale równy zeru, więc uwzględniając przedstawione na rysunku 2b zwroty otrzymujemy równanie  $2K_{\parallel} \cos \alpha - 2K_{\perp} \sin \alpha = 0$ , czyli

$$I_{\parallel} \left( \frac{d\beta}{dt} - \frac{d\gamma}{dt} \cos \alpha \right) \cos \alpha = I_{\perp} \frac{d\gamma}{dt} \sin^2 \alpha$$

albo

$$I_{\parallel} d\beta \cos \alpha = (I_{\perp} \sin^2 \alpha + I_{\parallel} \cos^2 \alpha) d\gamma.$$

Ponieważ założyliśmy, że w czasie obrotu kąt skręcenia  $\alpha$  jest stały, więc ostatni wzór obowiązuje nie tylko dla małych kątów  $d\beta$  i  $d\gamma$ , ale i dla całkowitych kątów obrotu.

Ostatecznie kąt obrotu  $\delta$  walców wynosi

$$\delta = \beta - \gamma = \beta \frac{I_{\perp} \sin^2 \alpha + I_{\parallel} \cos \alpha (\cos \alpha - 1)}{I_{\perp} \sin^2 \alpha + I_{\parallel} \cos^2 \alpha}.$$

Jeśli obrót walców o kąt  $\beta$  będzie miał przeciwny zwrot, to z analogicznego rozumowania wynika, że całość obróci się w płaszczyźnie poziomej o kąt

$$\delta = \frac{\beta I_{\parallel} \sin \alpha}{I_{\perp} \cos^2 \alpha + I_{\parallel} \sin^2 \alpha}.$$

204. Ścisła analiza rozkładu naprężeń wewnątrz kulki byłaby zapewne dość trudna, więc ograniczymy się do analizy wymiarowej. Szukany ładunek może zależeć od promienia kulki  $r$ , od wytrzymałości  $W$  i od stałej  $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$  występującej w prawie Coulomba (pomijamy mało istotną – jak się zdaje – zależność od modułu Younga i współczynnika Poissona, które opisują własności sprężyste materiału). Jediną kombinacją  $r$ ,  $W$  i  $k$  o wymiarze ładunku jest

$$Q = \text{const} \cdot r^2 \sqrt{W/k}.$$

Podstawiając wytrzymałość dla stali  $W \approx 10^9 \text{ N/m}^2$  i  $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$  otrzymujemy dla stałej rzędu jedności  $Q \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ C}$ .

Czołówka ligi zadaniowej

#### Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 199 ( $WT=2,15$ ) i 200 ( $WT=2,95$ ) z numeru 5/1995

Artur Gawryszczak	- Dubeczno	43,40
Zbigniew Galias	- Kraków	36,75
Aleksander Surma	- Myszków	30,79
Przemysław Gadziński	- Środa Śl.	23,31
Przemysław Gworys	- Częstochowa	22,32
Jarosław Łazuka	- Warszawa	17,03





**Rozwiązanie zadania M 761.**

Przecinając sfery  $a, b$  i  $c$  płaszczyzną  $ABC$  stwierdzamy, na mocy zadania M 759, iż mają w tej płaszczyźnie punkt wspólny  $X$ . Analogicznie sfery  $a, b$  i  $d$  mają w płaszczyźnie  $ABD$  punkt wspólny  $Y$ , natomiast sfery  $a, c$  i  $d$  mają w płaszczyźnie  $ACD$  punkt wspólny  $W$ . Punkty  $A, G, F, E, X, Y$  i  $W$  leżą na sferze  $a$ . Ponadto punkty  $A, G, F$  i  $Y$  są współpłaszczyznowe, podobnie – punkty  $A, E, F, W$  i punkty  $A, G, E, X$ . Na mocy zadania M 760 okręgi  $GXY, XEW$  i  $YFW$  mają na sferze  $a$  punkt wspólny. Ponieważ okręgi te zawierają się w sferach  $b, c$  i  $d$ , odpowiednio, punkt ten należy do wszystkich czterech sfer, co kończy dowód.



**Rozwiązanie zadania F 419.** Szukamy rozwiązania równania przewodnictwa cieplnego:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

z periodycznym warunkiem brzegowym:  $T(0, t) = T_0 \cos \omega t$ , gdzie  $\omega = 1,99 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$  jest częstością obrotu Ziemi wokół Słońca. Rozwiązanie ma postać

$$T(x, t) = T_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x\right) \times \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a}}x\right),$$

gdzie  $T_0$  jest amplitudą zmian temperatury na powierzchni Ziemi;  $T_x = \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x\right)$ , a jest współczynnikiem przewodnictwa temperaturowego, szukane zaś opóźnienie wynosi

$$\delta = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\omega}{2a}} = \frac{1}{\omega} \ln \frac{T_0}{T_x} \approx 117 \text{ dni}.$$

W rozwiązaniu nie uwzględniliśmy możliwości zamarzania wody gruntowej (tajania lodu), co wymagałoby modyfikacji równania przewodnictwa. Uzyskany wynik jest jednak realistyczny. Aby to sprawdzić, można obliczyć współczynnik przewodnictwa temperaturowego

$$a = \frac{\omega x^2}{2 \ln^2 \frac{T_x}{T_0}} \approx 3,92 \cdot 10^{-3} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}.$$

Eksperymentalnie zmierzone wartości tego współczynnika mają dla kilku substancji następujące wartości (w  $\text{cm}^2/\text{s}$ ):  
 bazalt:  $a = 6,77 \cdot 10^{-3}$ ;  
 granit:  $a = 1,4 \cdot 10^{-3}$  do  $6 \cdot 10^{-3}$ ;  
 piasek:  $a = 1,44 \cdot 10^{-3}$ .

Redaktor naczelny *Delty* opowiadał kiedyś, że po pół roku istnienia czasopisma „na Zjeździe PTM urządzono awanturę, że *Delta* jest zbyt efektowna i jacyś głupcy mogą ją kupować dlatego, że ma kolorowe okładki, i że to jest niedobre. W obronę wzięła wtedy *Delte* profesor Krygowska, która zaczęła wystąpienie od zdania, że matematyka jest kolorowa”. Kolorowa matematyka może się przydać przy rozwiązywaniu rozmaitych problemów i zadań, także olimpijskich. I nie chodzi tylko o to, że rysunek zrobiony za pomocą kilku kolorów jest bardziej czytelny. Kolory pomóc mogą przy lepszym zredagowaniu pracy, ułatwić albo wręcz umożliwić rozwiązanie. Na przykład: kwadrat o boku długości  $n$  ( $n$  jest liczbą parzystą) dzielimy na kwadraty jednostkowe, wycinamy dwa przeciwległe narożne kwadraty; czy powstałą figurę można pokryć prostokątami wymiaru  $2 \times 1$ ? Odpowiedź się nasuwa, gdy duży kwadrat pomalujemy tak, jak szachownicę, bo każdy prostokąt pokryje jedno pole białe i jedno czarne... Takich zadań jest więcej; poniższe (czasem trochę inaczej sformułowane) pojawiły się na polskich Olimpiadach Matematycznych. Dla chcących powalczyć z tymi zadaniami podaję tylko wskazówki; moim zdaniem, gdy z rozwiązaniem zadania (w szczególności olimpijskiego) ma się kłopoty, wskazówka rozwija umysł lepiej niż przeczytanie rozwiązania.

1. Ze zbioru punktów kratowych (tzn. o obu współrzędnych całkowitych) na płaszczyźnie usuwamy te, których obie współrzędne są podzielne przez 4. Udowodnić, że pozostałych punktów nie można tak połączyć w pary, by odległość punktów każdej pary była równa 1.

*Wskazówka:* Punkty kratowe można utożsamić z polami „nieskończonej szachownicy” (każdy z punktów na środku pola). Jakiego koloru są wyrzucone punkty?

2. Każde trzy z sześciu danych punktów płaszczyzny są wierzchołkami trójkąta o bokach różnej długości. Udowodnić, że najkrótszy bok jednego z trójkątów jest jednocześnie najdłuższym bokiem innego.

*Wskazówka:* Te odcinki, które są najkrótszymi bokami pewnego z trójkątów, pomalujemy na czerwono, a pozostałe na zielono. Każdy trójkąt ma przynajmniej jeden czerwony bok; wykażemy, że istnieje taki, który ma ich trzy. Trzy z pięciu odcinków wychodzących z jednego z punktów są tego samego koloru...

3. W turnieju szachowym uczestniczy 66 osób, każdy z każdym rozgrywa jedną partię, rozgrywki odbywają się w czterech miastach. Wykazać, że pewna trójka zawodników rozgrywa wszystkie partie między sobą w tym samym mieście.

*Wskazówka:* Możemy utożsamić szachistów z punktami na płaszczyźnie, które łączymy odcinkami czterech kolorów. Rozważmy teraz liczby:  $2, 5 = 2 \cdot 2 + 1, 16 = 5 \cdot 3 + 1, 65 = 16 \cdot 4 + 1$ . Wybierzmy jeden punkt; wychodzi z niego przynajmniej 17 odcinków tego samego koloru...

4. Wypukły  $n$ -kąt można tak podzielić przekątnymi na trójkąty, by z każdego wierzchołka wychodziła parzysta liczba przekątnych i by dwie przekątne nie miały wspólnych punktów wewnętrznych; wykazać, że  $n$  jest podzielne przez 3.

*Wskazówka:* Jeśli figurę na płaszczyźnie podzielimy prowadząc  $k$  prostych, to możemy powstałe części tak pomalować dwoma kolorami, by dwie mające bok wspólny były różnych kolorów (dowód indukcyjny). Teraz pomalujemy w ten sposób nasze trójkąty. Należy wykazać, że wszystkie trójkąty, które mają choć jeden bok wspólny z wyjściowym wielokątem, są pomalowane na ten sam kolor, a potem odpowiednio policzyć odcinki...

5. Dany jest zbiór  $n$  punktów kratowych na płaszczyźnie. Udowodnić, że istnieje taki podzbiór  $A$  tego zbioru, że  $A$  ma nie mniej niż  $\frac{n}{4}$  elementów i dowolne dwa różne punkty z  $A$  są odległe co najmniej o 2.

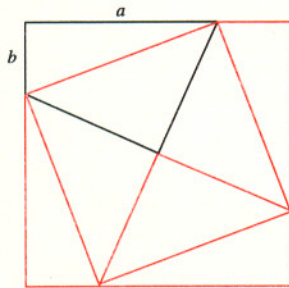
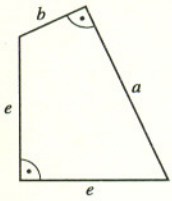
*Wskazówka:* Tym razem szachownicę tak pomalujemy na cztery kolory, by dwa pola tego samego koloru nie stykały się ani w jednym punkcie (w jednym rzędzie dwa kolory na przemian). Jeśli dwa pola są tego samego koloru, to odległość ich środków wynosi co najmniej 2...

W poprzednim *EPSILONIE* wspomniany był znakomity topolog amerykański, R.H. Bing. Wszystkie jego prace (a nie było ich mało) podpisane były jedynie inicjałami. Mógłby ktoś pomyśleć, że Bing z jakichś tajemniczych powodów używał jedynie inicjałów; rzecz w tym, że pod inicjałami R.H. nie kryło się nic, tak właśnie miał Bing na imię (w USA jest to dozwolone). Związana jest z tym anegdota; otóż przed narodzinami młodego Binga ustalono, że otrzyma on imiona po dziadku, niemieckiego pochodzenia. Imiona te brzmiały Rupert Heinrich i bardzo się mamie Binga nie podobały. Gdy Bing się urodził i poproszono matkę o podanie imion (tak tam robiono, i było to wiążące), podyktowała jako imiona skrót: R.H.

Kolejna anegdota mówi, że gdy dorosły już Bing przekraczał kiedyś granicę państwową, urzędnik zażądał od niego podania pełnych imion. Bing zaczął tłumaczyć, że to jest właśnie jego pełne imię, urzędnik zapytał: „R.H.?” , na co Bing: „Only, only” (tylko, tylko). Urzędnik wpisał w deklaracji: „Ronly Honly Bing”.

## Dorysowywanie

Zacznijmy od zadania. Dany jest czworokąt, którego dwa przeciwległe kąty są proste; długości boków przy jednym z kątów prostych wynoszą odpowiednio  $a$  i  $b$ , długości boków przy drugim kącie prostym są równe. Obliczyć długość przekątnej łączącej wierzchołki przy kątach prostych.



Rys. 1

Rys. 2

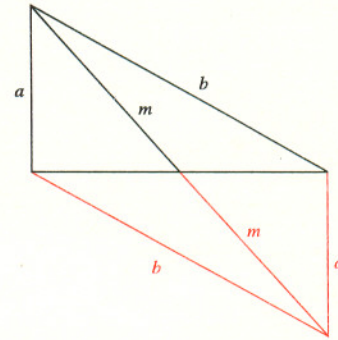
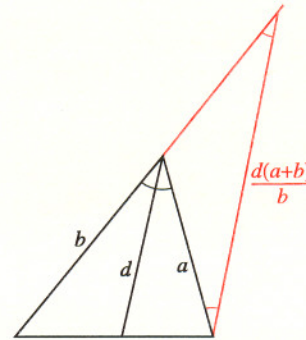
Wielu matematyków zadania tego nie potrafiło rozwiązać. Szukana odległość wynosi  $\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$ ; jak to wykazać? Wykorzystamy rysunek przedstawiający dowód twierdzenia Pitagorasa, pochodzący prawdopodobnie od samego Pitagorasa, wzięty z książki Szczepana Jeleńskiego (rys. 2).

Wystarczy zauważyć, że rozważana przekątna to połowa przekątnej dużego kwadratu z rysunku drugiego.

Teraz pora na twierdzenie Talesa; najpierw zadanie. W dwóch trójkątach długości boków i dwusiecznej kąta między tymi bokami są odpowiednio równe. Czy te trójkąty są przystające? Oczywiście, znowu, by rozwiązać zadanie, wystarczy odpowiedni rysunek. Oznaczmy długości boków przez  $a$  i  $b$ , dwusiecznej przez  $d$ . W każdym z trójkątów narysujmy półprostą zawierającą odcinek o długości  $b$ , na tej zaś półprostej tak zaznaczmy odcinek o długości  $a$ , by obok trójkąta wyjściowego narysowany został trójkąt równoramienny o boku długości  $a$  (rys. 3). Zauważmy, że kąt przy podstawie nowego trójkąta równy jest kątowi między wspólnym bokiem trójkątów i dwusieczną, zatem podstawa ta i dwusieczna są równoległe. Możemy skorzystać z twierdzenia Talesa i obliczyć długość podstawy; wynosi ona  $\frac{d(a+b)}{b}$ . Wobec tego dorysowane (do obu wyjściowych) trójkąty są przystające; mają po trzy parami równe boki. Daje nam to równość kątów przy podstawie, tym samym równość kątów przy wspólnym wierzchołku boków i dwusiecznej. Korzystając z cechy przystawiania *bok-kąt-bok* kończymy dowód.

Trzecie zadanie podobne jest do drugiego. W dwóch trójkątach długości boków i środkowej, poprowadzonej ze wspólnego wierzchołka, są odpowiednio równe. Czy trójkąty te są przystające? Oznaczmy długości boków trójkątów przez  $a$  i  $b$ , środkowych przez  $m$ . Narysujmy

równoległoboki o bokach długości  $a$  i  $b$  oraz przekątnej  $2m$  (rys. 4). Trójkąty o bokach  $a$ ,  $b$  i  $2m$  są przystające, mają też równe środkowe – w tym przypadku są to połówki drugiej przekątnej równoległoboku. Zauważmy, że połówki te dają w sumie trzeci bok, oczywiście, równy w obu trójkątach, czyli na mocy cechy przystawiania *bok-bok-bok* dane trójkąty są przystające.



Rys. 3

Rys. 4

Dorysowywanie często okazuje się bardzo skutecznym środkiem przy rozwiązywaniu zadań z geometrii elementarnej. Dzięki sprytnemu rysunkowi niektóre, z pozoru trudne zadania, można rozwiązać niemal błyskawicznie. Metoda ta, kiedyś bardzo popularna i propagowana, wydaje się obecnie (zwłaszcza w szkole) zapomniana – a szkoda!

Można zadać pytanie: a skąd wiadomo, co dorysować? W tym bywa pomocna właśnie znajomość metod dowodowych elementarnej geometrii. W pierwszym zadaniu rozwiązanie sugerował odpowiedni dowód twierdzenia Pitagorasa, w drugim – dowód twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie.

Tą metodą można też ładnie udowodnić znane twierdzenia. Na przykład:

- trzy środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie; punkt ten dzieli każdą ze środkowych w stosunku 2 : 1;
- trzy wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie;
- odcinek łączący środki nierównoległych boków trapezu jest równoległy do podstaw trapezu, jego długość jest średnią arytmetyczną długości podstaw.

Ale o tym następnym razem.

Danuta CIESIELSKA