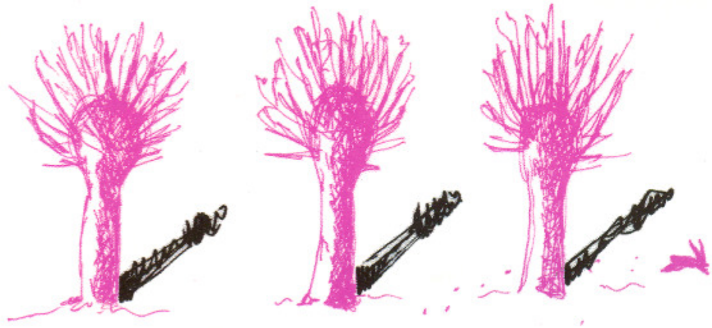


SPIS TREŚCI
NUMERU 1(308)

W następnym numerze:
Zmieniający się Wszechświat

Okładki, ilustracje i rysunki techniczne
Anna Ludwicka

Wybór artykułów w języku angielskim
http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 3 zł

„Delta" – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 853-59-61.
BARTOL@MIMUW.EDU.PL

Skład systemem TEX wykonała Redakcja.
Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące**. Cena jednego numeru w 2000 roku wynosi 3 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2000 r. wynosi 6 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na II kwartał 2000 r. wynosi 9 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch" S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską".
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest równa cenie prenumeraty krajowej plus rzeczywiste koszty wysyłki. Wpłaty przyjmuje „RUCH" S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8^{00} – 14^{00}.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem za granicę			
5 XII	20 XI	na	I	kwartał roku następnego,
5 III	20 II	na	II	kwartał,
5 VI	20 V	na	III	kwartał,
5 IX	20 VIII	na	IV	kwartał.

6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH" S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także tel. 620-10-19 i 620-12-17, wewn. 2366.

Numery archiwalne (od 1985 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Losowe prognozy pogody

Bolesław KOPOCIŃSKI

Podejmowanie decyzji w warunkach niepewności wymaga prognozowania zdarzeń. Praktyka krótkoterminowych prognoz pogody w naszym klimacie pokazuje, że to zadanie nie jest trudne. Hugo Steinhaus (1887–1972), matematyk lwowski i wrocławski, znawca problemów świata zewnętrznego, proponował dla Wrocławia następującą prognozę: jutro będzie taka sama pogoda jak dzisiaj. Nieco dla przekory sprawdzimy tę prognozę dla Phoenix w USA (J.E. Freud, *Podstawy nowoczesnej statystyki*, PWE, Warszawa 1971). Zapisywano tam zachmurzenie nieba w procentach. Dzień uznajemy za: słoneczny, o zachmurzeniu zerowym (Z, 0–5% zachmurzenia), średnim (S, 6–49%) lub dużym (D, 50–100%). Stan zachmurzenia następnego dnia oznaczmy odpowiednio przez Z^*, S^* i D^*. Tabela pokazuje następstwo pogody zaobserwowane w 61 dniach lata 1964 roku.

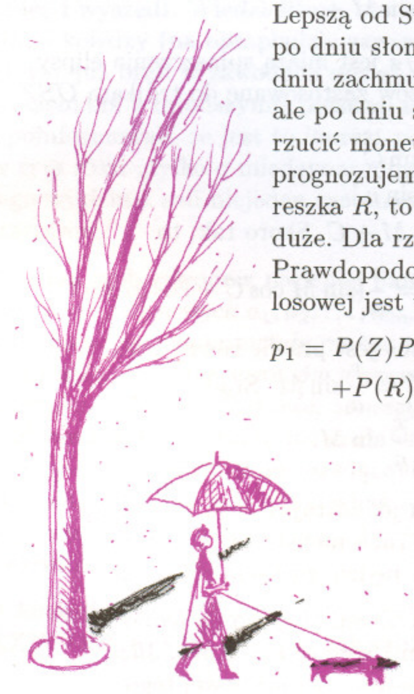
		Pogoda jutro			
		Z^*	S^*	D^*	Razem
Pogoda dziś	Z	19	5	4	28
	S	6	2	6	14
	D	2	7	9	18

Częstościowe oszacowania prawdopodobieństw zdarzeń Z, S, D są więc następujące: $P(Z)=\frac{28}{60}$, $P(S)=\frac{14}{60}$, $P(D)=\frac{18}{60}$. Wiersze tabeli pozwalają obliczyć prawdopodobieństwa warunkowe:

$$P(Z^*|Z)=\frac{19}{28},\quad P(S^*|Z)=\frac{5}{28},\quad P(D^*|Z)=\frac{4}{28},$$
$$P(Z^*|S)=\frac{6}{14},\quad P(S^*|S)=\frac{2}{14},\quad P(D^*|S)=\frac{6}{14},$$
$$P(Z^*|D)=\frac{2}{18},\quad P(S^*|D)=\frac{7}{18},\quad P(D^*|D)=\frac{9}{18},$$

Prawdopodobieństwo trafności prognozy Steinhausa wynosi

$$p=P(Z)P(Z^*|Z)+P(S)P(S^*|S)+P(D)P(D^*|D)=0{,}5.$$



Lepszą od Steinhausowej jest prognoza losowa: po dniu słonecznym jest dzień słoneczny, po dniu zachmurzonym jest dzień zachmurzony, ale po dniu średnio zachmurzonym należy rzucić monetą: jeśli wypadnie orzeł O, to prognozujemy dzień słoneczny, jeśli zaś reszka R, to prognozujemy zachmurzenie duże. Dla rzetelnej monety $P(O)=P(R)=\frac{1}{2}$. Prawdopodobieństwo trafności prognozy losowej jest więc równe

$$p_1=P(Z)P(Z^*|Z)+P(S)[P(O)P(Z^*|S)+$$
$$+P(R)P(D^*|S)]+P(D)P(D^*|D)=0{,}57.$$

Można proponować także inne prognozy, równie dobre; zauważmy jednak, że orzeczenia prognozy losowej, wielokrotnie powtarzane, najlepiej oddają prawdziwy rozkład zachmurzenia w Phoenix.

Podstawy matematyki w wieku XX

3. Logika i obliczalność

Wiktor MAREK, Jan MYCIELSKI

Poprzednie części artykułu ukazały się w *Deltach*: 9/1999 i 11/1999.

Przejdźmy teraz do omówienia logiki i teorii modeli. Rozwój logiki matematycznej wymagał sprecyzowania przedmiotu logiki. Na początku XX wieku było ono nieco różne od dzisiejszego. Co prawda Frege wprowadził formalizm, który później został powszechnie przyjęty, ale sporo czasu zajęło wprowadzenie lepszej notacji! Whitehead i Russell, w książce „Principia Mathematica", której pierwszy tom ukazał się w roku 1910, spopularyzowali współczesny opis składni logiki, ale włączyli do niej część współczesnej teorii mnogości. Pierwszy naprawdę nowoczesny podręcznik logiki matematycznej, napisany przez Hilberta i Ackermanna, ukazał się w roku 1928. Zasadniczy problem, jakie to formuły są zawsze prawdziwe, przy założeniu jakiegoś zbioru formuł A, został rozstrzygnięty przez Gödla w jego pracy doktorskiej opublikowanej w roku 1930. Wykazał tam Gödel, że reguły dowodzenia, wskazane przez Fregego i spopularyzowane przez Whiteheada i Russella, są zupełne – to, co daje się dowieść za pomocą tych reguł z aksjomatyki A, to dokładnie zdania prawdziwe we wszystkich modelach aksjomatyki A. Własność tę nazywamy twierdzeniem o zupełności dla logiki pierwszego rzędu.

Streśćmy pokrótce dowód twierdzenia o zupełności (pochodzący od Henkina i nieco inny niż oryginalny dowód Gödla). Najpierw musimy wykazać, że cokolwiek jest dowodliwe (w systemie „Principia Matematica") z aksjomatyki A, jest prawdziwe we wszystkich modelach A. To wiedzieli już Whitehead i Russell. W drugą stronę rozumowanie jest trudniejsze – jeśli A nie dowodzi jakiejś formuły φ, to musimy skonstruować model, w którym A jest prawdziwa, ale φ nie jest. Model taki konstruujemy, dodając odpowiednie stałe i budując na nich interpretację spełniającą aksjomaty A oraz $\neg\varphi$. Na nowych stałych musimy definiować relacje tak, by aksjomaty A były spełnione, ale formuła φ nie. Korzystając z tego, że „nowe" stałe nie są wspominane w A, rozszerzamy niesprzeczną teorię $A \cup \{\neg\varphi\}$ do teorii zupełnej T, mającej tę własność, iż ilekroć zdanie egzystencjalne $\exists x \psi(x)$ należy do T, to dla jakiejś stałej c, $\psi(c)$ należy do T. Taką konstrukcję musimy powtórzyć nieskończenie wiele razy, coraz to dodając nowe stałe. Ale każda formuła jest skończona i wobec tego, po owej iteracji wykonanej nieskończenie wiele razy, własność zupełności względem zbioru dodanych stałych będzie spełniona. Z tak skonstruowanego zbioru formuł już łatwo odczytać model, w którym A jest prawdziwe, ale φ nie. Na dodatek, jeśli język, z którego zaczynaliśmy konstrukcję, jest przeliczalny, to i model, jaki został skonstruowany, jest przeliczalny. Wynika stąd coś dziwnego, mianowicie że zbiór zdań prawdziwych arytmetyki liczb rzeczywistych (a nawet teorii mnogości!) ma modele przeliczalne. Pokazuje to, że logika „pierwszego rzędu" (dla której mamy własność zupełności) nie opisuje struktur nieskończonych w sposób jednoznaczny. Łatwo też zobaczyć, że arytmetyka Peano (w języku pierwszego rzędu) ma wiele nieizomorficznych modeli. Jeśli zezwolimy na pisanie zdań, w których będą kwantyfikatory przebiegające *podzbiory* zbioru liczb naturalnych, to „paradoks" nieizomorficznych struktur, spełniających arytmetykę Peano, znika, ale tylko pozornie. W każdym modelu teorii mnogości taka teoria ma jeden model, ma jednak inne, gdy zmieniamy model teorii mnogości.

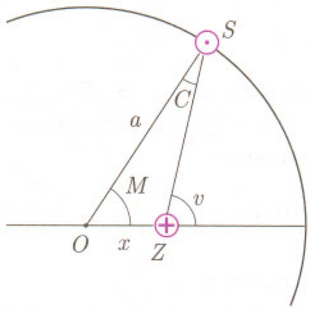
Drugi problem Hilberta dotyczył niesprzeczności arytmetyki Peano. Jak można by wykazać ową niesprzeczność? Intuicyjnie arytmetyka Peano jest niesprzeczna – aksjomaty dotyczące sumy i iloczynu sprawdza się „na palcach", a nawet schemat indukcji jest też oczywisty – każde dziecko wie, że jeśli ustawić kamienie domina pionowo, jeden za drugim i popchnąć, to wszystkie się przewrócą, nawet jeśli jest ich bardzo wiele. Jak można formalnie udowodnić, że żaden dowód nie wykaże równości $0 = 1$? Ale co to jest dowód?

Nieco uogólniając „drugi problem Hilberta", można pytać o niesprzeczność matematyki (nie tylko arytmetyki, ale teorii ZFC). W roku 1931 Gödel wykazał, że nie da się udowodnić niesprzeczności arytmetyki (ani teorii ZFC) w niej samej. Samo wyrażenie tej własności nie jest zupełnie proste. Zauważmy, że wewnątrz arytmetyki możemy efektywnie

Koło czy elipsa?

Tomasz KWAST

Planety, jako doskonałe obiekty położone na doskonałym nieboskłonie, musiały – według astronomów starożytnych – poruszać się też w sposób doskonały, czyli jednostajnie po okręgach. Jednak każdy zainteresowany widział, że obserwowany ruch planet nie jest tak doskonały. Pogodzić teorię z obserwacjami Starożytni próbowali na trzy sposoby. Anaksymander (około 610–550 p.n.e.), a później Eudoksos (408–355 p.n.e.), umieszczali planetę na jednostajnie obracającej się sferze, której oś osadzona była w innej sferze obracającej się wokół innej osi itd., aż ostatnia sfera obracała się w końcu wokół Ziemi. Hipparch (190–125 p.n.e.), a po nim Ptolemeusz (100–168 n.e.), robili coś podobnego, tyle że z okręgami. Umieszczali mianowicie planetę na okręgu (epicyklu), którego środek wędrował jednostajnie po innym okręgu itd., a w środku ostatniego okręgu (deferentu) znajdowała się Ziemia. Obie te procedury przypominają to, co obecnie nazwalibyśmy analizą fourierowską. Dzięki autorytetowi Ptolemeusza ten drugi opis zyskał, jak wiadomo, szczególną popularność i przez półtora tysiąca lat w ten właśnie sposób przedstawiano ruchy planet.



Ale Hipparch próbował chwytu jeszcze innego. Niech mianowicie przykładowo Słońce porusza się jednostajnie po okręgu o promieniu a – skoro tak być musi – ale Ziemia, z której Słońce oglądamy, niech leży w niewielkiej odległości x od środka okręgu (rysunek). Tę odległość x należy tak dobrać, by wynikający z tego modelu niejednostajny ruch Słońca najlepiej zgadzał się z obserwowanym.

W trójkącie OSZ jednostajnie (z założenia) narasta kąt M, ale obserwator znajduje się w punkcie Z i może mierzyć np. kąt v między kierunkiem na Słońce a kierunkiem na jego „perygeum". Gdyby torem Słońca była elipsa, to zależność v od M we współczesnym zapisie miałaby przybliżoną postać

$$v = M + 2e \sin M + \ldots,$$

gdzie tzw. mimośród $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ jest miarą spłaszczenia elipsy o półosiach a i b. Twierdzenie sinusów zastosowane do trójkąta OSZ daje

$$\frac{x}{a} = \frac{\sin C}{\sin v},$$

jak również zachodzi zależność $v = M + C$. Skoro tak, to

$$\sin C = \frac{x}{a}\sin v = \frac{x}{a}\sin(M + C) = \frac{x}{a}(\sin M \cos C + \cos M \sin C).$$

Ale kąt C jest mały, zatem jego sinus jest prawie równy zeru, a cosinus jedności, a więc $\sin C \approx C \approx \frac{x}{a} \sin M$. Stąd

$$v \approx M + \frac{x}{a}\sin M.$$

Tak więc w pierwszym przybliżeniu jednostajny ruch po okręgu będzie widoczny jako obserwowany ruch niejednostajny, gdy współczynnik przy $\sin M$, równy $\frac{x}{a}$, będzie zarazem równy $2e$.

Obecnie wiemy, że mimośród orbity Ziemi (lub, co na jedno wychodzi, orbity Słońca wokół Ziemi) wynosi $e = 0{,}016$. Już Hipparch znalazł niezłe przybliżenie wartości liczbowej tego współczynnika, choć, oczywiście, nie znał jego interpretacji geometrycznej. To dopiero dzięki Keplerowi wiemy, że niejednostajność ruchu Słońca względem Ziemi (lub odwrotnie) wynika z eliptyczności orbit. A pomysł Hipparcha nadal można wykorzystywać przy kreśleniu mało spłaszczonych elips. Na przykład schemat orbit wszystkich planet Układu Słonecznego można w dobrym przybliżeniu narysować cyrklem (bo ich spłaszczenia i tak się nie zauważy), byle tylko wbijać go nie w Słońce (czyli w ognisko), lecz odpowiednio trochę obok. Gdy promienie orbity mają po 10 cm, to (spośród widocznych planet) najdalej od Słońca będzie środek orbity Merkurego – 20,5 mm, najbliżej Wenus – 0,7 mm; dla Ziemi będzie to 1,7 mm.

Reminiscencje olimpijskie

Krzysztof CIESIELSKI

O Olimpiadzie Matematycznej słyszałem już jako uczeń szkoły podstawowej. W „Czytankach" – tak wówczas nazywały się podręczniki do języka polskiego – było (oparte na faktach) opowiadanie „A jednak matma" o Andrzeju, który wyprzedzając starszych kolegów, zajął w Olimpiadzie pierwsze miejsce.
Z zadaniami olimpijskimi zetknąłem się jednak dopiero jako uczeń II klasy liceum. Dostarczono nam kartkę z zadaniami I stopnia, my, młodzi, ambitni, uczniowie klasy o profilu matematycznym, zainteresowani matematyką, tłumnie rzuciliśmy się, by tematy przepisać i... Po raz pierwszy w życiu poczułem niesmak po przeczytaniu tematów zadań matematycznych. Na tym skończył się mój udział w XXIV OM.

***

Gdy byłem w III klasie, zadania okazały się dla mnie łatwiejsze. Rozwiązałem 10 z 12 i to pozwoliło mi znaleźć się wśród 117 uczestników zawodów II stopnia w okręgu krakowskim. To nie pomyłka, aż tyle osób wtedy zakwalifikowano! Punktualnie o 9^{00} podyktowano tematy, zaczęliśmy pisać... Po godzinie na sali powiało grozą, gdyż pewien chłopak w czerwonym swetrze z zadowoloną miną podszedł do stołu prezydialnego, oddał pracę i wyszedł. Wiedzieliśmy, kto to taki. Tuż przed zawodami starsi koledzy (na olimpiadzie zawsze znajdą się „bywalcy", którzy już brali w zawodach udział, wiele wiedzą i dzielą się wrażeniami z młodszymi) pokazali nam tego w czerwonym swetrze i poinformowali, że jest to laureat poprzedniej Olimpiady, który w tym roku „tylko o międzynarodowej olimpiadzie myśli". Po jego wyjściu z sali niejeden zastanawiał się, czy był w ogóle sens startować?

Z zadań tych zawodów najlepiej pamiętam ostatnie: *Dany jest ciąg liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ o własności: po odrzuceniu dowolnego wyrazu pozostałe można podzielić na takie dwie grupy po n wyrazów, że suma wyrazów w pierwszej grupie jest równa sumie wyrazów w drugiej. Dowieść, że wszystkie wyrazy ciągu są równe.* Zadanie (którego zresztą nie zrobiłem) wywarło na mnie wrażenie ze względu na przepiękne rozwiązanie pokazane na „herbatce olimpijskiej". Należało mianowicie zauważyć, że jeśli ciąg $\{b_i\}$ ma wspomnianą własność, to ciągi $\{b_i + k\}$ oraz $\{k \cdot b_i\}$ też ją mają i rozważyć ciąg $\{a_i - a_1\}$...

A kolega, który oddał prace tak szybko, mimo że był laureatem XXIV OM, w XXV OM nie zakwalifikował się do finału.

***

ponumerować formuły języka arytmetyki. Mianowicie – formuła jest ciągiem symboli alfabetu języka arytmetyki. Numerujemy więc symbole języka. Potem patrzymy na ciągi skończone symboli. Niektóre są poprawnie zbudowanymi formułami, inne zaś nie. Przypiszmy teraz ciągowi liczb $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ odpowiadających kolejnym symbolom liczbę $2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$ (gdzie p_k jest k-tą liczbą pierwszą), która będzie numerem całego ciągu. Łatwo rozpoznać, kiedy liczba m jest kodem formuły arytmetycznej. Następnie, względnie łatwo rozpoznać, czy liczba jest kodem dla aksjomatu arytmetyki (żmudne to, ale oczywiście możliwe). Dalej, możemy kodować ciągi formuł jako liczby, i znowu łatwo (acz żmudnie) można rozpoznać, czy dana liczba koduje poprawny dowód. Teraz możemy napisać zdanie arytmetyczne $Con(PA)$, które mówi: „z aksjomatyki Peano nie da się wywieść formuły $0 = 1$". Otóż Gödel wykazał, że o ile arytmetyka Peano jest niesprzeczna, to $Con(PA)$ dowodu nie ma! Oczywiście, w teorii ZFC dowodzimy, że i negacja $(\neg Con(PA))$ dowodu w PA nie ma, bowiem PA ma model. W szczególności, arytmetyka Peano nie jest teorią zupełną. Twierdzenie to zachodzi w silniejszej jeszcze formie.

Mianowicie – żadne niesprzeczne rozszerzenie arytmetyki Peano o skończoną liczbę aksjomatów nie jest zupełne.
W licznych dziełach popularyzatorskich po dziś dzień pisze się o tym niezwykłym wyniku Gödla rzeczy wielce nieprawdziwe (na przykład takie, że Gödel wykazał, iż teorie zupełne nie istnieją).

Do czasu udowodnienia niezupełności arytmetyki (1931) wydawało się matematykom, że każdy problem dotyczący liczb naturalnych, a nawet każdy problem teorii mnogości da się rozwiązać na podstawie znanych już od jakiegoś czasu aksjomatów. Natomiast Gödel dowiódł, że pewne zdania arytmetyczne oraz ich negacje nie dadzą się udowodnić ani obalić, nawet w najsilniejszej znanej teorii, mianowicie teorii mnogości.

Oprócz zdania $Con(PA)$ znaleziono też różne własności teorioliczbowe albo kombinatoryczne niezależne od aksjomatyki Peano, w szczególności rozmaite uogólnienia twierdzenia Ramseya o kolorowaniu grafów. Dowody wielu z tych uogólnień wymagają metod analizy, a czasem i teorii mnogości. Co więcej, okazało się, że zdania takie wiążą się silnie z rozmaitymi aksjomatami „wielkich liczb kardynalnych". Badania Parisa, Solovaya i Friedmana dały wiele takich twierdzeń.

Logika, którą pokazaliśmy powyżej, zajmuje się opisem struktur badanych przez matematyków. Teoria takich struktur została rozwinięta przez Tarskiego i jego uczniów (na podstawie badań Schrödera, Skolema i innych). Jest to tzw. *teoria modeli*, która jest dużym działem matematyki, znajdującym się na pograniczu logiki, algebry i analizy.

Wszyscy pamiętamy, że Cauchy wprowadził ε-δ definicję ciągłości po to, by uniknąć używania liczb nieskończenie małych. Matematycy XVII i XVIII wieku używali wielkości nieskończenie małych bez zadowalających definicji tych pojęć. Korzystając z technik teoriomodelowych, A. Robinson wykazał w latach 60., że pojęcie nieskończenie małych można w pełni uściślić. Dziś istnieją podręczniki, w których rozwija się analizę, używając wielkości nieskończenie małych w całkowicie jasny sposób.

W praktyce matematycznej niemal zawsze używamy logik „wielosortowych” (jest to też istotne w informatyce). Logiki wielosortowe dają się zredukować do logiki pierwszego rzędu, a ta z kolei do prostszej jeszcze logiki równościowej Birkhoffa.

Przejdźmy teraz do zagadnień obliczalności. W trakcie dowodu twierdzenia o niezupełności arytmetyki, który opisaliśmy powyżej, Gödel rozważał klasę funkcji, które dziś nazywamy obliczalnymi (rekurencyjnymi). Nazwijmy zbiór liczb naturalnych obliczalnym, jeśli jego funkcja charakterystyczna jest obliczalna, a rekurencyjnie przeliczalnym, jeśli jest pusty lub jest zbiorem wartości jakiejś funkcji obliczalnej. Otóż Gödel wykazał, że zbiór (kodów) twierdzeń arytmetyki Peano jest rekurencyjnie przeliczalny, ale nie jest obliczalny. Dalszy krok w naszym zrozumieniu pojęcia obliczalności został postawiony przez Turinga, który wprowadził pojęcie maszyny (dziś nazywanej maszyną Turinga) i wykazał istnienie uniwersalnej takiej maszyny, tj. maszyny, która za pomocą odpowiednich parametrów jest w stanie symulować każdą maszynę. Wreszcie Kleene głęboko rozwinął teorię obliczalnych funkcji częściowych.

Maszyna Turinga operuje na *taśmie* podzielonej na *komórki* (komórki te ponumerowane są liczbami naturalnymi). Komórka taka może być pusta lub może być w niej 0 lub 1. Działanie maszyny jest opisane przez akcje jej *głowicy pisząco-czytającej*. Głowica ta znajduje się zawsze w jakimś *stanie* (ze skończonego

W Olimpiadzie nr XXVI postanowiłem nie przejmować się niczyimi mądrymi minami ani wcześniejszym oddawaniem prac przez innych. Metoda przyniosła skutek – w Krakowie zająłem drugie miejsce (oficjalnie tych wyników nie podawano, ale jakoś wszyscy zainteresowani o nich wiedzieli). W finale, niestety, potknąłem się na najprostszym zadaniu: *W rozwinięciu dziesiętnym pewnej liczby naturalnej występują cyfry 1, 3, 7 i 9. Udowodnić, że przez permutację cyfr tego rozwinięcia można otrzymać rozwinięcie dziesiętne liczby podzielnej przez 7* – otóż źle zrozumiałem temat. Sądziłem, że przez permutację cyfr rozwinięcia Autorzy mają na myśli zamianę – na przykład – każdej jedynki na czwórkę, czwórki na siódemkę... Według tego, co miałem na myśli, permutacją cyfr w liczbie 113479 byłoby np. 449712. Autorom chodziło natomiast o najzwyklejsze „pomieszanie” cyfr w liczbie; np. na 131947. Zmodyfikowanego zadania, znacznie trudniejszego od oryginalnego, nie zrobiłem. Cóż – mogłem podczas zawodów zapytać, o co chodzi. W efekcie skończyło się na wyróżnieniu, a zapewne mogło być lepiej.

* * *

Kiedy znalazłem się na I roku matematyki UJ, Olimpiada była częstym tematem moich rozmów z kolegami (w mojej grupie studenckiej było siedmiu finalistów!). Nic więc dziwnego, że w lutym kilku z nas wybrało się na tradycyjnie organizowaną „herbatkę olimpijską” po zakończeniu zawodów II stopnia. Jedno z zadań brzmiało: *Na płaszczyźnie umieszczono 6 punktów w ten sposób, że każde 3 spośród nich są wierzchołkami trójkąta o bokach różnej długości. Udowodnić, że najkrótszy bok pewnego z tych trójkątów jest zarazem najdłuższym bokiem innego z nich.* Gdy prezentowano rozwiązania, przedstawiciel Komitetu Głównego powiedział, że to zadanie zostało pomyślane jako pewnego rodzaju kontynuacja zadania sprzed 10 lat: *Na płaszczyźnie obrano 6 punktów, z których żadne 3 nie leżą na jednej prostej i wykreślono wszystkie odcinki łączące parami te punkty. Niektóre z odcinków wykreślono kolorem czerwonym, a inne niebieskim. Dowieść, że któreś trzy z danych punktów są wierzchołkami trójkąta o bokach jednego koloru.* Przedstawił rozwiązanie zadania sprzed lat, okazało się jednak, że ma kłopoty z przypomnieniem sobie, co dalej. Wówczas mnie przyszedł do głowy pomysł, jak to zrobić, podszedłem do tablicy i pokazałem (istotnie: wystarczy na czerwono pomalować te odcinki, dla których istnieje taki trójkąt o danych wierzchołkach, że nasz odcinek jest jego najdłuższym bokiem, na niebiesko pomalować pozostałe i zauważyć, że nie istnieje trójkąt o wszystkich bokach niebieskich...). Uczestnicy zawodów popatrzyli na mnie tak, jak my dwa lata wcześniej patrzyliśmy na kolegę w czerwonym sweterku. Na szczęście zaraz potem zostaliśmy z kolegami przedstawieni przez Przewodniczącego Komitetu Okręgowego jako studenci matematyki. Zawodnicy wyraźnie odetchnęli.

* * *

Gdy skończyłem studia, od razu zgłosiłem Edwardowi Tutajowi (który co prawda nie był przewodniczącym KO w Krakowie, ale to na nim spoczywał ciężar większości prac i on de facto rządził) akces do Komitetu Okręgowego Olimpiady. Przyjęto mnie i zacząłem poprawiać zadania...

Każdą pracę poprawiają dwie osoby. W trzecim roku mojego członkostwa w Komitecie zdarzyło mi się po raz pierwszy, że nie potrafiłem ocenić jednej z prac. Siedziałem nad nią kilka godzin, nie mogąc przebrnąć przez oznaczenia Autora (czasem nie zdefiniowane, chwilami niekonsekwentne) i nie rozumiejąc idei rozwiązania. W zasadzie mogłem sobie to darować, bo zadanie pochodziło z trzeciej serii zawodów I stopnia, a Autor pracy był już dwa razy w finale Olimpiady, zadania z pierwszej i drugiej serii zrobił, więc było oczywiste, że do II stopnia się zakwalifikuje. Niemniej jednak próbowałem rozszyfrować myśl Autora – bez efektu. Zastanawiało to o tyle, że wcześniejsze prace tego zawodnika były bardzo starannie redagowane. Nie oceniłem pracy, oddałem zmiennikowi, którym był Jurek Grzybowski, dwa lata młodszy ode mnie zdobywca I nagrody na Międzynarodowej Olimpiadzie. Jurkowi udało się zrozumieć rozwiązanie, stwierdził, że jest poprawne.

Zawodnik, o którym mowa, przyszedł potem do nas na studia (a kilka lat później włączyliśmy go do Komitetu). Przy nadarzającej się okazji wytknąłem mu, że nad ową pracą spędziłem spory kawałek nocy. Wówczas opowiedział mi, jak się rzecz miała. Gdy napisał rozwiązania III serii, dał prace swojemu koledze Tomkowi, również startującemu w Olimpiadzie i Tomek po przepisaniu rozwiązań miał prace ich obu wysłać. Tymczasem Tomek oryginalne prace zgubił; zawiadomił o tym Autora wieczorem 10 grudnia, trzy godziny przed terminem wysyłania prac. Nieszczęsny zawodnik musiał przez 3 godziny przypomnieć sobie rozwiązania, napisać i wysłać. Nic dziwnego, że praca wyglądała tak, jak wyglądała.

* * *

Zawody II stopnia XXXIII Olimpiady odbyły się w lutym 1982, dwa miesiące po wprowadzeniu stanu wojennego. DOM TURYSTY PTTK, gdzie zawsze kwaterowaliśmy zawodników zamiejscowych, został przekształcony w ZOMO – TOURIST; udało nam się jednak ulokować przyjezdnych gdzie indziej, z tym, że posiłki musieli jeść w restauracji oddalonej o dziesięć minut drogi piechotą od hotelu. Gdy przyjechali, udaliśmy się (zawodnicy i dwaj członkowie Komitetu jako obstawa) na kolację. Zawodnicy siedli przy stolikach i w tym momencie stwierdziliśmy, że nie mamy listy z ich nazwiskami; gdyby zaczepił nas w drodze powrotnej jakiś patrol, moglibyśmy mieć kłopoty. Mój kolega, o surowym i nieprzeniknionym wyrazie twarzy, elegancko ubrany – w marynarce i krawacie, podszedł więc do pierwszego ze stolików i do siedzących tam powiedział stanowczym tonem: *Wasze nazwiska?* Chłopcy zdrętwieli… Chwilkę trwało, zanim kolega zorientował się, że zażądał nazwisk nie od olimpijczyków, ale Bogu ducha winnych młodych ludzi.

* * *

W latach osiemdziesiątych mieliśmy w Krakowie spore kłopoty z sekretarzami Komitetu. Co kogoś udało się namówić na pełnienie tej funkcji, to wkrótce potem trzeba było szukać innej osoby. Zazwyczaj okazywało się, że ten z trudem znaleziony sekretarz do tej pracy się, niestety, nie nadaje. Z bardziej oryginalnych wyczynów naszych sekretarzy warta wspomnienia jest następująca historia. Liceum w Sanoku oraz X LO w Krakowie noszą imię Komisji Edukacji Narodowej. Wypisując zawiadomienia o zakwalifikowaniu do zawodów II stopnia, Pani Sekretarz zaadresowała (i wysłała) listy do liceów imienia Komisji Koedukacji Narodowej.

* * *

Są takie zadania, które wydają się bardzo proste, gdy się zna rozwiązanie. Gdy jednak trzeba to rozwiązanie wymyślić, może być gorzej… Kiedyś na zawodach II stopnia było zadanie: *Obliczyć kres dolny pól sześciokątów wypukłych, których wszystkie wierzchołki mają współrzędne całkowite.* Nietrudno domyślić się, że wynikiem jest 3, ale jak to wykazać? Zadania nie zrobił nie tylko nikt z uczestników zawodów w Krakowie, ale także i żaden z członków Komitetu Okręgowego… Przedstawiciel Komitetu Głównego akurat na

zbioru stanów S). Poza tym głowica *wskazuje* na jakąś komórkę. Akcje głowicy są jednoznacznie wyznaczone przez *funkcję przejścia*. W zależności od stanu głowicy i od symbolu w komórce, na którą wskazuje głowica, głowica zmienia zapis w komórce, zmienia swój stan i przesuwa się w prawo lub w lewo. Jeden ze stanów jest wyróżniony – kiedy maszyna go osiąga – staje. Funkcja f z liczb naturalnych w liczby naturalne może być reprezentowana przez maszynę M w taki sposób. Dana wejściowa n zapisana jest przez kolejnych n jedynek. Maszyna liczy i staje, zapisując kolejnych $f(n)$ jedynek. Jeśli tak jest dla każdej liczby n z dziedziny funkcji f, to mówimy, że funkcja f jest reprezentowana przez maszynę M. Turing wykazał, że maszyny reprezentują dokładnie obliczalne funkcje częściowe.

Pojęcie maszyny Turinga lub funkcji obliczalnej o argumentach i wartościach całkowitych pozwala też zbudować adekwatną definicję funkcji obliczalnych o argumentach i wartościach rzeczywistych. Teorię taką rozwijali w latach międzywojennych Banach i Mazur. Okazuje się, że wszystkie funkcje obliczalne są ciągłe na swojej dziedzinie, ale dziedzina może być np. zbiorem liczb niewymiernych i funkcja może nie mieć ciągłego przedłużenia na żadną liczbę wymierną. Teoria Banacha i Mazura stanowi rozwiązanie dziewiętnastowiecznego problemu „czym są funkcje?". Z jednej strony mamy ścisłą teoriomnogościową ogólną definicję funkcji. Z drugiej strony mamy ścisłą definicję funkcji obliczalnych opartych na jasnych przepisach obliczania ich wartości.

Teoria obliczalności i, w szczególności, maszyny Turinga pojawiły się jako ogólne teoretyczne modele dobrze zdefiniowanych procedur obliczeniowych (czyli algorytmów). Niebawem elektronika poczyniła odpowiednie postępy i można było budować fizyczne maszyny Turinga. Do postępu przyczyniła się II wojna światowa, a następnie „zimna wojna". Trzeba było „łamać" niemiecki szyfr Enigma i maszyny to czyniące były pierwszymi komputerami (acz kandydatów do tego tytułu jest więcej). Następnie zaś potrzebne były maszyny obliczeniowe do budowania broni jądrowych i elektrowni atomowych. Po nadzwyczajnym sukcesie ogólnego pojęcia obliczalności zaczęto wprowadzać bardziej konkretne pojęcia, lepiej modelujące funkcje, które obliczane są na komputerach. W szczególności badano funkcje opisywane przez maszyny

Turinga, w których liczba kroków jest ograniczona przez jakiś wielomian względem rozmiaru danych wejściowych (klasa PTIME), a także klasę funkcji, w których rozmiar aktualnie używanej części taśmy jest ograniczony przez podobny wielomian (klasa PSPACE). Dziś PTIME stanowi najlepszą matematyczną definicję funkcji praktycznie obliczalnych. Klasy PTIME, PSPACE i pokrewne wiążą się z rozmaitymi aspektami definiowalności różnych zbiorów liczb naturalnych za pomocą efektywnych środków, a pytanie, czy dwie takie klasy (PTIME i NPTIME) są równe, jest jednym z podstawowych nierozwiązanych problemów podstaw matematyki. Pytanie, czy PTIME = NPTIME, ma bardzo wiele reprezentacji, w tym kombinatorycznych, teorioliczbowych i grafowych. W logice reprezentowane jest ono za pomocą „problemu spełnialności" – czy istnieje algorytm odpowiadający na pytanie, czy dana formuła φ rachunku zdań jest spełnialna – algorytm dający odpowiedź w czasie proporcjonalnym do wielomianu względem długości formuły φ.

W drugiej połowie XX wieku zastosowania w informatyce i, w szczególności, konieczność zbudowania solidnych podstaw informatyki były jednym z motywów rozwoju podstaw. Tak się bowiem składa, że badania informatyczne korzystają z wielu dziedzin matematyki i to nawet dziedzin dość abstrakcyjnych. Wystarczy choćby spojrzeć na związki teorii kategorii z programowaniem za pomocą obiektów (OOP).

Wróćmy teraz do 10. problemu Hilberta. Okazało się, że nie istnieje algorytm, który pozwala stwierdzić, które równania diofantyczne mają rozwiązania. Po wielu latach badań Davis, Putnam, Julia Robinson i Matijasewicz wykazali, że algorytmu takiego nie ma. Ich twierdzenie mówi nam, że już elementarna teoria liczb całkowitych jest bardzo głęboka i nie ma jednolitej metody rozwiązywania jej problemów.

Powróćmy na chwilę do ogólnych problemów podstaw matematyki. Praktyka matematyczna pokazuje, że matematyka jest nie tyle nauką, co sztuką, sztuką budowania teorii dedukcyjnych. Na przykład hipoteza Goldbacha jest dobrze potwierdzonym faktem empirycznym,

Hipoteza ta mówi, że każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych.

ale matematycy nie przyjmują jej do arsenału swoich aksjomatów, bo nie

zawody do Krakowa nie dojechał, nie wiedzieliśmy więc, jak sobie z zadaniem poradzić. Dopiero kilka dni później rozwiązał je w przepiękny sposób (jak się później okazało, takie było też rozwiązanie KG) student matematyki UJ, który notabene w latach szkolnych startował w Olimpiadzie, ale bez powodzenia. By rozstrzygnąć problem, wystarczy zauważyć, że w wielokącie musi być jeszcze jakiś punkt o obu współrzędnych całkowitych (co zrobiliśmy) i że wielokąt realizujący szukany kres dolny musi mieć taki punkt wewnątrz (czego już nie udowodniliśmy).

***

Podczas poprawiania zadań często jesteśmy wręcz zachwyceni zarówno pomysłowością zawodników, jak i wspaniałą redakcją rozwiązań. Prace wielu olimpijczyków można by drukować jako wzór: „tak należy pisać". Czasami jednak zawodnicy uciekają się do innych środków. Jeden z nich napisał kiedyś: *Dowód. Gdyby teza była fałszywa, stawiałoby to słabą notę organizatorom jako matematykom. cnd.* Przyznaliśmy mu za to punkt (w skali 0–10). Ongiś inny zawodnik, który już wcześniej był w finale, napisał pod tematem ostatniego zadania: *Moim zdaniem, zadania mogłyby być CIUT łatwiejsze.* Miał rację, w owym roku zadania II stopnia były nad wyraz trudne.

***

Entuzjazm Komitetu w Krakowie wzbudziła pozamatematyczna twórczość jednego z uczestników XXXIV OM. Otóż w brudnopisie narysował on groźnie wyglądającego mężczyznę z pistoletem wymierzonym w czytającego i podpisem: *Radziłbym zrobić TWÓRCĘ MEGO laureatem olimpiady. Po co sprawdzać zadania?* I poniżej: *Pośmiejcie się panowie trochę, bo jesteście tacy ponurzy...* Od tego czasu na herbatkach zaznaczamy, że my jesteśmy bardzo weseli, tylko w czasie zawodów musimy udawać poważnych. Oprócz bandyty z rewolwerem nasz zawodnik narysował w brudnopisie wcale udany akt, znakomite portrety niektórych członków KO i delegata z Warszawy oraz spodnie jednego z pilnujących (co prawda, bez tułowia, ale bez trudu poznaliśmy, czyje to są spodnie). Co ciekawe, zawodnik nie tylko rysował, ale również rozwiązał poprawnie trzy zadania i był wśród siódemki, którą proponowaliśmy do finału. Niestety, akurat jego Komitet Główny nie zakwalifikował. Może Centrali rysunki się nie spodobały?

***

Od tego roku, w którym znaleźliśmy owe niebanalne rysunki, bardzo starannie przeglądamy wszystkie brudnopisy. Warto! Kiedyś znaleźliśmy uwagę: *Co ja tu robię, skąd pomysł, by tu przyjść?* Inna uczestniczka napisała: *KONSTANTY I. GAŁCZYŃSKI, JIM MORRISON, BOB DYLAN, GEORGE ORWELL, JACK KERROVAL, KEN KESEY, JOSEPH HELLER – THEY WOULD NEVER SOLVE IT! Tell me, why have I to do it?* W jeszcze innym brudnopisie odkryliśmy przepiękną (dwie strony) bajkę o księżniczce, która potrzebowała miłości. Bajka zakończyła się stwierdzeniem: *Po co ja to piszę, i tak nikt tego nie przeczyta.* Autorka przyszła później na studia informatyczne, przekazaliśmy jej informację, że przeczytaliśmy i że nam się spodobało; ucieszyła się.

***

Na „herbatkę" po drugim dniu zawodów II stopnia regularnie zapraszamy gości: profesorów, studentów, przedstawicieli WOM... Ongiś, otwierając spotkanie, prowadzący zebranie rozpoczął słowami: *Wczorajsze zadania były proste. Dopiero dzisiejsze pokazały, co to naprawdę jest Olimpiada.* Na to siedzący przy mnie profesor matematyki (notabene były laureat Olimpiady) szepnął do mnie:

Ja widziałem te wczorajsze zadania i teraz nie wiem, gdzie się ze wstydu schować.

***

Gdy kwalifikujemy uczestników do zawodów II stopnia, ustalamy limit punktowy, a potem dokładnie patrzymy na wyniki uczestników, którzy znaleźli się trochę „poniżej poprzeczki" i analizujemy każdego indywidualnie. Często kwalifikujemy dodatkowe osoby; bierzemy pod uwagę na przykład to, że z danej szkoły czy klasy startuje tylko jedna osoba (a więc nie ma możliwości przedyskutowania rozwiązań z kolegami). Kiedyś zdarzyło się, że startujący po raz pierwszy w Olimpiadzie trzecioklasista rozwiązał poprawnie co prawda tylko 4 z 12 zadań, ale z oceną maksymalną, trzy z pozostałych miał ocenione na 6 lub 5 punktów (ocena pozytywna zaczyna się od 7), był z niewielkiego miasta, skąd od bardzo dawna nikt nie startował w Olimpiadzie... Jednomyślnie zakwalifikowaliśmy go do zawodów II stopnia „na zachętę".

Na „herbatce" tradycyjnie pytamy, kto zrobił co najmniej 3 zadania (z sześciu), zaczynając od pytania: *Kto zrobił 6 zadań?* Zazwyczaj pytanie to wita wybuch śmiechu i nikt się nie zgłasza. Gdy w owym roku zadałem to pytanie, tradycyjnie rozległ się śmiech na sali, ale zgłosił się jeden zawodnik – na sali było co prawda co najmniej kilku doświadczonych olimpijczyków, ale rękę podniósł właśnie ten zakwalifikowany „na zachętę". Oczywiście nie pokazaliśmy po sobie, że sceptycznie traktujemy tę deklarację; nikt z nas w sześć zrobionych zadań nie uwierzył. Tymczasem przy sprawdzaniu okazało się, że zawodnik naprawdę rozwiązał poprawnie 6 zadań!

***

Trudność zadania jest rzeczą bardzo subiektywną. Na „herbatce" tradycyjnie pytamy również o to, które zadanie było najłatwiejsze, a które najtrudniejsze. W roku jubileuszowej L Olimpiady wszyscy członkowie KO w Krakowie za najłatwiejsze uznali zadanie: *Dana jest funkcja* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, *taka, że* $f(\frac{1}{n})=(-1)^n$ *dla* $n=1,2,\ldots$ *Wykazać, że nie istnieją takie funkcje rosnące* $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, *że* $f=g-h$. Tymczasem tylko niektórzy z uczestników zawodów podzielili tę opinię; w wyniku głosowania za najłatwiejsze zostało uznane zadanie inne, a według niektórych zawodników zadanie o tych funkcjach było wręcz najtrudniejsze. Jak widać, pewne obycie z wyższą matematyką może istotnie wpłynąć na pogląd o łatwości czy trudności zadania.

***

Należy podziwiać olimpijczyków; ich wiedza i umiejętności rozwiązywania problemów bywają czasami niewiarygodne. Uważam, że należy dołożyć starań, by za swoje osiągnięcia byli oni odpowiednio honorowani. Już zakwalifikowanie się do zawodów II stopnia jest ogromnym sukcesem – do zawodów tych dostaje się zaledwie około 500 osób w Polsce! Kilka lat temu udało nam się w Krakowie rozszerzyć listę olimpijczyków uprawnionych do premii przy egzaminach wstępnych: uczestnikom zawodów II stopnia, którzy co prawda nie dostali się do finału, ale osiągnęli dobre wyniki i uzyskali rekomendację Komitetu Okręgowego, przysługuje zwolnienie z egzaminu wstępnego z matematyki lub wręcz przyjęcie bez egzaminu na niektóre uczelnie. Ale bardzo ważne jest też, by nie traktować wyników w olimpiadzie na zasadzie „jeśli mi nie pójdzie, to znaczy, że nie nadaję się na matematyka". Gdy sam w olimpiadzie startowałem, twierdziłem, że by dostać się do finału, trzeba – niezależnie od umiejętności matematycznych – mieć trochę szczęścia. Dziś, po ponad ćwierć wieku aktywnych kontaktów z Olimpiadą, mam dokładnie takie samo zdanie.

jest ona podstawą żadnej ciekawej teorii (a także dlatego, że jest nadzieja, iż da się ją udowodnić na gruncie dotychczasowych aksjomatów). Zatem w matematyce czystej chodzi przede wszystkim o sztukę dedukcji raczej niż o fakty. Hipoteza continuum jest jeszcze bardziej abstrakcyjna, bo nie ma żadnego znaczenia fizycznego; mimo to stanowi ona problem nadzwyczaj piękny.

Nie znaczy to, że matematyka czysta bierze się tylko z wyobraźni ludzkiej. Przeciwnie, prawie cała matematyka inspirowana jest przez opisy świata fizycznego. Na przykład pojęcie zbioru nieskończonego inspirowane jest przez na pozór niekończące się procesy oraz przez kontinuum fizycznej czasoprzestrzeni.

Wspomnimy jeszcze, że podstawy matematyki wyłoniły w XX wieku wiele jeszcze innych dziedzin, w tym logiki nieklasyczne i modalne, logikę konstruktywną (intuicjonizm), rekurencyjną matematykę i inne specjalności. Nie mamy, niestety, miejsca, by omówić w tym artykule, choćby pobieżnie, osiągnięcia tych dziedzin.

Ostatnia część artykułu ukaże się w *Delcie* 3/2000.

Rozwiązanie zadania M 905.
Ponumerujmy wszystkie odważniki według wzrastającej masy: $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Podstawą naszego rozwiązania będzie następujący prosty fakt: Jeśli na szalkach znajdują się odważniki $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{l-1}, a_l$, przy czym na jednej z nich są te o parzystych numerach, a drugiej – o nieparzystych, to przeważa ta szalka, na której leży odważnik a_l. Rozważmy teraz dowolny n-wyrazowy ciąg (x_i) liter P i L ($i \in \{1,\ldots,n\}$). Szalki będziemy oznaczać również literami P lub L. Proces kładzenia odważników zrealizujemy „od końca". Na szalce x_n połóżmy wszystkie odważniki o tej samej parzystości numeru co n, a na drugiej pozostałe. Na mocy przytoczonego wyżej faktu przeważy szalka x_n. Aby otrzymać ciąg $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1$, będziemy ściągać odważniki z szalek według następującej zasady: zawsze ściągamy albo najcięższy, albo najlżejszy z odważników znajdujących się na szalkach w zależności od tego, czy następuje zmiana w ciągu $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1$, czy nie. Aby otrzymać ciąg $x_1, x_2, \ldots, x_n$, wystarczy odwrócić kolejność wykonywanych czynności.

Rozwiązanie zadania F 516.
Rozprzestrzenianie się zapachu w gazie jest spowodowane przypadkowym błądzeniem cząsteczek substancji zapachowej. Kierunki ruchu i wartości prędkości tych cząsteczek zmieniają się na skutek bezustannych zderzeń z cząsteczkami gazu. Dlatego wypadkowa prędkość przemieszczania się cząsteczek zapachu nie jest duża.

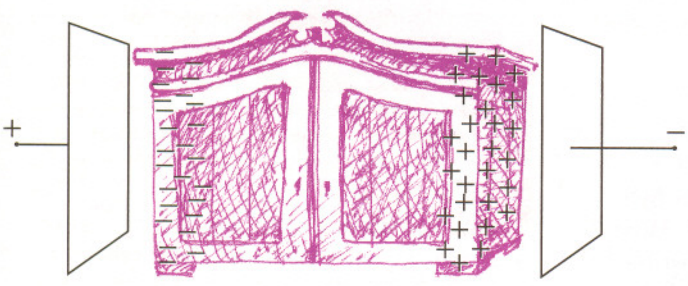
mała delta

Czy szafa musi być obojętna... elektrycznie?

Pytanie na pozór banalne. Oczywiście, że tak, nie tylko szafa, ale także stół, ściana i mnóstwo innych rzeczy nie naładowanych elektrycznie. Ale czy brak ładunku elektrycznego oznacza od razu obojętność elektryczną? Hmm, żeby odpowiedzieć na to pytanie, trzeba jeszcze powiedzieć, co oznacza obojętność elektryczna. Jest to własność ciała określająca to, że jeśli umieścimy je w zewnętrznym polu elektrycznym, nie będzie ono z nim oddziaływało ani go zaburzało.

Właściwe pytanie więc brzmi, czy szafa umieszczona w polu elektrycznym będzie z nim oddziaływała. Twierdzę, że tak. Skąd to moje głębokie przekonanie? Przyjrzyjmy się budowie szafy, oczywiście nie budowie makroskopowej, tzn. nie z ilu półek, drzwiczek itp. się ona składa (aczkolwiek metalowe okucia albo efektowne oświetlenie punktowe może być także istotne), ale jej budowie mikroskopowej, atomowej. Albowiem szafa, jak każdy obiekt makroskopowy (no, prawie każdy, ale gwiazdy neutronowe akurat tutaj nas nie interesują), zbudowana jest z atomów. Atom zaś składa się, w uproszczeniu, z dodatnio naładowanego jądra oraz krążących wokół niego elektronów przyciąganych elektrycznie przez to jądro.

Co się dzieje, jeśli umieścimy taki atom w polu elektrycznym wytworzonym, na przykład, przez dwie okładki kondensatora? Jedna z nich jest naładowana dodatnio, druga ujemnie. Oczywiście elektrony będą przyciągane przez okładkę o dodatnim ładunku, a jądra przez tę o ujemnym. Siła przyciągania jądro–elektron jest zazwyczaj dużo większa od tej między elektronem a okładką. Natężenie zewnętrznego pola może więc nie być wystarczające, aby oderwać elektron od atomu, ale odpowiednie, żeby go spolaryzować. Elektrony będą wolały znajdować się po jednej stronie atomu, bliżej dodatniej płytki, co jest przedstawione na rysunku. Nastąpi więc coś, co się nazywa polaryzacją szafy.



Ponieważ pole elektryczne wytwarzane przez okładki kondensatora jest jednorodne, więc siły przyciągania elektron-dodatnio naładowana płytka oraz jądro-ujemnie naładowana okładka będą się równoważyły. Co oczywiście nie znaczy, że nic się nie będzie działo. Dzięki obecności spolaryzowanego ciała pole elektryczne między okładkami będzie zmodyfikowane. A więc jeśli w ten obszar wpuścimy jakieś naładowane ciało próbne, będzie się ono poruszało po zmienionej trajektorii. Sytuacja będzie jeszcze ciekawsza w niejednorodnym polu elektrycznym. Siły działające na elektrony i spolaryzowane atomy nie będą się musiały wtedy znosić, a wypadkowa niezerowa siła może spowodować ruch szafy! A więc koniec z mitem o obojętności nie naładowanej materii.

Bystry czytelnik może w tym momencie zapytać: a co, na przykład, z neutronami? Nie są to, oczywiście, już obiekty makroskopowe i nie mają atomowej struktury wewnętrznej. Czy więc neutron, cząstka nie mająca ładunku elektrycznego, jest czy nie jest obojętna elektrycznie? Otóż nie jest, bo neutron umieszczony w polu elektrycznym polaryzuje się, co zostało dobrze potwierdzone doświadczalnie. Związane to jest ze strukturą wewnętrzną neutronu, zbudowanego z dwóch kwarków *down* o ładunku $-\frac{1}{3}e$ (gdzie e jest ładunkiem elementarnym) oraz jednego kwarku *up* o ładunku $\frac{2}{3}e$. Ta wewnętrzna struktura ma odpowiadać za polaryzację neutronu.

Sytuacja robi się coraz ciekawsza. Czy istnieją więc we Wszechświecie jakiekolwiek obiekty neutralne elektrycznie? Tak – neutrina… Ale niech znajdzie się śmiałek, który podejmie się próby złapania obiektu zbudowanego z neutrin! Może dokonał tego Ijon Tichy, bohater *Dzienników gwiazdowych* Stanisława Lema, w jednej ze swoich licznych podróży. Najwyraźniej jednak akurat ten właśnie rękopis musiał zostać zagubiony…

Nam zostaje tylko przyziemna rzeczywistość i świadomość tego, że nawet pusta szafa kryje w sobie niejedną tajemnicę.

Małą Deltę przygotowała Ewa CZUCHRY

Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 904. Wśród 1999 monet jest 1410 fałszywych. Masa monety fałszywej różni się od masy monety prawdziwej o 1 g (w tę lub drugą stronę w zależności od monety fałszywej). Mamy do dyspozycji wagę szalkową ze strzałką pokazującą różnicę mas na szalkach. Jak za pomocą jednego ważenia stwierdzić dla dowolnej wybranej monety, czy jest ona fałszywa czy nie?
Rozwiązanie na str. 11

M 905. Mamy do dyspozycji wagę szalkową i n odważników o parami różnych masach. Odważniki stawiamy kolejno na szalki wagi (w każdym kroku bierzemy jakiś odważnik i kładziemy na dowolnie wybraną szalkę). Po każdym kroku zapisujemy wynik ważenia, pisząc P, jeśli przeważyła szalka prawa, lub L, jeśli przeważyła lewa. Rezultatem tego postępowania jest n-wyrazowy ciąg liter np. $LPLLP\ldots$. Wykazać, że w ten sposób można otrzymać każdy n-wyrazowy ciąg, złożony z liter P i L.
Rozwiązanie na str. 7

M 906. Podczas rozprawy sądowej jako dowód winy pewnego szurniętego numizmatyka przedstawiono 14 monet. Ekspert stwierdza (wie, co mówi), że monety od 1 do 7 są fałszywe, zaś od 8 do 14 prawdziwe. Sąd wie tylko tyle, że wszystkie fałszywe monety mają taką samą masę, prawdziwe monety również oraz fałszywe monety są lżejsze od prawdziwych. Ekspert musi dowieść swojej tezy za pomocą trzech ważeń na wadze szalkowej (nie ma czasu na więcej ważeń, bo za pięć minut przerwa na kanapkę z żółtym serem). Jak to zrobić?
Rozwiązanie na str. 13

Redaguje Ewa CZUCHRY

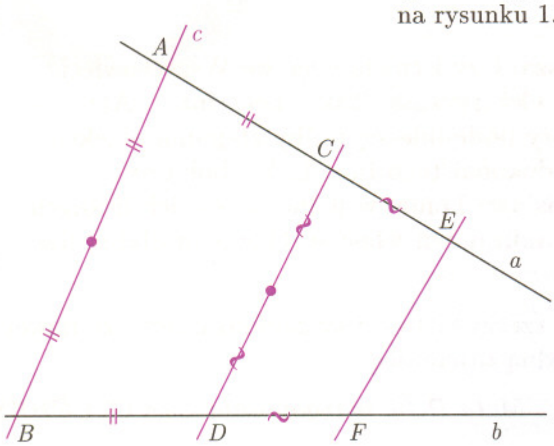
F 515. Jak zmieniłoby się ciśnienie w naczyniu z gazem, gdyby nagle przestały działać siły wzajemnego przyciągania jego cząsteczek?
Rozwiązanie na str. 15

F 516. Jak pogodzić dużą prędkość średnią cząsteczek gazu (setki metrów na sekundę) z powolnym rozprzestrzenianiem się zapachu w spokojnym powietrzu?
Rozwiązanie na str. 7

O prostych nierównoległych i nieskończoności

Wiktor BARTOL

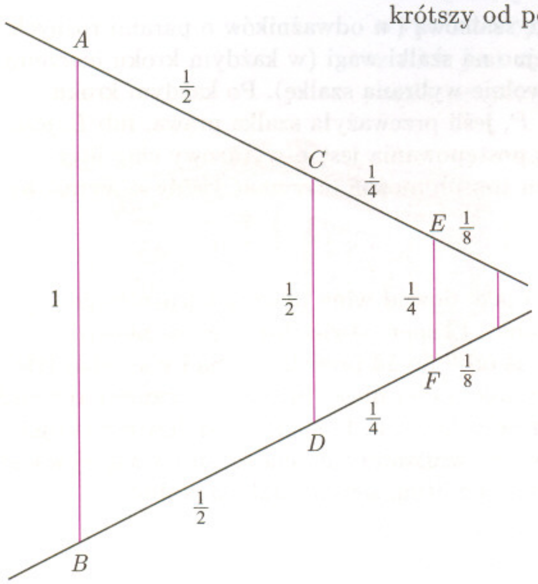
Zachęcony „oszustwami", pleniącymi się na str. 17, chcę przedstawić „dowód", że – wbrew dotychczasowym przypuszczeniom – dwie proste nierównoległe wcale się nie przecinają. Dwie proste, jak wiadomo, nie są równoległe, gdy po przecięciu obu jedną prostą suma kątów jednostronnie wewnętrznych, utworzonych przez te proste z tą, która je przecina, nie jest równa 180°. Weźmy zatem dwie takie proste a i b i przetnijmy je prostą c, tak by utworzone w ten sposób kąty, leżące po jednej stronie c, były ostre, a po drugiej rozwarte, tak jak na rysunku 1.



Rys. 1

Trudno oczekiwać, by proste a i b przecięły się po tej stronie, gdzie znajdują się kąty rozwarte, przyjrzyjmy się zatem temu, co się dzieje po drugiej stronie. Odłóżmy na każdej z prostych a i b odcinek $\frac{AB}{2}$ od punktu A do C i od B do D. Widać, że punkty C i D muszą być różne, gdyż w przeciwnym przypadku otrzymalibyśmy „trójkąt" ABC (czyli ABD), w którym suma dwóch boków byłaby równa trzeciemu. Podobnie nie może istnieć punkt wspólny dla odcinków AC i BD, gdyż znów otrzymalibyśmy „fałszywy trójkąt". Powtarzając taką samą konstrukcję, tym razem dla prostej CD zamiast AB, otrzymamy następną prostą EF (odcinki CE i DF nie przecinają się i nie stykają) – i tak dalej, dowolnie wiele razy. A że za każdym razem posuwamy się o krok dalej wzdłuż prostych a i b, wniosek prosty: a i b nie mają wspólnego punktu.

Tym, którzy chcą sami dociec, gdzie kryje się nieprawda, proponuję teraz przerwanie lektury, jako że zaraz nastąpi rozwikłanie zagadki. Dla ułatwienia obliczeń przyjmijmy, że odcinek AB ma długość 1 jednostki, a kąty BAC i DBA mają po 60° (rys. 2). Wówczas długość każdego z odcinków AC i BD jest równa $\frac{1}{2}$ – i taką samą długość będzie miał odcinek CD. Stąd wynika dalej, że CE, DF oraz EF mają długość $\frac{1}{4}$, następne odcinki odkładane na a i na b mają długość $\frac{1}{8}$, itd. Inaczej mówiąc, każdy kolejny odcinek będzie dwa razy krótszy od poprzedniego. Zastanówmy się teraz, jaką część prostej a (lub b) zajęłyby wszystkie odcinki, gdybyśmy mogli rzeczywiście powtarzać konstrukcję nieskończenie wiele razy? Dodajmy kolejne długości: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ Jak obliczyć taką nieskończoną sumę? Ci, którzy dostrzegli tu szereg geometryczny i wiedzą, jak sobie z nim poradzić, nie będą mieli z tym problemu. My natomiast pokażemy, że w żadnym kroku suma długości otrzymanych odcinków nie przekroczy 1. Rzeczywiście, po pierwszym kroku mamy odcinek, zajmujący na każdej z prostych $\frac{1}{2}$ jednostki. Do pełnej jednostki zostało jeszcze $\frac{1}{2}$. Z tej brakującej $\frac{1}{2}$ pokrywamy w drugim kroku połowę ($\frac{1}{4}$ jednostki), w trzecim – połowę tego, czego brakuje do 1 po poprzednim kroku (czyli $\frac{1}{8}$ jednostki) – i tak dalej: w każdym kroku kolejny odcinek zajmuje dokładnie połowę długości brakującej do 1 jednostki. Inaczej mówiąc, nigdy nie wyjdziemy poza odcinek o długości 1. A przecież prosta jest znacznie dłuższa... Tak więc nasz „dowód" wykazuje jedynie, że punkt przecięcia wybranych dwóch przykładowych prostych leży w odległości nie mniejszej niż 1 od punktu A (lub B).



Rys. 2

Przy okazji okazało się, że suma nieskończenie wielu składników dodatnich może być skończona, ale o tym zapewne wnikliwi Czytelnicy *Delty* wiedzieli już wcześniej.

P.S. Zachęcam Czytelników, którzy usłyszą o paradoksie Zenona o Achillesie i żółwiu, aby zajrzeli jeszcze raz do tego artykuliku.

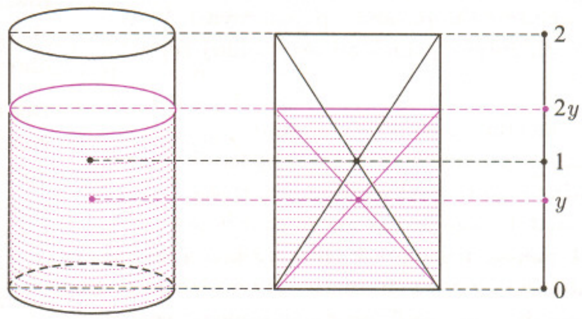
O problemie Lipniackiego i Wojciechowskiego

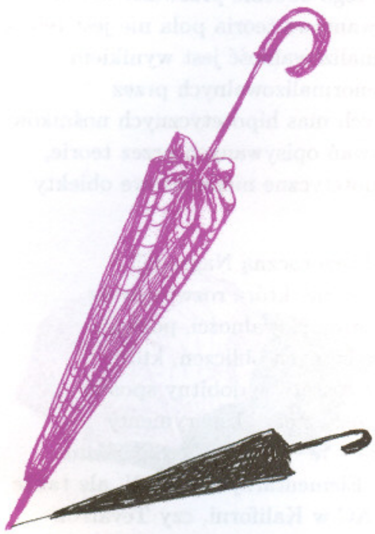
Marek KORDOS

Ponad pięć lat temu przypomniałem Czytelnikom niektóre, bardziej rekreacyjne problemy zawarte w *Księdze Szkockiej*. Przypomniała mi się ta sprawa w związku z przedrukowaniem tego artykułu w powstającym rosyjskim czasopiśmie o zasięgu światowym *Empire of Mathematics* (czyli Царство математики). Otóż poza „historycznymi" problemami z *Księgi* przytoczyłem tam tytułowy problem tej notatki, który brzmi:

przy jakiej ilości płynu w butelce środek ciężkości jest najniżej?

Przyjmując upraszczające założenia, biorąc mianowicie zamiast butelki walcową puszkę, nietrudno bardzo standardowymi środkami znaleźć rozwiązanie. Jak łatwo zauważyć (patrz rysunek), problem jest jednowymiarowy – jedynym parametrem położenia środka ciężkości jest wysokość płynu w puszce.





Przyjmijmy, że puszka ma wysokość i ciężar równe 2 (bez trudu można tak dobrać jednostki) i niech ciężar płynu w pełnej puszce będzie równy $2a$, a poziom płynu w puszce to $2y$. Środki ciężkości puszki i płynu będą leżały, odpowiednio, na wysokości 1 i y. Ponieważ środek ciężkości punktów materialnych (tu środków ciężkości puszki i płynu) to ich średnia ważona (mających wątpliwości odsyłam np. do *Delty* 6/1999), więc będzie on leżał na wysokości s, gdzie

$$s(y) = \frac{y \cdot 2ay + 1 \cdot 2}{2ay + 2} = \frac{ay^2 + 1}{ay + 1}.$$

Stosując szkolne standardy, obliczamy pochodną

$$s'(y) = \frac{2ay(ay+1) - a(ay^2+1)}{(ay+1)^2} = \frac{a(ay^2 + 2y - 1)}{(ay+1)^2},$$

skąd

$$s'(y_0) = 0 \text{ i } 0 \le y_0 \le 1 \iff ay_0^2 + 2y_0 - 1 = 0 \text{ i } 0 \le y_0 \le 1 \iff y_0 = \frac{\sqrt{1+a} - 1}{a}.$$

I przy takiej wysokości płynu środek ciężkości będzie leżał najniżej. Tylko co w tym ciekawego? Ciekawe będzie dalej. Obliczmy, gdzie konkretnie leży ten środek ciężkości:

$$s(y_0) = \frac{a\left(\frac{\sqrt{1+a}-1}{a}\right)^2 + 1}{\sqrt{1+a} - 1 + 1} = \frac{(\sqrt{1+a} - 1)^2 + a}{a\sqrt{1+a}} = \frac{1 + a - 2\sqrt{1+a} + 1 + a}{a\sqrt{1+a}} =$$

$$= 2 \cdot \frac{(1+a) - \sqrt{1+a}}{a\sqrt{1+a}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{1+a} - 1}{a} = 2y_0,$$

czyli niezależnie od ciężaru właściwego płynu, środek ciężkości leży najniżej, gdy leży **na powierzchni płynu**!

A teraz jeszcze należałoby postawiony problem rozwiązać. Bo to, co zrobiliśmy wyżej, to wymuszenie wyniku. Skoro jednak wynik jest elegancki, to powinna być też do niego elegancka droga. Bardzo zachęcam do jej wytyczenia. Czekam na listy.

Rozwiązanie zadania M 904.
Ogólnie: Mamy $2n + 1$ monet, wśród których jest $2k$ fałszywych, które różnią się masą od prawdziwych o 1 g (w tę lub drugą stronę, w zależności od monety). Monetę, o której chcemy stwierdzić, czy jest fałszywa, czy nie, odkładamy na bok. Pozostałe $2n$ monet dzielimy na dwie kupki po n monet i ważymy je. Jeśli strzałka wagi pokaże parzystą liczbę gramów, to oznacza to, że odłożona moneta jest prawdziwa, jeśli nieparzystą – fałszywa.

Aktualności (nie tylko) fizyczne

Nagrodę Nobla z Fizyki za rok 1999 odebrali Holendrzy: Gerardus 't Hooft i Martinus J.G. Veltman. Przyznano im ją za *wyjaśnienie kwantowej struktury oddziaływań elektrosłabych.*

I bardzo dobrze!

Każdy fizyk po cichutku marzy o tej Nagrodzie. Szansę na jej uzyskanie ma niewielu, a jeszcze mniejszej liczbie się to udaje. Dlatego przyjemnie jest mieć poczucie przyczynienia się do czyjegoś sukcesu. Tego radosnego uczucia mogła tym razem doświadczyć dość liczna rzesza kilku tysięcy fizyków i inżynierów, w tym kilkudziesięciu Polaków.

Łatwiej wytłumaczyć, dlaczego przyznano tę Nagrodę właśnie teraz, niż wyjaśnić (na poziomie popularnym), za co ją przyznano. Zacznijmy jednak od tej trudniejszej strony.

Opis najbardziej elementarnej struktury materii opiera się na mechanice kwantowej i szczególnej teorii względności. Wyrażamy go w języku kwantowej teorii pola. Ustalenie gramatyki tego języka zajęło prawie pół wieku. Za początek można uznać prace Diraca z końca lat dwudziestych, w których (w pewnym sensie) przewidział on istnienie antymaterii, a za zwieńczenie – właśnie prace tegorocznych Noblistów z przełomu lat sześćdziesiątych i siedemdziesiątych. Trwało to tak długo, bo do końca nie było wiadomo, czy jest to precyzyjny język, czy tylko niemowlęce gaworzenie.

Podstawowym problemem (prawie od samego początku) były pojawiające się w rachunkach nieskończoności. Relatywistyczna teoria kwantowa okazała się być zawsze problemem wielu ciał. Zgodnie z zasadą nieoznaczoności mechaniki kwantowej im dokładniej chcemy zbadać położenie pojedynczej cząstki elementarnej, tym bardziej energetycznego próbnika musimy użyć, co zgodnie ze szczególną teorią względności okazuje się prowadzić do kreacji par cząstka–antycząstka. W efekcie dowolny teoretyczny rachunek (czyli przewidywanie) można sprowadzić do sumowania szeregu (kolejnych poprawek opisujących wkłady do sytuacji z coraz większą liczbą cząstek), który to szereg okazuje się... rozbieżny. Jednocześnie zaniedbanie poprawek dawało wyniki z grubsza zgodne z doświadczeniem. Trudno się dziwić początkowemu rozczarowaniu wyrażonemu przyjęciem dość karkołomnego poglądu, że widocznie w tym przypadku $\infty = 0$ i rozpoczęciem poszukiwania teorii, która mogłaby to wyjaśnić.

Poszukiwania te nie zostały uwieńczone sukcesem. Zamiast tego okazało się, że w przypadku elektrodynamiki kwantowej nieskończoności mogą zostać zaabsorbowane w sposób systematyczny poprzez przedefiniowanie takich wielkości jak masy cząstek i ładunek elektryczny. Co więcej ten szalony pomysł (tym razem, że $\infty - \infty \neq 0$) prowadził do skończonych poprawek dających wyniki zadziwiająco zgodne z doświadczeniem. Taki schemat postępowania ochrzczono „renormalizacją" i oczekiwano jego realizacji przez każdą teorię fundamentalną.

Niestety, opis oddziaływań słabych, odpowiedzialnych za rozpady cięższych cząstek elementarnych na lżejsze (np. neutronu na proton, elektron i antyneutrino elektronowe – bez którego Słońce nie mogłoby świecić), nie wydawał się podlegać procedurze renormalizacji.

Zasługa tegorocznych Noblistów polegała na tym, że jako jedni z nielicznych nie tylko nie zwątpili w renormalizację oddziaływań słabych, ale doprowadzili do jej wykazania. Przy okazji okazało się, że decydującą rolę odgrywa wewnętrzna symetria tych oddziaływań. Z powodów historycznych symetrię tę nazywa się symetrią cechowania, gdyż w przypadku elektrostatyki odpowiada ona swobodzie wybrania miejsca zerowego potencjału elektrycznego. W kwantowej elektrodynamice odpowiednia symetria jest równoważna obrotom na płaszczyźnie, a oddziaływania słabe mają wewnętrzną strukturę (w zasadzie) równoważną obrotom w przestrzeni trójwymiarowej.

Odkrycie znaczenia wewnętrznej symetrii dało renormalizacji solidne (solidniejsze) podstawy matematyczne. Pomimo tego obecnie przeważa wśród teoretyków pogląd, że kwantowa teoria pola nie jest teorią fundamentalną, a renormalizowalność jest wynikiem tłumienia wyrazów nierenormalizowalnych przez odwrotności bardzo dużych mas hipotetycznych nośników hipotetycznych oddziaływań opisywanych przez teorie, w których występują hipotetyczne niepunktowe obiekty takie jak struny.

Czym więc wytłumaczyć tegoroczną Nagrodę? Teoria, fundamentalna czy nie, która rozwinęła się dzięki wykazaniu jej renormalizowalności, pozwala na przeprowadzenie precyzyjnych obliczeń, które w ciągu ostatniej dekady zostały w dobitny sposób potwierdzone głównie przez cztery eksperymenty działające przy zderzaczu e^+e^- LEP w Europejskim Ośrodku Fizyki Cząstek Elementarnych CERN, ale także przez konkurencyjny SLAC w Kaliforni, czy Tevatron (zderzacz $p\bar{p}$ w Fermilabie pod Chicago) i wiele innych eksperymentów. W szczególności w LEPie udało się ustalić, że liczba pokoleń lekkich neutrin wynosi dokładnie trzy, a masa najcięższego kwarku t wynosi dokładnie tyle, ile okazał się on mieć po odkryciu go w Tevatronie (patrz tylna strona okładki).

LEP ma zakończyć swoją chlubną działalność w przyszłym roku, co można przyjąć za koniec okresu precyzyjnych pomiarów przewidywań teorii elektrosłabej, najbardziej kompletnej i precyzyjnej teorii, jaką znamy. Nagroda Nobla dla 't Hoofta i Veltmana została przyjęta również jako uhonorowanie eksperymentalnych prac potwierdzających konstrukcję opartą na osiągnięciach laureatów. Dlaczego jednak nie poczekano do przyszłego roku? Może obawiano się, że LEP odkryje na koniec wciąż brakujący bozon Higgsa, a wtedy Nagrodę trzeba by było przyznać komu innemu? Jeśli to jednak się nie uda, to ostateczną odpowiedź powinien dać następca LEPu – LHC (zderzacz pp). Między innymi o tym będzie można przeczytać w specjalnym majowym numerze *Delty* poświęconym fizyce cząstek.

Piotr ZALEWSKI

Protokół posiedzenia Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki w składzie:
Antoni Leon Dawidowicz – przewodniczący, Witold Sadowski, Paweł Strzelecki, Agnieszka Wojciechowska, Jarosław Wróblewski,
na posiedzeniu w dniu 1 września 1999 roku, po wysłuchaniu prezentacji prac zakwalifikowanych do finału Konkursu, postanowiło:

1) przyznać złoty medal i nagrodę w kwocie 800 złotych **Jakubowi Onufremu Wojtaszczykowi** z XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie za pracę pt. *O liczbie podziałów wielokąta wypukłego na równoległoboki*;

2) przyznać srebrny medal i nagrodę w łącznej kwocie 500 złotych **Łukaszowi Kamińskiemu** i **Pawłowi Rochmanowi** z IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu za pracę pt. *Sumy ze współczynnikami Newtona*;

3) nie przyznawać medalu brązowego;

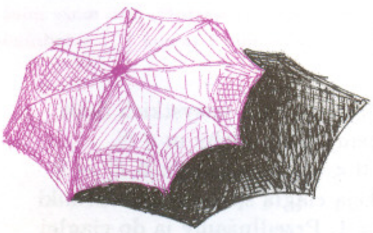
4) przyznać dwa równorzędne wyróżnienia i nagrody w kwocie 250 złotych każda: **Erykowi Kopczyńskiemu** z XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie za pracę pt. *O symulowaniu zdarzeń losowych za pomocą innych*, i **Rafałowi Tyranowskiemu** z I LO w Gorzowie Wielkopolskim za pracę pt. *Pewne twierdzenie o potęgowaniu alefów*.

Zwycięska praca będzie wydrukowana w *Delcie* 3/2000

(–) *podpisy członków Jury*

Tradycyjnym zwyczajem redakcja *Delty* ogłasza Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki. Zachęcamy uczniów zainteresowanych matematyką do opracowywania swoich matematycznych rozważań i nadsyłania rezultatów do redakcji *Delty*. Poniżej przypominamy szczegółowy regulamin konkursu.

Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki



1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.
3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.
4. W eliminacjach bierze udział każdy uczeń, który w terminie do 1 maja prześle pod adresem redakcji *Delty* jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, klasa, nazwa i adres szkoły; imię, nazwisko i adres opiekuna pracy.
5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.
6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Jury Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną zakwalifikowane przez Jury do finału. Finał odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.
7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac i ich opiekunom przed końcem roku szkolnego.
8. Finaliści i opiekunowie ich prac otrzymają od Zarządu Głównego PTM zaproszenia do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.
9. Finał polega na wygłoszeniu (nie odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia Sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne ufundowane przez Ministerstwo Edukacji Narodowej.
11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.
12. Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.
13. Jury Konkursu jest powoływane przez Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delty*.

Rozwiązanie zadania M 906.
1 krok: na lewej szalce ekspert kładzie monetę 1, na prawej zaś monetę 8. Prawa szalka przeważa, więc sąd widzi, że moneta 1 jest fałszywa, a 8 – prawdziwa.

2 krok: na lewą szalkę ekspert kładzie monety 2, 3 i 8, a na prawą – 9, 10 i 1. Prawa przeważa, więc sąd stwierdza, że 2 i 3 są fałszywe, a 9 i 10 – prawdziwe.

3 krok: na lewą szalkę ekspert kładzie monety 4, 5, 6, 7, 8, 9 i 10, a na prawą – pozostałe. Prawa szalka przeważa, więc sąd widzi, że monety 4, 5, 6 i 7 są fałszywe, a 11, 12, 13 i 14 – prawdziwe.

Uwaga: Uogólnienie: $7 = 2^k - 1$ dla $k = 3$.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 III 2000

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1999.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 381 (WT=2,46) i 382 (WT=1,31) z numeru 5/1999

Piotr Kumor	– Olsztyn	42,95
Bogumiła Piotrowska	– Zielona Góra	42,35
Janusz Olszewski	– Suwałki	36,66
Andrzej Daniluk	– Kraków	35,82
Zbigniew Galias	– Kraków	35,12

Zadania z matematyki nr 393, 394

Redaguje Marcin E. KUCZMA

393. Ze zbioru $\{1,2,3,\ldots,2000\}$ losujemy bez zwracania m liczb ($1 \le m \le 2000$). Niech p_m będzie prawdopodobieństwem tego, że suma wylosowanych liczb dzieli się przez 5. Wyznaczyć te wartości m, dla których $p_m = 1/5$.

394. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele par liczb całkowitych (a,b) o tej własności, że wielomian $P(x) = x^5 - ax + b$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste, których iloczyn jest równy 1.

Zadanie 394 zaproponował pan Paweł Kubit z Krosna.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/1999

Przypominamy treść zadań:

385. Wyznaczyć wszystkie liczby $\delta > 0$, dla których jest prawdziwe następujące zdanie: jeżeli $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją ciągłą spełniającą warunek $f(0) = f(1)$, to dla pewnej liczby x zachodzi równość: $f(x) = f(x+\delta)$.

386. Niech $n \ge 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Obliczyć maksymalną wartość, jaką może mieć suma $\sum |P_iP_j|^2$ dla n punktów $P_1,\ldots,P_n$ leżących na sferze o promieniu 1 (suma $\binom{n}{2}$ składników, odpowiadających wszystkim parom (i,j), $i<j$).

385. Aby mogła zajść równość $f(x) = f(x+\delta)$, liczby x oraz $x+\delta$ muszą należeć do dziedziny funkcji f, czyli do przedziału $[0,1]$. Zatem rozważane zdanie nie jest prawdziwe dla żadnej liczby $\delta > 1$. W dalszym ciągu ograniczamy uwagę do liczb $\delta \le 1$.

Przypuśćmy najpierw, że $\delta = 1/n$ dla pewnej liczby naturalnej n. Niech $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą spełniającą warunek $f(0) = f(1)$. Określamy funkcję $g\colon [0,1-\delta] \to \mathbb{R}$ wzorem: $g(x) = f(x+\delta) - f(x)$. Ponieważ

$$\sum_{k=0}^{n-1} g(k\delta) = \sum_{k=0}^{n-1} \big(f((k+1)\delta) - f(k\delta)\big) = f(n\delta) - f(0) =$$

$$= f(1) - f(0) = 0,$$

zatem co najmniej jeden składnik sumy $\sum g(k\delta)$ jest liczbą nieujemną i co najmniej jeden składnik jest liczbą niedodatnią. Z ciągłości funkcji g wynika, że dla pewnego x zachodzi równość $g(x) = 0$, czyli $f(x+\delta) = f(x)$.

Przypuśćmy z kolei, że $\delta \ne 1/n$ dla wszystkich liczb naturalnych n. Znajdujemy takie liczby $m \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, że $1 = m\delta + \gamma$, $0 < \gamma < \delta$. Niech $h\colon [0,\delta] \to \mathbb{R}$ będzie jakąkolwiek funkcją ciągłą spełniającą warunki $h(0) = h(\delta) = 0$, $h(\gamma) = 1$. Przedłużamy ją do ciągłej funkcji okresowej $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o okresie δ. Definiujemy funkcję ciągłą $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = h(x) - x \quad \text{dla} \quad x \in [0,1].$$

Oczywiście $f(0) = 0$,

$$f(1) = h(1) - 1 = h(m\delta + \gamma) - 1 = h(\gamma) - 1 = 0.$$

A skoro równość $h(x+\delta) = h(x)$ zachodzi dla każdej liczby x, to analogiczna równość dla funkcji f nie zachodzi dla żadnej liczby x. Skonstruowany przykład pokazuje, że w tym przypadku rozważane zdanie nie jest prawdziwe.

Wniosek: zdanie to jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy δ jest odwrotnością liczby naturalnej.

386. Niech $\mathbf{v}_i$ będzie wektorem długości 1, zaczepionym w środku sfery, o końcu w punkcie P_i. Wówczas

$$\sum_{i<j} |P_iP_j|^2 = \sum_{i<j} |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j|^2 = \sum_{i<j} \big(|\mathbf{v}_i|^2 + |\mathbf{v}_j|^2 - 2\cdot\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_j\big) = \sum_{i<j} (2 - 2\cdot\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_j) =$$

$$= 2\binom{n}{2} - \left(\Big|\sum_i \mathbf{v}_i\Big|^2 - \sum_i |\mathbf{v}_i|^2\right) = n(n-1) - \Big|\sum_i \mathbf{v}_i\Big|^2 + n = n^2 - \Big|\sum_i \mathbf{v}_i\Big|^2 \le n^2.$$

Równość w tym szacowaniu zachodzi, gdy $\sum \mathbf{v}_i$ jest wektorem zerowym, czyli, na przykład, dla punktów $P_1,\ldots,P_n$ będących wierzchołkami n-kąta foremnego wpisanego w koło wielkie danej sfery. Szukane maksimum wynosi zatem n^2.

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 III 2000

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 280 (WT=1,69) i 281 (WT=2,23) z numeru 6/1999

Andrzej Idzik	– Bolesławiec	44,82
Tomasz Wietecha	– Tarnów	37,76
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	31,26
Aleksander Surma	– Myszków	25,25
Artur Arciszewski	– Kielce	22,63
Jarosław Łazuka	– Warszawa	20,19
Grzegorz Miłoś	– Mielec	17,14
Tomasz Rudny	– Warszawa	15,53
Marek Wójcicki	– Szczecin	13,96

Na uzyskanie tytułu **Weterana Ligi 44 F** p. Andrzej Idzik potrzebował tylko około 3,5 roku!

Zadania z fizyki nr 290, 291

Redaguje Jerzy B. BROJAN

290. W jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B znajduje się nieruchomy ładunek punktowy Q. Małe ciało o masie m i ładunku q umieszczono w punkcie odległym od Q o r_0, przy czym odcinek $q-Q$ był prostopadły do $\vec{B}$, a prędkość początkowa ciała była równa zeru; ponadto przyjmijmy, że znaki ładunków są jednakowe. Wykazać, że w czasie ruchu ciała jego odległość od Q nie przekroczy pewnej maksymalnej wielkości $r_{\max}$ i podać równanie pozwalające obliczyć tę wielkość.

291. Dwie równoległe czarne powierzchnie płaskie znajdują się w temperaturach 0°C i 100°C, a w obszarze między nimi jest próżnia. Jeśli wprowadzimy w ten obszar cienką czarną płytę równoległą do obu powierzchni, to jaką temperaturę przybierze ona po długim czasie? Rozmiary powierzchni są znacznie większe od odległości między nimi.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/1999

Przypominamy treść zadań:

282. W zewnętrznym jednorodnym polu elektrycznym umieszczono prostopadle do niego dwie przewodzące płytki i zwarto je, tak że wskutek indukcji na płytkach pojawiły się ładunki przeciwnego znaku. Czy wzajemne przyciąganie tych płytek jest silniejsze, czy słabsze od rozciągającego je oddziaływania ze strony pola zewnętrznego?

283. 4 lutego 1999 r. rosyjscy kosmonauci przeprowadzili (nieudany) eksperyment z oświetleniem powierzchni Ziemi światłem słonecznym odbitym od zwierciadła umieszczonego na orbicie. Jak podawała prasa, zwierciadło było kołem o średnicy 25 m, a wysokość orbity wynosiła 360 km. Jeśli odbita wiązka światła pada na powierzchnię Ziemi prostopadle, a zwierciadło jest płaskie, to jaka jest średnica wytworzonego „zajączka"? Czy można ją zmniejszyć, stosując zwierciadło wklęsłe? Ile razy silniejsze jest oświetlenie takim zwierciadłem od Księżyca w pełni? Dane: średnica kątowa Słońca i Księżyca na niebie – około 32′, średnie albedo Księżyca (współczynnik odbicia światła od jego powierzchni) – 0,073.

282. Silniejsze jest oddziaływanie ze strony pola zewnętrznego, co można wykazać najprościej na podstawie bilansu energii: między płytkami wypadkowe natężenie pola jest równe zeru, zatem rozsunięcie płytek powoduje zmniejszenie objętości obszaru, w którym występuje pole elektryczne i zmniejszenie energii pola. Stąd praca wykonywana przy oddalaniu płytek jest ujemna, czyli siła rozciągająca przeważa.

283. Po odbiciu od małego zwierciadła płaskiego wiązka światła o szerokości kątowej $32' = 9{,}3\cdot10^{-3}$ rad utworzy w odległości 360 km „zajączek" o średnicy $360\cdot9{,}3\cdot10^{-3}$ km $= 3{,}4$ km. Dla dużego zwierciadła do tego wyniku należałoby w zasadzie dodać średnicę zwierciadła, co jednak dla zwierciadła o rozmiarach kilkudziesięciu metrów nie ma praktycznie żadnego znaczenia (teoretycznie można by wyeliminować to dodatkowe zwiększenie „zajączka", stosując zwierciadło wklęsłe o ogniskowej 360 km). Oznaczmy stałą słoneczną (natężenie oświetlenia powierzchni prostopadłej do promieni słonecznych) przez I_0. Mnożąc ją przez powierzchnię zwierciadła, znajdujemy moc, która następnie rozkłada się na powierzchnię „zajączka". Po przekształceniach stwierdzamy, że natężenie I_z oświetlenia „zajączka" jest dane wzorem

$$I_z = I_0\left(\frac{\alpha_z}{\alpha_0}\right)^2,$$

gdzie α_0 jest daną średnicą kątową Słońca, a $\alpha_z = (25\text{ m}/360\text{ km}) = 6{,}9\cdot10^{-5}$ rad jest średnicą kątową zwierciadła.

Całkowita moc promieniowania docierająca do powierzchni Księżyca jest równa iloczynowi I_0 przez „pole tarczy Księżyca" πR_k^2, a po pomnożeniu przez albedo a znajdujemy moc wypromieniowaną. Jak wynika z prawa Lamberta, natężenie I_k oświetlenia powierzchni Ziemi przez Księżyc w pełni wyznaczymy, dzieląc tę moc przez πR^2 (gdzie R jest odległością Księżyca od Ziemi):

$$I_k = aI_0\cdot\left(\frac{R_k}{R}\right)^2 = aI_0\frac{1}{4}\alpha_0^2,$$

przy czym podstawiliśmy średnicę kątową Księżyca równą α_0. Ostatecznie stosunek oświetleń wynosi

$$\frac{I_z}{I_k} = \frac{4}{a}\cdot\frac{\alpha_z^2}{\alpha_0^4} = 35.$$

Według danych prasowych średnica „zajączka" miała w rzeczywistości wynosić od 5 do 8 km, a stosunek oświetleń – od 5 do 10, zapewne wskutek niedoskonałości zwierciadła (które nie było też, jak się zdaje, pełnym kołem).

Rozwiązanie zadania F 515.
W gazach między cząsteczkami działają siły wzajemnego przyciągania, które dążą do zmniejszenia objętości gazu. To znaczy, że w utrzymaniu gazu w danej objętości ciśnieniu zewnętrznemu pomaga ciśnienie wewnętrzne, które powstaje na skutek wzajemnego przyciągania cząsteczek. Zatem gdyby siły wzajemnego przyciągania przestały działać, ciśnienie gazu zwiększyłoby się.

Patrz w niebo

Znamy obecnie stosunkowo nieźle rozkład „porządnych", wypełnionych gwiazdami galaktyk we Wszechświecie liczącym – jak wiadomo – około 15 mld lat. Znamy też w przybliżeniu – za pośrednictwem rozkładu mikrofalowego promieniowania tła – rozkład materii w bardzo młodym Wszechświecie. Galaktyki powstały więc kiedyś „w międzyczasie", ale do dziś nie ma odpowiedzi na pytania: kiedy i jak powstały. Być może w uzyskaniu tych odpowiedzi pomoże skrupulatne przebadanie tzw. głębokiego pola Hubble'a, oznaczanego najczęściej symbolem HDF – od angielskiej nazwy *Hubble's Deep Field*. HDF to niewielki obszar nieba w Wielkiej Niedźwiedzicy, którego obraz uzyskany w przybliżeniu 5 lat temu za pomocą kosmicznego teleskopu Hubble'a umożliwił dostrzeżenie obiektów do 30 wielkości gwiazdowej, czyli miliardy razy słabszych od najsłabszych gwiazd widzianych nieuzbrojonym okiem. W polu tym skatalogowano oraz pomierzono jasności, barwy i określono typy ponad 3000 obiektów. HDF jest teraz najgłębiej sięgającym w Kosmos zdjęciem fragmentu Wszechświata. Jak to często bywa, nowe osiągnięcie naukowe wcale nie musi dać odpowiedzi na już postawione pytania, za to ujawnia nowe problemy.

Najważniejszym problemem w badaniach tego typu jest wyznaczenie odległości obserwowanych obiektów. Standardowo odległości galaktyk wyznacza się na podstawie przesunięcia ich widm ku czerwieni, ponieważ odległość jest proporcjonalna do przesunięcia widma, a współczynnikiem proporcjonalności w tej zależności jest znana skądinąd stała Hubble'a. Jednak większość galaktyk w HDF jest za słaba, by dało się uzyskać ich widma nawet za pomocą największych, 10-metrowych współczesnych teleskopów. Dlatego udało się określić odległości, a co za tym idzie – wiek, tylko mniej więcej stu galaktyk w HDF.

Nie jest to wiele, ale może już stanowić materiał umożliwiający wstępne prześledzenie, czy i jak własności galaktyk zmieniają się wraz z ich wiekiem. Okazało się, że większość obiektów w HDF to galaktyki karłowate, a zatem ich ilość we Wszechświecie znacznie przewyższa ilość dużych galaktyk o wyraźnej strukturze. To z kolei może sugerować, że duże galaktyki powstały w wyniku sklejania się wielu mniejszych. Inni badacze jednak dowodzą (przytaczając wyniki obliczeń modelowych), że gdyby tak miało być, to obecne galaktyki musiałyby mieć znacznie więcej materii w jądrze, niż rzeczywiście mają. Według nich jest możliwe, że małe, słabe galaktyki z czasem po prostu przestają być widoczne po zużyciu lub rozproszeniu pierwotnej materii międzygwiazdowej, ponieważ niemal całkiem ustają wtedy procesy gwiazdotwórcze. Tak więc odpowiedzi na podstawowe pytanie „jak powstały galaktyki" nadal nie ma. Na szczęście teleskop Hubble'a ciągle pracuje...

Tomasz KWAST

Styczeń

Wkraczamy w ostatni rok dwudziestego stulecia i drugiego tysiąclecia. Być może jakaś część ludzi oddycha z ulgą, bo katastroficzne proroctwa dotyczące 1999 roku nie spełniły się. Minął on spokojnie (w każdym razie Wszechświat zachowywał się w pobliżu nas spokojnie, bo ludzkość niezupełnie) i nawet całkowite zaćmienie Słońca 11 VIII nie narobiło żadnych szkód. Miejmy nadzieję, że reszta, czyli większość ludzi, cały czas zachowywała zimną krew.

Rok 2000 będzie wyjątkowo ubogi w zaćmienia – żadnego całkowitego zaćmienia Słońca. Za to już 21 I będziemy mogli zobaczyć całkowite zaćmienie Księżyca. Faza całkowitości trwać będzie od godz. 5:04 do 6:22 (środek wypada o 5:43), czyli pod koniec nocy, ale w zimie jest wtedy jeszcze ciemno i z pewnością zobaczymy charakterystyczną rdzawą barwę zaćmionego Księżyca. Nów Księżyca wypada 6 I, a pełnia, oczywiście, w dniu zaćmienia. Księżyc zbliży się mocno do Aldebarana 17 I, ale zakrycie gwiazdy z Polski widoczne nie będzie.

Wenus widać w styczniu na wschodnim niebie przed wschodem Słońca w Skorpionie, Mars jest w Wodniku i widać go wieczorem w zachodniej części nieba. Jowisz jest w Rybach, a Saturn niedaleko w Baranie i obie te planety widać w pierwszej połowie nocy. Wreszcie 3 I Ziemia znajdzie się w peryhelium orbity, ale z tego powodu nie będzie cieplej.

T.K.

1/00 (25)

Γlimatias $_{n\to\infty}$

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (20)

ZADANIE: Dowieść, że dla dowolnych liczb naturalnych a, b, c zachodzi równość

$$\frac{[a,b]\cdot[b,c]\cdot[c,a]}{[a,b,c]^2}=\frac{(a,b)\cdot(b,c)\cdot(c,a)}{(a,b,c)^2},$$

gdzie $(x,y,\ldots,z)$ i $[x,y,\ldots,z]$ oznaczają odpowiednio największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność liczb x, y,…, z.

Rozwiązanie: Korzystając z faktu, że najmniejsza wspólna wielokrotność jest równa iloczynowi podzielonemu przez największy wspólny dzielnik, otrzymujemy po przekształceniu lewej strony, danej w zadaniu, równości:

$$\frac{[a,b]\cdot[b,c]\cdot[c,a]}{[a,b,c]^2}=\frac{\frac{ab}{(a,b)}\cdot\frac{bc}{(b,c)}\cdot\frac{ca}{(c,a)}}{\frac{a^2b^2c^2}{(a,b,c)^2}}=$$

$$=\frac{ab\cdot bc\cdot ca}{a^2b^2c^2}\cdot\frac{(a,b)\cdot(b,c)\cdot(c,a)}{(a,b,c)^2}=\frac{(a,b)\cdot(b,c)\cdot(c,a)}{(a,b,c)^2},$$

co kończy dowód.

JWR

PISZEMY PRACE (1′, 2′, 3′)

Czytelnicy nadesłali 3 opracowania tematu *Tożsamości w trójkącie Pascala*, natomiast na tematy *Krzywe drugiego stopnia w geometrii* oraz *Wokół wielkiego twierdzenia Fermata* nie było, niestety, odzewu. Tematy te pozostają więc aktualne i zachęcamy obecnych uczniów szkół średnich do sięgnięcia do *Delty* 2/1999 i 3/1999 i nadesłania pod adresem Γ-limatiasu swoich opracowań do końca kwietnia 2000 r.

Co do opracowań tematu dotyczącego trójkąta Pascala, to miło mi zakomunikować, że wspólna praca kol. kol. Łukasza Kamińskiego i Pawła Rochmana zdobyła srebrny medal w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki. W pracy tej autorzy wyprowadzili ogólne wzory na sumy ze współczynnikami Newtona, których ze względu na ograniczoną objętość niniejszej rubryki nie sposób zacytować w pełnej ogólności.

Pozostałe dwie prace nie zakwalifikowały się do finału Konkursu. W jednej z nich kol. Szymon Toruńczyk udowodnił tożsamość

$$\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\ldots=F_{n+1},$$

gdzie F_n jest n-tym wyrazem ciągu Fibonacciego. W drugiej kol. Michał Węgierek zaprezentował opracowanie dotyczące trójkąta Pascala, liczb Stirlinga i liczb Eulera.

Za nadesłane prace dziękujemy i zachęcamy do dalszego udziału w Konkursie. Pamiętajcie, że bezpośrednio do Redakcji *Delty* można nadsyłać prace konkursowe na dowolny temat (oczywiście z matematyki). Regulamin Konkursu znajdziecie w tym numerze *Delty*.

JWR

GRY (9)

Gdybyś bał się ze mną zagrać, Drogi Czytelniku, mógłbym Ci obiecać, że zagramy w najprostszą ze wszystkich gier, a ponadto dam Ci fory w postaci pierwszego ruchu. Zgoda? Oto najprostsza ze wszystkich gier: $\{\}$. Zaczynamy. Twój ruch. Co robisz? Nie masz dostępnego żadnego legalnego ruchu? No cóż, przegrałeś.

Grę przedstawioną powyżej nazwiemy *końcówką* i oznaczymy przez 0. Jak widzisz, Drogi Czytelniku, nie jest to gra specjalnie podniecająca, ale pojawia się ona jako pozycja końcowa w każdej grze. Jest to bowiem jedyna pozycja, w której przegrywa się natychmiast.

Znamy już jeden przykład gry. Jakie nowe gry możemy z niej utworzyć? Jedną, a mianowicie $\{0\}$. Co to za gra? W tej grze gracz rozpoczynający nie ma wiele do myślenia, gdyż ma tylko jedną możliwość wykonania ruchu, a mianowicie przejście do pozycji $0=\{\}$ i świętowanie zwycięstwa, gdyż jego przeciwnik nie ma możliwości wykonania ruchu. Tę grę nazwiemy 1.

Znamy 2 przykłady gier. Możemy utworzyć 2 nowe przykłady: $2=\{0,1\}$ i $\{1\}$. Prześledźmy grę 2. Pierwszy gracz ma dwie opcje: przejście do pozycji 1 (i przegrana) oraz przejście do pozycji 0 (i wygrana). Oczywiście każdy rozsądny gracz wybierze pozycję 0 i wygra. W grze $\{1\}$ ruchy są wymuszone: pierwszy gracz 1, drugi gracz 0, pierwszy gracz – brak legalnego ruchu i przegrana.

Znamy 4 przykłady gier. Możemy utworzyć 12 nowych przykładów: $3=\{0,1,2\}$, $\{1,2\}$, $\{0,2\}$, $\{2\}$, $\{0,1,2,\{1\}\}$, $\{1,2,\{1\}\}$, $\{0,2,\{1\}\}$, $\{2,\{1\}\}$, $\{0,1,\{1\}\}$, $\{1,\{1\}\}$, $\{0,\{1\}\}$, $\{\{1\}\}$.

Znając 16 gier, możemy utworzyć $2^{16}-16=65520$ nowych przykładów, w tym grę $4=\{0,1,2,3\}$. Jeśli otarłeś się o podstawy teorii mnogości, Drogi Czytelniku, możesz sobie pomyśleć: *Zapisujemy gry jak zbiory, tworzymy nowe gry jak zbiory, czy gry mają coś wspólnego ze zbiorami?* Naprawdę gry w rozważanym przez nas sensie są po prostu zbiorami.

A dlaczego pewne gry nazwaliśmy 0, 1, 2, 3, 4, …? Bo odpowiadają one grze *Nim* z jednym stosem zawierającym 0, 1, 2, 3, 4,… bierek.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl