

Dnia 8 lutego 1999 roku
zginął w Tatrach niosąc pomoc innym
matematik i taternik

Tomasz OSMAN

złoty medalista Konkursu Prac Uczniowskich z Matematyki
ZG PTM i redakcji *Delty* w 1995 roku,
srebrny medalista Konkursu na Młodego Uczzonego
Unii Europejskiej w 1996 roku,
Autor *Delty*

SPIS TREŚCI NUMERU 4(299)

Ułamki łańcuchowe a sumy dwóch kwadratów <i>Marcin Mazur</i>	str. 1
Zadania <i>Paweł Strzelecki</i>	str. 3
Cztery barwy i okolice <i>Paweł Strzelecki</i>	str. 4
Jak plastiki przewodzą prąd elektryczny? <i>Stanisław Bednarek</i>	str. 6
Mała Delta <i>Robert Smolańczuk</i>	str. 8
Stabilność pierwiastków superciężkich <i>Robert Smolańczuk</i>	str.10
Aktualności (nie tylko) fizyczne	str.11
Laboratorium w lesie – Na tropie cząstek	str.12
The Illustrated Broiler Times	str.13
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Kwiecień	str.16
Gammalimatias	str.17

W następnym numerze:

Twierdzenie Cevy dla wielokątów

Okładki i ilustracje wykonała
Anna Ludwicka

Wybór artykułów w języku angielskim
<http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 3 zł

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego
i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichocki
– wiceprzewodniczący
Krzysztof Ciesielski
Jan A. Gaj
Piotr Goldstein
Tomasz Hofmökł
Andrzej Hryniewicz
Wiesław A. Kamiński
Marta Kicińska-Habior
Krzysztof Maślanka
Andrzej Mąkowski
Zdzisław Pogoda
Feliks Przytycki
Michał Różyczka
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Andrzej Woszczyk
Wiesław Zelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol
Krzysztof Biesaga
Wojciech Kopczyński – z-ca red. nac.
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nac.
Tomasz Kwast
Anna Ludwicka
Anna Rudnik
Paweł Strzelecki
Joanna Udalska
Anna Wojtyra
Piotr Zalewski

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 843-02-41(-2) wewn. 21
PAWELST@MIMUW.EDU.PL
Skład systemem TeX wykonała Redakcja.
Wydrukowano
w Drukarni Naukowo-Technicznej
w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres
prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena
jednego numeru w 1999 roku wynosi 3 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu
prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**)
cena numeru w 1999 r. wynosi 6 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą
odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje
dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na III kwartał 1999 r. wynosi 9 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe
„Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa
egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się
pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaką”.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest równa cenie prenumeraty
krajowej plus rzeczywiste koszty wysyłki. Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A.
Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa
11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28,
czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8⁰⁰ – 14⁰⁰.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem za granicę	
---------	----------------------------	--

5 XII	20 XI	na I kwartał roku następnego,
5 III	20 II	na II kwartał,
5 VI	20 V	na III kwartał,
5 IX	20 VIII	na IV kwartał.

6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą,
realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem
otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A.
Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71
wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także
tel. 620-10-19 i 620-12-17, wewn. 2366.

Numerzy archiwalne (od 1985 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Ułamki łańcuchowe a sumy dwóch kwadratów

Marcin MAZUR

O rozkładaniu liczb pierwszych na sumę kwadratów można przeczytać w *Delcie* 12/1990.

Jak wykazał Lagrange, każda liczba naturalna jest sumą kwadratów co najwyżej czterech liczb naturalnych.

Opiszemy w tym artykule zadziwiające zastosowanie ułamków łańcuchowych: do dowodu twierdzenia Fermata o rozkładzie na sumę kwadratów.

Twierdzenie 1. Liczba pierwsza p jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$ lub $4|(p - 1)$.

Dowód, opublikowany przez H.J.S. Smitha w roku pańskim 1855, należy do najpiękniejszych perełek elementarnej teorii liczb, pomyślałem więc, że warto podzielić się nim z Czytelnikami *Delty*.

Zauważmy na początek, że $2 = 1^2 + 1^2$. Ponadto, gdy $n = 2k + 1$ jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych, wówczas $4|(n - 1)$. Wynika to z prostej obserwacji, że kwadrat liczby całkowitej daje z dzielenia przez 4 resztę 0 lub 1. Pozostaje więc wykazać, że liczby pierwsze $p \equiv 1 \pmod{4}$ są sumami dwóch kwadratów.

Dalszą część dowodu na moment odłożmy, by przypomnieć podstawowe fakty dotyczące ułamków łańcuchowych. Dla dowolnego ciągu liczb całkowitych $a_0, a_1 > 0, a_2 > 0, \dots$ symbolem $[a_0; a_1; \dots; a_n]$ oznaczamy liczbę

$$[a_0; a_1; \dots; a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}}$$

Ogólnie, każdą liczbę wymierną $w \neq 0$ można jednoznacznie przedstawić w postaci p/q , gdzie $q > 0$ i liczby p, q są względnie pierwsze. Liczbę p nazywamy licznikiem, a liczbę q mianownikiem liczby wymiernej w .

zwaną skończonym ułamkiem łańcuchowym o wyrazach a_0, \dots, a_n . Oczywiście $[a_0; a_1; \dots; a_n]$ jest liczbą wymierną, więc można ją zapisać jednoznacznie w postaci p_n/q_n , gdzie liczba q_n jest dodatnia i ułamek p_n/q_n jest nieskracalny.

Kluczowe znaczenie będzie dla nas miała tożsamość

$$(1) \quad [a_0; a_1; \dots; a_n; a_{n+1}; \dots; a_N] = \frac{p_n r + p_{n-1}}{q_n r + q_{n-1}},$$

gdzie $r = [a_{n+1}; \dots; a_N]$. Dla wygody Czytelnika podamy szkic jednego z licznych jej dowodów.

♠ Rozpatrzmy ciągi \tilde{p}_n, \tilde{q}_n określone następująco: $\tilde{p}_{-1} = 1, \tilde{p}_0 = a_0, \tilde{p}_{n+1} = a_{n+1}\tilde{p}_n + \tilde{p}_{n-1}$ oraz $\tilde{q}_{-1} = 0, \tilde{q}_0 = 1, \tilde{q}_{n+1} = a_{n+1}\tilde{q}_n + \tilde{q}_{n-1}$. Oczywiście indukcyjnie dowodzi, że $\tilde{q}_n \tilde{p}_{n-1} - \tilde{p}_n \tilde{q}_{n-1} = (-1)^n$. W szczególności, liczby \tilde{p}_n i \tilde{q}_n są względnie pierwsze dla każdego $n \geq 0$. Ponadto $\tilde{q}_n > 0$ dla $n \geq 0$. Rozpatrzmy teraz funkcję

$$f_n(x) = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{x}}}}}$$

Przez indukcję łatwo dowodzimy, że

$$(2) \quad f_n(x) = \frac{\tilde{p}_n x + \tilde{p}_{n-1}}{\tilde{q}_n x + \tilde{q}_{n-1}}.$$

Wobec tego, $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = \tilde{p}_n/\tilde{q}_n$. Z drugiej strony, wprost z definicji f_n wynika, że $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = [a_0; a_1; \dots; a_n] = p_n/q_n$. Zatem $\tilde{p}_n = p_n$ i $\tilde{q}_n = q_n$ dla każdego $n \geq 0$. By zakończyć dowód tożsamości (1), pozostaje zauważyć, że obie jej strony są równe $f_n(r)$. ♠

Poniższe fakty są prostymi konsekwencjami tożsamości (1) i jej dowodu:

1. Zachodzą równości $p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1}$ i $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$. W szczególności, jeśli $a_0 \geq 1$, to $p_n \geq 2$ dla każdego $n > 0$.
2. Mamy $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$.
3. Jeśli $a_0 > 0$, to wówczas $[a_n; a_{n-1}; \dots; a_0] = p_n/p_{n-1}$. W szczególności liczby $[a_0; a_1; \dots; a_n]$ i $[a_n; a_{n-1}; \dots; a_0]$ mają takie same liczniki.

Ponadto,

4. Jeśli $a_0 \geq 2$ i $a > 0$, to licznik liczby $[a_0; a_1; \dots; a_n; a; a_n; a_{n-1}; \dots; a_0]$ jest liczbą złożoną.



♣ Istotnie, z własności 3 wynika, że

$$[a; a_n; a_{n-1}; \dots; a_0] = a + 1/[a_n; a_{n-1}; \dots; a_0] = a + p_{n-1}/p_n.$$

Na mocy tożsamości (1) otrzymujemy równość

$$[a_0; a_1; \dots; a_n; a; a_n; a_{n-1}; \dots; a_0] = \frac{p_n(a + \frac{p_{n-1}}{p_n}) + p_{n-1}}{q_n(a + \frac{p_{n-1}}{p_n}) + q_{n-1}} = \frac{p_n(ap_n + 2p_{n-1})}{ap_nq_n + q_np_{n-1} + q_{n-1}p_n}.$$

Ponieważ liczby p_n i q_np_{n-1} są względnie pierwsze (własność 2!), więc liczby p_n i $ap_nq_n + q_np_{n-1} + q_{n-1}p_n$ też są względnie pierwsze. Wobec własności 2 mamy

$$\begin{aligned} ap_nq_n + q_np_{n-1} + q_{n-1}p_n &= ap_nq_n + 2q_np_{n-1} - (-1)^n = \\ &= q_n(ap_n + 2p_{n-1}) - (-1)^n, \end{aligned}$$

przeto liczby $ap_n + 2p_{n-1}$ i $ap_nq_n + q_np_{n-1} + q_{n-1}p_n$ także są względnie pierwsze. Zatem licznik rozważanego ułamka łańcuchowego jest równy $p_n(ap_n + 2p_{n-1})$. Ponieważ $a_0 \geq 2$, więc z własności 1 wynika, że liczby p_n i $ap_n + 2p_{n-1}$ są większe niż 1, a zatem licznik nasz jest liczbą złożoną. ♣

5. Jeśli $a_0 > 0$, to licznik liczby $[a_0; a_1; \dots; a_n; a_n; a_{n-1}; \dots; a_0]$ jest równy $p_n^2 + p_{n-1}^2$.

♣ W samej rzeczy, wobec własności 3, mamy $[a_n; a_{n-1}; \dots; a_0] = p_n/p_{n-1}$, a zatem tożsamość (1) daje

$$[a_0; a_1; \dots; a_n; a_n; a_{n-1}; \dots; a_0] = \frac{p_n \frac{p_n}{p_{n-1}} + p_{n-1}}{q_n \frac{p_n}{p_{n-1}} + q_{n-1}} = \frac{p_n^2 + p_{n-1}^2}{q_np_n + q_{n-1}p_{n-1}}.$$

Ponadto, wobec własności 2, otrzymujemy

$$\begin{aligned} p_{n-1}(q_np_n + q_{n-1}p_{n-1}) &= p_n(p_{n-1}q_n) + q_{n-1}p_{n-1}^2 = p_n(p_nq_{n-1} + (-1)^n) + q_{n-1}p_{n-1}^2 = \\ &= q_{n-1}(p_n^2 + p_{n-1}^2) + (-1)^np_n. \end{aligned}$$

Zatem każdy wspólny dzielnik d liczb $p_n^2 + p_{n-1}^2$ i $q_np_n + q_{n-1}p_{n-1}$ dzieli p_n i w konsekwencji również p_{n-1} , a że $\text{NWD}(p_n, p_{n-1}) = 1$, więc $d = 1$. ♣

Własność 5 niesie następującą pokusę: dla danej liczby pierwszej $p \equiv 1 \pmod{4}$ spróbujmy znaleźć taką liczbę naturalną i niepodzielną przez p , że $p/i = [a_0; \dots; a_n; a_n; \dots; a_0]$, a udowodnimy tym samym, że p jest sumą dwóch kwadratów. Na pierwszy rzut oka pomysł nie wygląda zbyt obiecująco. W szczególności, nie widać, jaką rolę miałby odgrywać warunek $p \equiv 1 \pmod{4}$. Niebawem jednakże wszystko stanie się jasne, a niejasny i zwariowany pomysł zmieni się w precyzyjny dowód.

Przede wszystkim, warto sobie zdać sprawę, że – na szczęście! – każdą liczbę wymierną można przedstawić w postaci ułamka łańcuchowego i to na dokładnie dwa różne sposoby. Ścisłej biorąc, każda liczba wymierna w może być jednoznacznie zapisana w postaci $[a_0; a_1; \dots; a_n]$ dla pewnych liczb całkowitych $a_0, a_1 > 0, \dots, a_{n-1} > 0$ i $a_n = 1$, gdzie $n > 0$. Przedstawienie takie będziemy nazywali *długim*. Drugim przedstawieniem liczby w jest $[a_0; a_1; \dots; a_{n-1} + 1]$, które będziemy dalej zwać *krótkim*. Jeśli w nie jest liczbą całkowitą, to $n > 1$ i krótkie przedstawienie w jest jedynym przedstawieniem, kończącym się liczbą większą niż 1. Uzasadnienie omawianych faktów nie jest trudne i opiera się na następującej, prostej obserwacji: ciąg liczb $a_0, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + 1$ jest równy ciągowi części całkowitych liczb b_k określonych w sposób rekurencyjny wzorami $b_0 = w, b_{k+1} = 1/\{b_k\}$, gdzie przez $\{x\}$ oznaczamy część ułamkową liczby x . Czytelnik z łatwością uzupełni szczegóły.

Weźmy teraz liczbę pierwszą p i rozpatrzmy zbiór $S_p = \{p/2, p/3, \dots, p/\frac{p-1}{2}\}$. Wszystkie liczby z tego zbioru mają liczniki równe p i są większe od 2. Jeśli więc $w \in S_p$ ma krótkie rozwinięcie na ułamek łańcuchowy, równe $[a_0; \dots; a_n]$, to mamy $a_0 \geq 2$ i $a_n \geq 2$. Zatem, liczba $\Phi(w) = [a_n; \dots; a_0]$ jest też większa od 2 i (wobec własności 3) ma licznik równy p . Tym samym $\Phi(w) \in S_p$ i oczywiście $[a_n; \dots; a_0]$ jest krótkim rozwinięciem liczby $\Phi(w)$ (nie może to być rozwinięcie długie, gdyż $a_0 \geq 2$). Zatem $\Phi(\Phi(w)) = w$, a więc funkcja $\Phi : S_p \rightarrow S_p$ jest inwolucją, tzn. $\Phi \circ \Phi = \text{Id}$. Teraz widać, jakie znaczenie ma warunek $p \equiv 1 \pmod{4}$. Otóż, jeśli $4 \mid (p-1)$, to zbiór S_p ma nieparzystą liczbę elementów. Czytelnik bez trudu uzasadni, że jeśli pewien zbiór S ma nieparzystą liczbę elementów i funkcja $f : S \rightarrow S$ jest inwolucją, to $f(s) = s$ dla pewnego $s \in S$. W naszym przypadku dla pewnego $1 < j \leq (p-1)/2$ mamy $\Phi(p/j) = p/j$.



Dla Czytelników mamy dwie propozycje:

Zadanie. Udowodnić Twierdzenie 1 rozważając długie rozwinięcia i zbiór $\{p/\frac{p+1}{2}, \dots, p/(p-2)\}$.

Problem. Łatwo zauważyć, że definicja funkcji Φ ma sens dla dowolnej liczby wymiernej większej od 2. Warto zbadać własności otrzymanej w ten sposób inwolucji.

Innymi słowy, krótkie rozwinięcie liczby $p/j = [a_0; \dots; a_n]$ jest symetryczne: $a_i = a_{n-i}$. Gdyby $n = 2k$, to mielibyśmy $p/j = [a_0; \dots; a_{k-1}; a_k; a_{k-1}, \dots; a_0]$. Jest to jednak niemożliwe: wobec własności 4 licznik ułamka łańcuchowego z prawej strony jest liczbą złożoną. Zatem n jest liczbą nieparzystą i $p/j = [a_0; \dots; a_k; a_k; \dots; a_0]$. Wobec własności 5 licznik p tego ułamka łańcuchowego jest sumą dwóch kwadratów. Twierdzenie 1 zostało więc dowiedzione.

Teraz łatwo już uzyskać następującą charakteryzację sum dwóch kwadratów:

Twierdzenie 2. Liczba naturalna n jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych wtedy i tylko wtedy, gdy każda liczba pierwsza postaci $4k + 3$ występuje w rozwinięciu liczby n na czynniki pierwsze w parzystej potęgde.

Dowód opiera się na dwóch obserwacjach. Po pierwsze, jeśli $n = a^2 + b^2$ i liczba pierwsza p postaci $4k + 3$ dzieli n , to $p|a$ i $p|b$. Po drugie, jeśli $n = a^2 + b^2$ i $m = c^2 + d^2$, to wówczas $mn = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$. Szczegóły tradycyjnie pozostawiamy Czytelnikowi.

Na zakończenie – uwaga natury ogólnej. W matematyce często się zdarza, że na pozór zupełnie nie związane z rozważanym problemem gałęzie są źródłem kluczowego pomysłu, który prowadzi do długo poszukiwanego rozwiązania. Powyższe rozważania stanowią miniaturowy przykład tej prawidłowości. Większość istotnych przełomów w matematyce została osiągnięta na tej właśnie drodze. Ważne jest więc, by Czytelnik poważnie zainteresowany jakąkolwiek dziedziną matematyki nie ograniczał się jedynie do problemów bezpośrednio z nią związanych, lecz wręcz przeciwnie, starał się zgłębiać przeróżne matematyczne teorie. Być może pewnego dnia zdoła je połączyć w swych rozważaniach i w nagrodę otrzyma wspaniałą, niespodziewany wynik, czego szczerze i gorąco życzę.



Zadania

Przygotował Paweł STRZELECKI

M 877. Dane są dwie trójki różnych od zera liczb rzeczywistych, (x, y, z) oraz (a, b, c) , o tej własności, że $a + b + c = x + y + z = 0$. Udowodnić, że

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{x^3 + y^3 + z^3} = \frac{abc}{xyz}.$$

Rozwiązanie na str. 4

M 878. Dane są dwie trójki liczb dodatnich, (x, y, z) oraz (a, b, c) . Wiadomo, że $\min(a, b, c) \leq \min(x, y, z)$ oraz $\max(x, y, z) \leq \max(a, b, c)$

Ponadto, $a + b + c = x + y + z$ i $abc = xyz$. Udowodnić, że zbiory $\{x, y, z\}$ i $\{a, b, c\}$ są równe.

Rozwiązanie na str. 7

M 879. Dziesięciu widzów ogląda w kinie nudny film. Wszyscy zajmują miejsca w tym samym rzędzie. Cierpliwość każdego z widzów wyczerpuje się, ale w losowej kolejności (każdą kolejność uznajemy za równoprawdopodobną). Widz zniecierpliwiony nudnym filmem od razu wychodzi z kina na świeże powietrze. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że któryś z widzów będzie zmuszony przeszkodzić innemu widzowi, żeby dostać się do wyjścia?

Rozwiązanie na str. 15

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 497. Jaka jest rzeczywista głębokość rzeki, jeśli przy określaniu „na oko”, w kierunku pionowym, jej głębokość wydaje się wynosić 2 m?

Rozwiązanie na str. 15

F 498. Jakie najmniejsze wymiary powinno mieć zwierciadło płaskie i jak je należy ustawić, żeby można się było w nim w całości obejrzeć?

Rozwiązanie na str. 10



Zagadnienie czterech barw i związane z nim problemy kolorowania map (czy też, jeśli ktoś woli bardziej fachową terminologię, grafów) to ciekawy temat, o którym pisaliśmy już w *Delcie*, m.in. w numerze 5/1996. Jak wiadomo, podany w 1976 roku przez Hakena i Appela dowód twierdzenia o czterech barwach należy do najbardziej kontrowersyjnych osiągnięć matematyki dwudziestowiecznej, ze względu na wykorzystanie w nim komputerów na niespotykaną wcześniej skalę. Dowód ten nadał nowy sens pytaniom o to, czym właściwie jest dowodzenie i czy każde rozumowanie matematyczne można – poświęciwszy na to odpowiednio dużo czasu – starannie prześledzić i sprawdzić.

Dla tych, którzy w twierdzenie o czterech barwach nie wierzą, mamy dobrą wiadomość. Otóż przed dwoma laty pojawił się nowy dowód tego wyniku, również wykorzystujący komputer, ale w sposób istotnie mniej skomplikowany od tego, co robili Haken i Appel. Jego autorami są panowie: Robertson, Sanders, Seymour i Thomas z Atlanty. Jak piszą we wstępie do swojej pracy, zamierzali – głównie dla spokoju własnych sumień – sprawdzić dowód Appela i Hakena, lecz szybko ten zamiar porzucili, stwierdzając, że znacznie łatwiej będzie znaleźć nowy, niezależny dowód.

Kto szuka, ten znajdzie: praca wspomnianych czterech autorów, która otwiera tom 70 *Journal of Combinatorial Theory* z 1997 roku, liczy wraz z ilustracjami 43 strony tekstu, napisanego stosunkowo elementarnym językiem. Dwa spośród licznych lematów o kombinatorycznym charakterze zostały dowiedzione z pomocą komputera, lecz, po pierwsze, setka godzin pracy dużej maszyny, której potrzebowali Appel i Haken, została zastąpiona mniej więcej trzema godzinami pracy przeciętnej stacji roboczej, a po drugie, skrócenie czasu obliczeń nie jest jedynie wynikiem postępu w szybkości procesorów. Szczegółowe wydruki z dowodami wspomnianych dwóch lematów zajęłyby mniej więcej jeden rocznik *Delta*, można więc sobie wyobrazić, że odpowiednio zacięty człowiek zdołałby je samodzielnie przeczytać i sprawdzić. W przypadku dowodu Hakena i Appela taka operacja byłaby raczej nie do pomyślenia.

Oba komputerowe dowody twierdzenia o czterech barwach zawierają w istocie pewien algorytm kolorowania każdej mapy. Dowód Hakena i Appela prowadzi do algorytmu kolorowania, który działa w czasie proporcjonalnym do czwartej potęgi liczby państw na mapie. Natomiast dowód Robertsona, Sandersa, Seymoura i Thomasa daje algorytm, który mapę złożoną z p państw pozwala pokolorować w czasie rzędu p^2 , a więc nieporównanie szybciej.

Między starym i nowym dowodem jest jeszcze jedna, dość istotna różnica. Nowy został szybko sprawdzony przez recenzentów, którzy zapędzili swych doktorantów do niezależnego napisania niezbędnych programów, sprawdzających poprawność wspomnianych dwóch lematów – z pozytywnym skutkiem. Ponadto, każdy zainteresowany może poznać wszystkie szczegóły dowodu: wystarczy sięgnąć po *Journal of Combinatorial Theory*, a wszystkie programy i dodatkowe informacje ściągnąć z serwera <ftp.math.gatech.edu>, z dostępnego dla publiczności katalogu <pub/users/thomas/four>.

Dla tych, którzy sądzą, że z kolorowaniem map wiążą się jedynie rozumowania zawile, udowodnimy w dość prosty sposób, iż każdą mapę na płaszczyźnie można dobrze pomalować pięcioma barwami. Słowo *dobrze* tu i dalej oznacza: w taki sposób, by każde dwa państwa, które mają wspólny odcinek granicy, były różnego koloru. Nie będziemy rozważać map, tylko grafy: państwa będą wierzchołkami grafu, a dwa wierzchołki łączymy krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im państwa graniczą ze sobą. Założymy oczywiście, że graf jest spłaszczałny, tzn. można go narysować na kartce papieru tak, by żadne dwie krawędzie nie przecinały się. Graf jest pokolorowany dobrze, gdy każda krawędź ma końce różnych kolorów.



Rozwiązanie zadania M 877.

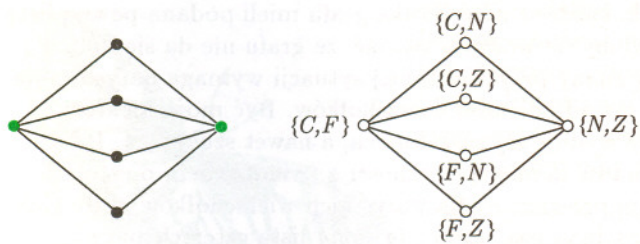
Z założenia $a + b + c = 0$ mamy

$(a + b)^3 = (-c)^3$, a dalej

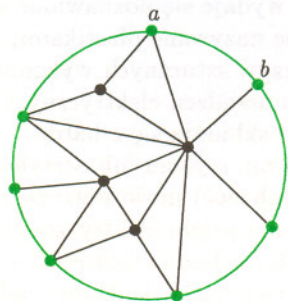
$$a^3 + b^3 + c^3 = -3ab(a + b) = 3abc.$$

Podobnie $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

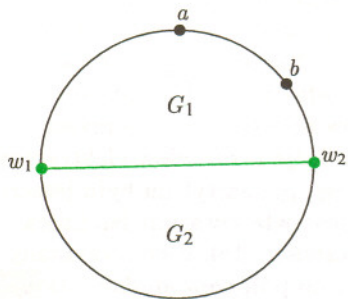
Dzieląc otrzymane równości stronami, otrzymujemy tezę zadania.



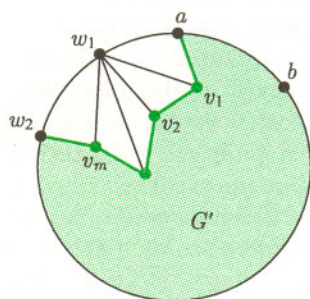
Rys. 1. Tzw. graf dwudzielnny $K_{2,4}$ można dobrze pokolorować dwiema barwami (lewa część rysunku). Jednak, gdy dla każdego wierzchołka podamy z góry listę dwóch kolorów, to dobre kolorowanie może nie istnieć (prawa część rysunku): w podanym przykładzie każda para barw, które można wybrać do pomalowania dwóch górnych wierzchołków, stanowi zarazem listę barw dla jednego z dolnych wierzchołków, co jest przyczyną nieuchronnego konfliktu kolorów.



Rys. 2. Kolorowa linia to obwód grafu G . Wierzchołki oznaczone czarnymi kropkami znajdują się we wnętrzu grafu. Krawędzie dzielą wnętrze grafu na trójkąty.



Rys. 3. Krawędź w_1w_2 to cięciwa.



Rys. 4

Podany niżej dowód indukcyjny znalazł pięć lat temu Carsten Thomassen. Żeby ułatwić sobie zadanie, wzmocnimy nieco tezę. Przypuścimy, po pierwsze, że dla każdego wierzchołka w grafu G podana jest pewna lista L_w różnych barw, których można użyć do kolorowania tego wierzchołka. Dla różnych wierzchołków listy mogą być różne, co, jak pokazuje przykład na rysunku 1, wcale nie ułatwia kolorowania.

Po drugie, założymy, że dla każdego wierzchołka w na obwodzie grafu (proszę spojrzeć na rysunek 2) lista L_w zawiera trzy kolory, a dla każdego wierzchołka w we wnętrzu grafu – pięć kolorów. Po trzecie, założymy, że wybrane dwa sąsiednie wierzchołki a i b , które leżą na obwodzie grafu, już zostały pokolorowane odpowiednio kolorami A i B , przy czym $A \neq B$. Po

czwarte wreszcie, założymy bez zmniejszenia ogólności, że krawędzie dzielą wnętrze grafu na „trójkąty”. (Gdyby tak nie było, zawsze można dodać nowe krawędzie, pokolorować tak uzyskany graf, a potem dodane krawędzie wytrzeć – stary graf też będzie dobrze pokolorowany.)

Przez indukcję względem liczby wierzchołków udowodnimy, że wierzchołki każdego grafu G , który spełnia cztery powyższe założenia, można dobrze pokolorować, kolorując każdy wierzchołek w pewnym kolorem z jego listy L_w . Początek jest banalny: gdy graf ma tylko trzy wierzchołki, teza jest oczywista. Załóżmy więc, że teza zachodzi dla każdego grafu, który ma nie więcej niż n wierzchołków. Pokażemy, że jeśli G ma $n + 1$ wierzchołków, to twierdzenie też zachodzi.

Rozważmy dwa przypadki. Załóżmy najpierw, że graf G ma cięciwę, to znaczy krawędź, która łączy dwa niesąsiednie wierzchołki w_1 i w_2 położone na obwodzie grafu (proszę spojrzeć na rysunek 3).

Cięciwa dzieli graf G na dwie części, G_1 i G_2 ; każda z tych części ma nie więcej niż n wierzchołków. Przyjmijmy, że wierzchołki a i b leżą na obwodzie części G_1 (być może któryś z nich pokrywa się z w_1 lub w_2 – w niczym to nam nie przeszkadza). Korzystając z założenia indukcyjnego, kolorujemy graf G_1 . Wierzchołki w_1 i w_2 , które są sąsiednimi wierzchołkami obwodu grafu G_2 , zostały pokolorowane różnymi kolorami. Możemy więc powtórnie skorzystać z założenia indukcyjnego i pokolorować graf G_2 . To kończy dowód kroku indukcyjnego w przypadku, gdy graf G ma cięciwę.

Założmy teraz, że G nie ma cięciwy. Niech w_1 będzie wierzchołkiem, który na obwodzie grafu G sąsiaduje z a (i jest różny od b , patrz rysunek 4), w_2 zaś – różnym od a sąsiadem w_1 na obwodzie grafu. Końce krawędzi wychodzących z wierzchołka w_1 oznaczmy przez v_1, v_2, \dots, v_m . Wierzchołki a i w_2 połączone są łamaną $av_1v_2 \dots v_mw_2$, na rysunku zaznaczoną kolorem.

Na liście L_{w_1} kolorów dopuszczalnych dla wierzchołka w_1 mamy trzy barwy. Od A , czyli od danej barwy wierzchołka a , różnią się przynajmniej dwie z nich. Dla ustalenia uwagi oznaczmy je C i D . Wykreślmy C i D z list kolorów wierzchołków v_1, v_2, \dots, v_m . Nowa lista kolorów każdego z tych wierzchołków będzie zawierała (przynajmniej) trzy pozycje.

Niech G' będzie grafem, który powstaje z G przez usunięcie wierzchołka w_1 i wszystkich wychodzących zeń krawędzi. Ponieważ G' ma n wierzchołków, więc na mocy założenia indukcyjnego możemy dobrze pokolorować G' (używając do kolorowania v_1, v_2, \dots, v_m kolorów z nowych, mniejszych list). Żeby pokolorować cały graf G , trzeba jeszcze tylko wybrać kolor dla wierzchołka w_1 . Nie jest to jednak kłopot, bowiem przynajmniej jeden z kolorów C i D jest różny od koloru, którym został pomalowany wierzchołek w_2 . To spostrzeżenie kończy dowód w drugim przypadku.

A co byliby, gdybyśmy dla każdego wierzchołka grafu mieli podaną pewną listę czterech barw? Otóż, mogliby się wówczas okazać, że grafu nie da się dobrze pokolorować. Najmniejszy znany przykład takiej sytuacji wymaga narysowania zawilego grafu, który ma ponad pół setki wierzchołków. Być może niektórym Czytelnikom ta informacja wydaje się zaskakująca, a nawet szokująca. Proszę jednak zauważyć, że nie ma tu żadnej sprzeczności z twierdzeniem o czterech barwach: zakładamy w nim przecież, iż dla wszystkich wierzchołków grafu (jak kto woli, państw na mapie) dana jest *jedna i ta sama* lista czterech barw.

Uroda matematyki polega zarówno na tego typu zaskakujących odmiennościach, do których prowadzą pozornie nieznaczące zmiany założeń, jak i na tym, że wolno mieć nadzieję, iż ktoś kiedyś znajdzie równie niedługi, elementarny, prosty i elegancki dowód twierdzenia już nie o pięciu, lecz o czterech barwach.

Jak plastiki przewodzą prąd elektryczny?

Stanisław
BEDNAREK

Na pierwszy rzut oka pytanie postawione w tytule wydaje się pozbawione sensu. Wiadomo przecież, że tworzywa sztuczne, potocznie nazywane plastikami, nie przewodzą prądu elektrycznego. Dlatego z tworzyw sztucznych wykonuje się izolacje rozmaitych przewodów i obudowy wielu urządzeń elektrycznych. Tworzywa sztuczne mają budowę polimerową, czyli składają się z bardzo wielu cząsteczek określonego związku chemicznego, np. etylenu lub acetylenu, połączonych w łańcuchy lub sieci. Jeden łańcuch (lub sieć) może zawierać nawet kilka milionów cząsteczek. Przyczyną nieprzewodzenia prądu elektrycznego przez tworzywa sztuczne jest brak w nich mogących swobodnie poruszać się cząstek obdarzonych ładunkiem elektrycznym, nazywanych nośnikami prądu elektrycznego. Rolę tych nośników mogą spełniać elektrony, jak to ma miejsce w metalach, lub elektrony i jony występujące w elektrolitach i rozrzedzonych gazach. Okazuje się jednak, że twierdzenie *wszystkie tworzywa sztuczne nie przewodzą prądu elektrycznego* jest fałszywe.

Przed prawie trzydziestu laty Hideiki Shirakawa prowadził w Politechnice Tokijskiej badania nad otrzymywaniem jednego z polimerów – poliacytlenu. Zmęczony zapewne długotrwałą pracą popełnił błąd. Pomylił naczynia z odczynnikami i w ten sposób w mieszaninie ulegającej reakcji znalazło się wielokrotnie więcej katalizatora, niż być powinno. Otrzymany polimer nie wyglądał zbyt atrakcyjnie, ale jego przewodność właściwa była około stu miliardów razy większa niż przewodność właściwa polietylenu – tworzywa sztucznego, z którego najczęściej wytwarza się izolacje przewodów elektrycznych. Mimo tego przewodność właściwa tego niezwykłego poliacytlenu była jeszcze ponad sto miliardów razy mniejsza niż przewodność właściwa miedzi, która jest jednym z najlepszych przewodników elektryczności. Tak więc otrzymany przez Shirakawę materiał należało zaliczyć raczej do półprzewodników. Dopiero dodanie atomów jodu do tego poliacytlenu spowodowało, że jego przewodność właściwa osiągnęła wartość około sześciu razy mniejszą niż przewodność miedzi. Obecnie znanych jest ponad dwadzieścia przewodzących polimerów.

Ze względu na swoje dobre przewodnictwo elektryczne, zbliżone do przewodnictwa metali, polimery te nazywane są czasem syntetycznymi metalami. Przewodzenie prądu elektrycznego w tych materiałach zachodzi dzięki transportowi swobodnych ładunków elektrycznych wzdłuż łańcucha polimeru. Ładunek taki w postaci elektronu może zostać uwolniony z jednego z podwójnych sprzężonych wiązań chemicznych występujących w łańcuchu. Przyłożenie pola elektrycznego do polimeru powoduje uporządkowany ruch tych ładunków, czyli przepływ prądu elektrycznego. Źródłem swobodnych ładunków elektrycznych są też wprowadzone do polimeru atomy niektórych pierwiastków, np. jodu lub sodu. Atomy sodu mogą oddawać elektrony, które stają się swobodne i uczestniczą w przewodzeniu prądu. Z kolei atomy jodu przyłączają elektrony, a pozostałe po elektronach obszary zachowują się jak





ładunki dodatnie, zwane dziurami, i również mogą się przemieszczać. Wprowadzanie do polimerów atomów oddających lub przyłączających elektrony jest niezwykle skutecznym sposobem zwiększania ich przewodności elektrycznej i pozwoliło uzyskać przewodności właściwe polimerów zbliżone do tych, które wykazują metale. Warto dodać, że sposób ten stosowany jest również w przypadku półprzewodników, takich jak np. german czy krzem.

Przewodzące polimery wzbudzają ostatnio ogromne zainteresowanie fizyków i inżynierów ze względu na ich niezwykle właściwości przydatne do zastosowań w różnych dziedzinach techniki. Jedną z tych właściwości jest połączenie charakterystycznej dla tworzyw sztucznych dużej elastyczności, a często i przezroczystości, z dobrą przewodnością elektryczną zmienną dla metali. Pozwala to na wytwarzanie niełamiwych przewodów, membran i przezroczystych elektrod stosowanych w przenośnych komputerach i świecących wskaźnikach. Dzięki dobrej przewodności elektrycznej przewodzące polimery używane są do produkcji elastycznych warstw odprowadzających ładunki statyczne, gromadzące się na przedmiotach wykonanych z innych tworzyw sztucznych i powodujących nieprzyjemne, a czasem nawet niebezpieczne wyładowania elektryczne. Dobra przewodność powoduje również, że polimery te silnie pochłaniają fale elektromagnetyczne, szczególnie o wysokich częstotliwościach, i dlatego są one stosowane do produkcji pokryć dla niewykrywalnych przez radary samolotów.

Obiecującą właściwością przewodzących polimerów jest możliwość łatwej zmiany ich przewodności elektrycznej za pomocą różnych czynników, np. oświetlenia, temperatury, ilości i rodzaju domieszek, a nawet atomów gazów osadzonych na ich powierzchni. Polimery, których przewodność elektryczna zmienia się pod wpływem oświetlenia – polimery fotoprzewodzące, są powszechnie stosowane jako fotoreceptory w kserografach. Na uprzednio naelektryzowany, pokryty takim polimerem walec rzutowany jest przez obiektyw kopiowany obraz. Miejsca oświetlone zwiększają swoją przewodność elektryczną i oddają ładunek. W wyniku tego na walcu tworzy się rozkład ładunków elektrycznych odpowiadający kopiowanemu obrazowi, który za pomocą specjalnego proszku – tonera – przenoszony jest na papier i utrwalany przez ogrzewanie. W kserografach przewodzące polimery zastąpiły używany dawniej mało skuteczny selen, którego pyłki były szkodliwe dla zdrowia. Zależność przewodności elektrycznej od temperatury umożliwia wykorzystanie przewodzących polimerów do budowy termometrów.

Cienkie lub porowate warstwy niektórych polimerów przewodzących mogą zmieniać swoją przewodność elektryczną pod wpływem atomów osiadających na ich powierzchni. Jest to spowodowane uwalnianiem lub wiązaniem nośników prądu przez te atomy. Takie warstwy stosowane są jako czujniki wykrywające różne gazy. Tego typu czujniki sprzężone z komputerem, wyposażonym w odpowiednie oprogramowanie, potrafią wykrywać minimalne ilości niebezpiecznych gazów, a nawet rozróżniać zapachy. Dlatego też nazywane są żartobliwie sztucznymi nosami. Zbudowane zostały również akumulatory, ogniwa słoneczne i tranzystory, w których zastosowano przewodzące polimery. Duże nadzieje wiąże się z budową diod wysyłających światło, w których element świecący stanowi warstwa przewodzącego polimeru umieszczona między elektrodami połączonymi ze źródłem zasilania. Matryce złożone z milionów takich diod mogą w niedalekiej przyszłości stanowić naprawdę płaskie i elastyczne ekrany odbiorników telewizyjnych i komputerów. Ekrany te z łatwością można by zawieszać na ścianie, a po użyciu bezpiecznie... zwinąć w rolkę.

Mówiąc o tych wszystkich niezwykłych zastosowaniach przewodzących polimerów trudno nie ulec wrażeniu, że ich kariera zaczęła się przypadkowo od błędu popełnionego podczas syntezy poliacytenu. Tak się jednak zdarza, że przypadek nie sprzyja beczynnym. Gdyby nie intensywne badania Shirakawy, błąd zapewne nie zostałby popełniony i cała historia przewodzących polimerów wyglądałaby inaczej albo jeszcze by jej nie było.



Rozwiązanie zadania M 878.

Z założeń $a + b + c = x + y + z$ i $abc = xyz$ wynika, że

$$\begin{aligned} abc(ab + bc + ca - xy - yz - zx) &= \\ &= bc(x - a)(y - a)(z - a) = \\ &= ca(x - b)(y - b)(z - b) = \\ &= ab(x - c)(y - c)(z - c) \end{aligned}$$

(drugą i trzecią równość otrzymujemy, dokonując cyklicznych podstawień). Gdyby żadne z ostatnich trzech wyrażeń nie zniknęło, to z nierówności danych w zadaniu wynikałoby, że jedno z nich ma inny znak niż pozostałe dwa. Tak być nie może, zatem każde z rozpatrywanych wyrażeń zawiera czynnik równy zero, a to, wraz z dowolną z założonych równości, oznacza, że zbiory $\{x, y, z\}$ i $\{a, b, c\}$ są równe.



Wszystko można skomplikować

Tu będziemy komplikowali twierdzenie Pitagorasa. Za usprawiedliwienie niech nam posłuży fakt, że przed nami tę komplikację wykonał nie byle kto, bo Lazare Nicolas Marguerite Carnot, wybitny polityk, administrator i dowódca wojskowy Francji sprzed dwustu lat – oczywiście również wybitny matematyk, mechanik i inżynier. Jest on na dodatek związany z Warszawą, gdyż spędził tu kilka lat, wygnany z Francji po restauracji Burbonów w 1816 roku.

Zanim podamy twierdzenie Carnota w pełnej ogólności, rozważmy jego szczególny przypadek. Weźmy mianowicie dowolny trójkąt ABC i dowolny punkt P (na rysunku 1 leży on we wnętrzu trójkąta, ale to nie ma żadnego znaczenia) i zrzućmy go prostokątnie na boki trójkąta – otrzymamy odpowiednio punkty A_1 , B_1 i C_1 . Okazuje się, że

$$(1) \quad A_1B^2 - BC_1^2 + C_1A^2 - AB_1^2 + B_1C^2 - CA_1^2 = 0.$$

Faktycznie, stosując twierdzenie Pitagorasa do wszystkich sześciu trójkątów prostokątnych, które są na rysunku, otrzymujemy

$$PC^2 - CA_1^2 = PA_1^2 = PB^2 - A_1B^2,$$

$$PB^2 - BC_1^2 = PC_1^2 = PA^2 - C_1A^2,$$

$$PA^2 - AB_1^2 = PB_1^2 = PC^2 - B_1C^2.$$

Sumując prawe strony i lewe strony tych równości oraz przenosząc wszystko na lewą stronę, otrzymujemy (1).

Zauważmy też, że równość (1), w której nie występuje punkt P , wystarcza do tego, by taki punkt istniał. Rzeczywiście. Oznaczmy przez P punkt przecięcia prostopadłych wystawionych w punktach A_1 i B_1 i opuśćmy prostopadłą z P na AB . Otrzymamy tam punkt C'_1 również spełniający (na mocy tego, co już udowodniliśmy) równość (1). Zestawiając obie równości razem, otrzymujemy

$$-BC_1^2 + C_1A^2 = -BC_1'^2 + C_1'A^2, \quad \text{czyli} \quad C_1A^2 - C_1'A^2 = BC_1^2 - BC_1'^2.$$

Wyrażenia te muszą być oba równe zero, czyli musi być $C_1 = C'_1$, gdyż w przeciwnym razie miałyby – mimo równości – przeciwne znaki.

Sformułujmy teraz twierdzenie Carnota:

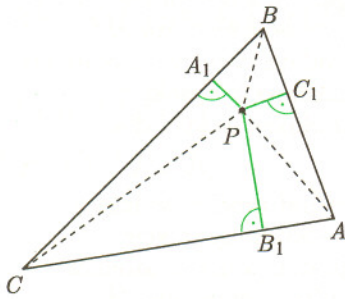
Z dowolnych punktów A_1 , B_1 i C_1 prowadzimy proste prostopadłe do prostych BC , CA i AB odpowiednio, gdzie punkty A , B i C są wierzchołkami pewnego trójkąta. Te prostopadłe przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy

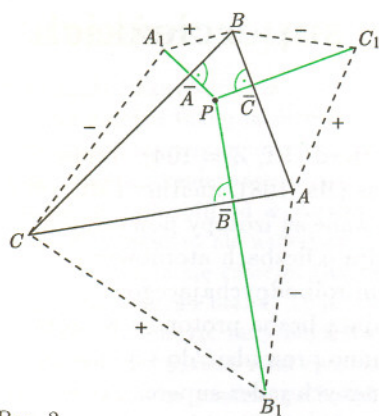
$$A_1B^2 - BC_1^2 + C_1A^2 - AB_1^2 + B_1C^2 - CA_1^2 = 0,$$

czyli gdy jest spełniona równość (1).

Jak dotąd, udowodniliśmy to twierdzenie w przypadku, gdy punkty A_1 , B_1 i C_1 leżą odpowiednio na prostych zawierających boki trójkąta.

Rys. 1





Rys. 2

Wykorzystamy to w dowodzie ogólnego przypadku. Niech prostopadłe, wystawione w punktach A_1 , B_1 i C_1 , przecinają się w punkcie P . Oznaczmy przecięcia tych prostych z prostymi zawierającymi boki trójkąta odpowiednio przez \bar{A} , \bar{B} i \bar{C} (rys. 2). Dodając i odejmując liczby $A_1\bar{A}^2$, $B_1\bar{B}^2$ i $C_1\bar{C}^2$, otrzymujemy

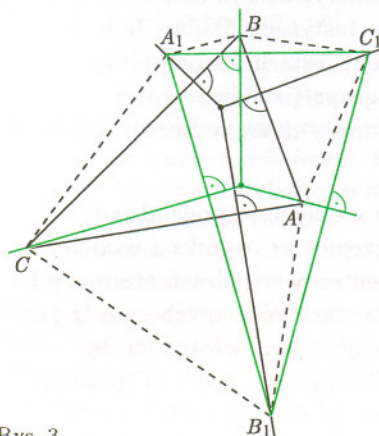
$$\begin{aligned} A_1B^2 - BC_1^2 + C_1A^2 - AB_1^2 + B_1C^2 - CA_1^2 &= \\ &= (A_1B^2 - A_1\bar{A}^2) - (BC_1^2 - C_1\bar{C}^2) + (C_1A^2 - C_1\bar{C}^2) - \\ &\quad - (AB_1^2 - B_1\bar{B}^2) + (B_1C^2 - B_1\bar{B}^2) - (CA_1^2 - A_1\bar{A}^2) = \\ &= \bar{A}B^2 - B\bar{C}^2 + \bar{C}A^2 - A\bar{B}^2 + \bar{B}C^2 - C\bar{A}^2 = 0. \end{aligned}$$

Ostatnia z równości to właśnie ten szczególny przypadek, udowodniony na poprzedniej stronie. Dowód w drugą stronę przebiega też tak, jak tam.

Tak więc rzeczywiście w twierdzeniu Carnota nie ma niczego więcej, niż jest w twierdzeniu Pitagorasa – jak jednak jest to pięknie uogólnione. Szczególnie polecam wykonanie sobie kilku rysunków, tak by punkt przecięcia prostopadłych (bo od niego trzeba zacząć rysowanie!) leżał z różnych stron trójkąta.

A teraz twierdzenie, które można udowodnić zupełnie „po grecku”, to znaczy bez żadnego rozumowania, a jedynie poprzez umiejętne spojrzenie na problem.

Proste prostopadłe poprowadzone z tworzących trójkąt punktów A_1 , B_1 i C_1 do prostych zawierających boki trójkąta ABC przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy proste prostopadłe poprowadzone z punktów A , B i C do prostych zawierających boki trójkąta $A_1B_1C_1$ przecinają się w jednym punkcie.



Rys. 3

Co trzeba zobaczyć? Oczywiście to (rys. 3), że w obu przypadkach wzór (11) będzie wyglądał tak samo.

A swoją drogą, gdyby nie wiedzieć, że to zwykle twierdzenia Pitagorasa, to można by się takich twierdzeń, jak wypisane wyżej, przestraszyć.

Inne liczby

Jeżeli weźmiemy pod uwagę tylko początkowy odcinek liczb naturalnych $0, 1, 2, \dots, m-1$ i będziemy jego elementy dodawać i mnożyć (odejmowanie i dzielenie wyraża się, rzecz jasna, przez dodawanie i mnożenie) w ten sposób, że wynikiem działania będzie reszta z podzielonego przez m wyniku zwykłego działania, to otrzymamy coś zupełnie innego od zwykłych liczb. Takie coś oznacza się symbolem \mathbf{Z}_m . Gdy m jest liczbą pierwszą, to działania w \mathbf{Z}_m mają wszystkie podstawowe własności algebraiczne takie same, jak np. liczby rzeczywiste czy wymierne.

Można to, oczywiście, sprawdzić, ale tu zrobimy inaczej. Obejrzymy różne \mathbf{Z}_p (niech litera p oznacza, że interesują nas liczby pierwsze) i na przykładach przekonamy się, że wzory na rozwiązywanie równań kwadratowych są w \mathbf{Z}_p takie same, jak dla liczb rzeczywistych – działa wzór

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{gdzie} \quad \Delta = b^2 - 4ac,$$

opisujący pierwiastki równania $ax^2 + bx + c = 0$, choć wyniki liczbowe są zupełnie inne.

Zobaczmy to na przykładzie równania

$$x^2 + x + 1 = 0,$$

które, jak wiadomo, nie ma pierwiastków rzeczywistych, a to dlatego, że

$$\Delta = 1 - 4 = -3$$

nie jest wśród liczb rzeczywistych kwadratem żadnej liczby.

Zauważmy jednak, że ta sama Δ w \mathbf{Z}_3 jest równa 0 i, rzeczywiście, równanie ma jeden pierwiastek

$$\frac{-1 \pm 0}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1.$$

W \mathbf{Z}_5 znowu pierwiastków nie ma – znów dobrze, bo jedyne kwadraty wśród tych liczb to 0, 1 i 4, a $\Delta = 2$.

W \mathbf{Z}_7 z kolei są dwa pierwiastki, też się zgadza, bo $\Delta = 4 = 2^2 = 5^2$ i pierwiastkami są

$$\frac{-1+2}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2} = 4 \quad \text{i} \quad \frac{-1+5}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$$

(czterech pierwiastków nie ma, bo przecież $-2 = 5$).

Stabilność pierwiastków superciężkich

Robert SMOLAŃCZUK



Znane obecnie pierwiastki superciężkie to: rutherford (Rf, $Z = 104$), dubna (Db, 105), seaborg (Sg, 106), bohr (Bh, 107), has (Hs, 108), meitner (Mt, 109) oraz 110, 111 i 112. Jądrami superciężkimi nazywane są izotopy powyższych pierwiastków, jak również jeszcze nieodkryte jądra o liczbach atomowych $Z > 112$. Jądra superciężkie cechują się wzrostem roli odpychającego oddziaływania kulombowskiego wraz ze wzrastającą liczbą protonów w jądrze. Wydawałoby się więc, że oddziaływanie to powinno prowadzić do szybkiego rozpadu takich jąder. Najcięższe z dotychczas znanych jąder superciężkich wykazują jednak zaskakująco dużą stabilność (względnie długie czasy życia). Zwiększona stabilność tych jąder została przewidziana przez fizyków polskich, a następnie potwierdzona w rosyjsko-amerykańskim eksperymencie przeprowadzonym w roku 1993 w Zjednoczonym Instytucie Badań Jądrowych w Dubnej w Rosji. Niedługo potem, w Instytucie Ciężkich Jonów (GSI) w Darmstadcie w Niemczech, międzynarodowa grupa fizyków również potwierdziła przewidywania teorii, dokonując syntezy nowych pierwiastków 110, 111 i 112.

Zwiększona stabilność tych jąder, szczególnie ze względu na podział jądra na porównywalne fragmenty (samorzutne rozszczepienie), wynika z istnienia kwantowych efektów powłokowych. Protony i neutrony w jądrach atomowych wypełniają dostępne dyskretne poziomy energetyczne. W znanych nam lżejszych jądrach o kształtach kulistych poziomy te grupują się w powłoki jądrowe oddzielone dużymi przerwami energetycznymi. Zewnętrzne powłoki (powłoki zawierające poziomy o najwyższych energiach) zapełnione są całkowicie lub prawie całkowicie przez nukleony. Taka konfiguracja nukleonów tworzących jądro jest bardziej stabilna ze względu na samorzutne rozszczepienie oraz emisję jądra atomu helu ${}^4\text{He}_2$, czyli rozpad α . Zaskakujący jest jednak fakt, że powłoki te pojawiają się także w jądrach superciężkich, które według przewidywań teoretycznych powinny być zdeformowane.

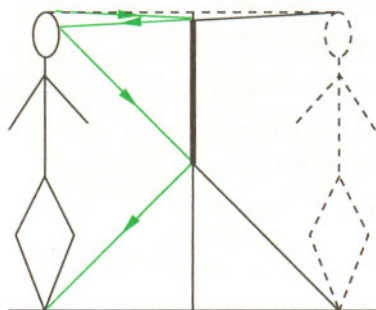
Jeśli teoretycznie zwiększamy deformację jądra, to uzyskujemy zmniejszanie się przerw energetycznych pomiędzy powłokami, a w konsekwencji zmniejszanie stabilności jąder. Jednak dopuszczenie w tych rozważaniach bogatej klasy kształtów powierzchni jądra prowadzi do powstania znacznych przerw energetycznych w jednocząstkowych widmach poziomów energetycznych w przypadku zdeformowanych jąder superciężkich o liczbie protonów $Z \approx 108$ i neutronów $N \approx 162$. Efekt ten występuje dla kształtów osiowo symetrycznych opisywanych przez parzyste wielomiany ósmego stopnia kąta pomiędzy osią symetrii jądra a promieniem wodzącym punktu na jego powierzchni. Obliczone czasy życia tych jąder wzrastają nawet o kilka rzędów wielkości w stosunku do czasów życia zdeformowanych jąder o Z i N znacznie różniących się od 108 i 162 odpowiednio. Przedstawione powyżej zachowanie się powierzchni zdeformowanych jąder superciężkich prowadzi do teoretycznych czasów życia potwierdzanych doświadczalnie. Jednak jeszcze wciąż nie ma bezpośredniego dowodu doświadczalnego na to, czy jądra te są zdeformowane czy nie.

Zsyntetyzowane w rosyjsko-amerykańskim eksperymencie jądra ${}^{265}106_{159}$ i ${}^{266}106_{160}$ rozpadły się po czasie rzędu 10 sekund, a zsyntetyzowane w GSI izotopy ${}^{269}110_{159}$, ${}^{271}110_{161}$, ${}^{272}111_{161}$ i ${}^{277}112_{165}$ – po czasie rzędu 0,1–1 ms. Silniejsze efekty powłokowe, a w konsekwencji znacznie dłuższe czasy życia, przewidywane są dla dotychczas nie obserwowanych kulistych jąder superciężkich zbudowanych z większej liczby neutronów niż zdeformowane jądra superciężkie. Przewidywana stabilność kulistych jąder superciężkich została przedyskutowana w artykule pt. „Gdzie kończy się Tablica Mendelejewa?”, *Delta* 3/1998.



Rozwiązanie zadania F 498.

Zwierciadło powinno mieć wysokość równą co najmniej połowie naszego wzrostu. Dolna krawędź lustra powinna znajdować się nad ziemią na wysokości równej połowie odległości oczu od stóp, czyli prawie połowie naszego wzrostu.



Aktualności (nie tylko) fizyczne

Czy można zawrócić czas? Nasze codzienne doświadczenie nie potwierdza takiej możliwości. Szklanki tłuką się, zdjęcia zółkną, znajome twarze zacierają się w pamięci. Choć zdefiniowanie pojęcia czasu jest otwartym problemem filozofii od jej zarania, a fizyki od co najmniej zeszłego wieku, to nie natrafiamy na żadną trudność w posługiwaniu się czasem. Oczywiście, jeżeli nie liczyć jego nieustannego braku. Tę jedyną trudność łatwo usunąć, przyjmując rady mądrych mnichów: „opuszć to, co zbędne, a będziesz miał czas na wszystko”. Niestety, trafnie zauważył pewien wschodni mędrzec zapytany o to, dlaczego tak trudno osiągnąć nam skupienie: „bo ja, jak siedzę, to siedzę, jak stoję, to stoję, jak idę, to idę, a wy, jak siedzicie, to już stoicie, jak stoicie, to już idziecie, jak idziecie, to już jesteście u celu”.

Za radą mistyków skupmy się na naszym temacie. To, że łatwo nam rozpoznać upływ czasu, najlepiej widać przy oglądaniu filmu odtwarzanego wstecz. Najprostsze sytuacje zaczynają nas śmieszyć. Ludyczność takiej rozrywki świadczy o głębokiej sprzeczności oglądanego urywka z tym, co obserwujemy w naturze. Ale czy tak jest zawsze? Ciężkie wahadło na długim sznurze, zderzenie metalowych kulek na marmurowym blacie, ruch sztucznego satelity na tle rozgwieżdżonego nieba to tylko kilka przykładów tzw. procesów (prawie) odwracalnych. Wszystkie charakteryzują się dużym stopniem izolacji od otoczenia, a w konsekwencji trudnością w rozpoznaniu, czy filmu nie puszczono wstecz. Jeżeli zaniedbamy opory ruchu, to izolowane ciało ma tylko jedno wyjście. Musi słuchać sir Izaaka Newtona, a w jego mechanice (w tych przypadkach) nie ma różnicy, czy czas biegnie tak czy siak. Dopiero fizyka statystyczna tłumaczy to, co każdy widzi. Układ ciał częściej znajduje się w stanie, który można zrealizować na wiele sposobów (jak rozbitą szklankę), niż w jakimś szczególnym stanie (jak cała szklanka). Świat rozwija się, dążąc do jak największego chaosu. To właśnie jest podstawą naszego poczucia czasu.

Jeżeli jednak uwolnimy się od układu wielu ciał i zjedziemy na poziom oddziaływań elementarnych, to znowu kierunek upływu czasu wydaje się, a raczej wydawał się nie mieć znaczenia. Podobnie, prawa fizyki wydawały się niezmiennicze względem odbicia zwierciadlanego, czyli parzystości (P jak *parity*), czy też zmiany ładunków na przeciwne, czyli parzystości ładunkowej (C jak *charge*, czyli ładunek) zamieniającej materię na antimaterię. Piszę „wydawały się”, ponieważ stwierdzono, że tzw. oddziaływania słabe nie zachowują parzystości (P). Pozwala to na odróżnienie za ich pomocą układu lewoskrętnego od prawoskrętnego, ale pod warunkiem, że wiemy, czy mamy do czynienia z materią, czy z antimaterią. Parzystość kombinowana CP wydawała się dalej zachowana, aż w 1964 roku odkryto jej łamanie w rozpadach neutralnych kaonów, dla których możliwe jest przechodzenie cząstki w antycząstkę w wyniku oddziaływań słabych.

Co to jednak ma wspólnego z odróżnianiem przyszłości od przeszłości? Okazuje się, że z jednej strony teoria przewiduje, a obecnie również doświadczenie potwierdza

niezmienniczość oddziaływań mikroświata względem kombinowanej parzystości CPT. Puść od tyłu (T jak *time*, czyli czas) odbity w lustrze (P) film z materią zamienioną na antimaterię (C), a otrzymasz obraz realizowalny w rzeczywistości. Jeżeli tak, to łamanie CP implikuje równoważące je łamanie symetrii czasowej T. Wypadałoby to jednak sprawdzić, żeby nie było jak z tym teoretykiem z dowcipu, który widząc najpierw jedną osobę wchodzącą do domu, a następnie dwie wychodzące, uznał, że gdy teraz ktoś do domu wejdzie, to dom będzie pusty.

Sprawdzenie takie wydaje się bardzo proste pojęciowo (przynajmniej prostsze niż stwierdzenie łamania CP, którego tu nie będziemy wyjaśniać). Aby zaobserwować łamanie T, wystarczy sprawdzić, że prawdopodobieństwo przejścia kaonu w antykaon $K^0 \rightarrow \bar{K}^0$ jest inne od prawdopodobieństwa odwróconego w czasie procesu $\bar{K}^0 \rightarrow K^0$. W tym celu potrzebne jest stwierdzenie, czy mamy do czynienia z cząstką, czy antycząstką, zarówno w momencie produkcji, jak i rozpadu.

W praktyce okazało się to jednak dużo trudniejsze niż wykrycie łamania CP czy nawet potwierdzenie niezmienniczości CPT. W sposób statystycznie istotny udało się to po raz pierwszy eksperymentowi CPLEAR działającemu w CERNie [1] dopiero w zeszłym roku. Do produkcji neutralnych kaonów wykorzystano LEAR (Low Energy Antiproton Ring). Niskoenergetyczne antyprotony były zatrzymywane w gazowym wodorze, gdzie anihilując, produkowały układ trzech cząstek $K^-\pi^+K^0$ albo $K^+\pi^-K^0$. Zaobserwowanie ujemnego kaonu i dodatniego pionu świadczyło o wyprodukowaniu kaonu neutralnego, natomiast wykrycie dodatniego kaonu i ujemnego pionu było oznaką pojawiania się antykaonu neutralnego. Do stwierdzenia tożsamości neutralnych kaonów w chwili rozpadu wykorzystano ich semileptonowe rozpady na elektron, neutrino i pion naładowany. Obecność elektronu (odpowiednio pozytonu) zdradzała rozpad kaonu (odpowiednio antykaonu).

Wyselekcjonowanie około miliona przypadków pozwoliło na oszacowanie znormalizowanej różnicy prawdopodobieństw, tzw. asymetrii,

$$\frac{P(\bar{K}^0 \rightarrow K^0) - P(K^0 \rightarrow \bar{K}^0)}{P(\bar{K}^0 \rightarrow K^0) + P(K^0 \rightarrow \bar{K}^0)} = (6,6 \pm 1,3 \pm 1,0) \times 10^{-3},$$

gdzie pierwszy błąd jest statystyczny, a drugi systematyczny. Wielkość efektu jest zgodna z niezmienniczością CPT. W ten sposób, przez 35 lat ukrywające się przed doświadczalnym sprawdzeniem łamanie symetrii czasowej zostało wreszcie potwierdzone. Upływ czasu to nie tylko dążenie do chaosu.

Może to być pocieszające w nawale spraw do załatwienia na wczoraj i daje naukowe podstawy przerobionej na praktykę radzie wspomnianych na początku mistyków: co masz zrobić dziś – zrób jutro, co masz zrobić jutro – nie rób wcale... będziesz miał dwa dni świętego spokoju.

Piotr ZALEWSKI

[1] A. Angelopoulos i inni, CERN-EP/98-153 (wysłane do *Phys. Lett. B*).

Laboratorium w lesie – Na tropie cząstek (11/1979)

Nie wszystkie zjawiska dają się zaobserwować naszym nieuzbrojonym okiem. Tak np., aby zaobserwować przepływ prądu, posługujemy się amperomierzem, aby zmierzyć długość danego obiektu, używamy przymiaru (niesłusznie nazywanego linijką).

Postaramy się zaobserwować

CZĄSTKI WIRTUALNE

W lesie czy zagajniku, w szczególności jeśli są to tereny podmiejskie, przesuwa się między drzewami chwiejne postacie. To nietrzeźwi. Pamiętając, że prawdziwy badacz nie cofa się przed niczym, przystąpmy do obserwacji (możemy i sami w warunkach domowych zrobić nietrzeźwego, przeznaczając około 0,5 litra 40% roztworu wodnego C_2H_5OH na 50 kg wagi trzeźwego i doliczając odpowiednią ilość na każde 10 kg jego wagi). Obserwując wnikliwie trasę, po której porusza się nietrzeźwy, spostrzegamy dwie ciekawe prawidłowości:

- 1 – Nietrzeźwy zmienia kierunek marszu napotykać przeszkodę (w naszym przypadku drzewo).
- 2 – Nietrzeźwy zmienia kierunek marszu również i bez widocznego powodu, tak jakby napotkana przeszkoda była dla naszego oka niewidzialna.

JAK WYJAŚNIĆ TO ZDUMIEWAJĄCE ZJAWISKO?

Otóż najwidoczniej nietrzeźwy w swej wędrówce po lesie zderza się z obiektami, których w żaden sposób nie można zaobserwować (rozpraszanie nietrzeźwych na cząsteczkach powietrza nie gra tu żadnej roli ze względu na bardzo małą masę tych cząsteczek). Obiekty te muszą mieć stosunkowo dużą masę (rzędu 1 kg lub więcej) na to, by w zauważalny sposób zmienić kierunek ruchu nietrzeźwego. Taką samą sytuację spotykamy w świecie cząstek elementarnych. Wystarczy, jeśli na miejsce nietrzeźwych podstawimy np. elektrony, zamieniając przy okazji drzewa na ciężkie jądra atomowe. Wtedy owe niewidoczne obiekty przejdą we wspomniane na początku cząstki wirtualne.

Przypomnijmy pokrótce podstawowe własności cząstek wirtualnych. Po pierwsze, nie mogą one, z definicji, zostać zaobserwowane w żaden bezpośredni sposób. Możemy jedynie badać skutki ich obecności poprzez obserwację zmiany kierunku lotu cząstek rzeczywistych – w naszym przypadku nietrzeźwych. Po drugie, masa cząstki wirtualnej może być zupełnie dowolna i wiąże się z czasem trwania oddziaływań poprzez znaną zasadę nieoznaczoności

$$c^2 \cdot \Delta m \cdot \Delta t \geq \frac{1}{2} \hbar.$$

Przystępujemy do pomiarów. Z grupy nietrzeźwych wybieramy jednego łagodnego (w braku łagodnego możemy posłużyć się pomocą starszego brata) i obserwujemy jego ruch w określonym (dość dużym) czasie, licząc skrupulatnie liczbę zderzeń z drzewami (cząstkami!) wirtualnymi. Pomiarów wykonujemy wielokrotnie dla różnych czasów, notując otrzymane wyniki w naszym dzienniku pomiarów. Następnie, dla każdego pomiaru obliczamy liczbę zderzeń na jednostkę czasu i wyciągamy średnią arytmetyczną. Otrzymamy w ten sposób średnią liczbę drzew

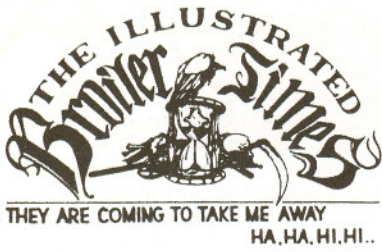
(cząstek) wirtualnych zjawiających się w jednostce czasu. Pomiarów możemy wykonać w lesie o różnym zagęszczeniu drzew, badając w ten sposób zależność liczby drzew wirtualnych od gęstości zadrzewienia. Odpowiada to, oczywiście, różnej gęstości jąder atomowych (np. protonów), przy czym maksymalna możliwa gęstość opisuje sytuację całkowicie zdegenerowanego gazu jądrowego, w którym cząstki wirtualne praktycznie wcale nie występują. Możemy to łatwo sprawdzić w lesie tak gęstym, że nasz nietrzeźwy z trudem przeciska się pomiędzy drzewami.

Wreszcie możemy wykonać nasze badania na otwartej przestrzeni (w próżni!). W ten sposób będziemy w stanie ocenić liczbę cząstek wirtualnych w próżni, czego nie udało się dotychczas osiągnąć żadnymi innymi metodami.

Na koniec propozycja dla eksperymentatorów bardziej zaawansowanych: Przy pomocy naszego nietrzeźwego (tu koniecznie łagodnego) możecie sprawdzić wyżej wypisaną zasadę nieoznaczoności. Wystarczy znać masę cząstki wirtualnej i czas trwania zderzenia z nią. Iloczyn tych wielkości powinien być większy od zamieszczonej w tablicach wartości stałej Plancka \hbar . Zastępując w tym iloczynie otrzymaną z pomiarów masę cząstki wirtualnej przez masę protonu, a czas trwania zderzenia przez typowy czas jądrowy (10^{-24} s), powinniście otrzymać liczbę niewiele różniącą się od wartości \hbar . Wynik ten jest jeszcze jednym argumentem na rzecz wirtualności obiektów, z którymi zderzają się nietrzeźwi.

A jak z obserwacji ruchu nietrzeźwego wyznaczyć masę owych cząstek i czas trwania zderzenia? Spróbujcie pogłowić się sami. Napiszcie do nas, jak sobie poradziście. Najciekawsze wypowiedzi opublikujemy. Powodzenia!

Mme PIPSZTYCKA



– Proście o nowego gubernatora? –
 zdziwił się Tyberiusz.
 – A po co wam to? Przywiezie ze sobą tylko nowych urzędników i będzie wam jeszcze gorzej niż dotychczas. Postuchajcie lepiej, opowiem wam następującą historię: Pewnego razu ciężko ranny żołnierz leżał na pobojuwisku i czekał, aż zjawi się cyrulik i opatry mu rany, na których roito się od much. Lżej ranny towarzysz, zobaczywszy to, zaczął odpędzać owady.
 – „Nie rób tego – krzyknął pierwszy.
 – Muchy opity się już moją krwią i nie są tak natrętne jak na początku. Jeżeli je odpędzisz, ich miejsce zajmą inne, wygodzone, a wtedy będzie po mnie.”
 Robert Graves

Od stycznia 1980 roku prowadziliśmy małątki dział, nazwijmy go społecznym, *The Illustrated Broiler Times*. Nie sposób było obywać się bez komentarza do dziejących się niecodziennych spraw. Miał on swoich fanów. Przypominamy jego fragmenty w ramach *Starej Deltki*.

Demokrata? Co znaczy to DEMO?



Na razie, koleczy, zjedzmy to, co jest. Poważniejsze kwestie omówimy w następnej kolejności.

*

WYSOKI KURS ŻŁOTEGO
 W związku z zachwianiem wartości dolara Amerykanie chętnie wymieniąją dolary na złote. Za złotego można uzyskać 1,5 do 2 zwyczajnych papierowych dolarów.
 Kurs złotówki pozostaje nadal niezachwiany.

*

Ilekoć wrzenie rewolucyjne zaczyna ogarniać którąkolwiek z wyżej odeń stojących warstw społeczeństwa, proletariat wchodzi z nią w związek i w ten sposób dzieli wszystkie porażki ponoszone kolejno przez wszystkie partie.

Karol Marks

PRZY ZNACZNEJ
 PODWYŻCIE CEN
 I JA BĘDĘ WART
 ZNACZNIE WIĘCEJ



Pani Basia pyta: co to szkodzi, że „mądry Polak po szkodzi”?
 O tym, droga Pani Basiu, będzie się Pani mogła przekonać dopiero za jakiś czas.

*

Czy wybrałeś już tego, kto będzie pracował NA CIEBIĘ?!

Bardzo ten dział nam Cenzura okrawała, ale padł on dopiero z ustaniem wydawania wszystkich czasopism w grudniu 1981 roku. Ostatni zatrzymany tekst był następującym wierszykiem Tuwima z 1936 roku:

– „Biedny wilk! Czy słyszałeś!”
 – „Nie słyszałem. Powiedz.”
 – „Owce spisek uknuły, by zagryźć sąsiada!
 Więc ostrzyż kły, biedaczek, przeciw złości owiec!”
 – „Skąd wiesz o ich zamiarach?”
 – „Wilk mi opowiadał”.

Brojlery. To słowo jest czymś więcej niż tylko zwykłym terminem technicznym hodowli drobiu. To symbol naszych czasów. Czasów, w których, dzięki postępom nauki i techniki, zabiedzone, dziobiące tu i ówdzie po śmietnikach kury ustąpiły miejsca racjonalnie żywionym dostarczycielom wysokowartościowej masy pokarmowej, realizując w ten sposób odwieczne marzenie o powszechnej sytości. Nie możemy więc przejść obok brojlerów obojętnie. Musimy dać im sposobność swobodnego wypowiedzenia swoich poglądów, co też czynimy na łamach IBT.



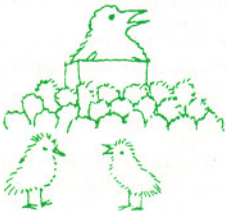
NIE WIEM, KTO
 MNIE STWORZYŁ.
 ALĘ ZNAM TAKICH,
 KTÓRYCH NA PEWNO
 STWORZYŁA
 EWOLUCJA

BROJLERNIE WŁASNOŚCIĄ BROJLERÓW

– zootechnicy to tylko wynajęci fachowcy: ktoś przecież musi nas karmić.

*

Do czego więc doszliśmy?
 Ludzie wierzący walczą z wolnością, a przyjaciele wolności atakują religię; wzniosłe i szlachetne umysły opowiadają się za niewolnictwem, a dusze niskie i służalcze za swobodą; prawi i światli obywatele są wrogami wszelkiego postępu, podczas gdy ludzie wyzbyci patriotyzmu głoszą się apostołami cywilizacji i oświecenia!
 de Tocqueville
 „O demokracji w Ameryce”



Czy wierzysz, że to dzięki niemu dostajemy we wtorki dodatek witaminowy?

*

PRZYPADKOWA CZYTELNICZKA
 skarży się na brak pasty do zębów. A właściwie, to po co Ci zęby, miła Czytelniczko?

Młodzieńcze, polityka to nie są fakty, tylko to, co się o nich mówi.

*

GOSPODARKA:

Póty dzban wodę nosi, póki jest woda.



– Nie, drogi brojlerze. Odpowiedzialność ZA COŚ to anachronizm. Wy będziecie odpowiadać PRZED NAMI.

*

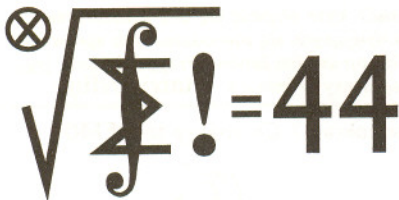
WYŻYWIENIE:

Na karku głowę masz, i nią się rzadzić chcesz, A spróbuj, czy wyżywi się z twej głowy choćby wesz.

Bertolt Brecht



„Rzeczpospolita to postaw CZERWONEGO sukna, za które ciągną Szwedzi, Chmielnicki, Hyperborejczykowie, Tatarzy, elektor, i kto żyw naokoło. A my z księciem wojewodą wileńskim powiedzieliśmy sobie, że z TEGO sukna musi się i nam tyle zostać w rękę, aby na płaszcz wystarczyło; dlatego nie tylko nie przeszkadzamy ciągnąć, ale i sami ciągniemy.”
 – jak widać, nawet ksiądz Bogusław Radziwiłł obiecywał zachować socjalistyczny charakter Rzeczypospolitej.



Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 1999

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1999.

Zadania z matematyki nr 379, 380

Redaguje Marcin E. KUCZMA

379. Dla danej liczby naturalnej parzystej $n \geq 2$ znaleźć wszystkie układy liczb (x_1, \dots, x_n) spełniające warunki: $0 \leq x_i \leq 1$ dla $i = 1, \dots, n$ oraz

$$\sum_{i=1}^n x_i(1 - x_{i+1}) = \frac{n}{2} \quad (\text{przyjmujemy } x_{n+1} = x_1).$$

380. Obliczyć maksymalną wartość pola trójkąta równobocznego, którego wszystkie wierzchołki leżą na brzegu prostokąta o bokach długości a, b (dla danych liczb $a \geq b > 0$).

Zadanie **380** zaproponował pan Tadeusz Józefczyk z Poznania.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/1998

Przypominamy treść zadań:

371. Dana jest liczba całkowita $n \geq 1$. Znaleźć wszystkie układy liczb rzeczywistych (x_1, \dots, x_n) spełniające warunki $x_1 \geq \dots \geq x_n \geq 0$ oraz

$$\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{k} (\sqrt{x_k} - \sqrt{x_{k+1}}) = 1;$$

w drugiej sumie przyjmujemy $x_{n+1} = 0$.

371. Załóżmy, że liczby x_1, \dots, x_n (wraz z $x_{n+1} = 0$) spełniają podane warunki. Przyjmijmy: $\sqrt{x_k} - \sqrt{x_{k+1}} = t_k$ dla $k = 1, \dots, n$. Zatem

$$\begin{aligned} (t_1 + t_2 + \dots + t_n)^2 &= x_1 \\ (t_2 + \dots + t_n)^2 &= x_2 \\ &\dots \dots \dots \\ t_n^2 &= x_n. \end{aligned}$$

Zgodnie z zadanymi równaniami,

$$1 = \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n k t_k^2 + 2 \sum_{k < \ell} k t_k t_\ell$$

(bowiem iloczyn $t_k t_\ell$ występuje w rozwinięciu lewych stron związków (1), przedstawiających x_1, \dots, x_k , ale nie x_{k+1}, \dots, x_n) - oraz

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{k} (\sqrt{x_k} - \sqrt{x_{k+1}}) \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{k} t_k \right)^2 = \\ (3) \quad &= \sum_{k=1}^n k t_k^2 + 2 \sum_{k < \ell} \sqrt{k\ell} t_k t_\ell. \end{aligned}$$

Przyrównując prawe strony (2) i (3) dostajemy zależność

$$\sum_{k < \ell} \sqrt{k} (\sqrt{\ell} - \sqrt{k}) t_k t_\ell = 0,$$

spełnioną jedynie wówczas, gdy wszystkie liczby t_k , z wyjątkiem co najwyżej jednej, są zerami. Istnieje więc liczba $m \in \{1, \dots, n\}$ taka, że $t_k = 0$ dla $k \neq m$. W myśl określenia liczb t_k oraz na mocy równości (2) dostajemy wniosek, że

$$x_1 = \dots = x_m = \frac{1}{m}, \quad x_{m+1} = \dots = x_n = 0.$$

Każdy układ (x_1, \dots, x_n) takiej postaci istotnie spełnia wszystkie rozważane warunki.

372. Niech f będzie podobieństwem przestrzeni trójwymiarowej. Dla dowolnego zbioru k zawartego w tej przestrzeni oznaczymy przez k^* zbiór środków wszystkich odcinków XX' , gdzie $X \in k, X' = f(X)$. Wykazać, że jeżeli ℓ jest prostą, to zbiór ℓ^* jest zawarty w pewnej prostej oraz że jeżeli π jest płaszczyzną, to zbiór π^* jest zawarty w pewnej płaszczyźnie.

372. Ustalmy prostą ℓ i wybierzmy na niej dwa różne punkty O, A . Jeśli X jest punktem tej prostej, to $\overrightarrow{OX} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA}$ dla pewnej liczby $\alpha \in \mathbf{R}$. Podobieństwo jest przekształceniem liniowym. Zatem obrazami punktów O, A, X są punkty O', A', X' spełniające analogiczną równość $\overrightarrow{O'X'} = \alpha \cdot \overrightarrow{O'A'}$.

Niech M będzie środkiem odcinka OO' . Środek Z odcinka XX' jest wyznaczony przez zależność

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MZ} &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{MX} + \overrightarrow{MX'}) = \\ (*) \quad &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{MO'} + \overrightarrow{O'X'}) = \\ &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{O'X'}), \end{aligned}$$

czyli

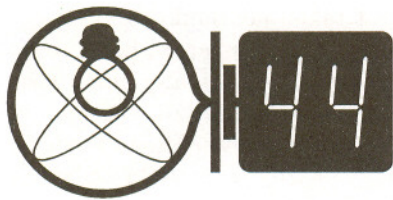
$$\overrightarrow{MZ} = \alpha \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O'A'}) \quad (\alpha \in \mathbf{R}).$$

Punkt Z leży więc na prostej przechodzącej przez punkt M , o wektorze kierunkowym $\frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O'A'})$ (a jeśli jest to wektor zerowy, wówczas punkt Z pokrywa się z M dla każdej liczby $\alpha \in \mathbf{R}$). W każdym przypadku zbiór ℓ^* , złożony z możliwych położenia punktu Z , zawiera się w pewnej prostej.

Dla dowolnie ustalonej płaszczyzny π rozumowanie jest analogiczne: wybieramy na niej trzy niewspółliniowe punkty O, A, B . Jeżeli $X \in \pi$, to $\overrightarrow{OX} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB}$ dla pewnych liczb $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$; stąd $\overrightarrow{O'X'} = \alpha \cdot \overrightarrow{O'A'} + \beta \cdot \overrightarrow{O'B'}$. Wektor łączący środki M i Z odcinków OO' i XX' spełnia równość (*), która teraz przybiera postać

$$\overrightarrow{MZ} = \alpha \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O'A'}) + \beta \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O'B'}) \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R}).$$

Wynika z niej, że zbiór π^* , złożony z możliwych położenia punktu Z , zawiera się w pewnej płaszczyźnie.

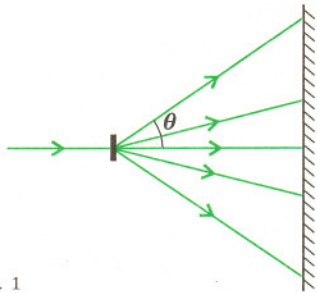


Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 1998

276. Izolowane termicznie naczynie jest podzielone na dwie części: jedna część zawiera 50 g wody o temperaturze 70°C, a w drugiej (o objętości 0,2 m³) jest próżnia. Usunięto przegrodę rozdzielającą obie części. Obliczyć końcową temperaturę wody i pary (w stanie równowagi). Dane są: ciepło właściwe wody $c = 4,19 \text{ J/(g} \cdot \text{K)}$ oraz tabela przedstawiająca zależność ciepła parowania wody q oraz gęstości pary wodnej nasyconej ρ od temperatury:

T (°C)	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
q (J/g)	2471	2460	2448	2437	2425	2414	2402	2391	2379	2368	2357	2345	2333
ρ (g/m ³)	9,40	12,8	17,3	23,0	30,3	39,5	51,0	65,3	82,7	103,9	129,5	160,2	196,7

277. Promień światła pada prostopadłe na siatkę dyfrakcyjną o stałej $d = 2 \mu\text{m}$, za którą w pewnej odległości znajduje się ekran (rys. 1; oczywiście, proporcje rysunku nie muszą odpowiadać rzeczywistości). Zaobserwowane na ekranie widmo jest przedstawione na okładce. Obliczyć długości fali trzech zaznaczonych linii widmowych.



Rys. 1

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/1998

Przypominamy treść zadań:

268. Cienki pierścień w kształcie okręgu o masie M wisi na nierozciągliwej nici, a dwa koraliki – każdy o masie m – jednocześnie zwolniono w punktach położonych symetrycznie i bardzo blisko punktu najwyższego (rys. 2). Jeśli koraliki ślizgają się bez tarcia, to ile musi wynosić stosunek m/M , aby pierścień podskoczył?

269. Próbką izotopu promieniotwórczego emituje promienie α o energii $E = 5 \text{ MeV}$, a z jednej strony jest osłonięta (tak, że w jednej półprzestrzeni promienie wybiegają na zewnątrz, a w drugiej są pochłaniane). Jaka ilość ciepła wydzielalaby się w osłonie w jednostce czasu, jeśli siła odrzutu działająca na próbkę z osłoną wynosiłaby $F = 1 \text{ N}$? Pominąć oddziaływanie cząstek α z powietrzem, tzn. przyjąć, że urządzenie działa w próżni. Masa cząstki α jest równa $m = 6,64 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 3730 \text{ MeV}/c^2$.

268. Oznaczmy promień pierścienia przez r . Z zasady zachowania energii wynika, że gdy koraliki zakreślą kąt α względem położenia początkowego, uzyskają prędkość równą $v = \sqrt{2gr(1 - \cos \alpha)}$. Siła odśrodkowa będzie wtedy równa $F_o = mv^2/r = 2mg(1 - \cos \alpha)$, siła oddziaływania między koralikiem a pierścieniem będzie $R = F_o - mg \cos \alpha = mg(2 - 3 \cos \alpha)$, a łączna siła oddziaływania na pierścień (z dodatnim zwrotem w górę) wyniesie

$$F = 2R \cos \alpha = 2mg(2 - 3 \cos \alpha) \cos \alpha.$$

Maksymalną wartością tego wyrażenia jest $F_{\text{max}} = (2/3)mg$, tzn. pierścień podskoczy, gdy $m/M > 3/2$.

269. Oznaczmy moc promieniowania przypadającego na każdą z półprzestrzeni przez P . Odpowiada to liczbie emitowanych cząstek równej P/E (na jednostkę czasu), z czego na kąt bryłowy $d\Omega$ przypada

$$dN = \frac{P d\Omega}{E 2\pi}$$

cząstek (kąt 2π odpowiada całej półprzestrzeni). Siłę odrzutu F otrzymamy, mnożąc tę wielkość przez pęd jednej cząstki $p = \sqrt{2mE}$ i przez cosinus kąta θ zawartego między przypadkowym kierunkiem emisji a kierunkiem prostopadłym do płaszczyzny osłony,

i następnie całkując po kierunkach. Ponieważ $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$, $\int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = 1/2$, więc otrzymujemy

$$F = \frac{1}{2} P \sqrt{\frac{2m}{E}}, \quad \text{zatem } P = F \sqrt{\frac{2E}{m}} = 15,5 \text{ MW}.$$

Praktyczne wykorzystanie takiego „napędu odrzutowego” nie jest więc realne.



Rozwiązanie zadania F 497.

Patrząc na przedmiot leżący na dnie rzeki (powiedzmy, w punkcie A), widzimy obraz przedmiotu w punkcie A' , będącym punktem przecięcia się promieni załamanych $1'$ i $2'$. Oznaczając przez α kąt padania promienia 2, a przez β kąt załamania tego promienia, otrzymujemy

$$h \text{tg } \alpha = h' \text{tg } \beta.$$

Dla małych kątów α i β mamy, $\text{tg } \alpha \approx \sin \alpha$ i $\text{tg } \beta \approx \sin \beta$, a więc:

$$h = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} h' = n h',$$

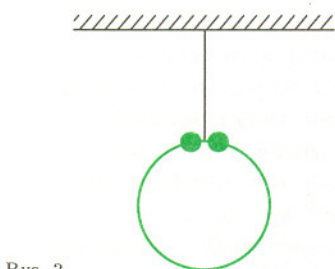
gdzie $n = 1,33$ jest współczynnikiem załamania wody. Stąd rzeczywista głębokość rzeki wynosi około 2,7 m.



Rozwiązanie zadania M 879.

Oznaczmy liczbę widzów przez n . Obliczmy prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego (każdego ze zniecierpliwionych widzów będzie mógł wyjść z kina, nie przechodząc przed nosem nikomu z chwilowo jeszcze zaciekawionych filmem). Wszystkich zdarzeń elementarnych jest $n!$, a zdarzeń sprzyjających 2^{n-1} , bowiem do momentu, gdy w kinie zostanie ostatni widz, znużeniu muszą kolejno ulegać widzowie siedzący na skrajnym lewym lub skrajnym prawym z zajętych miejsc. Szukane prawdopodobieństwo jest zatem równe

$$1 - 2^{n-1}/n! = \frac{4723}{4725}.$$

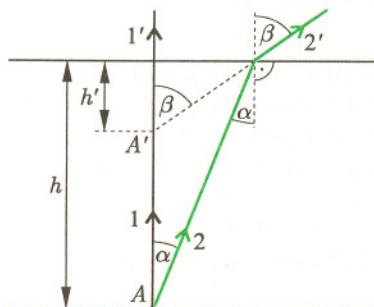


Rys. 2

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 264 (WT=1,83) i 265 (WT=1,90)
z numeru 10/1998

Jarosław Łazuka	- Warszawa	42,31
Marek Wójcicki	- Szczecin	38,70
Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	26,51
Tomasz Wietecha	- Tarnów	26,49
Aleksander Surma	- Myszków	17,27
Andrzej Idzik	- Bolesławiec	16,70



Zewnętrzne pole grawitacyjne jednorodnej kuli jest takie, jak punktu materialnego o masie równej masie tej kuli i umieszczonego w jej środku – to wiedział już Newton. W swym działaniu grawitacyjnym punkt materialny może też zastąpić kulę, jeżeli ma ona budowę sferycznie symetryczną, tzn. gdy nie jest jednorodna, ale powierzchniami stałej gęstości są sfery o wspólnym środku. Jeżeli planeta ma budowę sferycznie symetryczną, to każdy jej satelita będzie ją wyczuwał jako punkt, a zatem z jego ruchu nie da się nic wywnioskować o wewnętrznej budowie planety.

Na szczęście przyroda nie wytwarza idealnych kul, co więcej – każde dwa globy, gdy znajdują się dostatecznie blisko jeden drugiego, deformują się grawitacyjnie tak, że jeżeli nawet niezależnie byłyby kuliste, to tworząc parę, przestają takimi być. Jest to znane działanie pływowe. Dlatego np. Księżyc i (w mniejszym stopniu) Słońce powodują podnoszenie się i opadanie wody w ziemskich oceanach, co skutkuje spowalnianiem się ruchu obrotowego Ziemi, a Ziemia, deformując w dawnych czasach kształt młodego Księżyca, wyhamowała jego ruch obrotowy tak dalece, że obraca się on teraz w tym samym czasie co obiega Ziemię. Tak też zachowują się cztery największe satelity Jowisza; mówi się, że są to wszystkie satelity synchroniczne. Satelita synchroniczny ma w przybliżeniu kształt elipsoidy trójosiowej, przy czym jej wielka oś skierowana jest w planetę macierzystą.



Najważniejsze, że na podstawie precyzyjnej analizy ruchu sztucznego satelity wokół niekulistego globu można uzyskać informacje o budowie wewnętrznej tego globu. Tak właśnie stało się po tym, gdy 7 grudnia 1995 r. sonda Galileo przeleciała niecałe 900 km nad powierzchnią Io, najbardziej wewnętrznej z galileuszowych satelitów Jowisza. Analiza ruchu sondy umożliwiła przede wszystkim dokładne wyznaczenie masy Io ($8,932 \times 10^{22}$ kg) i gęstości ($3,53 \text{ g/cm}^3$). Ponadto okazało się też, że Io powinna mieć wielkie metaliczne jądro. Zbudowane byłoby z żelaza i siarczków żelaza, jego średnica wynosiłaby mniej więcej połowę średnicy Io, a masa 1/5 masy satelity. Mając żelazne jądro satelita ten powinien mieć własne pole magnetyczne, co – jak się wydaje – Galileo zarejestrował, obserwacje są jednak mocno zakłócone przez potężne pole magnetyczne pobliskiego Jowisza. W każdym razie Io okazała się drugim – po Ziemi – globem w Układzie Słonecznym mającym żelazne jądro.

Tomasz KWAST

W kwietniowe wieczory niemal w zenicie widzimy chyba najbardziej znany i rozpoznawalny przez każdego gwiazdozbiór Wielkiej Niedźwiedzicy. Jego siedem gwiazd tworzy znany układ tzw. Wielkiego Wozu, w którym linia przeprowadzona przez dwie najjaśniejsze gwiazdy trafia w Gwiazdę Polarną. Przedostatnia gwiazda w ogonie Niedźwiedzicy, ζ UMa, czyli Mizar, jest systemem dość skomplikowanym. Gołym okiem widać, że tej jasnej gwiazdzie towarzyszy w odległości 11' znacznie słabsza, zwana Alkorem, uchodząca za sprawdzian zasięgu wzroku. Obie te gwiazdy nie stanowią układu związanego fizycznie – mówimy, że tworzą układ optycznie podwójny. Za to sam Alkor jest naprawdę gwiazdą podwójną, a Mizar poczworną, składającą się z dwóch par, które dzieli odległość kątowa 14'' – zatem „podwójność” Mizara można zobaczyć już przez lornetkę. Odległość tego układu od Ziemi wynosi 26 pc.



Wenus w kwietniu przechodzi szybko z Barana do Byka, oddalając się od Słońca, przez co coraz lepiej widać ją wieczorem na zachodnim niebie. Mars jest w Wadze i widać go praktycznie przez całą noc. Jowisz jest nadal w Rybach, a Saturn w Baranie i planet tych nie widać, bowiem 1 IV Jowisz, a 27 IV Saturn znajdują się za Słońcem. Można za to próbować o świcie szukać Merkurego, gdyż 16 IV będzie najdalej kątowo od Słońca. Co więcej, 14 IV bardzo blisko niego znajdzie się Księżyc. Pełnia Księżyca wypada 30 IV, a mocno zbliży się on jeszcze do Aldebarana 19 IV i do Regulusa 24 IV.

T.K.

MIEDZY NAMI OSZUSTAMI (14')

Wyjaśnienie oszustwa (14): Nie sprawdziliśmy, czy dla znalezionych wartości parametru a rozwiązanie równania kwadratowego $x^2 + (3 - a)x + 1 = 0$ należy do dziedziny wyjściowego równania.

Dla $a = 1$ znajdujemy $x = -1$. Po wstawieniu tej wartości do równania danego w treści zadania otrzymujemy $\log_7 0 = \log_7 0$, co pokazuje, że $x = -1$ nie jest rozwiązaniem. Dla $a = 1$ równanie nie ma więc rozwiązań.

Dla $a = 5$ wszystko jest w porządku: $x = 1, \log_7 6 = \log_7 6$.

Zatem jedyną wartością parametru a , spełniającą warunki zadania, jest 5.

JWR

MIEDZY NAMI OSZUSTAMI (15')

Wyjaśnienie oszustwa (15): Błąd popełniany przez naszych bohaterów był całkiem banalny: nie mieli zwyczaju pisać nawiasów. Z tego powodu $x \log_2(2 + x) = 4$ zamieniało się od razu w $x(\log_2 2) + x = 4$. Ponieważ jednak rozwiązaniem równania było $x = 2$, a w tym przypadku $x \log_2(2 + x) = x(\log_2 2) + x$, więc ostateczny wynik wyszedł poprawny. Podobnie mamy $x \log_n(n + x) = x(\log_n n) + x = 2n(n - 1)$ dla $x = n(n - 1)$, co wyjaśnia dlaczego również w drugim równaniu (gdzie $n = 3$) Bazyli otrzymał poprawny wynik.

Natomiast w trzecim równaniu nie pojawiła się po drodze żadna tożsamość, która pozwoliłaby otrzymać poprawny wynik pomimo błędnych rachunków.

JWR

MIEDZY NAMI OSZUSTAMI (16')

Wyjaśnienie oszustwa (16): Twierdzenie jest fałszywe, co widać na przykładzie $a = 5, b = 13, c = 12$. Nigdzie nie było napisane, że c jest przeciwprostokątną, a takie założenie wykorzystaliśmy w dowodzie.

JWR

GRY (1)

Naszą wędrówkę po świecie gier rozpoczniemy od gry dobrze znanej, ale bardzo ważnej dla naszych dalszych rozważań. Tą grą jest *Nim*.

W *Nim* gra dwóch graczy. Na początku rozgrywki w kilku stosach układa się bierki. Liczba stosów oraz liczba bierek w poszczególnych stosach jest dowolna. Gracze wykonują ruchy na przemian. Ruch polega na zabraniu dowolnej liczby (co najmniej 1) bierek z dowolnego stosu. Można zabrać wszystkie bierki ze stosu i wtedy liczba stosów się zmniejszy. Wygrywa ten, kto zabierze wszystkie bierki z ostatniego stosu.

Zastanówmy się jaka jest strategia w tej grze. Zaczniemy od sytuacji najprostszej, a mianowicie kiedy na początku gry jest tylko jeden stos. Co robi gracz, który rozpoczyna rozgrywkę? Zabiera wszystkie bierki i wygrywa. Trochę nudna jest taka gra.

Rozpatrzmy z kolei dwa stosy. Co ma zrobić pierwszy gracz? Zlikwidowanie jednego ze stosów to samobójstwo. Chwila zastanowienia podpowiada następujące rozwiązanie. Należy zabrać bierki z tego stosu, w którym jest ich więcej, tak aby po wykonaniu ruchu liczba bierek w obu stosach była taka sama. W dalszym ciągu gry stosujemy tę samą strategię. W ten sposób zawsze będziemy podawać przeciwnikowi pozycję składającą się z dwóch stosów tej samej wielkości. Nietrudno wyobrazić sobie, że w końcu przeciwnik zostanie zmuszony do zlikwidowania jednego ze stosów, a wtedy my zlikwidujemy drugi i wygramy. A jeżeli na początku gry w obu stosach było tyle samo bierek? No cóż, nawet mając opracowaną strategię, nie zawsze się wygrywa. Robimy cokolwiek, byle gra toczyła się jak najwolniej i liczymy na błąd przeciwnika.

A co się dzieje przy trzech stosach? Tu strategia jest dalece mniej oczywista. Aby ją zgrabnie sformułować, musimy najpierw zdefiniować dodawanie dwójkowe. Mówiąc najbardziej obrazowo, dodawanie dwójkowe polega na zapisaniu liczb w układzie dwójkowym, a następnie pisemnym dodaniu ich „bez przenoszenia”.

Bardziej ściśle, dla $c_0, c_1, \dots, c_k, d_0, d_1, \dots, d_k \in \{0, 1\}$ definiujemy

$$\sum_{i=0}^k c_i 2^i +_2 \sum_{i=0}^k d_i 2^i = \sum_{i=0}^k (c_i +_2 d_i) 2^i,$$

gdzie $0 +_2 0 = 1 +_2 1 = 0$ oraz $1 +_2 0 = 0 +_2 1 = 1$.

W praktyce przy dodawaniu dwójkowym rozkładamy każdy ze składników na sumę różnych potęg dwójki, a następnie dodajemy, pamiętając, że różne potęgi dwójki dodaje się w zwykły sposób, a równe potęgi dwójki przy dodawaniu dają 0, na przykład

$$\begin{aligned} 13 +_2 7 +_2 12 &= (8 + 4 + 1) +_2 (4 + 2 + 1) +_2 (8 + 4) = \\ &= 8 +_2 4 +_2 1 +_2 4 +_2 2 +_2 1 +_2 8 +_2 4 = \\ &= 8 +_2 8 +_2 4 +_2 4 +_2 4 +_2 2 +_2 1 +_2 1 = \\ &= 4 +_2 2 = 4 +_2 2 = 6. \end{aligned}$$

Strategia w grze *Nim* jest następująca: należy podawać przeciwnikowi pozycję, w której suma dwójkowa liczb bierek we wszystkich stosach jest równa 0. Ta strategia działa dla dowolnej liczby stosów.

O tym, jak praktycznie znajdować wygrywający ruch w grze *Nim*, mając na uwadze powyższą strategię, opowiemy szerzej w następnym Gammalimatiasie.

JWR