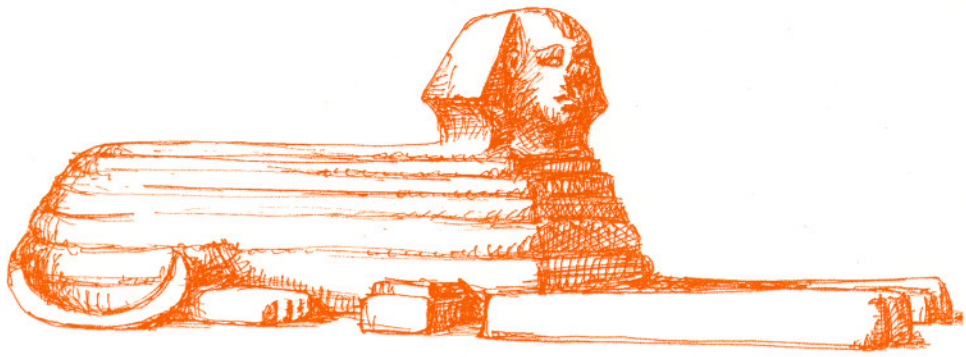


SPIS TREŚCI
NUMERU 6(301)

Czy wiemy, co to jest masa?
Piotr Zalewski str. 1

Środek ciężkości czy masy?
Wojciech Kopczyński str. 3

Jak to robi matematyk?
Marek Kordos str. 6

Ile waży kilogram?
Ewa Czuchry str. 8

Mała Delta str. 9

Aktualności
(nie tylko) fizyczne str.11

Jak to było z $E = mc^2$?
Stanisław Mrówczyński str.12

Zadania str.13

Klub 44 str.14

Patrz w niebo str.16

Czerwiec str.16

Gammalimatias str.17

W następnym numerze:

Osiągnięcia astrofizyki XX wieku

Okładki i ilustracje wykonała
Anna Ludwicka

Wybór artykułów w języku angielskim
http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 3 zł

„Delta" – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:
Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichocki
– wiceprzewodniczący
Krzysztof Ciesielski
Jan A. Gaj
Piotr Goldstein
Tomasz Hofmokl
Andrzej Hrynkiewicz
Wiesław A. Kamiński
Marta Kicińska-Habior
Krzysztof Maślanka
Andrzej Mąkowski
Zdzisław Pogoda
Feliks Przytycki
Michał Różyczka
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Andrzej Woszczyk
Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
Wiktor Bartol
Krzysztof Biesaga
Wojciech Kopczyński – z-ca red. nacz.
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nacz.
Tomasz Kwast
Anna Ludwicka
Anna Rudnik
Paweł Strzelecki
Joanna Udalska
Anna Wojtyra
Piotr Zalewski

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 853-59-61, 843-02-41(-2) wewn. 21
PAWELST@MIMUW.EDU.PL
Skład systemem TEX wykonała Redakcja.
Wydrukowano
w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A.
w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 1999 roku wynosi 3 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 1999 r. wynosi 6 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na IV kwartał 1999 r. wynosi 9 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch" S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską".
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest równa cenie prenumeraty krajowej plus rzeczywiste koszty wysyłki. Wpłaty przyjmuje „RUCH" S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. $8^{00} - 14^{00}$.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem za granicę		
5 XII	20 XI	na I	kwartał roku następnego,
5 III	20 II	na II	kwartał,
5 VI	20 V	na III	kwartał,
5 IX	20 VIII	na IV	kwartał.

6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH" S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także tel. 620-10-19 i 620-12-17, wewn. 2366.

Numery archiwalne (od 1985 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Czy wiemy, co to jest masa?

Piotr ZALEWSKI

Masa ludzi szuka w środkach masowego przekazu przepisu na zmniejszenie indywidualnej masy ciała. A jednak z ogólnej masy towarowej wybieramy raczej masę kakaową, masę mleczną czy masę orzechową, masowo pakowaną w przetworzoną masę plastyczną lub masę papierową. Czasami w masie spadkowej udaje nam się natknąć na masę perłową, ale już masa upadłościowa zdecydowanie źle kojarzy się masom pracującym. W ogóle masa spraw wiąże się z masą. Jedni chcieliby umieć sterować masami, inni woleliby po prostu mieć masę pieniędzy, żeby masę swoich spraw pozałatwiać. A fizycy próbują zrozumieć, co to tak naprawdę jest masa.

Masa, z łaciny *massa*, ciasto, bryła, zadomowiła się w większości języków pochodzenia europejskiego i w większości z nich pisze się i brzmi podobnie oraz ma podobnie szerokie znaczenie. Jest również jednym z pierwszych pojęć poznawanych na lekcjach fizyki. Masa jest z jednej strony miarą trudności, którą napotykamy przy próbie zmiany prędkości danego ciała, ujętą po raz pierwszy ilościowo w II prawie Newtona $F = m_b a$, które stwierdza, że przyspieszenie ciała jest proporcjonalne do działającej siły, a stałą proporcjonalności jest właśnie m_b, czyli tzw. masa bezwładna. Z drugiej strony masa pełni rolę ładunku we wzorze na siłę grawitacyjną $F = m_g g$, gdzie g jest natężeniem pola grawitacyjnego. Oba wzory wyglądają identycznie, ale m_g nie musi równać się m_b. Obecnie wiemy, że równość $m_g = m_b$ jest spełniona z bardzo dużą dokładnością. Konsekwentne zastosowanie hipotezy równości mas – bezwładnej i grawitacyjnej – doprowadziło Einsteina do ogólnej teorii względności, czyli teorii grawitacji, w której siła grawitacyjna jest przejawem zakrzywienia czasoprzestrzeni spowodowanego obecnością mas. Teoria ta nie wyjaśnia natomiast, co to jest masa.

Co wiemy o masie? Masa jest wielkością charakteryzującą pojedyncze ciało lub odosobniony układ ciał niezależnie od układu odniesienia. Mówimy, że jest skalarem ze względu na transformację Lorentza, tzn. niezmiennikiem szczególnej teorii względności. W ogólności

$$m = \sqrt{\left(\sum_i \frac{E_i}{c^2}\right)^2 - \left(\sum_i \frac{\vec{p_i}}{c}\right)^2},$$

gdzie sumowanie przebiega po elementach układu ciał, którego masę obliczamy. Czasami dodaje się tak określonej masie przymiotniki „spoczynkowa" i „niezmiennicza". Dlaczego spoczynkowa, wyjaśnimy trochę później, a niezmiennicza – po to, aby odróżnić masę układu jako całości od sumy mas poszczególnych składników

$$\sum_i m_i = \sum_i \sqrt{\left(\frac{E_i}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{\vec{p_i}}{c}\right)^2}.$$

Jeżeli nie nadajemy cząstkom wielkich pędów, tzn. $(E_i/c^2)^2 \gg (\vec{p_i}/c)^2$, to zaniedbując wyrazy pędowe w powyższych wzorach, otrzymujemy $m = \sum_i m_i$ i masa staje się zwykłą wielkością addytywną. Dzięki temu mamy prawo mówić, że masa dwóch worków ziemniaków jest dwa razy większa od masy jednego worka, masa substratów jest równa masie produktów reakcji chemicznej, a nawet uważać za równe masy atomu w stanie podstawowym i wzbudzonym. Tak dochodzimy do reakcji jądrowych, w których różnica mas $\Delta m = m - \sum_i m_i$ nie jest już zaniedbywalna. Warto zwrócić uwagę, że m jest takie samo przed i po reakcji, natomiast Δm ma sens tylko po reakcji rozpadu (lub przed reakcją syntezy), kiedy określa wyzwalaną w reakcji energię (Δm zdefiniowane jako dodatnie dla reakcji rozpadu jest, oczywiście, ujemne dla reakcji syntezy).

Jak na razie wydaje się, że wszystko rozumiemy. Rozkładamy materię na coraz mniejsze elementy i masę obliczamy jako prostą sumę mas składników pomniejszoną o energię wiązania (np. worków z ziemniakami). Czy tak będzie w nieskończoność? Nie jest to wykluczone, ale wydaje się z jednej strony nudne, a z drugiej napotyka pewne trudności. W ten sposób możemy załatwić sprawunki w sklepie warzywniczym, zrozumieć masy atomowe, z grubsza proporcjonalne do liczby nukleonów w jądrze, oraz masy hadronów (proton, neutron, piony i ich krewniacy) jako układów zbudowanych z kwarków.

Zagadką natomiast pozostają masy leptonów, czyli elektronu i jego krewniaków, oraz masy kwarków. Po pierwsze – nie udało nam się stwierdzić ich struktury, po drugie – różnice mas są tu bardzo duże, po trzecie – wygląda na to, że mamy dokładnie trzy pokolenia składające się z dwóch leptonów i dwóch kwarków każde. Jeżeli leptony i kwarki zbudowane są z jakichś bardziej elementarnych bezmasowych składników (masywne składniki pozostawiają pytanie o masę nierozwiązane), to ich dynamika powinna wyjaśnić liczbę pokoleń oraz

Do tej właśnie sytuacji odnosi się popularne rozumienie najsłynniejszego wzoru fizyki $E =$ „m"c^2, który ponoć opisuje możliwość zamiany masy w energię. Rozumienie to jest uzasadnione jedynie wtedy, gdy pamiętamy, że „m" równa się Δm, a nie m. Inną poprawną interpretacją wzoru Einsteina jest podstawienie pod „m" tzw. masy relatywistycznej, czyli wielkości $\frac{m}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$. Wtedy masa relatywistyczna dla $v = 0$, czyli m jest nazywana masą spoczynkową. Masa relatywistyczna jest po prostu energią wyrażoną w odpowiednich jednostkach, i to ona, a nie m, pełni rolę ładunku grawitacyjnego tam, gdzie możemy posługiwać się hybrydą złożoną z newtonowskiej grawitacji i szczególnej teorii względności.

W tym ostatnim przypadku mamy pewne „trudności techniczne" związane z brakiem ogólnej metody rozwiązywania równań teorii oddziaływań silnych – radzimy sobie za pomocą modeli i rozwiązań numerycznych.

obserwowane różnice mas między nimi (np. stosunek masy najcięższego naładowanego leptonu τ do masy elektronu, wynoszący około 3500, czy stosunek mas kwarków $m_t/m_u \approx 400\,000$).

Ale to nie koniec tajemnic związanych z masą w świecie cząstek elementarnych. Oprócz królestwa cząstek materii, czyli leptonów i kwarków, mamy jeszcze królestwo cząstek przenoszących oddziaływania, którego najlepiej znanym przedstawicielem jest bezmasowy foton. Oprócz niego znajdujemy tu – również bezmasowe – gluony, czyli nośniki oddziaływań międzykwarkowych oraz trzy – niespodzianka – masywne bozony W^+, W^- i Z^0, przenoszące oddziaływania słabe, odpowiedzialne za np. rozpad neutronu. Masa tych bozonów jest około 100 razy większa od masy nukleonów albo, jeśli kto woli, równa mniej więcej połowie masy najcięższego kwarku.

Pomysł na to, skąd bierze się masa W^+, W^-, wart był dwóch Nagród Nobla (dla w sumie pięciu laureatów) i zaowocował przewidzeniem wartości ich masy oraz wykryciem nie tylko samych W^+ i W^-, ale również ich neutralnego towarzysza Z^0, przejawów obecności którego wcześniej w przyrodzie nie obserwowano.

Wyjaśnienia zagadki mas bozonów pośredniczących dostarcza mechanizm Higgsa, który dodatkowo potrafi nadać masę i leptonom, i kwarkom bez postulowania ich złożoności. W zasadzie nie jest on nowy. Jego źródeł można się doszukać w fizyce ciała stałego. Np. własności półprzewodników wyjaśniane są często za pomocą tzw. pseudocząstek, elektronów i dziur, zachowujących się jak swobodne cząstki obdarzone tzw. masą efektywną, zależną od budowy półprzewodnika, a będącą wynikiem kolektywnego zachowania „prawdziwych" elektronów.

Żeby w podobny sposób wyjaśnić pochodzenie masy cząstek elementarnych, trzeba zapostulować obecność w czasoprzestrzeni czegoś, z czym oddziaływanie nadałoby masy znanym cząstkom. Ponieważ masy są skalarami, więc to coś powinno też być skalarem. Dodatkowo, ponieważ tylko nośniki oddziaływania słabego są masywne, więc nasze coś powinno być czułe tylko na oddziaływania słabe.

Takim najprostszym cosiem jest skalarne pole o czterech stopniach swobody. (Wnikanie w matematyczną strukturę cosia zaprowadziłoby nas za daleko, ale może pomocne będzie stwierdzenie, że np. pole elektromagnetyczne związane z bezmasowym fotonem ma dwa stopnie swobody odpowiadające liczbie niezależnych stanów polaryzacyjnych.) Ale to jeszcze nie koniec minimalnego zestawu cech cosia. Konieczne jest, aby samooddziaływanie cosia sprawiało, że stan o najniższej energii nie jest stanem o najwyższej symetrii. Wtedy, podobnie jak ferromagnetyk spontanicznie magnesuje się poniżej temperatury Curie, tak nasze coś spontanicznie polaryzuje się poniżej pewnej temperatury. W efekcie, bozony pośredniczące, bezmasowe przy bardzo wysokich energiach, zaczynają wyglądać, jakby miały masę. Każdy z nich „dobiera sobie" po jednym brakującym stopniu swobody z pola cosia (bezmasowe bozony pośredniczące mają, jak foton, tylko dwie możliwe polaryzacje, a masowe trzy). Ostatni – czwarty stopień swobody pozostaje jako obserwowalna skalarna cząstka, tzw. bozon Higgsa.

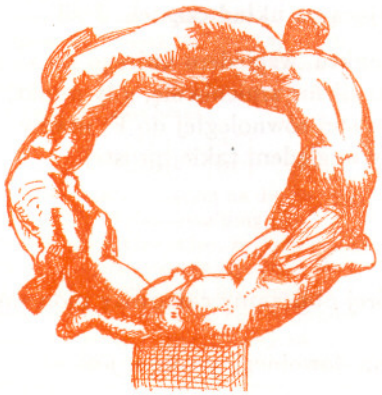
W tym podejściu masy leptonów i kwarków pojawiają się w wyniku oddziaływania z polem Higgsa, a różnice mas tłumaczone są poprzez różnice w sile tego oddziaływania, co, niestety, nie wygląda zbyt elegancko.

Czy tak jest naprawdę? Przewidywania opisanego mechanizmu, będącego podstawą tzw. modelu standardowego cząstek elementarnych, są w bardzo dobrej zgodności z doświadczeniem. Brakuje tylko zaobserwowania samej cząstki Higgsa. Polowanie na nią odbywa się we wszystkich możliwych miejscach. Jak na razie udało się ją osaczyć w granicach od jednej do dziesięciu mas Z^0. Ostateczny werdykt powinien zostać wydany w ciągu dekady.

Albo znajdziemy bozon Higgsa, albo okaże się, że mechanizm Higgsa jest niskoenergetycznym efektywnym opisem nieznanej dynamiki przy bardzo wysokich energiach, albo ... patrząc w lustro, powiemy do siebie „ty ciemna maso!", co by świadczyło, że odkryliśmy coś zupełnie nowego. Pewne jest tylko jedno. W ciągu kilku lat, bez względu na to, którą z trzech możliwości zaobserwujemy, rozpocznie się nowa, fantastyczna przygoda na tropach tajemnic natury.

Środek ciężkości czy masy?

Wojciech KOPCZYŃSKI



Na początku było Słowo,...

Z pojęciem środka ciężkości zapoznałem się na szkolnych lekcjach fizyki. Natomiast z – wypranym z treści fizycznej – pojęciem środka masy zetknąłem się po raz pierwszy na wykładzie z matematyki, prowadzonym 34 lata temu przez Pana Andrzeja Mąkowskiego i mającym na celu przygotowanie do egzaminu wstępnego na Uniwersytet Warszawski. Studiowanie fizyki przekonało mnie, że środek masy jest czymś niezmiernie ważnym, a ze środkiem ciężkości ani w czasie studiów, ani podczas lektury fizycznej literatury naukowej chyba się nawet nie zetknąłem.

Zdziwił mnie ostatnio fakt, że obecnie uczniowie dowiadują się o środku masy na lekcjach fizyki (nie we wszystkich szkołach), a o środku ciężkości wyłącznie od matematyków: o „środku ciężkości trójkąta" z podręczników, a o innych „środkach ciężkości" z artykułów naszego Redaktora Naczelnego. Po co, pisząc o jednym – jak się wydaje – pojęciu, używać dwóch różnych określeń? A może pojęcia te czymś się różnią? Jeśli tak, to użycie którego z nich jest właściwsze?

Określmy te pojęcia, zaczynając od środka masy. Umieśćmy w punktach zaznaczonych wektorami wodzącymi $\mathbf{r}_k$ masy $m_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$. Ważoną masami miarą odległości tego układu cząstek (a jeśli ktoś woli, to punktów materialnych) od punktu zaznaczonego wektorem wodzącym $\mathbf{r}$ jest

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{n} m_k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)^2.$$

Środek masy tego układu cząstek definiujemy jako punkt, w którym funkcja f osiąga minimum. Jeśli przez $\mathbf{R}$ oznaczymy promień wodzący tego punktu, to warunek znikania pochodnej funkcji f względem $\mathbf{r}$ daje

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{r}_k / M,$$

przy czym $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$ jest *całkowitą masą układu*. Żądanie, aby $m_k > 0$ dla każdego k, jest w przypadku tej funkcji warunkiem dostatecznym na (ostre) minimum. (Nieco słabszy warunek „dla każdego k zachodzi $m_k \geq 0$ oraz istnieje k, dla którego $m_k > 0$" jest nie tylko dostateczny, ale i konieczny.) Nie będę zagłębiał się w to, że środek masy izolowanego układu fizycznego porusza się ruchem prostoliniowym i jednostajnym, ani w to, iż fakt ten poprzez twierdzenie Noether wiąże się z niezmienniczością lagranżjanu (patrz: *Delta* 5/1998) względem przekształceń Galileusza, ani w wiele innych ciekawych faktów związanych z pojęciem środka masy.

Kto potrafi za pomocą komputera (ewentualnie ze skanerem), mapy Europy i rocznika statystycznego określić, gdzie leży środek ludności Europy? Radzę zacząć rozwiązywanie tego zagadnienia od dostosowania podanego określenia środka masy do zakrzywionej powierzchni Ziemi. Nadesłane do *Delty* najlepsze rozwiązanie Redakcja opublikuje, a autorowi wypłaci wierszówkę.

Przejdźmy do środka ciężkości. Nazwa ta sugeruje, że jest to pojęcie związane z układem sił grawitacyjnych. Niektórzy adepci fizyki są skłonni przypuszczać, że pojęcie środka dotyczy dowolnego układu sił. W *Delcie* podczas niedawnej dyskusji nad zadaniem na temat siły Coriolisa jeden z jej uczestników zauważył, że oprócz tej siły mogą pojawić się siły oporu i – o ile ich środek nie będzie pokrywał się ze środkiem masy – doprowadzą one do obrotu rozważanego w zadaniu ciała. Miał rację w tym względzie, że siły oporu mogą doprowadzić (łącznie z siłami Coriolisa) do obrotu, ale i nie miał racji, bo siły oporu ani siły Coriolisa na ogół nie mają środka. Tak czy inaczej środek układu sił $\mathbf{F}_k$, $k = 1, \ldots, n$, działających na układ n cząstek, wiąże się z obrotem układu cząstek jako całości, a o tym decyduje *całkowity moment sił względem punktu O* (początku układu kartezjańskiego):

$$\mathbf{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k.$$

Gdy przesuwamy początek układu kartezjańskiego do punktu O', takiego, że $\overrightarrow{OO'} = \mathbf{r}$, to wtedy $\mathbf{r}_k \mapsto \mathbf{r}_k - \mathbf{r}$, a całkowity moment sił przekształca się

Rozwiązanie zadania M 883.
Umieśćmy jednakowe masy w wierzchołkach czworokąta $ABCD$. Środek masy punktów materialnych A i B leży w środku odcinka AB, a środek masy C i D w środku CD; zatem środek masy czworokąta jest środkiem tego odcinka. Podobnie stwierdzamy, że środek masy jest środkiem każdego z pozostałych odcinków.

Rozwiązanie zadania F 502.
Dla ciężaru ciała znajdującego się na równiku planety mamy z poprzedniego zadania równanie

$$Q_r = G\frac{mM}{R^2} - \frac{4\pi^2 mR}{T^2}.$$

Zgodnie z warunkiem zadania $Q_r = 0$, czyli

$$G\frac{M}{R^2} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

Masa planety o gęstości ϱ wynosi $\frac{4}{3}\pi R^3 \varrho$. Stąd otrzymujemy gęstość

$$\varrho = \frac{3\pi}{GT^2} \approx 19 \text{ kg/m}^3.$$

następująco:

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O - \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

przy czym $\mathbf{F} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k$ jest *całkowitą siłą* działającą na układ cząstek. Jeśli $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, to całkowity moment sił nie zależy od punktu, względem którego go obliczamy. Jeśli zaś $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, to całkowity moment sił nie zmienia się, gdy punkt, względem którego go obliczamy, pozostaje na prostej równoległej do $\mathbf{F}$; mamy więc prawo powiedzieć, że moment sił obliczamy względem takiej prostej. Ponadto obowiązuje

Twierdzenie (słuszne, gdy $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$)
Następujące warunki są równoważne:

1. Istnieje taki wybór prostej, względem której obliczamy całkowity moment sił, że ten ostatni znika.
2. Całkowity moment sił, obliczony względem dowolnego punktu, jest prostopadły do całkowitej siły.

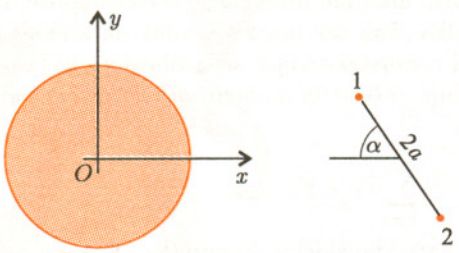
Dowód: Przy ustalonych $\mathbf{M}_O$ i $\mathbf{F}$ równanie

$$\mathbf{M}_O - \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

da się rozwiązać względem $\mathbf{r}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{M}_O \perp \mathbf{F}$. ■

Wystąpienie sytuacji opisanej w Twierdzeniu zdarza się rzadko. Może ona zaistnieć, gdy wszystkie siły $\mathbf{F}_k$ mają jednakowy kierunek – a więc w szczególności gdy mamy do czynienia z jednorodnym polem grawitacyjnym lub elektrycznym. Ale w przypadku jednorodnego pola elektrycznego sytuacja ta nie wystąpi, gdy całkowity ładunek układu cząstek wynosi zero. Tylko w przypadku jednorodnego pola grawitacyjnego – ze względu na dodatniość masy – sytuacja taka wystąpi zawsze. Można więc mówić o *prostej, wzdłuż której na układ cząstek działa siła grawitacji*. Wraz ze zmianą położenia cząstek prosta ta będzie się zmieniać względem zewnętrznego układu odniesienia, zachowując przy tym swój kierunek. Jeśli możemy związać z układem cząstek układ odniesienia, w którym cząstki te spoczywają (a więc gdy cząstki te tworzą ciało sztywne), to względem tego układu odniesienia powyższa prosta będzie się wprawdzie zmieniać, ale wszystkie tak otrzymane proste przetną się w jednym punkcie ciała sztywnego. O punkcie tym obrazowo mówi się, że jest *punktem przyłożenia siły ciężkości*, albo krócej, iż jest *środkiem ciężkości*. Zauważmy jeszcze, że pojęcie środka ciężkości można wprowadzić nie tylko dla ciała sztywnego *sensu stricto*, lecz także dla rotatora, tj. dla układu co najmniej dwóch cząstek, których wzajemne odległości pozostają niezmienne i które leżą na jednej prostej. Środek ciężkości rotatora też znajdzie się na tej prostej.

Odradzałbym nauczycielom obszerne omawianie pojęcia środka ciężkości na lekcjach fizyki, gdyż brak na to czasu. Odradzałbym też krótkie wytłumaczenie, że jest to punkt przyłożenia siły ciężkości, gdyż to skądinąd poprawne określenie sugeruje, iż istnieje jakiś punkt przyłożenia dowolnego układu sił. Użycie określenia „środek ciężkości" bez jakiegokolwiek wytłumaczenia też jest ryzykowne, gdyż pozwala domniemywać, że określenie to stosuje się do dowolnego, a nie tylko jednorodnego, pola grawitacyjnego. A to nie jest prawdą.



Dwupunktowy rotator w ziemskim polu grawitacyjnym.

Rozważmy bowiem rotator, składający się z dwóch cząstek o jednakowych masach m, oddalonych o $2a$. Umieśćmy ten rotator w ziemskim polu grawitacyjnym (które w rozsądnym przybliżeniu uznamy za sferycznie symetryczne), tak że jego środek geometryczny znajduje się w odległości r od środka Ziemi O, a jego oś nachylona jest pod kątem α do prostej łączącej oba środki geometryczne (patrz rysunek). Ponieważ w polu sferycznie symetrycznym mamy $\mathbf{F}_k \parallel \mathbf{r}_k$, więc całkowity moment sił działających na rotator, obliczany względem środka Ziemi, znika: $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$.

Rozwiązanie zadania M 884.
Umieśćmy w wierzchołkach A, B, C odpowiednio masy $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$. Środek masy punktów A i B będzie wtedy w tym punkcie D odcinka AB, który spełnia warunek

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|},$$

czyli w punkcie leżącym na dwusiecznej kąta ACB. Wykorzystaliśmy tu twierdzenie, które mówi, że dwusieczna kąta dzieli przeciwległy bok trójkąta w takim stosunku, jaki jest stosunek przylegających do niego boków. Środek masy wszystkich punktów leży na odcinku DC, czyli też na dwusiecznej. W podobny sposób stwierdzamy, że leży on na pozostałych dwusiecznych.

Mimo że nie mamy tu do czynienia z polem jednorodnym, istnieje jednak prosta, wzdłuż której działa na rotator siła grawitacyjna: jest ona skierowana równolegle do całkowitej siły działającej na rotator i przechodzi przez środek Ziemi. Chcąc obliczyć całkowitą siłę działającą na rotator, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, obliczmy najpierw siły $\mathbf{F}_1$ i $\mathbf{F}_2$, działające na jego cząstki. Jeśli przez r_0 oznaczymy promień Ziemi, przez g zaś przyspieszenie grawitacyjne na jej powierzchni i założymy, że rotator nie wnika w Ziemię, to

$$\mathbf{F}_1 = -mgr_0^2 \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3} = -mgr_0^2 \frac{(r - a\cos\alpha, a\sin\alpha)}{(r^2 - 2ar\cos\alpha + a^2)^{3/2}}$$

i analogicznie

$$\mathbf{F}_2 = -mgr_0^2 \frac{(r + a\cos\alpha, -a\sin\alpha)}{(r^2 + 2ar\cos\alpha + a^2)^{3/2}}.$$

Łatwo zauważyć, że gdy $\alpha \neq 0$ i $\alpha \neq \pi/2$, to wtedy składowa y siły $\mathbf{F}$ jest różna od zera. A to znaczy, że prosta, wzdłuż której na rotator działa siła grawitacyjna, nie przechodzi na ogół przez jego geometryczny środek. Rotator w ziemskim polu grawitacyjnym nie ma środka ciężkości. Nie ma też środka ciężkości ocean ziemski w polu grawitacyjnym Ziemi i Księżyca. Czy gdyby go miał, możliwe byłyby pływy?

Czy istnieją pole grawitacyjne i ciało sztywne, które umieszczone w tym polu ma środek ciężkości, lecz środek ten nie pokrywa się ze środkiem masy? Na to pytanie nie umiem znaleźć zadowalającej odpowiedzi, skłonny jestem jednak sądzić, że jest ona pozytywna.

Matematyk, pisząc lub mówiąc o środku ciężkości, nie tłumaczy, czym on jest. On go definiuje, a następnie używa. Może to dobrze, że prowokuje ucznia do zadania pytania: – A jaki jest związek tego środka z ciężarem? Źle będzie dopiero wtedy, gdy to pytanie padnie, a matematyk nie będzie umiał na nie odpowiedzieć, nawet odwołując się do lekcyj fizyki. Dlatego radzę, by w szkole słowu „środek" – jeśli zostanie użyte – zamiast „ciężkości" towarzyszyło zawsze słowo „masy".

Przykłady:

1. *Umieśćmy dwupunktowy rotator, opisany w niniejszym artykule, w cylindrycznie symetrycznym polu grawitacyjnym. (Abstrahujemy od jego niefizyczności.) Czy zawsze będzie dla niego istnieć prosta, wzdłuż której działa siła grawitacji?*

Nie. Umieśćmy cząstki rotatora w równej odległości od osi cylindra i po przeciwległych jego stronach, choć niekoniecznie na równej „wysokości". W takiej sytuacji całkowita siła, działająca na rotator, wynosi zero. (W analogicznej sytuacji w polu sferycznie symetrycznym, ponieważ całkowity moment sił znika, ciągle możemy mówić o tym, że siła grawitacji działa wzdłuż prostej – choć nie umiemy przypisać jej zwrotu.) Jeśli cząstki rotatora są istotnie na różnej „wysokości", to całkowity moment sił nie będzie znikał. Proponuję opisać wzorami całkowitą siłę i całkowity moment sił przy dowolnym położeniu rotatora.

2. *Jeśli do uproszczonej, sferycznie symetrycznej, ziemskiej siły grawitacyjnej dodać siłę odśrodkową – wywołaną obrotem Ziemi wokół jej osi – to otrzyma się efektywną siłę grawitacyjną, lepiej (choć niedoskonale) opisującą ziemskie pole grawitacyjne. Czy w takim modelowym polu będzie zawsze istnieć prosta, wzdłuż której na dwupunktowy rotator działa siła grawitacji?*

Nie, bo sytuacja ta jest mieszaniną sytuacji opisanej w artykule i w przykładzie 1. Opisanie jej wzorami pomoże przekonać niedowiarków.

Rozwiązanie zadania M 885.
Ponieważ $AMBM_{AB}$ jest równoległobokiem, więc $(M_{AB}, 1)$ jest środkiem masy punktów materialnych $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(M, -1)$. Zatem dowolny punkt P prostej $M_{AB}C$ można opisać przez

$$P = \frac{1 \cdot M_{AB} + x \cdot C}{1 + x},$$

czyli

$$(1 + x) \cdot P = 1 \cdot M_{AB} + x \cdot C = 1 \cdot A + 1 \cdot B + x \cdot C + (-1) \cdot M.$$

W ten sam sposób dla punktów prostych $M_{BC}A$ i $M_{CA}B$ uzyskujemy równości

$$(1 + y)P = 1B + 1C + yA - 1M, \qquad (1 + z)P = 1C + 1A + zB - 1M.$$

Pozwala to na stwierdzenie, że punkt określony przez warunek

$$P = \frac{1}{2} \cdot (A + B + C - M)$$

leży na każdej z rozważanych prostych.

Jak to robi matematyk?

Nawiązując do artykułu Wojciecha Kopczyńskiego przedstawiam tu matematyczną teorię środka masy i to, dlaczego matematycy czymś takim się zajmują. Będzie to przy tym bardzo szczególny fragment zastosowania w matematyce metod „masowych" – rozpatrywane będą tylko skończone układy punktów materialnych.

Punkt materialny to dla matematyka para złożona z punktu i liczby. Liczba ta jest nazywana masą, choć może być zarówno dodatnia, jak i ujemna (czemu tak – dalej). W interesującym nas kawałku teorii rozważa się *układy punktów materialnych*, czyli ich skończone zbiory. Podstawowe pojęcie to *moment statyczny* układu (niech to będzie $\{(A_1, m_1), \ldots, (A_n, m_n)\}$) względem punktu (nazwijmy go P). Określa się go tak: dla jednego punktu (A, m) jest to $\overrightarrow{AP} \cdot m$ (czyli jak w dźwigniach – ramię razy siła), a dla wielu – suma momentów poszczególnych punktów układu, czyli $\overrightarrow{A_1P} \cdot m_1 + \ldots + \overrightarrow{A_nP} \cdot m_n$. *Środek masy* układu to punkt, względem którego układ ma moment równy zeru.

Oto dwa spostrzeżenia. **Po pierwsze** – jeśli S jest środkiem masy rozpatrywanego układu, a O jest dowolnym punktem, to

$$0 = \overrightarrow{A_1S} \cdot m_1 + \ldots + \overrightarrow{A_nS} \cdot m_n = (\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OA_1}) \cdot m_1 + \ldots + (\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OA_n}) \cdot m_n,$$

czyli

$$\overrightarrow{OS} = \frac{\overrightarrow{OA_1} \cdot m_1 + \ldots + \overrightarrow{OA_n} \cdot m_n}{m_1 + \ldots + m_n}.$$

Gdy mówimy o środku masy układu punktów bez podawania ich mas, należy to rozumieć tak, że w każdym z tych punktów umieszczona jest ta sama masa.

A więc, **po drugie** – to jest spostrzeżenie Kartezjusza – środek masy układu punktów materialnych to **w dowolnym układzie współrzędnych (!)** kartezjańskich ich średnia ważona, czyli

$$S = \frac{A_1 \cdot m_1 + \ldots + A_n \cdot m_n}{m_1 + \ldots + m_n}.$$

Technika poszukiwania środka masy stwarza ciekawą możliwość zrobienia z jednego punktu geometrycznego różnych punktów materialnych (patrz przykład **3**).

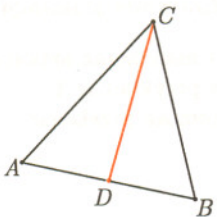
Wynika stąd w szczególności, że środek masy dowolnego układu punktów materialnych leży w najmniejszej podprzestrzeni zawierającej te punkty (a więc np. na prostej, na płaszczyźnie).

Aby sprawnie poszukiwać środka masy, przydatne jest pojęcie *układów równoważnych*, czyli takich, które względem każdego punktu mają ten sam moment statyczny. Wyżej poczynione spostrzeżenia pozwalają stwierdzić, że z każdym układem równoważny jest układ jednopunktowy: środek masy pierwotnego układu z sumą jego mas. Zatem na to, by dwa układy były równoważne, potrzeba i wystarcza, by miały ten sam środek masy i tę samą sumę mas.

Przykłady:

1. *Środek masy wierzchołków trójkąta to punkt przecięcia jego środkowych.*

Mamy układ $U = \{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$. Zastępujemy $\{(A, 1), (B, 1)\}$ przez równoważny mu układ $\{(D, 2)\}$, gdzie $D = \frac{1 \cdot A + 1 \cdot B}{2} = \frac{A + B}{2}$. Zatem D jest środkiem odcinka AB. Układ U jest równoważny układowi $\{(D, 2), (C, 1)\}$, co już wystarcza do dowodu **1**, bo środek S masy tego układu leży na CD, czyli na środkowej – analogicznie stwierdzamy, że leży na pozostałych środkowych. Faktycznie uzyskaliśmy znacznie więcej: wiemy, że $\overrightarrow{DS} : \overrightarrow{CS} = -1 : 2$, a więc środkowe dzielą się w stosunku 1 : 2.



2. *Środek masy punktów materialnych $(A, 1)$, $(B, -1)$, $(C, 1)$ jest w takim punkcie D, że $ABCD$ jest równoległobokiem.*

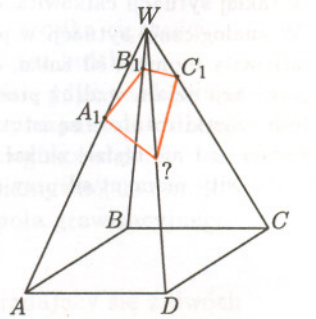
Wystarczy wykazać, że środek odcinka AC jest środkiem odcinka BD. Ale z definicji środka masy

$$D = \frac{1 \cdot A + (-1) \cdot B + 1 \cdot C}{1 + (-1) + 1} = A - B + C,$$

skąd $A + C = B + D$, a więc $\frac{A + C}{2} = \frac{B + D}{2}$.

3. *Płaszczyzna przecina krawędzie boczne AW, BW, CW ostrosłupa $ABCDW$ o podstawie równoległobocznej odpowiednio w $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$ ich długości, licząc od wierzchołka. Znaleźć stosunek, w jakim ta płaszczyzna dzieli krawędź DW.*

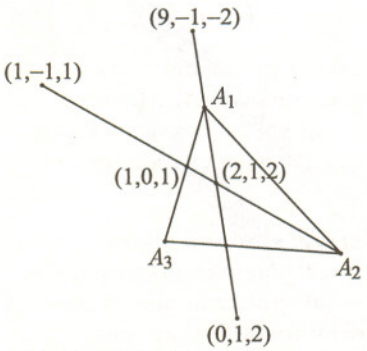
Umieśćmy w punktach A, B, C odpowiednio masy 1, −1, 1. Z punktu W robimy trzy punkty materialne, obdarowując go kolejno takimi masami, aby (patrz rysunek) środek masy $(A, 1), (W, m_A)$ wypadał w A_1, środek $(B, 1), (W, m_B)$ w B_1 i środek $(C, 1), (W, m_C)$ wypadał w C_1. Jak nietrudno obliczyć, $m_A = 2$, $m_B = -4$, $m_C = 3$.



Obliczamy środek S masy układu wszystkich (sześciu) punktów, różnie grupując wyrazy:

$$S = \frac{(1A + 2W) + (-1B - 4W) + (1C + 3W)}{1 + 2 - 1 - 4 + 1 + 3} =$$
$$= \frac{3A_1 - 5B_1 + 4C_1}{2} =$$
$$= \frac{(1A - 1B + 1C) + (2W - 5W + 4W)}{2} = \frac{D + W}{2}.$$

Drugi wiersz mówi, że S leży na płaszczyźnie $A_1B_1C_1$, a trzeci, że jest środkiem DW.



Przykłady współrzędnych barycentrycznych punktów.

Użycie ujemnych mas matematycznie spowodowane jest spostrzeżeniem, że dla mas dodatnich środek masy zawsze leży wewnątrz uwypuklenia zbioru punktów (czyli najmniejszego zbioru wypukłego, który je zawiera). Gdy zatem chcemy, by środek masy mógł znaleźć się w dowolnie wskazanym miejscu, musimy dopuścić również i masy ujemne. Z fizycznego punktu widzenia można powiedzieć, że oprócz dźwigni dwustronnych dopuszczać będziemy również dźwignie jednostronne. A poza tym uzasadnia to odrzucany przez fizyków termin *środek ciężkości* – realny ciężar, jako suma grawitacji i wyporu, może być zarówno dodatni, jak i ujemny (np. balony).

Technikę środków ciężkości wprowadził do matematyki Archimedes, później miała ona od czasu do czasu rozmaitych zwolenników, ale w pełni konsekwentnie uczynił z niej narzędzie matematyki (ciągle mówimy tylko o skończonych układach punktów) Ferdinand Möbius (*Der baryzentrische Calcül*, 1827). Współrzędne barycentryczne, jakie wprowadził, stały się nieodłącznym narzędziem najsilniejszej z dyscyplin algebraicznych, którą jest dziś geometria algebraiczna.

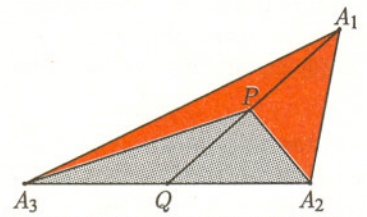
Jeżeli mamy na płaszczyźnie trzy niewspółliniowe punkty (w dowolnej przestrzeni – wierzchołki maksymalnego sympleksu), to możemy każdemu punktowi przyporządkować trójkę liczb – mas, jakie należy umieścić w kolejnych wierzchołkach trójkąta, aby środek masy wypadł właśnie w tym punkcie. Ta trójka to *współrzędne barycentryczne* tego punktu. Oczywiście, każdy punkt ma wiele różnych układów współrzędnych barycentrycznych w danym układzie odniesienia (czyli dla danej trójki punktów) – są to wszystkie trójki proporcjonalne, z wyjątkiem trójki samych zer.

Jest to największa zaleta współrzędnych barycentrycznych – wszystkie zależności geometryczne opisywane są przez równania jednorodne, co ogromnie upraszcza rachunki.

Odniesienie do klasycznej geometrii może być takie. Jeśli zdecydujemy się posługiwać polem zorientowanym (tj. brać pole trójkąta z plusem, gdy jego wierzchołki są uporządkowane zgodnie z orientacją układu odniesienia (A_1, A_2, A_3), a z minusem w przypadku przeciwnym) i za jednostkę pola brać $S_{\triangle A_1A_2A_3}$ (pole zorientowane trójkąta $A_1A_2A_3$), to *współrzędne arealne* punktu P, czyli współrzędne barycentryczne unormowane do sumy równej 1, a więc $\left(\frac{m_1}{m_1+m_2+m_3}, \frac{m_2}{m_1+m_2+m_3}, \frac{m_3}{m_1+m_2+m_3}\right)$ są równe $(S_{\triangle A_3PA_2}, S_{\triangle A_1PA_3}, S_{\triangle A_2PA_1})$.

Funkcja jednorodna stopnia k to taka funkcja n-argumentowa f, która dla dowolnych argumentów spełnia warunek $f(\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda \cdot x_n) = \lambda^k \cdot f(x_1, \ldots, x_n)$. Równanie $f = 0$ jest dla takiej funkcji nazywane równaniem jednorodnym. Dla wielomianów jednorodność oznacza, że wszystkie wyrazy są tego samego stopnia.

Współrzędne arealne nie są określone wtedy, gdy współrzędne barycentryczne sumują się do zera. Należy wtedy przenieść się do geometrii rzutowej, o czym tu nie będziemy mówić. Wszystkie punkty zwyczajnej przestrzeni czy płaszczyzny mają współrzędne barycentryczne o sumie różnej od zera.



Oto początek dowodu podanego wyżej związku współrzędnych arealnych z polem w przypadku współrzędnych dodatnich:

$$\frac{m_2}{m_3} = \frac{|A_3Q|}{|QA_2|} = \frac{S_{\triangle A_3A_1Q}}{S_{\triangle QA_1A_2}} =$$
$$= \frac{S_{\triangle A_3PQ}}{S_{\triangle QPA_2}} = \frac{S_{\triangle A_3A_1Q} - S_{\triangle A_3PQ}}{S_{\triangle QA_1A_2} - S_{\triangle QPA_2}} =$$
$$= \frac{S_{\triangle A_1PA_3}}{S_{\triangle A_2PA_1}}.$$

Dokończenie tego dowodu, jak też uzasadnienie wszystkich dalej przytoczonych faktów, to nietrudne zadania – polecam je z całego serca.

Jeśli rozpatrzymy układ współrzędnych kartezjańskich, w którym jest $A_1 = (1, 0)$, $A_2 = (0, 1)$, $A_3 = (0, 0)$, to punkt o współrzędnych arealnych (p_1, p_2, p_3) będzie w nim miał współrzędne (p_1, p_2).

Najważniejszy wzór barycentrycznej geometrii opisuje (w przypadku płaszczyzny) pole trójkąta, którego współrzędne arealne są $A = (k_1, k_2, k_3)$, $B = (l_1, l_2, l_3)$ i $C = (m_1, m_2, m_3)$:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix}\right| \cdot S_{\triangle A_1A_2A_3}.$$

Stąd, uznając współrzędne dwóch punktów za dane, a trzeciego za niewiadome, uzyskujemy (jednorodne, stopnia 1, bez wyrazów wolnych) równanie prostej we współrzędnych barycentrycznych – pole jest równe zeru.

Najefektowniejsze – moim zdaniem – elementarne twierdzenie (też w przypadku płaszczyzny), które łatwo można uzyskać tą drogą, to twierdzenie Routha:

jeśli pole trójkąta ABC jest równe $\mathbf{T}$ *oraz* (patrz rysunek obok),

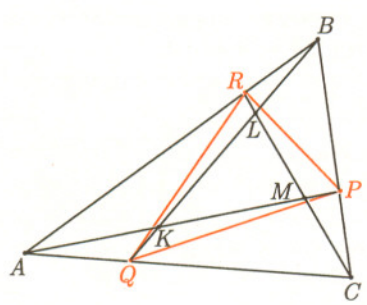
$$\overrightarrow{BP} = \lambda \cdot \overrightarrow{PC}, \quad \overrightarrow{CQ} = \mu\overrightarrow{QA}, \quad \overrightarrow{AR} = \nu\overrightarrow{RB}$$

to pole trójkąta KLM jest równe

$$\left|\frac{(\lambda\mu\nu - 1)^2}{(\lambda\mu + \lambda + 1)(\mu\nu + \mu + 1)(\nu\lambda + \nu + 1)}\right| \cdot \mathbf{T},$$

pole zaś trójkąta PQR jest równe

$$\left|\frac{\lambda\mu\nu + 1}{(\lambda + 1)(\mu + 1)(\nu + 1)}\right| \cdot \mathbf{T}.$$



Uwaga. Punkty P, Q, R mogą być obierane dowolnie na całych prostych BC, AC, AB, nie tylko na bokach trójkąta.

Marek KORDOS

Ile waży kilogram?

Ewa CZUCHRY

Kilogram. Bez wahania odpowiemy, kładąc parę jabłek na prostej wadze szalkowej i porównując siłę, z jaką Ziemia przyciąga jabłka, czyli ich ciężar, z siłą działającą na odważnik. Dlaczego jednak „kilogram" – skoro mierzymy wielkość siły, czemu nie posługujemy się jej jednostką i nie sprzedajemy (lub kupujemy) owoców „na niutony"?

Chociażby po to, aby ustrzec się przed nieuniknionymi stratami albo procesami o nieuczciwość. Ciężar ciała nie jest bowiem wielkością charakterystyczną dla danego ciała, ale zmienia się on wraz z szerokością geograficzną albo wysokością nad poziomem morza. Nasze europejskie „dziesięć niutonów" ważyłoby wprawdzie więcej na biegunie, ale mniej na równiku i jeszcze mniej na szczytach Himalajów. Dużo wygodniej jest nam operować *masą grawitacyjną*, wielkością z definicji niezależną od natężenia pola grawitacyjnego. Wybierając jakiś przedmiot jako wzorzec, możemy określać *masę grawitacyjną* przez stosunek ciężaru danego ciała do ciężaru *masy wzorcowej*. Otrzymana w ten sposób wielkość jest proporcjonalna do ciężaru ciała, ale nie zależy od miejsca na Ziemi, w którym je ważymy. Możemy więc swobodnie podróżować ze swoim zestawem odważników po całym świecie, nie obawiając się potencjalnych nierzetelnych sprzedawców z okolic podbiegunowych.

Niestety, *masa grawitacyjna* nie opisuje nam jeszcze ilości materii, łatwo wyobrażanej jako ilość atomów wchodzących w skład danego ciała. Można o niej myśleć raczej jak o „ładunku grawitacyjnym", analogicznym do ładunku elektrycznego. Taki „ładunek" opisuje nam nie tylko, z jaką siłą dane ciało jest przyciągane grawitacyjnie przez Ziemię, ale także, z jaką siłą działa ono na Ziemię. W elektryczności ładunek elektryczny i *masa bezwładna*, czyli wielkość opisująca opór (bezwładność) stawiany przez ciało przy próbach zmiany prędkości jego ruchu, mogą być zupełnie różne. Dlaczego więc miałoby być inaczej dla ładunku grawitacyjnego?

Siła grawitacji jest jednak siłą szczególną. Od siły elektrostatycznej różni ją to, że jest ona powszechna i nieunikniona, nie można od niej uciec ani skonstruować ekranów od niej izolujących (analogicznych do klatki Faradaya). Istnieją ciała neutralne elektrycznie, nie istnieją zaś (niestety!) mogące oprzeć się działaniu grawitacji.

Skorzystamy z tej własności materii. Weźmy trochę dowolnej substancji, zważmy i podzielmy na dwie równe części. Każda z nich będzie dwa razy słabiej przyciągana grawitacyjnie i w związku z tym obdarzona dwukrotnie mniejszą *masą grawitacyjną*. Także *masy bezwładne* tych dwóch części – proporcjonalne do ilości zawartych w nich atomów – będą dwa razy mniejsze. A więc dla kawałków tej samej substancji *masy grawitacyjne* muszą być proporcjonalne do ich *mas bezwładnych*.

Ale jak porównywać pod tym względem zupełnie różne substancje? Tutaj musimy sięgnąć po fakty doświadczalne. Przeprowadzona wiele razy słynna obserwacja pokazała, że w próżni dowolne przedmioty, wykonane z zupełnie różnych materiałów – od ołowiu do pierza, spadają swobodnie w polu grawitacyjnym z przyspieszeniem g, stałym dla danego miejsca na Ziemi. Siła przyspieszająca te ciała jest siłą grawitacyjną proporcjonalną do *masy grawitacyjnej*. A więc *masa grawitacyjna* jest proporcjonalna do *masy bezwładnej*, co więcej, stosunek ich wartości jest taki sam dla wszystkich substancji (bo przedmioty z nich wykonane spadają z jednakowym przyspieszeniem). Jeśli więc wybierzemy 1 kg jako jednostkę obydwu mas, stosunek ten będzie równy jeden i otrzymamy równość *masy grawitacyjnej* i *masy bezwładnej*.

Twierdzenie to leży u podstaw ogólnej teorii względności, jednej z najważniejszych teorii XX wieku. W naszych rozważaniach, opartych na doświadczeniu, nie musieliśmy korzystać jednak z jej założeń, na szczęście więc nie jest nam potrzebna dogłębna znajomość tej teorii, gdy wybieramy się do sklepu po kilogram marchewki...

Rozwiązanie zadania F 501.
Rozważmy ciało o masie m pozostające w spoczynku względem powierzchni planety. Działające na nie siły: ciężkości, odśrodkowa i reakcji podłoża (równa co do wartości ciężarowi ciała), równoważą się. Na biegunie i na równiku siły te są skierowane wzdłuż jednej prostej i możemy napisać warunek pozostawania w spoczynku następująco:

$$F_g = Q + \frac{mv^2}{R},$$

gdzie F_g jest przyciągającą siłą ciężkości, Q ciężarem ciała równym wartości siły reakcji podłoża, $\frac{mv^2}{R}$ jest siłą odśrodkową, a v prędkością liniową wynikającą z obrotu planety.

Na biegunie mamy $v = 0$ i stąd $F_g = Q_b$, czyli ciężar ciała Q_b na biegunie jest równy wartości siły ciężkości w tym punkcie.

Na równiku $v = \frac{2\pi R}{T}$, gdzie T jest okresem obrotu. Mamy więc

$$F_g = Q_r + \frac{4\pi^2 mR}{T^2},$$

ale zgodnie z warunkiem zadania $Q_r = \frac{1}{2}Q_b = \frac{1}{2}F_g$, otrzymujemy więc równanie

$$\frac{1}{2}F_g = \frac{4\pi^2 mR}{T^2}.$$

Siła ciężkości F_g, działająca na ciało znajdujące się na powierzchni planety, jest równa $F_g = G\frac{mM}{R^2}$, gdzie $M = \frac{1}{3}\pi\varrho R^3$ jest masą planety o gęstości ϱ. Podstawiając tę postać siły F_g do poprzedniego równania, otrzymujemy, że okres obrotu planety jest równy

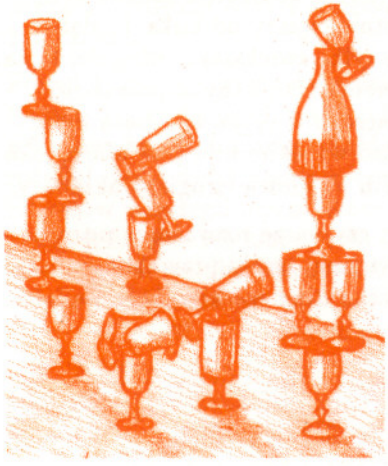
$$T = \sqrt{\frac{6\pi}{G\varrho}} \approx 2 \text{ h } 44 \text{ min}.$$

Czy stawianie igły jest trudniejsze od wstawania z krzesła?

Rys. 1

Wstawanie z krzesła jest chyba łatwe, ale stawianie igły też nie wydaje się bardzo trudne. Wystarczy wbić igłę i już stoi. Chyba że wyjaśnimy sobie, iż igła wbita to nie to samo co postawiona. Dla przykładu sprawdźmy, czy można to zrobić na szkle. Weźmy wysoki słoik, ustawmy go do góry dnem i na tak przygotowanej powierzchni spróbujmy postawić naszą igłę. I co, nie chce stać? Więc wolicie wstawać z krzesła? Spokojnie, dojdziemy i do tego, ale może to dobry moment, żeby się założyć z kolegami? Choć goła igła za nic nie chce pozostać w pozycji wertykalnej, to może udałoby się to, gdyby coś do niej przymocować?

Dajcie szansę Waszym kolegom, uprzedzając, że niedozwolone jest używanie magnesów, baloników z helem itp. Jedynym punktem podparcia zbudowanej konstrukcji ma być ostrze igły. Jeżeli zebrani uznają zadanie za niewykonalne, możecie się zakładać. Wam się to uda. Jedną z możliwości przedstawia rysunek 8. Nawet dla tych, którzy znają rozwiązanie, takie postawienie igły przyniesie frajdę. To się może bujać, kręcić w kółko, a przede wszystkim przeczyć naszemu codziennemu doświadczeniu. Nasi pradziadkowie z lubością oddawali się sztuce tworzenia konstrukcji podobnych do tych przedstawionych na rysunku 2. Dlaczego utrzymują się w równowadze? Choć są dziwne, to pod tym względem niczym nie różnią się od zwykłych przedmiotów. Równowaga jest możliwa przy spełnieniu następującego warunku (a): gdy patrzymy wzdłuż kierunku działania grawitacji, środek ciężkości znajduje się pomiędzy punktami podparcia. Jest to warunek konieczny i wystarczający, gdy ciało ma przynajmniej trzy niewspółliniowe punkty podparcia. Przykładem takiego układu jest słoń na trójnożnym taborecie. Jeżeli wszystkie punkty podparcia leżą na jednej linii, lub, w szczególności, jest tylko jeden punkt podparcia, to ... wszystko się przewróci, chyba że spełniony jest dodatkowy warunek (b): istnieje punkt podparcia, który znajduje się wyżej niż środek ciężkości. Dzięki spełnieniu tego warunku udało nam się postawić igłę. Gdzie jest środek ciężkości naszego układu (w stanie równowagi)? Dokładnie pod punktem zetknięcia igły ze szkłem. Czy potrafilibyście wyznaczyć odległość między tymi punktami? Sufler podpowiada, żeby naszym układem trochę pobujać. Naprawdę – nie bujam.

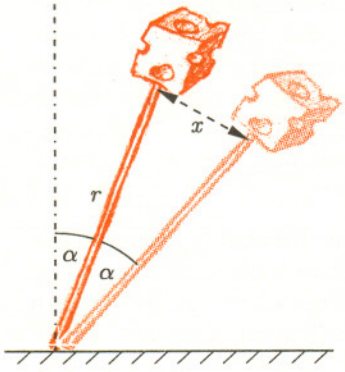


Rys. 2

Wróćmy do gołej igły. Ponieważ nie można dla niej spełnić warunku (b), to realizacja warunku (a) może być tylko chwilowa. Weźmy większą igłę, np. oszczep. Jeżeli ktoś z Was nie ma akurat w domu oszczepu, to szczotka do zamiatania na długim kiju albo sam kij będzie w sam raz. Postawcie kij pionowo na palcu i spróbujcie utrzymać go mniej więcej w takiej pozycji. Jeżeli nigdy tego nie robiliście, to początkowo ćwiczenie może nie wychodzić, ale już po kilku próbach powinniście umieć utrzymać taki kij co najmniej przez minutę. Dlaczego udaje się to pomimo niespełnienia warunku (b)? Żadna filozofia, teraz możemy ruszać ręką w taki sposób, aby skorygować tendencję kija do przewracania się. No to spróbujcie zrobić to samo z igłą albo nawet z ołówkiem. Mogę się założyć, że to Wam się nie uda. Ale to nie koniec. Weźcie kijek o długości około 30–40 cm. Jego też nie będziecie potrafili utrzymać w równowadze (jeżeli ktoś z Was potrafi, to ma zadatki na artystę cyrkowego). Teraz do górnego końca kijka przymocujcie mały ciężar o wadze około ćwierć kilograma (jeżeli mamy

Rys. 3

Rys. 4



Rys. 5

Rys. 6

Rys. 7

nie ma w domu, to można nadziać na kijek odpowiedni kawałek żółtego sera zawiniętego w folię). Kijek z serem można utrzymać już kilkanaście sekund bez specjalnego treningu. Im dłuższy kijek i im większy kawałek sera (w rozsądnych granicach), tym łatwiej.

Pora zastanowić się nad wyjaśnieniem naszych obserwacji. Zamiast starać się spełnić warunek (b), cały czas podwyższaliśmy położenie środka ciężkości. Dlaczego to pomaga? Powód jest bardzo prosty. Im wyżej jest środek ciężkości, tym więcej czasu potrzeba na to, aby kijek upadł. Z drugiej strony, ponieważ precyzja naszych ruchów jest ograniczona, więc dopiero od pewnego rozmiaru kijka jesteśmy w stanie korygować jego ruch.

Postarajmy się wytłumaczyć to trochę dokładniej. Weźmy nieważki, cienki pręt o długości r z punktową masą m na końcu (to jest oczywiście idealizacja naszego kijka z żółtym serem). Odchylmy go pod niewielkim kątem α od pionu (rysunek 5) i puśćmy. Od czego zależy czas, po jakim odchylenie zwiększy się dwukrotnie? Jeżeli rozpatrujemy małe kąty, to możemy przybliżyć łuk, po którym będzie się poruszał ser, przez cięciwę tego łuku, a wtedy mamy zsuwanie się sera po równi pochyłej bez tarcia. W takim przypadku wiemy, że przyspieszenie a nie zależy od masy ciała (zależy jakoś od kąta α, ale to dla nas nie jest istotne), a czas zależy tylko od odległości x proporcjonalnej do r i przyspieszenia. Jeżeli r wyrazimy w centymetrach, a przyspieszenie w centymetrach na sekundę do kwadratu, to jedynym sposobem otrzymania wyniku w sekundach jest wyciągnięcie pierwiastka kwadratowego z ilorazu długości i przyspieszenia $t \approx \sqrt{(r/a)}$. No to jesteśmy w domu. Nie tylko wiemy, że czas, w jakim musimy dokonać korekcji położenia kijka z serem, rośnie z długością kijka, ale nawet wiemy jak. Aby mieć dwa razy więcej czasu, trzeba mieć cztery razy dłuższy kij.

Zaraz, coś chyba naoszukiwaliśmy. W naszym wzorze nie ma masy. Do czego ten ser jest nam potrzebny? Ser jest potrzebny po to, żeby kijek można było uważać za nieważki. Jeżeli kawałek jest już istotnie cięższy od kijka, to dalsze zwiększanie masy nic nie pomoże. Pomóc może tylko zwiększanie długości kijka. Jak długi goły kij jest równoważny kijkowi z serem? Na to chyba potraficie już sami odpowiedzieć. Rozumiecie również, dlaczego w cyrku akrobata może spokojnie wykonywać ewolucje właśnie na bardzo wysokim kiju (nie wiem, jaka jest fachowa nazwa takiego drąga) umieszczonym na głowie drugiego akrobaty.

Skoro już jesteśmy w cyrku, to zastanówmy się, czy nasze rozważania pozwalają na uzasadnienie używania długiej, poziomo trzymanej tyczki przy chodzeniu po linie. W zasadzie tak, ale tu istotna jest taka cecha długiego kija, której udało nam się przy serze nie zauważyć.

Zacznijmy od prostego doświadczenia. Za pomocą nici mocujemy do haka ciężki przedmiot. Drugi kawałek nici o tej samej długości przywiązujemy do ciężaru od dołu. Która nić zerwie się, jeżeli gwałtownie szarpniemy za dolną nić? Przynajmniej część z Was wie, że zerwie się nić dolna, choć górna jest bliska zerwaniu pod samym wiszącym ciężarem (oczywiście doświadczenie to nie zawsze wychodzi, ważne jest tylko to, że im gwałtowniej szarpniemy, tym większe prawdopodobieństwo zerwania dolnej nici). Co to ma wspólnego z naszą tyczką? Tym, co chroni górną nić, jest bezwładność wiszącej na niej masy. Aby zmienić prędkość ciała, potrzebna jest nie tylko siła, ale i czas. Jeżeli ruch jest bardzo gwałtowny (nie ma czasu), to masę można uważać za przytwierdzoną. Wtedy górna nitka (prawie) nie wie o tym, że ktoś pociągnął za dolną. Z tyczką linoskoczka jest tak samo. Tylko teraz ważna jest nie tyle sama bezwładność, co tzw. moment bezwładności, czyli wielkość mówiąca o tym, jak trudno jest coś obrócić. Moment bezwładności jest tym większy, im większa masa i im dalej od punktu obrotu jest umieszczona. Moment bezwładności tyczki jest ważny dla akrobaty, ponieważ tracenie równowagi związane jest z ruchem obrotowym wokół punktu podparcia. Taka tyczka składa się jakby z dwóch kijów z poprzedniego problemu. (Z jego analizy wiemy, że tyczkę można zastąpić krótszą z ciężarkami na obu końcach). Równowagę za jej pomocą łapie się,

Rys. 8

odpychając się od niej jak od poręczy. Im gwałtowniej się odpychamy (gwałtownie przekręcamy tyczkę wokół osi równoległej do liny), i im większy jest moment bezwładności tyczki, tym bardziej przypomina ona umocowaną poręcz. Oczywiście, zamiast tyczki można używać własnych kończyn czy parasolki (w tym przypadku ważny jest opór powietrza przy gwałtownych ruchach). Każdy to robi odruchowo na równoważni. Najlepiej to widać tuż przed spadnięciem. Czasami za pomocą gwałtownego ruchu udaje nam się równowagę przywrócić. W każdym razie okrzyk „malarz, trzym się pędzla, bo drabina leci!" nie jest wcale taki bezsensowny.

Na koniec ostrzeżenie. Chodzenie po linie, nawet z tyczką, wymaga żmudnego treningu i nikomu nie radzę próbować na wysokości wyższej niż pół metra. Autor i redakcja nie ponoszą żadnej odpowiedzialności za wykorzystywanie tego artykułu do nauki sztuk cyrkowych. Choć rozumienie fizycznych podstaw ewolucji akrobatycznej może pomóc w jej opanowaniu, to od rozumienia do umiejętności droga daleka. No to usiądźmy przed drogą na tytułowym krześle tak jak na rysunku 1. Proste w łokciach ręce, oparte na złączonych kolanach zgiętych pod kątem prostym. Jeżeli komuś uda się wstać, nie zginając łokci, nie odrywając rąk od złączonych kolan i nie odrywając stóp od podłogi, to ma gotowy numer cyrkowy bez wchodzenia na linę.

Małą Deltę przygotował Piotr ZALEWSKI

Aktualności (nie tylko) fizyczne

W dniach od 20. do 26. marca w *Georgia World Congress Center* w Atlancie odbył się *Centennial Meeting of the American Physical Society*. Według organizatorów było to największe spotkanie fizyków w historii, zorganizowane, jak sama nazwa wskazuje, dla uczczenia stulecia APS – Amerykańskiego Towarzystwa Fizycznego.

Ponad 11 tysięcy naukowców uczestniczyło w prawie tysiącu 2–3 godzinnych sesji po kilka-kilkanaście referatów każda. Katalog tytułów sesji przypominał rozkład lotów dużej linii lotniczej, a krótkie streszczenia referatów wręczono uczestnikom w postaci dwóch grubych książek telefonicznych. Większość referatów miała dokładnie określony i skrupulatnie odmierzany czas trwania: 10 minut plus 2 minuty na pytania i odpowiedzi. Mniej więcej co drugi uczestnik miał przynajmniej jedno swoje (podwójne) 5 minut. Stopień komplikacji samego centrum i jego otoczenia (olbrzymia hala sportowa, kwatera główna CNN, przebiegająca przez środek linia kolejowa) potęgowały wrażenie uczestniczenia w jakiejś surrealistycznej podróży.

Trudno powiedzieć, czy w trakcie tej konferencji dokonał się jakiś przełom w fizyce, czy zostało ogłoszone jakieś naprawdę epokowe osiągnięcie. Myślę, że nie. Pewne jest natomiast, że konferencja udowodniła wszechobecność fizyki i fizyków. Gdybym miał wybrać tylko cztery hasła charakteryzujące to spotkanie, a więc chyba i współczesną fizykę, to byłyby to: interdyscyplinarność, nowe materiały, mechanika kwantowa oraz warunki ekstremalne.

Ograniczę się do podania dwóch przykładów. Kilka doniesień dotyczyło zastosowań najpotężniejszego petawatowego, femtosekundowego lasera zbudowanego w Livermore. Tom Cowan poinformował o pierwszym ze złota elektronów o energii do 100 MeV, przypadku wybicia rozbiciu jąder uranu i wytworzeniu par elektron-pozyton za pomocą lasera, a Todd Ditmire doniósł o syntezie termojądrowej, w której (za pomocą tego samego lasera) z gazowego deuteru otrzymano jądra trytu i wolne neutrony (w zestawie mieszczącym się na nocnym stoliku). Natomiast Ida Lee starała się przekonać uczestników konferencji, że następna generacja urządzeń opto-elektronicznych zamiast na krzemie, może zostać oparta na – szpinaku. Jej i współpracownikom udało się wytworzyć za pomocą platyny elektryczny kontakt z fotosyntetyzującą membraną proteinową.

Spotkanie w Atlancie miało szereg imprez towarzyszących. Począwszy od plenarnych (choć odbywanych równolegle) sesji podsumowujących dokonania różnych dziedzin fizyki i wpływu fizyki na inne dziedziny z udziałem wielu laureatów Nagrody Nobla, przez różnego rodzaju wystawy, do popularnych referatów w samym centrum kongresowym i poza nim. Wśród tych ostatnich kilka zasługuje na wyróżnienie. Na przykład Ken Laws z ujmującą prostotą przedstawił „fizykę tańca". Wraz z tancerką wykonał sekwencję taneczną, zawierającą elementy (przy bliższej analizie) pozornie sprzeczne z prawami mechaniki, a w rzeczywistości właśnie na nich oparte. Z kolei Richard E. Berg przeprowadził „test na inteligencję fizyczną", to znaczy próbę demokratycznego przewidzenia wyników prostych, acz podchwytliwych demonstracji fizycznych, w czasie której udało mu się wyprowadzić w pole chyba wszystkich obecnych na sali.

Ostatniego dnia konferencja płynnie przeszła w kolejną (trochę lepiej rozreklamowaną) imprezę – wystawę wyposażenia wnętrz.

Piotr ZALEWSKI

Jak to było z $E=mc^2$?

Stanisław MRÓWCZYŃSKI

Jest zaskakującym paradoksem, że pierwsze wyprowadzenie najsłynniejszej fizycznej formuły $E = mc^2$, w której, przypomnę, E jest energią, m masą, a c prędkością światła, nie było w istocie wyprowadzeniem. W pracy, pochodzącej z września 1905 roku, Albert Einstein rozważał inercję ciała, gdy ono traci energię, emitując światło. Inercja określana jest właśnie przez masę ciała. Jak zauważono w wiele lat po ukazaniu się wspomnianej pracy, Einstein uzyskał słynną formułę, „przemycając" ją w przyjętym założeniu.

Relacja między masą a energią jest bardzo głęboko wkomponowana we współczesną postać teorii względności. Aby więc uchwycić, na czym polega problem z wyprowadzeniem słynnej formuły, musimy sobie uświadomić, co Einstein wiedział, przystępując do analizy zagadnienia inercji. Wspomniana już praca, zatytułowana *Czy inercja ciała zależy od zawartej w nim energii?* była dopiero drugą publikacją poświęconą teorii względności. Wcześniej ukazał się tylko wiekopomny artykuł Einsteina *O elektrodynamice poruszających się ciał*, w którym wyłożone zostały podstawy teorii. Genialny fizyk wykazał w nim, w szczególności, że energia kinetyczna T ciała o masie m, poruszającego się z prędkością v, równa jest

$$T = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right) \cong \frac{mv^2}{2}\,. \tag{1}$$

Druga, przybliżona równość zachodzi, gdy prędkość ciała jest dużo mniejsza od prędkości światła. Podkreślmy tutaj, że pojęcie pełnej energii ciała, a więc energii uwzględniającej jego masę, jeszcze w fizyce nie zaistniało. Do tego właśnie była potrzebna formuła $E = mc^2$.

W pierwszej pracy dotyczącej teorii względności wykazane zostało również, że jeśli energia fali świetlnej wynosi E w jednym układzie odniesienia, to w drugim układzie, który porusza się względem pierwszego z prędkością $\boldsymbol{v}$, energia ta jest równa

$$E' = E\,\frac{1-\frac{v}{c}\cos\phi}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,,$$

gdzie $v \equiv |\boldsymbol{v}|$, zaś ϕ jest kątem pomiędzy kierunkiem rozchodzenia się fali a wektorem $\boldsymbol{v}$.

A teraz rozważmy, tak jak to czyni Einstein, następującą sytuację. Ciało, spoczywające w pewnym układzie odniesienia, wysyła dwie fale elektromagnetyczne, każdą o energii $E/2$. Ponieważ fale emitowane są w przeciwnych kierunkach, ciało pozostaje w spoczynku. Zasada zachowania energii stwierdza tedy, że

$$E_0 = E_1 + E/2 + E/2\,, \tag{2}$$

gdzie E_0 jest energią ciała przed, a E_1 po emisji fal. W układzie odniesienia, który porusza się z prędkością $\boldsymbol{v}$ względem pierwszego, równanie wyrażające zachowanie energii przyjmuje postać

$$E_0' = E_1' + \frac{E}{2}\,\frac{1-\frac{v}{c}\cos\phi}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{E}{2}\,\frac{1+\frac{v}{c}\cos\phi}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = E_1' + \frac{E}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,. \tag{3}$$

Odejmując stronami równania (2) i (3), dostajemy

$$(E_0' - E_0) - (E_1' - E_1) = E\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right). \tag{4}$$

W tym punkcie Einstein wprowadza kluczowe założenie, że wielkość $E_0' - E_0$ może się różnić jedynie o pewną stałą C od energii kinetycznej ciała mierzonej w układzie, w którym to ciało się porusza. A więc,

$$E_0' - E_0 = T_0' + C \tag{5a}$$

oraz analogicznie

$$E_1' - E_1 = T_1' + C\,. \tag{5b}$$

Zauważmy, że przyjęte założenie nie jest bynajmniej oczywiste; szczególnie niezależność stałej C od masy budzi wątpliwość.

Podstawiając postulowane związki (5) do równania (4) oraz wykorzystując wzór (1), dostajemy

$$m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)-m_1c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)=E\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right),$$

co natychmiast prowadzi do poszukiwanej formuły

$$(m_0-m_1)c^2=E\,. \tag{6}$$

Widzimy tutaj, że ubytek masy ciała pomnożony przez c^2 równy jest wypromieniowanej energii.

Na czym zatem polega błąd Einsteina? Dzięki wyrażeniu (1) mamy

$$T_0'-T_1'=(m_0-m_1)c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right),$$

co pozwala przekształcić prawą stronę równania (4). Znajdujemy wtedy

$$(E_0'-E_0)-(E_1'-E_1)=\frac{E}{(m_0-m_1)c^2}\,(T_0'-T_1')\,. \tag{7}$$

Równanie (7) jasno pokazuje, że założenie (5) jest faktycznie równoważne wyprowadzanej formule, tzn. wymaga, aby

$$\frac{E}{(m_0-m_1)c^2}=1\,.$$

Wielki fizyk przewidział zapewne postać poszukiwanego wzoru, więc nie bardzo się troszczył o ścisłe wyprowadzenie. Wcale nierzadko się zdarza w naukowej twórczości, że dedukcyjny wywód służy jedynie uzasadnieniu nowatorskiej idei. Pochodzenia pomysłu należy wtedy upatrywać w genialnej intuicji uczonego, co wcale, oczywiście, nie umniejsza jego zasług. Słynną zaś formułę można wyprowadzić kilkoma metodami na gruncie teorii względności, co i sam Einstein w późniejszych pracach pokazał. Przedstawiona historia jest więc jedynie ciekawostką, pokazującą pokrętne drogi genialnych myśli.

Zadania

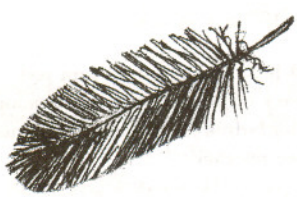
Przygotował Marek KORDOS

Wskazówki do wszystkich zadań matematycznych można znaleźć w artykule *Jak to robi matematyk?* ze strony 6.

M 883. Wykazać, że w dowolnym czworokącie odcinki łączące środki przeciwległych boków i odcinek łączący środki przekątnych mają wspólny środek.
Rozwiązanie na str. 3

M 884. Wskazać masy, które należy umieścić w wierzchołkach trójkąta, aby środkiem masy był środek okręgu wpisanego w ten trójkąt.
Rozwiązanie na str. 5

M 885. Dla dowolnego punktu M oznaczamy przez M_{AB}, M_{BC}, M_{CA} jego obrazy w symetrii względem, odpowiednio, środka odcinka AB, BC, CA. Wykazać, że proste $M_{AB}C$, $M_{BC}A$, $M_{CA}B$ przecinają się w jednym punkcie.
Rozwiązanie na str. 5

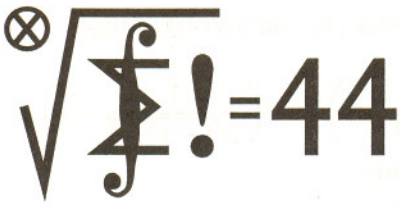


Redaguje Ewa CZUCHRY

F 501. Na równiku pewnej planety ciało waży dwa razy mniej niż na biegunie. Gęstość planety jest równa $\varrho = 3\cdot 10^3$ kg/m^3. Wyznaczyć okres obrotu planety dookoła własnej osi. Założyć, że planeta jest jednorodną kulą o promieniu R.
Rozwiązanie na str. 8

F 502. Wyznaczyć gęstość planety, na której doba wynosi 24 godziny, a na jej równiku ciała są nieważkie. Ponownie założyć, że planeta jest jednorodną kulą.
Rozwiązanie na str. 4

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 1999

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1999.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 367 (WT=2,71) i 368 (WT=1,30)
z numeru 10/1998

Witold Bednorz	– Tychy	43,87
Witold Bednarek	– Łódź	43,00
Zbigniew Skalik	– Pyskowice	42,45
Tadeusz Józefczyk	– Poznań	42,19
Bogumiła Piotrowska	– Zielona Góra	37,24

Zadania z matematyki nr 383, 384

Redaguje Marcin E. KUCZMA

383. Dany jest równoległobok $ABCD$ z kątem ostrym przy wierzchołku A. Okrąg o średnicy AC przecina proste CB i CD odpowiednio w punktach E i F (różnych od C). Prosta styczna do okręgu w punkcie A przecina prostą BD w punkcie P. Dowieść, że punkty E, F i P są współliniowe.

384. Udowodnić, że jeżeli p jest liczbą pierwszą, a n jest liczbą naturalną niepodzielną przez p, to liczba $p^{n!}-1$ dzieli się przez n.

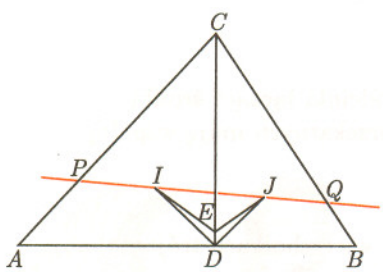
Zadanie **384** zaproponował pan Piotr Żmijewski z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/1999

Przypominamy treść zadań:

375. W trójkącie ABC, mającym kąty ostre przy wierzchołkach A i B, odcinek CD jest wysokością. Prosta przechodząca przez środki okręgów wpisanych w trójkąty ACD i BCD przecina proste CA i CB odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że jeśli $|CP| = |CQ|$, to trójkąt ABC jest równoramienny lub prostokątny.

376. Dana jest liczba naturalna $n \geq 2$. Rozważamy wszystkie pary (k,m) liczb naturalnych spełniające warunki: $1 \leq k < m \leq n$, $k+m > n$, $\mathrm{NWD}(k,m) = 1$. Obliczyć sumę $\sum \frac{1}{km}$, której składniki odpowiadają wszystkim rozważanym parom (k,m).



375. Oznaczmy środki okręgów wpisanych w trójkąty ACD i BCD odpowiednio przez I i J. Na półprostej $CD^{\rightarrow}$ odkładamy odcinek CE o długości $|CE| = |CP| = |CQ|$; tworzą się trójkąty równoramienne CPQ, CPE i CEQ. Proste CI i CJ są osiami symetrii tych dwóch ostatnich trójkątów; zatem

$$|\angle CEI| = |\angle CPI| = |\angle CQJ| = |\angle CEJ|.$$

Oczywiście $|\angle CDI| = |\angle CDJ| = 45°$. Jeśli punkt E pokrywa się z D, to $|\angle CPI| = |\angle CQJ| = 45°$, i wobec tego $|\angle QCP| = 90°$; trójkąt ABC jest w tym przypadku prostokątny. Jeśli zaś punkty D i E są różne, to trójkąty DEI i DEJ są przystające (ich kąty przyległe do wspólnego boku DE są odpowiednio równe); zatem $|EI| = |EJ|$, punkty I i J leżą symetrycznie względem prostej CD, i w konsekwencji trójkąt ABC jest równoramienny.

376. Oznaczmy rozważaną sumę przez S_n. Ustalmy $n \geq 3$. Obliczymy różnicę $S_n - S_{n-1}$. Składniki, które występują w określeniu sumy S_n, ale nie w S_{n-1}, mają postać:

$$(1) \qquad \frac{1}{\ell n}, \quad \text{gdzie } 1 \leq \ell < n, \quad \mathrm{NWD}(\ell, n) = 1.$$

Składniki, które występują w sumie S_{n-1}, ale nie w S_n, mają postać:

$$(2) \qquad \frac{1}{km}, \quad \text{gdzie } 1 \leq k < m \leq n, \quad \mathrm{NWD}(k,m) = 1, \quad k+m = n.$$

Jeśli liczba ℓ spełnia warunki podane w (1), to liczba $n-\ell$ też je spełnia (a przy tym jest różna od ℓ). Zatem składniki typu (1) można pogrupować w pary odpowiadające wartościom $\ell = k$ i $\ell = m$, gdzie $k+m = n$. Każda taka para odpowiada dokładnie jednemu składnikowi typu (2). Stąd wynika, że różnica $S_n - S_{n-1}$ jest sumą wyrażeń postaci

$$\frac{1}{kn} + \frac{1}{mn} - \frac{1}{km}, \quad \text{gdzie } k+m = n$$

– a każde z nich ma wartość zero. To znaczy, że ciąg (S_n) jest stały. Dla $n = 2$ jedynym składnikiem sumy S_2 jest ułamek $\frac{1}{1\cdot 2}$. Tak więc $S_n = \frac{1}{2}$ dla wszystkich n.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 268 (WT=2,33) i 269 (WT=2,53)
z numeru 12/1998

Jarosław Łazuka	– Warszawa	47,18
Marek Wójcicki	– Szczecin	44,23
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	29,07
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	26,01
Aleksander Surma	– Myszków	20,06
Artur Arciszewski	– Kielce	13,34

Po raz drugi zalicza 44 punkty p. Łazuka, a po raz pierwszy – p. Wójcicki, który dzięki temu zostaje 25. członkiem **Klubu 44 F**.

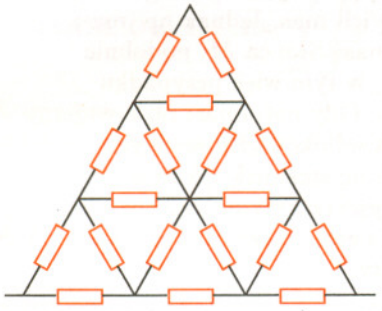
Zadania z fizyki nr 280, 281

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 1999

280. Pocisk artyleryjski przelatuje nad linią frontu i w tym momencie (zapewne wskutek awarii zapalnika) następuje wybuch. Jaka część odłamków spadnie po stronie A, z której nadleciał pocisk? Dana jest prędkość pocisku v_1 (skierowana poziomo i prostopadle do linii frontu) oraz prędkość odłamków v_2 względem układu związanego z pociskiem. Zakładamy, że w tym układzie wartość prędkości odłamków jest jednakowa, a wszystkie kierunki są równo prawdopodobne.

281. Osiemnaście jednakowych oporników (np. po 1 Ω) połączono w obwód przedstawiony na rysunku 1. Obliczyć opór zastępczy między dwoma wierzchołkami trójkąta (nie korzystając ze specjalistycznych programów komputerowych).

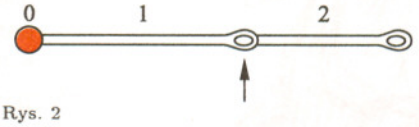


Rys. 1

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/1999

Przypominamy treść zadań:

272. Dwa jednorodne pręty leżą na gładkim stole, przy czym jeden koniec pręta 1 jest umocowany w punkcie O, wokół którego może się obracać bez tarcia, a drugi jego koniec jest połączony przegubowo z końcem pręta 2. W chwili początkowej pręty były nieruchome, a jeden był przedłużeniem drugiego. Uderzono w połączone końce prętów, wprawiając oba w ruch (rys. 2); czas działania siły był bardzo krótki. Jaki związek muszą spełniać masy i długości prętów, aby się zderzyły (po wykonaniu obrotu względem siebie o 180°)?



Rys. 2

273. Tempo przepływu ciepła przez ścianę (moc cieplna na jednostkę powierzchni) jest proporcjonalne do różnicy temperatur między wewnętrzną a zewnętrzną powierzchnią ściany, a stała proporcjonalności k charakteryzuje skuteczność izolacji cieplnej. Jeśli wartość tego współczynnika dla „gołej" ściany wynosi $k_1 = 0{,}8$ W/(m^2·K), a dla dodatkowej warstwy styropianu – $k_2 = 0{,}7$ W/(m^2·K), to ile jest równy współczynnik k dla ściany obłożonej dwiema takimi warstwami, od wewnątrz i od zewnątrz?

272. Wprowadźmy oznaczenia: m_1, m_2 – masy prętów, l_1, l_2 – ich długości, ω_1, ω_2 – prędkości kątowe (względem układu inercjalnego), ω_1', ω_2' – początkowe wartości ω_1 i ω_2, α – kąt między przedłużeniem pręta 1 a prętem 2. Rozważmy najpierw sytuację początkową (natychmiast po uderzeniu). Jeśli popęd siły działającej w chwili uderzenia na pręt 2 był równy τ, to pod jej wpływem środek masy pręta uzyskał prędkość $v = \tau/m_2$, natomiast rozpatrując ruch obrotowy względem środka masy, należy uwzględnić moment bezwładności, równy $I_2 = (1/12)m_2l_2^2$. Obliczamy $\omega_2' = -\tau(l_2/2)/I_2 = -6\tau/(m_2l_2) = -6v/l_2$, a podstawiając $v = l_1\omega_1' + l_2\omega_2'/2$, znajdujemy związek między parametrami ω_1' i ω_2':

$$(*) \qquad l_2\omega_2' = -(3/2)l_1\omega_1'.$$

O dalszym ruchu prętów decydują dwie zasady zachowania – momentu pędu K względem punktu O oraz energii kinetycznej E. Każda z tych wielkości jest sumą trzech składników, związanych z: a) ruchem pręta 1, b) ruchem środka masy pręta 2, c) ruchem obrotowym pręta 2 wokół środka masy. Odpowiednie wyrażenia mają postać

$$K_a = (1/3)m_1l_1^2\omega_1,$$
$$K_b = m_2\left(l_1^2\omega_1 + (1/4)l_2^2\omega_2 + (1/2)l_1l_2(\omega_1+\omega_2)\cos\alpha\right),$$
$$K_c = (1/12)m_2l_2^2\omega_2,$$
$$2E_a = (1/3)m_1l_1^2\omega_1^2,$$
$$2E_b = m_2\left(l_1^2\omega_1^2 + (1/4)l_2^2\omega_2^2 + l_1l_2\omega_1\omega_2\cos\alpha\right),$$
$$2E_c = (1/12)m_2l_2^2\omega_2^2.$$

Wartości stałych K oraz E obliczamy dla chwili początkowej, podstawiając $\alpha = 0$ oraz wzór $(*)$; otrzymujemy

$$K = K_a + K_b + K_c = \omega_1'l_1^2\left((1/3)m_1 + (1/4)m_2\right),$$
$$2E = 2E_a + 2E_b + 2E_c = \omega_1'^2l_1^2\left((1/3)m_1 + (1/4)m_2\right).$$

Aby rozstrzygnąć, czy pręty się zderzą, należy zbadać ekstrema funkcji $\alpha(t)$, w których $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Zasada zachowania momentu pędu sprowadza się wtedy do równania

$$K = \omega\left((1/3)m_1l_1^2 + m_2\left(l_1^2 + (1/3)l_2^2 + l_1l_2\cos\alpha\right)\right) = \omega_1'l_1^2\left((1/3)m_1 + (1/4)m_2\right),$$

a zasada zachowania energii – do równania

$$2E = \omega^2\left((1/3)m_1l_1^2 + m_2\left(l_1^2 + (1/3)l_2^2 + l_1l_2\cos\alpha\right)\right) = \omega_1'^2l_1^2\left((1/3)m_1 + (1/4)m_2\right).$$

Eliminując ω stwierdzamy, że masy również się skracają i otrzymujemy

$$l_1l_2\cos\alpha = -(3/4)l_1^2 - (1/3)l_2^2,$$

czyli

$$(3l_1 - 2l_2)^2 + 12l_1l_2(1+\cos\alpha) = 0.$$

Dla $\cos\alpha > -1$ równanie to nie może być spełnione, czyli funkcja $\alpha(t)$ nie ma ekstremów. Dla $\cos\alpha = -1$ istnieje jednak rozwiązanie $l_2 = (3/2)l_1$. Oznacza to, że przy takim stosunku l_2/l_1 podczas zbliżania α do 180° następuje spowolnienie względnego obrotu prętów aż do spoczynku. Oczywiście, wtedy nie nastąpi zderzenie prętów, a jedynie ich łagodne zetknięcie. Zamiana prętów wyeliminuje zderzenie, gdy początkowo l_2 było równe (ew. bliskie) $(2/3)l_1$.

273. Omawiany współczynnik k odnosi się, oczywiście, do stanu stacjonarnego, polegającego na tym, że temperatura w każdym punkcie ściany nie zmienia się w miarę upływu czasu (zmiany temperatury występują tylko np. bezpośrednio po włączeniu lub wyłączeniu ogrzewania). Z zasady zachowania energii wynika, że w stanie stacjonarnym tyle samo ciepła przepływa przez każdą warstwę, tzn.

$$k_2(T_2 - T_1) = k_1(T_3 - T_2) = k_3(T_4 - T_3) = P/S,$$

gdzie T_1 jest temperaturą po jednej stronie, T_4 po drugiej, T_2 i T_3 to temperatury styku warstw, a P/S oznacza ciepło przepływające na jednostkę czasu i jednostkę powierzchni. Współczynnik k dla całej ściany znajdziemy z równania

$$k(T_4 - T_1) = P/S.$$

Stąd $1/k = 1/k_1 + 1/k_2 + 1/k_3$, przy czym w naszym przypadku $k_3 = k_2$. Obliczamy $k = 0{,}243$ W/(m^2·K).

Patrz w niebo

Chyba nie doceniamy znaczenia trzeciego prawa Keplera. Gdy czyta się, że stosunek kwadratu czasu obiegu do sześcianu promienia orbity planety jest taki sam dla wszystkich planet, to odbiera się to zapewne jak jeszcze jedną informację, którą należy zapamiętać, by zdać jakiś egzamin. Tymczasem jest to potężne i właściwie jedyne narzędzie astronoma służące do uczciwego wyznaczania mas ciał niebieskich. Trzecie prawo Keplera w pełnej wersji głosi, że odległość a dwóch obiegających się (przyjmijmy dla prostoty, że po kołach) ciał niebieskich o masach M i m oraz czas T tego obiegu spełniają związek

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)},$$

gdzie G oznacza stałą grawitacji. Jak widać, znając wzajemną odległość ciał i okres ich obiegu, można wyznaczyć tylko sumę ich mas. Jednak np. masa planety m jest zaniedbywalna w porównaniu z masą Słońca M, podobnie masa satelity w porównaniu z masą planety itd., w tym więc przypadku wyznacza się praktycznie masę ciała centralnego. Gdy natomiast obserwujemy gwiazdę podwójną, to na podstawie prędkości składników (zmierzonych za pośrednictwem zjawiska Dopplera) otrzymuje się stosunek ich mas, a w konsekwencji można wyznaczyć masę każdej gwiazdy z osobna. Nie można natomiast tak prosto i bez żadnych dodatkowych założeń wyznaczyć masy samotnej gwiazdy ani planety nie mającej satelity.

Rolę tych satelitów często spełniają teraz sztuczne satelity i sondy kosmiczne, bo z analizy nawet jednorazowego przelotu sondy w pobliżu jakiegoś globu można ocenić jego masę. Tak właśnie poznaliśmy z dużą dokładnością masy Merkurego, Wenus, Księżyca i licznych innych satelitów planet. Z kolei wyniki wyznaczeń mas wszelkich gwiazd są w pełnej zgodzie z teorią ich budowy, która przewiduje, że masy gwiazd nie mogą być ani zbyt małe, ani zbyt wielkie. Dolna granica, wynosząca 0,085 masy Słońca, bierze się stąd, że obiekt lżejszy nie byłby w stanie uruchomić w centrum reakcji termojądrowych, a więc z definicji nie byłby gwiazdą. W tym sensie nie są normalnymi gwiazdami brązowe ani – mimo że znacznie masywniejsze – białe karły i gwiazdy neutronowe. Górna natomiast granica mas gwiazd oceniana jest na około 100 mas Słońca – w tym przypadku, mówiąc w skrócie, gwiazda masywniejsza zostałaby rozerwana przez ciśnienie własnego promieniowania. Teoria budowy i ewolucji gwiazd jest obecnie tak ugruntowana, że masy gwiazd pojedynczych ocenia się na podstawie ich własności fizycznych, bez pomocy trzeciego prawa Keplera. Pamiętajmy jednak, że to ono umożliwiało wyznaczanie mas gwiazd w czasach, gdy astrofizyka dopiero powstawała.

Tomasz KWAST

Czerwiec

Późnym wieczorem (bo w czerwcu wieczory są bardzo długie) wysoko na niebie widać dwa duże gwiazdozbiory Herkulesa i Wolarza, a między nimi małą, ale wyraźną Koronę Północną. Nazwa ta jak najbardziej pasuje do tego łańcuszka średnio jasnych gwiazd, symbolizującego diadem podarowany Ariadnie przez Dionizosa. Wewnątrz łuku Korony leży z trudem dostrzegalna gołym okiem (5,8 mag) gwiazda oznaczona w katalogu gwiazd zmiennych symbolem R Coronae Borealis. Jest ona prototypem całej klasy gwiazd nieregularnie zmiennych. Ich działanie można dość brutalnie przyrównać do pracy źle wyregulowanego silnika spalinowego. Gwiazda R CrB (i jej podobne), wskutek niestabilności zachodzących w niej reakcji termojądrowych, wyrzuca od czasu do czasu obłok materii z wysoką zawartością węgla, czyli otacza się chmurą „spalin", przez co jej jasność spada niemal o 10 mag, a więc przestaje być widoczna nawet przez małe teleskopy. Po kilku miesiącach, gdy węglowa otoczka się rozproszy, jasność gwiazdy wraca do poprzedniego poziomu i po roku lub kilku latach, z różnym zresztą natężeniem, zjawisko się powtarza. R CrB leży w odległości 26 pc.

Wieczorem nad zachodnim horyzontem doskonale widać Wenus, w połowie miesiąca znajduje się ona najdalej kątowo od Słońca (w Raku). Marsa widać w pierwszej połowie nocy w Pannie, a Jowisz i Saturn znajdują się w Baranie, a więc wschodzą krótko przed wschodem Słońca. Nów Księżyca wypada 13 VI, a pełnia 28 VI. Księżyc mocno zbliży się do Regulusa 18 VI, ale zakrycia nie zobaczymy. 21 VI jest przesilenie letnie, czyli początek lata, a praktycznie od tej daty dni zaczną się już skracać. Na przełomie czerwca i lipca można próbować wieczorem odszukać nad zachodnim horyzontem Merkurego; 28 VI znajdzie się najdalej od Słońca. Pamiętajmy też: zbliża się sierpniowe (11 VIII) całkowite zaćmienie Słońca widoczne w Europie.

T.K.

6/99 (18)

Γlimatias
$n \to \infty$

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (17)

ZADANIE: Obliczyć całkę $\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} x^{3/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Rozwiązanie:

I sposób: Obliczamy całkę w podanej postaci

$$\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} x^{3/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_{x=y^2}^{1}\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{5}y^5\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \left(\frac{2y}{5}-\frac{y^6}{15}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}-\frac{1}{15}+\frac{2}{5}+\frac{1}{15} = \frac{4}{5}.$$

II sposób: Dokonujemy zmiany kolejności całkowania. Można to zrobić, gdyż funkcja podcałkowa jest ciągła. Granice całkowania w wyjściowej całce opisują obszar

$$\{(x,y); -1 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le 1\} =$$
$$= \{(x,y); 0 \le x \le 1, -\sqrt{x} \le y \le \sqrt{x}\},$$

skąd po zmianie kolejności całkowania otrzymujemy całkę

$$\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} x^{3/2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} x^{3/2}y\Big|_{y=-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{0}^{1} x^{3/2}2\sqrt{x}\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} 2x^2\mathrm{d}x = \frac{2x^3}{3}\Big|_{0}^{1} = \frac{2}{3}.$$

JWR

GRY (3)

W poprzednim Γ-limatiasie podaliśmy sposób znajdowania wygrywającego ruchu w grze *Nim*. Przypomnijmy, że w pozycji złożonej z k stosów, zawierających odpowiednio $n_1, n_2, \ldots, n_k$ bierek, obliczamy sumę dwójkową $s = n_1 +_2 n_2 +_2 \ldots +_2 n_k$. Jeżeli $s = 0$, to jesteśmy na przegranej pozycji i nie pozostaje nam nic innego, jak czekać na błąd przeciwnika. Jeśli jednak $s > 0$, to wygraną mamy w kieszeni, o ile znajdziemy właściwy ruch. W tym celu obliczamy sumy $n_1 +_2 s,\ n_2 +_2 s,\ \ldots,\ n_k +_2 s$ i wybieramy takie $1 \le i \le k$, aby $n_i +_2 s < n_i$. Wówczas z i-tego stosu zabieramy $n_i - (n_i +_2 s)$ bierek. Zwracamy uwagę, że w ostatnim wzorze dodawanie jest dwójkowe, a odejmowanie „zwykłe".

A jaką mamy gwarancję, że takie i istnieje? Przyjrzyjmy się liczbie s. Niech największym składnikiem w rozkładzie liczby s na sumę różnych potęg dwójki będzie 2^j. Oznacza to, że $2^j \le s < 2^{j+1}$. Jakie muszą być liczby $n_1, n_2, \ldots, n_k$, aby s była ich sumą dwójkową? Jeśli każdą z liczb $n_1, n_2, \ldots, n_k$ rozłożymy na sumę różnych potęg dwójki, to 2^j pojawi się w tych rozkładach **nieparzystą** liczbę razy, natomiast 2^l, dla $l > j$, pojawi się **parzystą** liczbę razy. Każda z liczb n_i daje się zapisać w postaci $2^{j+1}q + r$ lub $2^{j+1}q + 2^j + r$, gdzie $q \ge 0$ i $0 \le r < 2^j$, przy czym druga postać występuje dla **nieparzyście** wielu i. Wówczas dla $n_i = 2^{j+1}q + r$ mamy

$$n_i +_2 s = 2^{j+1}q +_2 r +_2 2^j +_2 (s - 2^j) =$$
$$= 2^{j+1}q + 2^j + [(s - 2^j) +_2 r] \ge 2^{j+1}q + 2^j > n_i,$$

a dla $n_i = 2^{j+1}q + 2^j + r$ mamy

$$n_i +_2 s = 2^{j+1}q +_2 2^j +_2 r +_2 2^j +_2 (s - 2^j) =$$
$$= 2^{j+1}q + [(s - 2^j) +_2 r] < 2^{j+1}q + 2^j \le n_i.$$

Wynika stąd, że aby wykonać wygrywający ruch, musimy wybrać stos o liczbie bierek postaci $2^{j+1}q + 2^j + r$. Liczba wygrywających ruchów jest więc **nieparzysta**.

Skąd wiadomo, że podana przez nas strategia jest poprawna? Wykazaliśmy, że w każdej pozycji o dwójkowej sumie liczb bierek różnej od zera istnieje ruch prowadzący do pozycji o sumie 0, podczas gdy każdy ruch zmienia sumę dwójkową liczb bierek, musi więc od pozycji o sumie 0 prowadzić do pozycji o sumie dodatniej. Jeśli więc w dowolnym momencie gry będziemy wykonywać ruch w pozycji o sumie dodatniej, to możemy podać przeciwnikowi pozycję o sumie 0, na co przeciwnik poda nam pozycję o sumie dodatniej, co umożliwi nam podanie pozycji o sumie 0 itd. Ponieważ gra musi się zakończyć (ze względu na skończoną i stale zmniejszającą się liczbę bierek), wygra ta strona, która poda przeciwnikowi pozycję złożoną z 0 stosów, czyli ta strona, która cały czas podaje przeciwnikowi pozycje o dwójkowej sumie 0.

Powyższe rozważania można wykorzystać do nieco innej niż podana w poprzednim Γ-limatiasie procedury znajdowania wygrywającego ruchu. Omówimy ją na przykładzie. Załóżmy, że mamy wykonać ruch w pozycji złożonej z 5 stosów mających odpowiednio 17, 12, 21, 23 i 19 bierek. Zapisujemy liczność poszczególnych stosów w postaci sum różnych potęg dwójki: 16+1, 8+4, 16+4+1, 16+4+2+1, 16+2+1. Szukamy najwyższej potęgi dwójki, która w tych rozkładach występuje nieparzystą liczbę razy (16 występuje 4 razy, więc nie; następnie 8: jeden raz, w porządku), wybieramy jeden ze stosów, w którego rozkładzie wystąpiła ta potęga (nie ma co wybierać, 8 wystąpiło tylko w drugim stosie), a następnie dodajemy potęgi dwójki, które w pozostałych stosach występują nieparzyście wiele razy – w przykładzie takich nie ma, więc otrzymujemy 0. Jest to liczba bierek, którą należy pozostawić w wybranym stosie. W rozważanym przykładzie istnieje więc tylko jeden ruch wygrywający i polega on na zabraniu wszystkich bierek z drugiego stosu.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl

delta
$h=6{,}63\cdot10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$ $\pi=3{,}141592\ldots$
POPULARNY MIESIĘCZNIK MATEMATYCZNO-FIZYCZNO-ASTRONOMICZNY

Zadania I stopnia Olimpiad 1999/2000 będą opublikowane we wkładce do *Delty* 9/1999

Dodatek Olimpijski

Zadania II stopnia oraz finału Olimpiady Astronomicznej, Matematycznej i Fizycznej

XLII OLIMPIADA ASTRONOMICZNA 98/99

ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA (druga seria)

1. W maju 1998 roku za pomocą Kosmicznego Teleskopu Hubble'a zaobserwowano podobny do planety obiekt obiegający gwiazdę podwójną. Oblicz okres obiegu domniemanej planety wokół tej pary gwiazd, jeżeli wielka półoś jej orbity wynosi 1500 AU. Przyjmij, że składniki gwiazdy podwójnej są identyczne, znajdują się w odległości 40 AU od siebie, okres zaś ich obiegu wynosi 60 lat.

2. Jaką maksymalną ogniskową obiektywu można zastosować w małoobrazkowym aparacie fotograficznym (rozmiary klatki $a = 24$ mm, $b = 36$ mm), aby ślad gwiazdy o deklinacji $\delta = 8°$, fotografowanej tym aparatem przez $t = 45$ minut, mógł się w całości zmieścić w kadrze?

3. Na podstawie literatury popularnonaukowej opisz krótko, na czym polega program VLT (Very Large Telescope), jaka jest obecna faza jego realizacji i dotychczasowe rezultaty obserwacyjne.

4. Poniższa tabelka zawiera topocentryczne współrzędne Słońca i Księżyca dla pewnej miejscowości w dniu zaćmienia 11.08.1999 r. Wyznacz momenty pierwszego i ostatniego kontaktu oraz maksymalnej fazy. Wyznacz również wartość maksymalnej fazy zaćmienia.

t [CWE]	$\alpha_\odot$	$\delta_\odot$	α_p	δ_p
11^h00^m	$9^h22^m{,}8$	$15°21'$	$9^h19^m{,}9$	$15°30'$
12 00	9 23,0	15 20	9 21,6	15 23
13 00	9 23,1	15 20	9 23,3	15 16
14 00	9 23,3	15 19	9 25,1	15 07
15 00	9 23,5	15 18	9 26,8	14 58

Średnica tarczy Słońca $D_\odot = 0°31'34''$
Średnica tarczy Księżyca $D_p = 0°32'28''$

ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA

1. Ogólna teoria względności przewiduje oddziaływanie fotonów z polem grawitacyjnym, przy czym kąt ugięcia promienia świetlnego, wyrażony w mierze łukowej, oblicza się ze wzoru

$$\Phi = \frac{4GM}{c^2 d}.$$

Przedyskutuj, jak zmieni się odległość kątowa ρ składników gwiazdy podwójnej obserwowanej podczas całkowitego zaćmienia Słońca w bezpośrednim sąsiedztwie jego tarczy. Przyjmij

stałą grawitacji	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$	$m^3/(kg\,s^2)$,
masę soczewkującą	$M = M_\odot = 1{,}99 \cdot 10^{30}$	kg,
prędkość światła	$c = 2{,}99 \cdot 10^8$	m/s.

Wielkość d jest odległością środka Słońca od kierunku obserwator-gwiazda (dla kierunku stycznego do brzegu tarczy $d = R_\odot = 6{,}96 \cdot 10^8$ m).

2. Sonda *Mars Pathfinder* zmierzając do celu, została całkowicie zatrzymana za pomocą odpowiednich spadochronów i silników hamujących na wysokości 20 m nad powierzchnią Marsa, po czym swobodnie opadła.

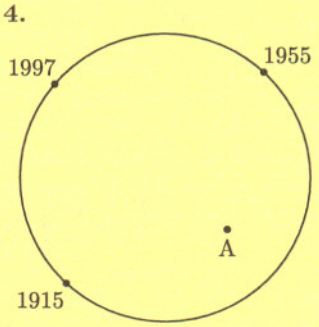
Oblicz, jakie rozmiary powinna mieć kulista, hamująca poduszka powietrzna dla sondy o masie $m = 325$ kg, rozpędzonej w atmosferze Marsa jedynie polem grawitacyjnym, aby prędkość upadku była porównywalna z prędkością lądowania *Pathfindera*.

Aerodynamiczna siła oporu atmosfery wynosi $F_0 = kSv^2$, gdzie v to prędkość sondy, S – pole przekroju spadającego ciała płaszczyzną prostopadłą do kierunku ruchu, zaś k jest współczynnikiem proporcjonalności (dla Marsa $k = 3{,}38 \cdot 10^{-3}$ $N\,s^2/m^4$).

3. Dokładne mapy radiowe jednego z kwazarów wykazały, że kroplowate zgrubienia dżetu (tzw. węzły) w ciągu trzech lat przemieściły się względem jądra kwazara o 25 lat świetlnych.

Oszacuj kąt między kierunkiem ruchu węzła a kierunkiem naszej obserwacji.

4.



Rysunek przedstawia obserwowaną orbitę składnika B gwiazdy podwójnej względem składnika A. Jest to okrąg o promieniu $r = 1{,}5''$, na którym zaznaczono położenia składnika B w wybranych latach. Wiedząc, że składniki są gwiazdami ciągu głównego i typu widmowego G2, wyznacz odległość do tego układu.

ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA

1. Wyznacz współrzędne geograficzne miejsca, w którym całkowite zaćmienie Słońca z dnia 11.08. 1999 r. będzie centralne i nastąpi dokładnie w prawdziwe lokalne południe. Skorzystaj z danych zamieszczonych na stronach 26. i 27. *Kalendarza Astronomicznego na rok 1999* T. Ściężora. Przyjmij promień Ziemi $R = 6370$ km.
W obliczeniach można stosować interpolację liniową.

2. Przedyskutuj, jaką prędkość należy nadać sondzie startującej pionowo z powierzchni Księżyca, aby opuściła układ Ziemia–Księżyc. Jaka może być minimalna wartość tej prędkości? Jako dane liczbowe przyjmij:

$v_{1_Z} = 7{,}91$ km/s	– pierwsza prędkość kosmiczna przy powierzchni Ziemi,
$v_{1_K} = 1{,}68$ km/s	– pierwsza prędkość kosmiczna przy powierzchni Księżyca,
$R_Z = 6370$ km	– promień Ziemi,
$R_K = 1740$ km	– promień Księżyca,
$D = 60{,}3\ R_Z$	– odległość Ziemia–Księżyc.

Zaburzenia spowodowane obecnością innych ciał niebieskich pomiń.

3. Wielu ludzi sądzi, że z dna bardzo głębokich studni można gołym okiem w trakcie dnia dostrzec gwiazdy. Przedyskutuj ten problem, przyjmując, że oko przy pełnej adaptacji może rozróżnić kontrast 5%, a powierzchniowa jasność 1 minuty kwadratowej nieba wynosi $-5{,}2$ magnitudo.

4. Aparatura planetarium odtwarza wygląd nieba podczas całkowitego zaćmienia Słońca w dniu 11.08.1999 r. Na podstawie obserwacji, dostarczonych materiałów i znanych odległości planet od Słońca, wyznacz fazy planet widocznych w tym momencie na niebie i narysuj kształt świecących części ich tarcz.

5. Problem konieczności istnienia we Wszechświecie dodatkowej materii, której nie udało się dotąd zaobserwować, a na którą wskazuje coraz więcej faktów, próbuje się m.in. wyjaśnić istnieniem w gromadach galaktyk hipotetycznych cząstek elementarnych tworzących ciemną materię. Jeśli materia ta do dzisiaj znajduje się w gromadach, to musi być z nimi grawitacyjnie związana.

Jakie wynikałyby stąd szacunkowe masy cząstek tworzących tę materię w przypadku, gdyby miała ona temperaturę: a) 1 K, b) 10^3 K, c) 10^6 K?
Jakie parametry musiałyby charakteryzować cząstki elementarne tworzące taką hipotetyczną materię, skoro nie udało się tej materii dotąd zaobserwować?
Czy któreś ze znanych cząstek elementarnych mogłyby tworzyć tę materię? W obliczeniach upraszczająco przyjmij, że masa gromady $M = 10^{12} M_\odot$ jest skupiona w kuli o promieniu $R = 10^7$ lat świetlnych.

6. Na podstawie samodzielnie przeprowadzonych obserwacji wypełnij *Arkusz Obserwacyjny*.

ARKUSZ OBSERWACYJNY

Obserwator (numer) .....

Miejsce obserwacji .....

Czas (urzędowy lub gwiazdowy) .....

1. Obserwacje za pomocą lunetki:

a. Algol (β *Per*)		
b. M 1 (mgławica *Krab*)		
c. M 3 (gromada kulista)		
d. M 51 (galaktyka)		

2. Określenie współrzędnych horyzontalnych:

a. ..... h = ... A = ...
b. ..... h = ... A = ...
c. ..... h = ... A = ...
d. ..... h = ... A = ...

Uwagi o warunkach obserwacji:

Inne uwagi i spostrzeżenia obserwatora:

Uwaga: rozwiązanie zadań 4 i 6 było możliwe tylko po wykonaniu „obserwacji" pod kopułą planetarium.

Olimpiada Astronomiczna jest jedną z najstarszych organizowanych w Polsce olimpiad. Starszymi od niej są jedynie olimpiady: matematyczna, fizyczna i chemiczna. Od 1958 roku odbyły się 42 olimpiady astronomiczne. Wielu uczestników olimpiad zasila dziś listę zawodowych astronomów. Jednym z nich jest prof. dr hab. Andrzej Wolszczan. W obecnym składzie Komitetu Głównego Olimpiady jest trzech jej byłych uczestników: dr Henryk Brancewicz, dr Grzegorz Kondrat i mgr Marek Szczepański.

Organizatorem olimpiady jest Planetarium Śląskie, które jest jednocześnie siedzibą Biura Olimpiady.

Przewodniczącym Komitetu Głównego jest prof. dr hab. Jerzy Kreiner (WSP Kraków), a wiceprzewodniczącym dr Henryk Chrupała (Planetarium Śląskie).

Do obecnej, 42. edycji olimpiady zgłosiło się 143 uczestników. Do zawodów okręgowych (II stopnia), które odbyły się 11 stycznia br. w Katowicach i Włocławku, dopuszczono 62 uczestników.

Głównymi nagrodami dla laureatów były teleskopy firmy *UNIWERSAŁ*, w tym tzw. szukacz komet.

Końcowa klasyfikacja

I miejsce z tytułem laureata otrzymał Radosław SMOLEC, uczeń klasy IV, II Liceum Ogólnokształcące im. Jana III Sobieskiego w Grudziądzu.

II miejsce z tytułem laureata otrzymał Lech ŁOBODZIŃSKI, kl. II, I Liceum Ogólnokształcące im. Antoniego Osuchowskiego w Cieszynie.

III miejsce z tytułem laureata otrzymali ex aequo:
Miłosz JERKIEWICZ, kl. III, I Liceum Ogólnokształcące im. Stefana Żeromskiego w Jeleniej Górze;
Artur WIROWSKI, kl. IV, I Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika w Łodzi.

IV miejsce z tytułem finalisty otrzymali ex aequo:
Piotr SADOWSKI, kl. III, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu;
Przemysław OWCZAREK, kl. IV, Liceum Ogólnokształcące im. Tadeusza Kościuszki w Łasku.

Ponadto w finale uczestniczyli:
Łukasz KANCLERSKI, kl. III, I Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika w Łodzi;
Konrad KAZNOWSKI, kl. IV, II Liceum Ogólnokształcące im. prof. Kazimierza Morawskiego w Przemyślu;
Karol LANGNER, kl. III, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu;
Tomasz RUDNY, kl. IV, XLVIII Liceum Ogólnokształcące im. Edwarda Dembowskiego w Warszawie;
Tomasz SKIBA, kl. III, IV Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika w Rzeszowie;
Stanisław SKOWRON, kl. IV, XXVIII Liceum Ogólnokształcące im. Jana Kochanowskiego w Warszawie;
Joanna SŁAWIŃSKA, kl. III, II Liceum Ogólnokształcące im. Hetmana Jana Zamoyskiego w Lublinie;
Paweł STASIAK, kl. IV, I Liceum Ogólnokształcące im. ks. J. Kompałły i W. Lipskiego w Ostrowie Wielkopolskim;
Marek WEŻGOWIEC, kl. IV, II Liceum Ogólnokształcące im. Romualda Traugutta w Częstochowie;

L OLIMPIADA MATEMATYCZNA 98/99

ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA (26–27 lutego 1998)

1. Dana jest funkcja $f\colon \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ taka, że $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n$ dla $n = 1, 2, \ldots$ Wykazać, że nie istnieją takie funkcje rosnące $g\colon \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$, $h\colon \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$, że $f = g - h$.

2. Sześcian S o krawędzi 2 jest zbudowany z ośmiu sześcianów jednostkowych. *Klockiem* nazwiemy bryłę otrzymaną przez usunięcie z sześcianu S jednego spośród ośmiu sześcianów jednostkowych. Sześcian T o krawędzi 2^n jest zbudowany z $(2^n)^3$ sześcianów jednostkowych. Udowodnić, że po usunięciu z sześcianu T dowolnego spośród $(2^n)^3$ sześcianów jednostkowych powstaje bryła, którą daje się szczelnie wypełnić klockami.

3. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AB i CD, przy czym $AE : EB = CF : FD$. Punkt P leży na odcinku EF i spełnia warunek $EP : PF = AB : CD$. Udowodnić, że stosunek pól trójkątów APD i BPC nie zależy od wyboru punktów E i F.

4. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC i spełnia warunki:

$$\angle PAB = \angle PCA \qquad \text{oraz} \qquad \angle PAC = \angle PBA.$$

Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Dowieść, że jeżeli $O \neq P$, to kąt APO jest prosty.

5. Niech $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Wyznaczyć liczbę funkcji $f\colon S \to S$ spełniających równość $f^{50}(x) = x$ dla wszystkich $x \in S$.

Uwaga: $f^{50}(x) = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{50}(x)$.

6. Dana jest liczba naturalna $k \geq 2$ oraz liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniające warunki

$$a_1 + 2^i a_2 + 3^i a_3 + \ldots + n^i a_n = 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Dowieść, że liczba $a_1 + 2^k a_2 + 3^k a_3 + \ldots + n^k a_n$ jest podzielna przez $k!$.

ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA (14–15 kwietnia 1999)

1. Punkt D leży na boku BC trójkąta ABC, przy czym $AD > BC$. Punkt E leży na boku AC i spełnia warunek:

$$\frac{AE}{EC} = \frac{BD}{AD - BC}.$$

Udowodnić, że $AD > BE$.

2. Dane są liczby całkowite nieujemne $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{101}$ mniejsze od 5050. Dowieść, że spośród nich można wybrać takie cztery różne a_k, a_l, a_m, a_n, że liczba $a_k + a_l - a_m - a_n$ jest podzielna przez 5050.

3. Dowieść, że istnieją takie liczby naturalne $n_1 < n_2 < \ldots < n_{50}$, że $n_1 + S(n_1) = n_2 + S(n_2) = n_3 + S(n_3) = \ldots = n_{50} + S(n_{50})$, gdzie $S(n)$ jest sumą cyfr liczby n.

4. Rozstrzygnąć, dla jakich liczb naturalnych $n \geq 2$ układ równań

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + 50 = 16x_1 + 12x_2 \\ x_2^2 + x_3^2 + 50 = 16x_2 + 12x_3 \\ x_3^2 + x_4^2 + 50 = 16x_3 + 12x_4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1}^2 + x_n^2 + 50 = 16x_{n-1} + 12x_n \\ x_n^2 + x_1^2 + 50 = 16x_n + 12x_1 \end{cases}$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

5. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ będą liczbami całkowitymi. Udowodnić, że

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (|a_i - a_j| + |b_i - b_j|) \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - b_j|.$$

6. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ zachodzą równości

$$\angle A + \angle C + \angle E = 360^\circ, \qquad \frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1.$$

Dowieść, że $\dfrac{AB}{BF} \cdot \dfrac{FD}{DE} \cdot \dfrac{EC}{CA} = 1$.

Finał tegorocznej – jubileuszowej Olimpiady Matematycznej odbył się w Bielsku Białej. Honorowy patronat nad olimpiadą objął prezydent Rzeczypospolitej Polskiej – Aleksander Kwaśniewski. Dzięki licznym sponsorom pobyt uczestników zawodów III stopnia został przedłużony do 17 kwietnia. Były dodatkowe atrakcje (wycieczki, ognisko).

Oto kilka danych statystycznych dotyczących 50. Olimpiady Matematycznej:

Najliczniej reprezentowane szkoły:

1. XIV LO im. S. Staszica w Warszawie	14
2. IV LO im. T. Kościuszki w Toruniu	7
3. III LO im. Marynarki Wojennej R.P. w Gdyni	6
4. V LO im. A. Witkowskiego w Krakowie	6
5. XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu	6

miasta:

1. Warszawa	19
2. Kraków	12
3. Gdynia	7
4. Toruń	7
5. Wrocław	6

województwa:

1. mazowieckie	21
2. małopolskie	14
3. kujawsko-pomorskie	11
4. pomorskie	8
5. dolnośląskie	7

Końcowa klasyfikacja

Nagrody stopnia pierwszego

1. Michał KAPUSTKA, uczeń klasy IV, V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

2. Michał MATUSZEWSKI, uczeń klasy IV, VIII Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach.

3.–4. Piotr BUCIAK, uczeń klasy V, Zespół Szkół Elektryczno-Elektronicznych im. prof. M.T. Hubera w Szczecinie.

Eryk KOPCZYŃSKI, uczeń klasy IV, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie.

Nagrody stopnia drugiego

5.–7. Paweł PARYS, uczeń klasy I, Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Tarnowskich Górach.

Piotr PRZYTYCKI, uczeń klasy IV, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie.

Mikołaj ZALEWSKI, uczeń klasy I, I Liceum Ogólnokształcące im. Bartłomieja Nowodworskiego w Krakowie.

Nagrody stopnia trzeciego

8.–10. Wojciech KAMIŃSKI, uczeń klasy III, I Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika w Łodzi.

Maciej MOSTOWSKI, uczeń klasy IV, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie.

Michał NOWAKIEWICZ, uczeń klasy IV, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie.

11.–13. Paweł ROCHMAN, uczeń klasy IV, IV Liceum Ogólnokształcące w Toruniu.

Dominik WOJTCZAK, uczeń klasy II, III Liceum Ogólnokształcące im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni.

Paweł ZDZIARSKI, uczeń klasy IV, VI Liceum Ogólnokształcące im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy.

14.–24. Lech DURAJ, uczeń klasy II, V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

Jakub GISMATULLIN, uczeń klasy III, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu.

Tomasz HELBING, uczeń klasy IV, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie.

Artur JEŻ, uczeń klasy II, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu.

Michał KIJAK, uczeń klasy IV, II Liceum Ogólnokształcące im. Ziemi Olkuskiej w Olkuszu.

Jarosław MEDERSKI, uczeń klasy III, I Liceum Ogólnokształcące im. C.K. Norwida w Bydgoszczy.

Piotr SADOWSKI, uczeń klasy III, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu.

Piotr SKIBIŃSKI, uczeń klasy III, IV Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika w Rzeszowie.

Stanisław SKOWRONEK, uczeń klasy II, VIII Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

Michał SZANCER, uczeń klasy IV, XV Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie w Krakowie.

Marcin WOJNARSKI, uczeń klasy III, Katolickie Liceum Ogólnokształcące Ks. Pijarów w Krakowie.

W skład delegacji polskiej na XL Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną, która odbędzie się w Bukareszcie w dniach 13–22 lipca br., powołani zostali: Piotr Buciak, Michał Kapustka, Eryk Kopczyński, Michał Matuszewski, Paweł Parys, Mikołaj Zalewski. Na zawodników rezerwowych powołano Michała Nowakiewicza i Macieja Mostowskiego.

Na XXII Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne, które odbędą się na przełomie czerwca i lipca br. w Austrii, powołano delegację, w skład której wejdą: Jakub Gismatullin, Artur Jeż, Maciej Mostowski, Piotr Przytycki, Piotr Sadowski, Stanisław Skowronek. Zawodnicy rezerwowi: Piotr Skibiński, Michał Borny (uczeń klasy III, II Liceum Ogólnokształcące im. J.H. Zamoyskiego w Lublinie).

Powołano też delegację na X Olimpiadę Matematyczną Państw Bałtyckich, która odbędzie się w Islandii w listopadzie br. Skład tej delegacji jest następujący: Lech Duraj, Wojciech Kamiński, Jarosław Mederski, Marcin Wojnarski, Dominik Wojtczak. Zawodnicy rezerwowi: Piotr Skibiński, Krzysztof Maczyński (uczeń klasy III, V Liceum Ogólnokształcące w Bielsku-Białej).

Ostatnia – XXXIX miedzynarodowa olimpiada matematyczna odbyła się w Tajpej na Tajwanie. Aby zdobyć złoty medal, należało znaleźć się w grupie 36 najlepszych spośród 440 uczestników, reprezentujących 78 państw. W Tajpej nie wystąpiła drużyna chińska (najlepsza w ubiegłych latach) i zwyciężyli uczniowie z Iranu.

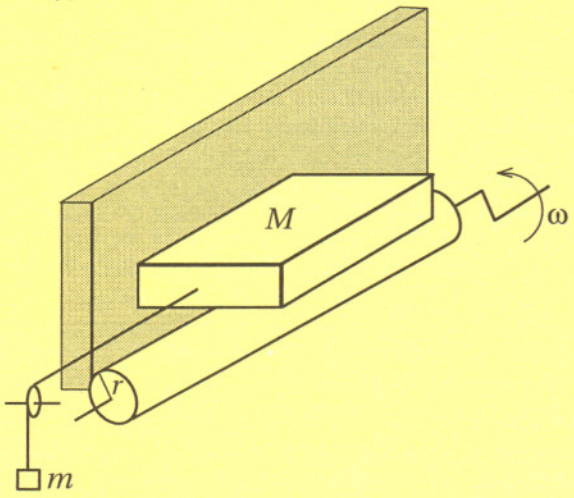
Wyniki polskich uczniów na XXXIX MOM

1. Marcin Stefaniak	III LO w Gdyni	medal złoty
2. Tomasz Czajka	I LO w Stalowej Woli	medal srebrny
3. Michał Kapustka	V LO w Krakowie	medal brązowy
4. Tomasz Sobieszek	XXXI LO w Łodzi	wyróżnienie
5. Piotr Przytycki	XIV LO w Warszawie	wyróżnienie
6. Szymon Pliś	V LO w Krakowie	wyróżnienie

XLVIII OLIMPIADA FIZYCZNA 1998/99

ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA

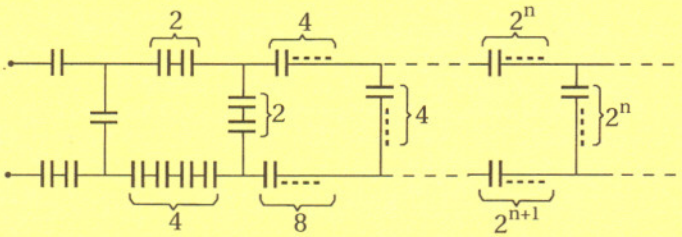
1. Walec o promieniu r obraca się ze stałą prędkością kątową ω wokół ustalonej osi poziomej (rys. 1). Na walcu znajduje się klocek o masie M, który pod wpływem obrotów walca jest dociskany do pionowej ściany. Do klocka jest przymocowana nieważka nić, na której (za bloczkiem obracającym się bez tarcia) jest zawieszony ciężarek o masie m. Naprężenie nici powoduje ruch klocka wzdłuż osi walca, równolegle do płaszczyzny ściany. Współczynnik tarcia między klockiem a walcem wynosi f_1, przy czym $f_1 > m/M$. Współczynnik tarcia między klockiem a ścianą wynosi f_2.



Rys. 1

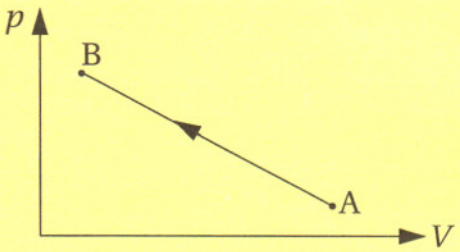
a) Z jaką prędkością porusza się klocek?
b) Jaki warunek spełnia współczynnik tarcia f_2?

2. Oblicz pojemność (mierzoną między punktami A, B) nieskończonej sieci kondensatorów połączonych jak na rysunku 2. Pojemność każdego z kondensatorów wynosi C.



Rys. 2

3. Hel o temperaturze 27°C zajmujący objętość 7 litrów pod ciśnieniem 0,5 at sprężono do objętości 2 litrów i ciśnienia 2 at. Przemiana gazu przebiegała powoli wzdłuż prostej AB (rys. 3).

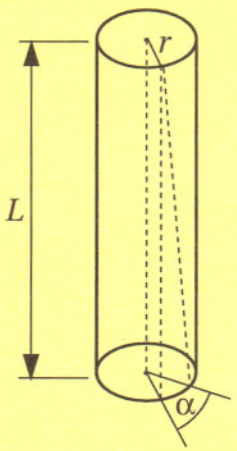


Rys. 3

a) Oblicz najwyższą temperaturę helu osiągniętą podczas tej przemiany.
b) Dla jakiej wartości objętości V nie było wymiany ciepła z otoczeniem?

Przyjmij, że hel zachowuje się jak gaz doskonały.

Zadanie doświadczalne. Rozważmy jednorodny pręt o przekroju kołowym, którego jeden koniec jest unieruchomiony, a drugi skręcony o kąt α pod wpływem momentu siły M (rys. 4).



Rys. 4

W przypadku, gdy ograniczymy rozważania do idealnie sprężystych odkształceń pręta, związek między momentem siły M a kątem skręcenia α można zapisać w postaci

$$M = \frac{\pi G r^4}{2L}\alpha ,$$

gdzie G – moduł sztywności materiału, z jakiego wykonany jest pręt, r – promień pręta, L – długość pręta.

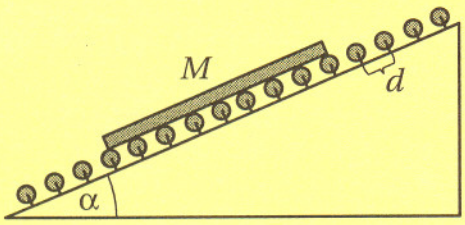
Mając do dyspozycji: drut miedziany o znanej średnicy, ołówek, stoper lub zegarek z sekundnikiem, linijkę, ciężarek o znanej masie i statyw, wyznacz moduł sztywności miedzi.

Uwagi:
1. Zaniedbaj wpływ lakieru, którym pokryty jest drut, na jego własności sprężyste.
2. Przyjmij, że dla ołówka moment bezwładności względem osi prostopadłej do ołówka i przechodzącej przez jego środek wynosi:

$$I = \frac{md^2}{12} ,$$

gdzie m – masa ołówka, d – długość ołówka.

1. Na równi pochyłej o kącie nachylenia α zamocowano szereg jednakowych walców. Osie walców przymocowane są do równi w jednakowych odległościach d od siebie (rys. 1). Moment bezwładności każdego z walców jest równy I, promień wynosi r.



Rys. 1

Po powierzchni walców przemieszcza się kloc o masie M i długości $l = nd$. Każdy walec po zetknięciu z klocem zaczyna obracać się. Początkowo walec ślizga się względem kloca. Poślizg ten ustaje jeszcze przed zetknięciem się kloca z następnym, niżej leżącym walcem. Ruch pozostałych walców będących w kontakcie z klocem odbywa się bez poślizgu. Współczynnik tarcia pomiędzy klocem a każdym z walców jest równy f.

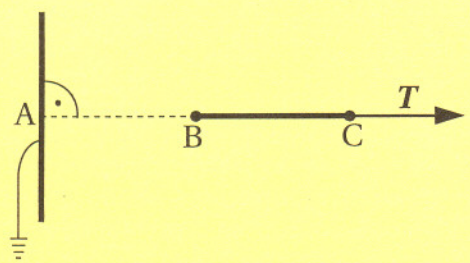
Przyjmij, że w każdej chwili nacisk kloca rozkłada się równomiernie na wszystkie stykające się z nim walce.

a) Jaki warunek musi spełniać współczynnik tarcia f, by średnia prędkość kloca była taka sama na kolejnych odcinkach o długości d?

b) Oblicz tę średnią prędkość.

Zaniedbaj opory tarcia w ruchu obrotowym walców oraz tarcie toczne między klocem a każdym z walców.

2. Na końcach obojętnego elektrycznie, nie przewodzącego i nie ulegającego polaryzacji sztywnego pręta znajdują się jednoimienne, lecz różne punktowe ładunki elektryczne. Prostopadle do pręta umieszczono dużą (w porównaniu z wymiarami pręta), uziemioną płytę przewodzącą. Odległości AB oraz BC, zaznaczone na rysunku 2, są jednakowe.

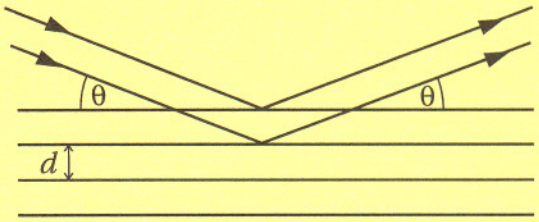


Rys. 2

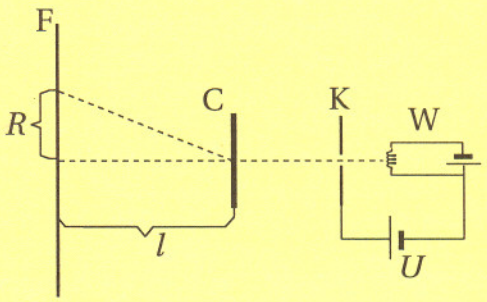
Indukowane na powierzchni płyty ładunki elektryczne powodują przyciąganie pręta do płyty. Utrzymanie pręta w stałej odległości od płyty wymagałoby przyłożenia siły $T = 0{,}02$ N do końca C. Pręt byłby wtedy rozciągany z siłą $R = 0{,}01$ N.

Oblicz siłę, z jaką jest rozciągany ten pręt po usunięciu płyty.

3. Wiązka elektronów o jednakowej energii skierowana na kryształ ulega dyfrakcji wskutek odbicia od płaszczyzn atomowych, podobnie jak promienie Roentgena. Szczególnie silne odbicie wiązki zachodzi dla niektórych kątów θ (rys. 3), co jest wyrazem falowej natury materii.



Rys. 3



Rys. 4

W pewnym eksperymencie, którego schemat jest przedstawiony na rys. 4, elektrony z ogrzewanego włókna W są przyspieszane przez różnicę potencjałów U w kierunku kolimatora K. Utworzona w ten sposób wiązka elektronów pada na wykonaną ze złota, bardzo cienką, polikrystaliczną folię C. Po przejściu przez nią tworzy obraz dyfrakcyjny na kliszy fotograficznej położonej w odległości $l = 30$ cm od folii. Folia jest na tyle cienka, że zachodzą tylko jednokrotne odbicia od kryształów tworzących polikryształ. Na kliszy F powstaje szereg koncentrycznych pierścieni o różnych promieniach odpowiadających kątom, dla których zachodzi silne odbicie wiązki elektronowej.

U [V]	58 000	55 000	44 000	33 700	21 000
$2R$ [cm]	1,50	1,58	1,75	2,00	2,40

W tabeli podano wyniki pomiarów napięcia przyspieszającego U i odpowiadającego mu promienia R najmniejszego pierścienia dyfrakcyjnego. Podane wyniki pomiarów odnoszą się do jednego zespołu płaszczyzn atomowych o odległości międzypłaszczyznowej d.

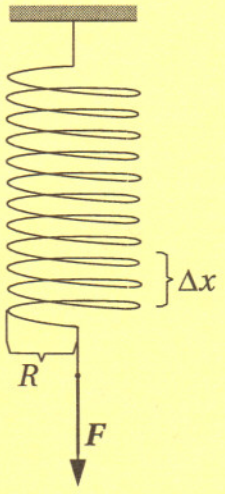
Wyznacz odległość d wiedząc, że każda płaszczyzna danego zespołu płaszczyzn atomowych odbija wiązkę elektronów jak zwierciadło, niezależnie od kąta padania wiązki. (Płaszczyzn atomowych nie należy utożsamiać z powierzchniami ograniczającymi folię.)

Zaniedbaj efekty relatywistyczne.

Stała Plancka $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Js, masa elektronu $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, ładunek elektronu $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

Zadanie doświadczalne. Cylindryczna sprężyna o promieniu R (rys. 5), wykonana z drutu o promieniu r, poddana jest odkształceniu sprężystemu. W przypadku, gdy ograniczymy się do idealnie sprężystych odkształceń drutu, zachodzi liniowa zależność między siłą rozciągającą F a wydłużeniem sprężyny Δx, co można zapisać w postaci:

$$F = \frac{1}{4} r^{\alpha} R^{\beta} G^{\gamma} n^{\delta} \Delta x \ ,$$



Rys. 5

gdzie α, β, γ, δ – pewne (bezwymiarowe) liczby całkowite, G – moduł sztywności materiału, z którego wykonany jest drut.

Masz do dyspozycji: drut miedziany o średnicy $\phi = 0{,}44$ mm ($\pm 0{,}01$ mm), linijkę, obciążnik o znanej masie, statyw, kartkę papieru, którą można wykorzystać do nawinięcia sprężyny oraz kawałek taśmy samoprzylepnej.

Wyznacz wartości stałych α, β, γ, δ oraz moduł sztywności miedzi wyrażony w N/m^2.

Uwagi

1. Zaniedbaj wpływ lakieru, którym pokryty jest drut, na jego własności sprężyste.
2. Sprężyna powinna posiadać co najmniej 10 zwojów.
3. Odległość między zwojami sprężyny powinna być znacznie mniejsza od jej promienia R.

Końcowa klasyfikacja

Laureaci XLVIII Olimpiady Fizycznej (w kolejności zajętych miejsc):

1. Marek Tomasz BISKUP, kl. IV, II Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Starachowicach.
2. Paweł Aleksander MAŚLANKIEWICZ, kl. IV, VIII Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach.
3. Przemysław Piotr BRONIEK, kl. III, V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.
4. Andrzej Janusz JAROSZ, kl. III, V Liceum Ogólnokształcące im Augusta Witkowskiego w Krakowie.
5. Piotr NOWAKOWSKI, kl. IV, Zespół Szkół Ogólnokształcących Nr 2 im. Marii Skłodowskiej-Curie w Gorzowie Wlkp.
6. Marcin Grzegorz DOMAGAŁA, kl. IV, VI Liceum Ogólnokształcące im. Jana Kochanowskiego w Radomiu.
7. Piotr Rafał MIŁOŚ, kl. IV, II Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika w Mielcu.
8. Michał Marcin KIJAK, kl. IV, II Liceum Ogólnokształcące im. Ziemi Olkuskiej w Olkuszu.
9. Wojciech WASILEWSKI, kl. III, XII Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Wyspiańskiego w Łodzi.
10/11. Michał Jan MATUSZEWSKI, kl. IV, VIII Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach.
Wojciech Dominik SANKOWSKI, kl. IV, I Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika w Łodzi.
12. Łukasz MATYLLA, kl. IV, VIII Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.
13. Tomasz HELBING, kl. IV, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie.
14. Rafał Stanisław WARDZIŃSKI, kl. IV, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie.
15. Krzysztof Łukasz MAZUR, kl. IV, II Liceum Ogólnokształcące im. Prof. Kazimierza Morawskiego w Przemyślu.
16. Tadeusz Jerzy ZIMIRSKI, kl. III, V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.
17. Konrad Bartłomiej ROTUSKI, kl. IV, VI Liceum Ogólnokształcące im. Jana Kochanowskiego w Radomiu.
18. Wojciech Jerzy KAMIŃSKI, kl. III, I Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika w Łodzi.
19. Karol Marcin SZAŁOWSKI, kl. II, XIII Liceum Ogólnokształcące im. Marii Piotrowiczowej w Łodzi.
20. Maciej OSIŃSKI, kl. III, I Liceum Ogólnokształcące im. Jędrzeja Śniadeckiego w Pabianicach.
21. Michał Krzysztof KALISZAN, kl. IV, Liceum Ogólnokształcące Św. Marii Magdaleny i Św. Tomasza z Akwinu w Poznaniu.

Wyróżnienia:
Za rozwiązanie zadania 1: Andrzej JAROSZ (laureat).
Za rozwiązanie zadania 2: Andrzej JAROSZ (laureat), Wojciech KAMIŃSKI (laureat), Sławomir DUSZYŃSKI (finalista) – kl. III, III Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu.