



W dniu 5 września 2000 roku
zmarł
Tomasz Hofmokl
fizyk

uczony pełen entuzjazmu i niewyczerpanej pogody,
długoletni zastępca redaktora naczelnego *Delty*,
człowiek, któremu *Delta* zawdzięcza najwięcej;

także w tym numerze *Delty* jest Jego artykuł

SPIS TREŚCI NUMERU 10 (317)

Liczby zespolone
czterema sposobami

Homografie i przekształcenia
wiernokątne

Witold Sadowski

Zadania

Metoda Newtona,
iteracje i fraktale

Anna Zdunik

Mała Delta

O konstrukcjach
wielokątów foremnych

Mikołaj Rotkiewicz

To samo z linijką
i cyrklem w rękę

Zasadnicze twierdzenie
algebry

Paweł Strzelecki

A po co w fizyce
liczby zespolone?

Tomasz Hofmokl

Pochodna zespolona,
czyli funkcje holomorficzne

Piotr Hajłasz

Skąd się wzięły
liczby zespolone?

Aktualności
(nie tylko) fizyczne

Klub 44

Patrz w niebo

Październik

Gammalimatias

str. 1

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula

Bogdan Cichocki

– wiceprzewodniczący

Krzysztof Ciesielski

Jan A. Gaj

Piotr Goldstein

Tomasz Hofmokl

Andrzej Hrynkiewicz

Wiesław A. Kamiński

Marta Kicińska-Habior

Krzysztof Maślanka

Janusz Matkowski

Andrzej Mąkowski

Zdzisław Pogoda

Michał Różyczka

Konrad Rudnicki

Grzegorz Sitarski

Andrzej Woszczyk

Eligiusz Złotkiewicz

Wiesław Żelazko – przewodniczący

str. 2

str. 3

str. 4

str. 5

str. 6

str. 7

str. 8

str. 9

str.10

str.12

str.13

str.14

str.16

str.16

str.17

Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol

Krzysztof Biesaga

Ewa Czuchry

Krzysztof Kordos – sekr. red.

Marek Kordos – red. nac.

Tomasz Kwast

Anna Ludwicka

Anna Rudnik

Witold Sadowski

Joanna Udalska

Anna Wojtyra

Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa

tel. 853-59-61

BARTOL@MIMUW.EDU.PL

Skład systemem T_pX wykonała Redakcja.

Wydrukowano

w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A.

w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 2001 roku wynosi 3 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2001 r. wynosi 6 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na I kwartał 2001 r. wynosi 9 zł.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaką”.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest równa cenie prenumeraty krajowej plus rzeczywiste koszty wysyłki. Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8⁰⁰ – 14⁰⁰.

5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem za granicę		
5 XII	20 XI	na I kwartał roku następnego,	
5 III	20 II	na II kwartał,	
5 VI	20 V	na III kwartał,	
5 IX	20 VIII	na IV kwartał.	

6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także tel. 620-10-19 i 620-12-17, wewn. 2366.

W następnym numerze:

Podbój Kosmosu

Okładki i ilustracje: *Anna Ludwicka*
Rysunki techniczne: *Marcin Adamski*

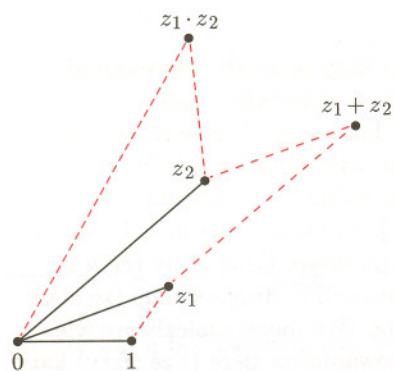
Wybór artykułów w języku angielskim
<http://www.mimuw.edu.pl/delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 3 zł

Numery archiwalne (od 1985 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Liczby zespolone czterema sposobami



Suma to taki punkt, że $0z_1(z_1 + z_2)z_2$ jest równoległobokiem; iloczyn to taki punkt, że trójkąty $01z_1$ i $0z_2(z_1 \cdot z_2)$ są podobne i mają tę samą orientację.

Jeżeli określimy dodawanie i mnożenie punktów płaszczyzny, z wyróżnionymi punktami 0 i 1, w sposób przedstawiony na rysunku, to otrzymamy **liczby zespolone**. Ten szybki, jasny sposób wprowadzenia liczb zespolonych – zwany *geometrycznym* – okazał się jednak mało praktyczny.

Spójrzmy teraz na te liczby inaczej, jak na wektory o początku w 0. Ponieważ wszystkie mają ten sam początek, więc będziemy je nazywać tak jak ich końce. Każdy z nich może być uzyskany z wektora 1 za pomocą podobieństwa spiralnego o środku 0 (podobieństwo spiralne to złożenie jednokładności i obrotu o tym samym środku; jedynie wtedy obojętna jest kolejność wykonywania tych przekształceń). Dodawanie liczb zespolonych w tej postaci – nazwijmy ją *wektorową* – to składanie przesunięć odpowiadających składnikom, natomiast mnożenie to składanie podobieństw spiralnych (proszę na rysunku sprawdzić, że wektor 1 przy wykonaniu podobieństw spiralnych, odpowiadających z_1 i z_2 , stanie się wektorem $(z_1 \cdot z_2)$).

Takie ujęcie liczb zespolonych pozwala zauważyć, że każda z nich jest określona przez liczbę r mówiącą, ile razy musiał się przedłużyć wektor 1, aby ją otrzymać i liczbę φ mówiącą, o jaki kąt wektor 1 musiał się obrócić. Pierwszą z tych liczb nazywamy modułem liczby zespolonej, a drugą argumentem. Jeżeli przedstawimy liczbę zespoloną w postaci (r, φ) , to – wobec powyższych uwag – wzór na mnożenie będzie wyglądał tak:

$$(r_1, \varphi_1) \cdot (r_2, \varphi_2) = (r_1 \cdot r_2, \varphi_1 + \varphi_2).$$

Przetłumaczenie tego na zwykłe współrzędne kartezjańskie daje (bez rachunków!) wzór zwany nazwiskiem de Moivre'a

$$r_1(\cos \varphi_1, \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2, \sin \varphi_2) = (r_1 \cdot r_2)(\cos(\varphi_1 + \varphi_2), \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

Liczba (r, φ) ma, jak łatwo zauważyć współrzędne kartezjańskie $r(\cos \varphi, \sin \varphi)$.

co łatwo się uogólnia na wzory mówiące o potęgowaniu i pierwiastkowaniu liczb zespolonych.

Trzecia postać liczb zespolonych to przedstawienie ich bezpośrednio za pomocą współrzędnych kartezjańskich. Dodawanie ma wówczas bardzo prostą postać

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

bo tak się przecież dodaje wektory. Natomiast wzór de Moivre'a pozwala zobaczyć, że i wzór na mnożenie nie jest wiele bardziej skomplikowany:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Oto uzasadniający to rachunek: jeśli $(a, b) = (r_1 \cos \varphi_1, r_1 \sin \varphi_1)$, a $(c, d) = (r_2 \cos \varphi_2, r_2 \sin \varphi_2)$, to

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot (c, d) &= (r_1 \cos \varphi_1, r_1 \sin \varphi_1) \cdot (r_2 \cos \varphi_2, r_2 \sin \varphi_2) = ((r_1 \cdot r_2) \cos(\varphi_1 + \varphi_2), (r_1 \cdot r_2) \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = \\ &= (r_1 \cdot r_2)(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2, \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) = \\ &= (r_1 \cos \varphi_1 \cdot r_2 \cos \varphi_2 - r_1 \sin \varphi_1 \cdot r_2 \sin \varphi_2, r_1 \cos \varphi_1 \cdot r_2 \sin \varphi_2 + r_1 \sin \varphi_1 \cdot r_2 \cos \varphi_2) = (ac - bd, ad + bc). \end{aligned}$$

Można uczynić teraz dwie obserwacje. Pierwsza to ta, że każda liczba zespolona da się przedstawić jako

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1).$$

Zauważmy, że $(1, 0)$ to po prostu 1 – każdy może sprawdzić, jak się przez $(1, 0)$ mnoży. Natomiast

$$(0, 1)^2 = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0),$$

co jest zwykłą minus jedyneką, co też można sprawdzić mnożąc. Liczba $(0, 1)$ jest oznaczana przez i (od *imaginarius*), nazywana *jednostką urojoną* i stanowi wielką tajemnicę dla różnego rodzaju filozofów (bo jak to możliwe, aby kwadrat był ujemny...). Tak *algebraicznie* ujęte liczby zespolone to sumy $a + ib$, gdzie a i b to liczby rzeczywiste. Rachunki na nich przeprowadza się tak jak na wielomianach, pamiętając zawsze, że $i^2 = -1$. Na przykład wzór na mnożenie wyprowadza się przy tej interpretacji tak:

$$(a + ib) \cdot (c + id) = ac + aid + ibc + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Jest to najstarszy i najczęściej stosowany sposób używania liczb zespolonych.

Gdy $z = (a, b)$, używane są też oznaczenia $\operatorname{Re} z = a$, $\operatorname{Im} z = b$.

Oczywiście można te sposoby mieszać. Często zapisuje się np. liczby w postaci algebraicznej za pomocą modułu i argumentu

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

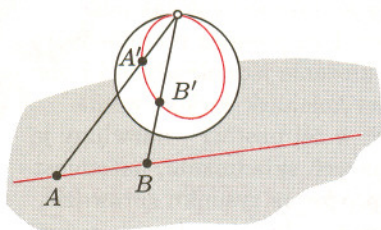
Jest to szczególnie wygodne, ponieważ

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

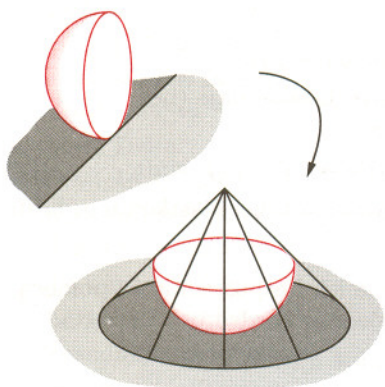
ale to już postać z zupełnie innej bajki.

Homografie i przekształcenia wiernokątne

Witold SADOWSKI



Rys. 1. Rzut stereograficzny. Punktowi A przypisujemy punkt A' . Obrazem prostej AB jest okrąg na sferze przechodzący przez punkty A' , B' oraz biegun północny (∞).



Rys. 2. Obracamy miskę i rzutujemy.

Przekształcenie tożsamościowe jest homografią. Przekształcenie odwrotne do homografii oraz złożenie dwóch homografii też jest homografią. Homografie tworzą zatem grupę odwzorowań płaszczyzny domkniętej na siebie. Grupą odwzorowań „zwykłej płaszczyzny” na siebie jest grupa przekształceń liniowych.

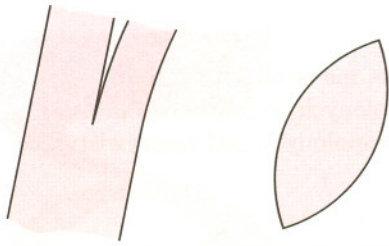


Rys. 3. Przykład obszaru jednospójnego (a) i obszaru, który taki nie jest (b).

Odwzorować półpłaszczyznę w koło. I to tak, by kąty pomiędzy dowolnymi krzywymi na półpłaszczyźnie i ich obrazami w kole były takie same... Łatwo powiedzieć! Ale czy to w ogóle możliwe? Jak zmieścić nieograniczoną półpłaszczyznę w małym kole? I jeszcze nie powyginać kątów?! To jakieś magiczne sztuczki... Ale spróbujemy. Postawmy najpierw na płaszczyźnie sferę i zrzutujemy całą płaszczyznę na sferę tak, jak pokazuje rysunek 1. Nasza półpłaszczyzna przejdzie na „miskę” ustawioną pionowo. Gdybyśmy teraz tę „miskę” ustawili poziomo (rys. 2), a potem zrzutowali w drugą stronę (ze sfery na płaszczyznę), to otrzymalibyśmy wnętrze koła. Być może znaleźliśmy więc to odwzorowanie, o które chodzi, o ile przy rzutowaniu na sferę (i ze sfery) kąty między krzywymi zostały zachowane.

Na szczęście jest tak w istocie, co można dość żmudnie, ale nietrudno wykazać. Wiemy zatem, jak można odwzorować półpłaszczyznę w koło, ale wzoru na to przekształcenie jak nie mieliśmy, tak nie mamy. Czas zatem go poszukać. Moglibyśmy, oczywiście, spróbować zapisać formalnie to, co powiedzieliśmy dotąd, ale pójdźmy inną drogą. Wykorzystamy fakt, że dowolnemu punktowi płaszczyzny odpowiada liczba zespolona. Zauważmy najpierw, że przy rzutowaniu na sferę obrazem płaszczyzny była sfera bez punktu (bez bieguna północnego). Dodajmy ten punkt do sfery, co odpowiadać będzie dodaniu do płaszczyzny punktu ∞ . Otrzymamy tzw. płaszczyznę domkniętą. (Taka płaszczyzna jest dla nas wygodniejsza, gdyż prosta $y = 0$ z dołączonym punktem ∞ , jako brzeg górnej półpłaszczyzny, przejść ma teraz na brzeg koła, czyli okrąg.)

Zastanówmy się, jakie mogą być najprostsze i „najprzyzwoitsze” przekształcenia na płaszczyźnie domkniętej? Na „zwykłej płaszczyźnie” wiadomo: liniowe $az + b$. A na domkniętej można jeszcze „swobodnie” przechodzić na punkt ∞ , więc przekształcenie $\frac{1}{z}$ też jest niczego sobie. Ogólnie rzecz biorąc interesować nas będą przekształcenia postaci $\frac{az+b}{cz+d}$, gdzie $ad - bc \neq 0$ (po co ten warunek?), a, b, c, d – liczby zespolone. Nazywają się one *homografiami*. Jak widać ze wzoru, homografia powstaje ze złożenia trzech przekształceń: najpierw mamy przekształcenie liniowe $w = cz + d$, potem wykonujemy tzw. *inwersję* $s = \frac{1}{w}$, a na koniec znowu przekształcenie liniowe $As + B$, którego współczynniki A i B Czytelnik z łatwością wyliczy. Ponieważ przekształcenie liniowe $az + b$ to złożenie podobieństwa spiralnego wyznaczonego przez liczbę a (patrz str. 1) z przesunięciem o wektor b , więc przy tym przekształceniu kąty pozostają bez zmian. Można również wykazać, że inwersja $\frac{1}{z}$ zachowuje kąty między krzywymi, skąd łatwo już dostrzec, że także dowolna homografia jest przekształceniem wiernokątnym (zachowującym kąty między krzywymi). Podobnie jak rzut stereograficzny (rys. 1) homografie zamieniają proste w proste (ewentualnie w okręgi) oraz okręgi w okręgi (ewentualnie w proste). Skorzystajmy z tej własności i wybierzmy trzy różne punkty prostej $y = 0$ (np. $-1, 0$ oraz 1), „nakazując im” przejście w trzy różne punkty okręgu jednostkowego (np. odpowiednio w $i, -1, -i$). Otrzymamy w ten sposób trzy łatwe równania, z których natychmiast wyliczymy wzór homografii $\frac{z-i}{z+i}$. Ponieważ prosta $y = 0$ (z dołączonym punktem ∞) jest brzegiem zarówno dolnej, jak i górnej półpłaszczyzny, wystarczy teraz tylko sprawdzić, czy dowolny punkt z wnętrza górnej półpłaszczyzny (np. i) znajdzie się we wnętrzu koła. Łatwo spostrzec, że jest tak w istocie. W ten sposób okazuje się ostatecznie, że wzór naszego przekształcenia ma wyjątkowo prostą postać, gdy użyjemy do jego wyrażenia liczb zespolonych. Można zaproponować Czytelnikowi wyrażenie tego wzoru za pomocą współrzędnych rzeczywistych i rozstrzygnięcie, czy również „rzeczywisty wzór” jest „najprostszy z możliwych”.



Rys. 4. Pas nacięty wzdłuż półprostej czy też soczewkę można wiernokątnie odwzorować w koło.

Na koniec warto zauważyć, że homografie to, oczywiście, nie jedyne przekształcenia wiernokątne. Nietrudno bowiem spostrzec, że jeśli funkcja ma w danym obszarze różną od zera pochodną, to jest wiernokątna: przybliża się przecież w małym otoczeniu danego punktu przez przekształcenie liniowe, które – jak stwierdziliśmy wcześniej – zachowuje kąty. Skoro zatem funkcji takich jest dość dużo, to może i obszarów, które można wiernokątnie odwzorować w koło jednostkowe, jest wiele? Może górna półpłaszczyzna nie była pod tym względem wyjątkowa? Odpowiedź na to pytanie daje twierdzenie Riemanna. Okazuje się, że każdy obszar jednospójny, czyli taki, w którym każda krzywa zamknięta da się ściągnąć do punktu (patrz rys. 3) i którego brzeg składa się z więcej niż jednego punktu, można wiernokątnie odwzorować w koło jednostkowe.



Choć to może być zaskakujące, liczb rzeczywistych nie da się arytmetycznie (a więc za pomocą dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia i pierwiastkowania dowolnego naturalnego stopnia) wyróżnić wśród liczb zespolonych. Oznacza to, że nie ma takiego wyrażenia arytmetycznego, które spełnione byłoby przez liczby zespolone, będące liczbami rzeczywistymi i tylko przez te liczby. Aby można było liczby rzeczywiste zdefiniować, potrzebne są jakieś środki niearytmetyczne – np. sprzężenie, które każdej liczbie zespolonej z przyporządkowuje liczbę zespoloną \bar{z}

mającą tę samą część rzeczywistą co z , ale przeciwną część urojoną. Dowód tego faktu jest (jak dowód każdej niemożności) dość technicznie skomplikowany. Polega on na wskazaniu takiego automorfizmu (czyli przekształcenia zachowującego wymienione wyżej działania arytmetyczne) liczb zespolonych, który miesza liczby rzeczywiste z innymi liczbami zespolonymi. Skomplikowana jest właśnie konstrukcja takiego automorfizmu: dla dociekliwych można podać, że konieczny jest tu (podobnie jak do bazy Hamela) pewnik wyboru.



Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 931. Przez środek n -kąta foremnego poprowadzono prostą l , a następnie obliczono sumę S kwadratów odległości wierzchołków n -kąta od tej prostej. Udowodnić, że S nie zależy od wyboru l .

Rozwiązanie na str. 13

M 932. Niech $A_1A_2A_3A_4$ będzie czworokątem wypukłym. Udowodnić, że $A_1A_3 \cdot A_2A_4 \leq A_1A_2 \cdot A_3A_4 + A_2A_3 \cdot A_1A_4$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy na czworokącie można opisać okrąg.

Rozwiązanie na str. 5

M 933. Wierzchołki każdego z dwóch trójkątów równobocznych na płaszczyźnie ponumerowano liczbami 1, 2, 3 przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, a następnie wierzchołki o tych samych numerach połączono odcinkami.

Udowodnić, że środki trzech otrzymanych w ten sposób odcinków tworzą trójkąt równoboczny (być może zdegenerowany do punktu).

Rozwiązanie na str. 13

Redaguje Ewa CZUCHRY

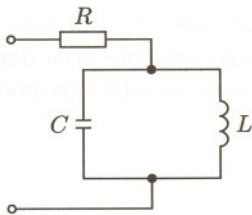
Impedancja kondensatora o pojemności C jest równa $\frac{1}{C\omega i}$, a cewki o indukcyjności L : $L\omega i$, gdzie ω jest częstością prądu zmiennego w obwodzie. Impedancja opornika jest równa jego oporowi.

F 533. Znaleźć impedancję obwodu przedstawionego na rysunku 1.

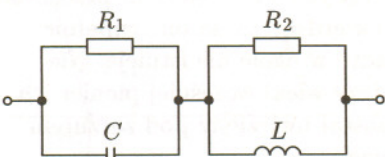
Rozwiązanie na str. 9

F 534. Czy można tak dobrać wartości oporów R_1 i R_2 (rys. 2), aby impedancja przedstawionego obwodu była rzeczywista dla całego zakresu częstości?

Rozwiązanie na str. 16



Rys. 1



Rys. 2

Metoda Newtona, iteracje i fraktale

Anna ZDUNIK

Rozważmy wielomian $p(z) = z^2 + 1$. Oczywiście, nie istnieje taka liczba rzeczywista z , że $p(z) = 0$. Ale w liczbach zespolonych to równanie ma dwa rozwiązania. Są to: i oraz $-i$. Przewaga liczb zespolonych nad rzeczywistymi polega na tym, że każdy wielomian

$$w(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

(współczynniki a_i mogą być zespolone) ma dokładnie n pierwiastków zespolonych (licząc z krotnościami) – zob. str. 8.

Weźmy wielomian $w(z)$ stopnia n i założmy (dla uproszczenia), że ma dokładnie n różnych pierwiastków. Można teraz próbować znaleźć pierwiastki wielomianu za pomocą jakiejś znanej metody iteracyjnej. Z praktyki „rzeczywistej” znamy metodę stycznych Newtona (rysunek).

Spróbujmy przenieść ją na „grunt zespolony”.

Wzór iteracji już mamy; trzeba znowu wziąć punkt startowy z_0 i wyliczać kolejne z_n według wzoru

$$z_{n+1} = z_n - \frac{w(z_n)}{w'(z_n)}.$$

Trzeba tylko umieć wykonywać cztery działania na liczbach zespolonych i powiedzieć, czym jest pochodna w' (w sensie zespolonym) naszego wielomianu. Czytelnik zgodzi się na pewno, że jeśli tylko istnieje (a istnieje) dobrze zdefiniowany sposób różniczkowania w sensie zespolonym (patrz str. 10), to pochodną naszego wielomianu powinien być wielomian

$$w'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \dots + a_1.$$

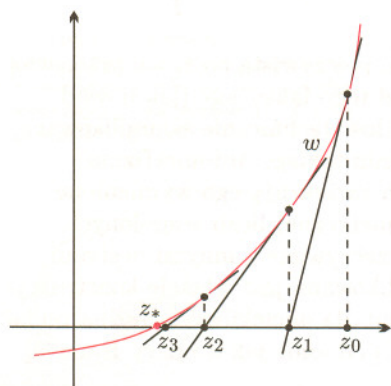
Okazuje się, że (tak jak w metodzie „rzeczywistej”) jeśli punkt startowy z_0 jest dostatecznie blisko (na płaszczyźnie) pierwiastka wielomianu z_* , to ciąg punktów płaszczyzny (czyli liczb zespolonych) z_n zbliża się do z_* . A jeśli nie jest dostatecznie blisko?

Powiemy, że metoda Newtona działa w punkcie startowym z_0 , jeśli ciąg $z_0, z_1, \dots, z_n, \dots$, określony powyżej, jest zbieżny do któregoś pierwiastka naszego wielomianu.

Dla każdego wielomianu jest wiele punktów, w których metoda Newtona na pewno nie działa. Pouczający przykład: $w(z) = z^2 + 1$, co będzie, jeśli wybierzemy $z_0 \in \mathbb{R}$? Poza tym zdarza się, że otrzymujemy we wzorze kłopotliwe dzielenie przez zero, wtedy metoda też „nie działa”.

Możemy teraz spytać, jak w takim razie dla ustalonego wielomianu w wygląda podział całej płaszczyzny na $n + 1$ części: do pierwszej zaliczymy te punkty startowe, dla których metoda Newtona nie działa; każda z pozostałych n części składa się z punktów startowych dających w granicy jeden z n pierwiastków naszego wielomianu w .

Pozostawię dociekliwemu Czytelnikowi odgadnięcie, jak wygląda ten podział np. dla wielomianu $z^2 + 1$. Prawdziwy galimatias zaczyna się i tak dopiero od $n = 3$. A fraktale? Proszę spojrzeć na tylną stronę okładki (rysunki na nią przygotował Krzysztof Barański).



„Rzeczywista” metoda Newtona. Tym razem w jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych, a z_* jest jednokrotnym pierwiastkiem tego wielomianu. Wybieramy punkt startowy z_0 . Określamy ciąg z_n : $z_{n+1} = z_n - \frac{w(z_n)}{w'(z_n)}$. Inaczej mówiąc: w punkcie z_n rysujemy styczną do wykresu, z_{n+1} jest punktem przecięcia tej stycznej z osią x . Jeśli tylko punkt startowy z_0 jest **dostatecznie** blisko z_* , to ciąg z_n na pewno jest zbieżny do z_* i to bardzo szybko. Niech $g(z) = z - \frac{w(z)}{w'(z)}$. Wtedy $z_{n+1} = g(z_n)$. Zauważmy, że $g(z_*) = z_*$ i $g'(z_*) = 0$.

Metoda Newtona polega więc na iterowaniu (składaniu) funkcji g . Jeśli w jest wielomianem, to g jest funkcją wymierną. Metoda Newtona stosuje się oczywiście nie tylko do wielomianów!

✓ L. Carnot był nieufny wobec „hieroglifów analizy”. Jako przykład niebezpieczeństw płynących z ich użycia podawał taki „zespolony” rachunek: $-a = \sqrt{-a}\sqrt{-a} = \sqrt{a^2} = a$.

✓ Holomorficznej funkcji $f = u + iv$ odpowiada pole wektorowe $[u, -v]$ opisujące pozbawiony wirów przepływ nieściślej cieczy.

✓ Jak pisze Laurence Young, jeszcze w 1820 roku studenci inżynierii w Paryżu wznieśli bunt przeciwko liczbom zespolonym twierdząc, że są one zupełnie bezużyteczne, a ponadto w ogóle nie istnieją. Nie dziwi zatem fakt, że trzy wieki wcześniej pionier ich użycia – Cardano – został uwięziony pod zarzutem uprawiania czarnej magii...

O korzyściach z nieistniejących zwierząt

O tym, jak rozwiązać pewne „rzeczywiste” problemy, korzystając ze świata liczb zespolonych, można przeczytać w tym numerze *Delty*.

Często zdarza się tak, że aby rozwiązać problem z jakiejś dziedziny, najlepiej wyjść poza jej ramy, „na zewnątrz” znaleźć rozwiązanie i triumfalnie powrócić do pierwotnego zagadnienia, choćby nawet istnienie świata, w którym rozwiązanie znalezione, było nieco... wątpliwe.

Jest to prawda znana od stuleci, bowiem już całe wieki temu potrafiono – np. dla powiększenia majątku – skorzystać ze „zwierząt, które nie istnieją” (a w każdym razie z takich, których my nie mamy). Poniższa historia jest tego ilustracją (opowieść wzorowana jest na dawno chyba na tych łamach nie cytowanej *Lilavati* Szczepana Jeleńskiego):

Pewien człowiek pozostawił w spadku trzem swoim synom 17 koni; zaznaczył jednak w testamencie, że najstarszy ma otrzymać połowę, średni jedną trzecią, a najmłodszy jedną dziewiątą tej spuścizny, przy czym żadnego konia nie można zabić w celu podzielenia się jego mięsem. Sprzedaż koni na targu i podział pieniędzy też nie wchodziły w grę. Całe nieszczęście polegało oczywiście na tym, że 17 nie dzieli się ani przez 2, ani przez 3, ani przez 9: połowa z 17 to $8\frac{1}{2}$, jedna trzecia to $5\frac{2}{3}$, a jedna dziewiąta to $1\frac{8}{9}$. Bracia poszli więc do znanego z mądrości starca, a on podpowiedział im takie rozwiązanie: pożyczcie od sąsiada jeszcze jednego konia i dopiero wówczas dokonajcie podziału. Tak też uczynili i wtedy najstarszy brat otrzymał

9 koni, a średni 6. Najmłodszy zmartwiony (bo jego bracia otrzymali więcej, niż im się należało, a więc musi to być jego kosztem) zagląda do stajni i cóż widzi? Trzy rumaki! Mógł nie tylko oddać sąsiadowi owego pożyczonego konia, ale także sam otrzymał więcej, niż się spodziewał.

Widać, gdzie leży wyjaśnienie tego radosnego dla wszystkich finału: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}$, a zatem ojciec nie rozdzielił *całego* swego majątku między synów. Słowa testamentu można jednak rozumieć tak: najstarszy syn ma dostać *nie mniej niż* połowę koni, średni *nie mniej niż* jedną trzecią, a najmłodszy *nie mniej niż* jedną dziewiątą. I jeszcze jeden wniosek: warto mieć dobre układy z sąsiadami...

Małą Deltę przygotował Marcin ADAMSKI



Rozwiązanie zadania M 932.

Wprowadźmy na płaszczyźnie układ współrzędnych tak, by A_1 był jego środkiem, a A_2 leżał na dodatniej półosi OX . Niech z_1, z_2, z_3, z_4 ($z_1 = 0$) będą liczbami zespolonymi reprezentującymi wierzchołki A_1, A_2, A_3, A_4 odpowiednio. Wtedy $A_i A_j = |z_i - z_j|$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$). Mamy następującą, łatwą do sprawdzenia tożsamość

$$(z_2 - z_1)(z_4 - z_3) + (z_3 - z_2)(z_4 - z_1) = (z_4 - z_2)(z_3 - z_1).$$

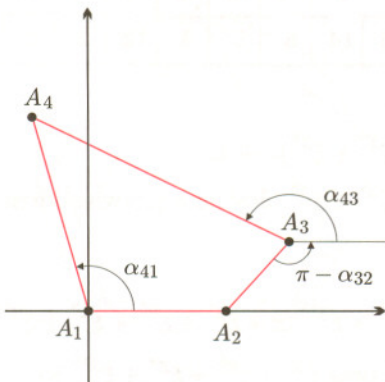
Z nierówności $|u + v| \leq |u| + |v|$ spełnionej dla dowolnych liczb zespolonych u, v wynika

$$|z_2 - z_1| \cdot |z_4 - z_3| + |z_3 - z_2| \cdot |z_4 - z_1| \geq |z_4 - z_2| \cdot |z_3 - z_1|,$$

czyli żądana nierówność. Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy argumenty liczb $(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)$ i $(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)$ są równe. Niech $\alpha_{ij} = \text{Arg}(z_i - z_j)$ dla $i \neq j$. Ponieważ przy mnożeniu liczb zespolonych argumenty dodają się, więc równość argumentów liczb $(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)$ i $(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)$ oznacza $\alpha_{41} + \alpha_{32} = \alpha_{21} + \alpha_{43} = \alpha_{43}$. Mamy dalej

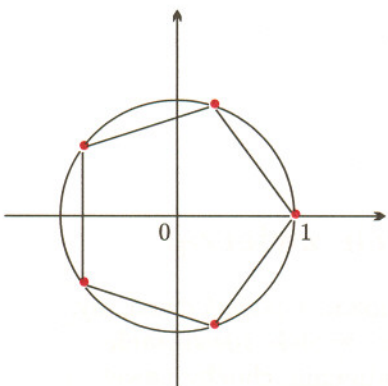
$$\angle(A_2 A_1 A_4) + \angle(A_2 A_3 A_4) = \alpha_{41} + [2\pi - (\pi - \alpha_{32}) - \alpha_{43}] = \pi + (\alpha_{41} + \alpha_{32} - \alpha_{43})$$

(p. rys.), a więc równość $\alpha_{41} + \alpha_{32} = \alpha_{21} + \alpha_{43} = \alpha_{43}$ jest równoważna równości $\angle(A_2 A_1 A_4) + \angle(A_2 A_3 A_4) = \pi$, co należało wykazać.



O konstrukcjach wielokątów foremnych

Mikołaj ROTKIEWICZ



Aby skonstruować n -kąt foremny, wystarczy znaleźć punkt

$$A_1 = \xi_n = e^{2\pi i/n},$$

gdyż kolejne wierzchołki n -kąta to $A_k = \xi_n^k$, $k = 2, 3, \dots, n$ (patrz mnożenie liczb zespolonych, str. 1). Oczywiście, $\xi_n^{m_1} = \xi_n^{m_2}$, jeśli $m_1 \equiv m_2 \pmod{n}$.

A. Ponieważ ξ_{2n} jest pierwiastkiem równania $x^2 = \xi_n$.

B. Ponieważ wówczas istnieją takie liczby całkowite r, s , że $mr + ns = 1$. Mamy

$$\xi_{mn} = \xi_{mr+ns} = \xi_n^r \xi_m^s.$$

C. Ponieważ $\xi_k = \xi_n^r$.

Spróbujmy sprecyzować pojęcie konstrukcji geometrycznej. Klasyczna konstrukcja geometryczna polega na tym, że mając dany zbiór punktów na płaszczyźnie, znajdujemy nowe punkty w wyniku przecięcia się prostych oraz okręgów „dopuszczalnych”. Określenie „dopuszczalne proste” oznacza proste przechodzące przez pewne punkty ze zbioru danych punktów, a przez „dopuszczalne” okręgi rozumiemy okręgi o środku w danym punkcie i promieniu będącym odległością pewnych dwóch danych punktów. W ten sposób rozszerzamy początkowy zbiór danych punktów o nowo skonstruowane punkty i bazując na punktach rozszerzonego zbioru, kreślimy nowe okręgi i proste, których punkty przecięcia znów rozszerzają nasz zbiór danych punktów itd. Uznamy, że jakiś punkt jest konstruowalny, jeśli po skończonej liczbie kroków punkt ten da się dołączyć do zbioru danych punktów.

Na czym więc będzie polegać konstrukcja n -kąta foremnego? Na konstrukcji punktu $\xi_n = e^{2\pi i/n}$. Za początkowy zbiór danych punktów przyjmować będziemy zawsze zbiór $\{0, 1\} \subset \mathbb{C}$. Łatwo można wykazać, że jeśli liczby z_1, z_2 są konstruowalne, to również liczby $z_1 z_2, z_1 \pm z_2, z_1/z_2, qz_1$, gdzie q jest liczbą wymierną, oraz $\sqrt{z_1}$ są konstruowalne. Zatem jeśli liczby a, b, c są konstruowalne oraz α jest pierwiastkiem równania $ax^2 + bx + c = 0$, to α jest też konstruowalna.

Następujące spostrzeżenie redukuje problem konstruowalności n -kąta foremnego do n będącego liczbą pierwszą. Niech $P(n)$ oznacza zdanie „można skonstruować n -kąt foremny”. Wówczas

A. Jeśli $P(n)$, to $P(2n)$.

B. Jeśli liczby m i n są względnie pierwsze oraz $P(n)$ i $P(m)$, to $P(mn)$.

C. Jeśli $n = rk$ i liczby k, r są naturalne oraz $P(n)$, to $P(k)$.

Okazuje się, że jedynymi liczbami pierwszymi n , dla których zachodzi $P(n)$ są tzw. liczby pierwsze Fermata, czyli liczby pierwsze postaci

$$F_k = 2^{2^k} + 1.$$

Dowód tego ładnego twierdzenia Czytelnik może znaleźć w książce M. Bryńskiego *Elementy teorii Galois*.

Dla $k = 0, 1, 2, 3, 4$ otrzymujemy liczby 3, 5, 17, 257, 65537. Są to jedyne znane liczby pierwsze w ciągu F_k . Wobec powyższego zachodzi

Twierdzenie. $P(n) \iff n = 2^i p_1 p_2 \dots p_j$, dla pewnych różnych liczb pierwszych Fermata p_1, \dots, p_j oraz liczb całkowitych $i, j \geq 0$, przy czym gdy $j = 0$, to $i \geq 2$.

Dla przykładu przedstawiamy szkic konstrukcji 17-kąta foremnego, czyli konstrukcji $\xi = \xi_{17}$.

W poniższych rachunkach wykorzystamy fakt, że liczby 3^i , dla $i = 0, 1, \dots, 15$, dają wszystkie możliwe reszty (oprócz 0) przy dzieleniu przez 17.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$3^i \pmod{17}$	1	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6

ξ jest pierwiastkiem wielomianu kwadratowego

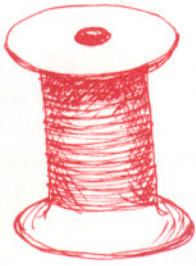
$$(x - \xi^{3^0})(x - \xi^{3^8}) = x^2 - (\xi^{3^0} + \xi^{3^8})x + 1.$$

Będziemy więc próbowali skonstruować liczbę $\xi^{3^0} + \xi^{3^8}$. Jest ona pierwiastkiem wielomianu

$$(x - (\xi^{3^0} + \xi^{3^8}))(x - (\xi^{3^4} + \xi^{3^{12}})) = x^2 - (\xi^{3^0} + \xi^{3^4} + \xi^{3^8} + \xi^{3^{12}})x + \xi^{3^1} + \xi^{3^5} + \xi^{3^9} + \xi^{3^{13}}.$$

Proszę sprawdzić! Liczby $\xi^{3^0} + \xi^{3^4} + \xi^{3^8} + \xi^{3^{12}}$ oraz $\xi^{3^1} + \xi^{3^5} + \xi^{3^9} + \xi^{3^{13}}$ są

Bo na przykład $(\xi^{3^8} \xi^{3^{12}} = \xi^{16} \xi^4 = \xi^{20} = \xi^{3^1}$, ponieważ $3^8 \equiv 16 \pmod{17}$ oraz $3^{12} \equiv 4 \pmod{17}$ (patrz tabelka).



Ciekawą własnością tych rachunków jest to, że nie ulegają one dużej zmianie, jeśli liczbę 3 zastąpimy inną liczbą, która jest tzw. pierwiastkiem pierwotnym modulo 17, na przykład liczbą 10. Mówimy, że a jest pierwiastkiem pierwotnym modulo liczba pierwsza p , jeśli najmniejszą dodatnią liczbą całkowitą k , taką, że $a^k \equiv 1 \pmod{p}$, jest liczba $k = p - 1$.

odpowiednio pierwiastkami wielomianów

$$(x - (\xi^{3^0} + \xi^{3^4} + \xi^{3^8} + \xi^{3^{12}}))(x - (\xi^{3^2} + \xi^{3^6} + \xi^{3^{10}} + \xi^{3^{14}})) = x^2 - (\xi^{3^0} + \xi^{3^2} + \xi^{3^4} + \dots + \xi^{3^{14}})x - 1$$

(proszę sprawdzić!!! wykorzystujemy tutaj równość $\xi^{3^0} + \xi^{3^1} + \dots + \xi^{3^{15}} = -1$) oraz

$$(x - (\xi^{3^1} + \xi^{3^5} + \xi^{3^9} + \xi^{3^{13}}))(x - (\xi^{3^3} + \xi^{3^7} + \xi^{3^{11}} + \xi^{3^{15}})) = x^2 - (\xi^{3^1} + \xi^{3^3} + \xi^{3^5} + \dots + \xi^{3^{15}})x - 1.$$

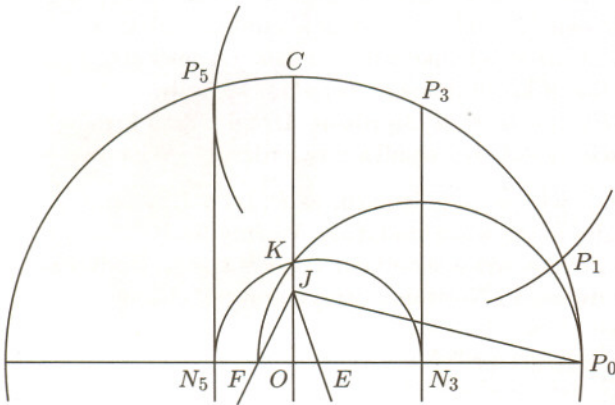
Pozostało skonstruować liczby $\xi^{3^0} + \xi^{3^2} + \xi^{3^4} + \dots + \xi^{3^{14}}$ oraz $\xi^{3^1} + \xi^{3^3} + \xi^{3^5} + \dots + \xi^{3^{15}}$. Są one pierwiastkami wielomianu

$$(x - (\xi^{3^0} + \xi^{3^2} + \xi^{3^4} + \dots + \xi^{3^{14}}))(x - (\xi^{3^1} + \xi^{3^3} + \xi^{3^5} + \dots + \xi^{3^{15}})) = x^2 + x - 4.$$

Mamy jeszcze jeden problem. Którym z pierwiastków, $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ czy $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$, jest $\xi^{3^0} + \xi^{3^2} + \xi^{3^4} + \dots + \xi^{3^{14}}$? To samo dotyczy poprzednich trójmianów kwadratowych. Czytelnikowi proponujemy przeniesienie powyższej algebraicznej konstrukcji 17-kąta foremnego na papier za pomocą cyrkla i linijki. Powodzenia!

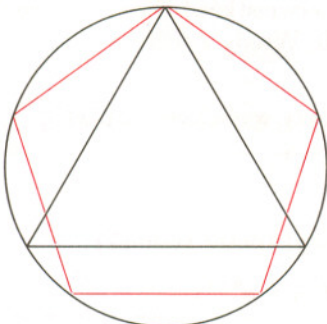
To samo z linijką i cyrkiem w rękę

Oczywiście, praktyczne wykonanie konstrukcji siedemnastokąta tymi przyrządami raczej nie powinno odtwarzać krok po kroku rozwiązania algebraicznego. W ten sposób może być krótsze i mieć swój specyficzny wdzięk. Nie znam jednak zdecydowanie zalecającej się prostotą praktycznej konstrukcji. Za najbardziej elegancką uchodzi konstrukcja H.W. Richmonda pochodząca z 1893 roku (prawie stulecie po Gaussie!). Oto ona.



Zaczynamy od narysowania dwóch prostopadłych średnic okręgu, w który chcemy wpisać siedemnastokąt (rysunek). Na promieniu OC odkładamy jego jedną czwartą, otrzymując punkt J . Na prostopadłej średnicy znajdujemy taki punkt E , że kąt OJE jest jedną czwartą kąta OJP_0 , a następnie taki punkt F , że $\angle FJE = 45^\circ$. Kreślimy teraz półokrąg o końcach P_0 i F – przecina on OC w punkcie K . Teraz z kolei kreślimy półokrąg o środku E przechodzący przez K , otrzymując na średnicy dużego okręgu punkty N_3 (bliżej P_0) i N_5 . Wystawione w tych punktach proste prostopadłe do tej średnicy przecinają duży okrąg w punktach P_3 i P_5 (oraz, co jest w dolnej, niewidocznej części rysunku, w punktach P_{14} i P_{12}).

Odkładając jeszcze cięciwę P_3P_5 po przeciwnej stronie P_3 , otrzymujemy P_1 . Odcinek P_0P_1 to bok siedemnastokąta foremnego wpisanego w duży okrąg (po drodze znaleźliśmy jeszcze cztery inne jego wierzchołki). Polecam jako trudne zadanie sprawdzenie, że ta konstrukcja jest dobra, jako wskazówkę dając uwagę, że lepiej zajmować się kątami niż odcinkami. Dokładniej: Richmond wykorzystał kilkakrotnie spostrzeżenie, że pierwiastkami równania $x^2 + 2x \operatorname{ctg} 2\alpha - 1 = 0$ są $\operatorname{tg} \alpha$ i $-\operatorname{ctg} \alpha$. Oczywiście, mogą istnieć zapewne i inne drogi uzasadnienia tej konstrukcji. Z przyjemnością wydrukujemy zręczny (i niedługi) dowód poprawności tej konstrukcji, o ile tylko ktoś z Czytelników nam go nadeśle.



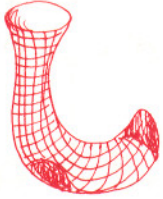
$3 \cdot 5 = 15$

H.S.M. Coxeter umieszcza po konstrukcji Richmonda zadanie: *skonstruuj cyrkiem i linijką 51-kąt*. To już teraz nie jest trudne. Jako wskazówkę dodajmy, że robi się to podobnie, jak konstrukcję 15-, 85- i 255-kąta. Skonstruować 256-kąt jest (oczywiście?) dużo łatwiej. Natomiast konstrukcja 257-kąta jest już znacznie trudniejsza. Wykonali ją Richelot i Schwendenheim (w 1898 roku).

M.K.

Zasadnicze twierdzenie algebry

Paweł STRZELECKI



Jeśli wiadomo już, że każdy wielomian stopnia $n \geq 1$ o współczynnikach zespolonych ma przynajmniej jeden pierwiastek zespolony, to z twierdzenia Bezouta wynika natychmiast, że każdy taki wielomian ma n pierwiastków (liczonych z krotnościami).

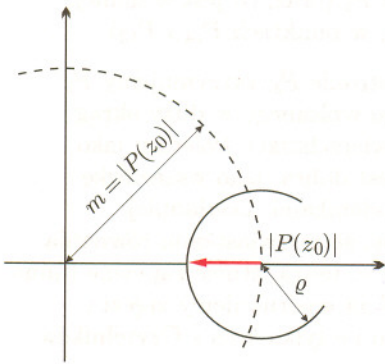
Twierdzenie Weierstrassa. Jeśli f jest funkcją ciągłą o wartościach rzeczywistych, określoną na kole domkniętym $K_R := \{z : |z| \leq R\}$, to istnieją takie punkty $z_0, z_1 \in K_R$, że

$$f(z_0) = \inf_{z \in K_R} f(z),$$

$$f(z_1) = \sup_{z \in K_R} f(z).$$

Koło domknięte można zastąpić dowolnym zwartym podzbiorem płaszczyzny zespolonej. Stosujemy to twierdzenie do funkcji ciągłej określonej wzorem $f(z) = |P(z)|$.

Jeśli $P(z_0) \notin \mathbb{R}_+$, to obracamy układ współrzędnych – czyli mnożymy wielomian P przez odpowiednio dobraną liczbę zespoloną o module 1.



Kąt θ_0 dobrany jest tak, by wektory $w_k(z_0)e^{ik\theta_0}$ (na rysunku zaznaczony kolorem) oraz $P(z_0)$ miały przeciwne zwroty; wtedy długość ich sumy jest równa różnicy ich długości, a więc mniejsza od $m = |P(z_0)|$. Dla małych ρ wyrazy wyższych rzędów nie mają wpływu na tę nierówność.

Zasadnicze twierdzenie algebry ma wiele dowodów, wykorzystujących różne gałęzie matematyki, od topologii po teorię funkcji analitycznych. Są wśród nich dowody ładniejsze i brzydsze, prostsze i trudniejsze; skądinąd takie oceny są względne, zależą bowiem od gustu, cierpliwości i wykształcenia tego, kto przez dowód chciałby przebrnąć. Bardzo elementarny dowód, pochodzący od Gaussa, odwołuje się tylko do prostych własności liczb zespolonych i funkcji ciągłych.

Jak zawsze, na początku trzeba uporać się z oznaczeniami. Weźmy więc wielomian $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, gdzie $n \geq 1$, oraz a_0, a_1, \dots, a_n są liczbami zespolonymi. Bez zmniejszenia ogólności założmy, że $|a_n| = 1$. Aby wykazać, że P ma pierwiastki, udowodnimy dwa lematy.

Lemat 1. Funkcja $z \mapsto |P(z)|$ osiąga na płaszczyźnie zespolonej swój kres dolny.

Lemat 2. Jeśli $|P(z_0)| = \inf\{|P(z)| : z \in \mathbb{C}\}$, to $P(z_0) = 0$.

Z obu lematów otrzymujemy natychmiast prosty

Wniosek (zasadnicze twierdzenie algebry). Każdy, różny od stałej, wielomian o współczynnikach zespolonych ma pierwiastek zespolony.

Dowód lematu 1. Z nierówności trójkąta dla modułu wynika, że

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |z|^n \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| \geq |z|^n \left(1 - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right) \geq \\ &\geq |z|^n \left(1 - \frac{n \cdot \max_{0 \leq i \leq n-1} |a_i|}{R} \right) \quad \text{dla } |z| \geq R \geq 1. \end{aligned}$$

Biorąc odpowiednio duże R , np. $R = 2(1 + n \max |a_i|)$, przekonujemy się, że nierówności $|P(z)| \geq \frac{1}{2} R^n > |a_0| = |P(0)|$ zachodzą dla wszystkich $|z| \geq R$. Zatem wewnątrz koła domkniętego $\{z : |z| \leq R\}$ istnieje punkt, w którym wartość funkcji $|P|$ jest mniejsza niż w jakimkolwiek punkcie na zewnątrz tego koła. To zaś, wprost z definicji kresu dolnego, oznacza, że liczby $\inf\{|P(z)| : z \in \mathbb{C}\}$ oraz $\inf\{|P(z)| : |z| \leq R\}$ są równe. Drugi z tych kresów jest osiąganym w pewnym punkcie $z_0 \in \mathbb{C}$ (to wynika z twierdzenia Weierstrassa).

Dowód lematu 2. Przypuśćmy, wbrew tezie lematu, że $P(z_0) \neq 0$. Wolno założyć, że $P(z_0) = m$ jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Weźmy liczbę $\rho \in (0, \min(1, m))$ i zbadajmy zachowanie wielomianu P na okręgu o środku z_0 i promieniu ρ . Wykorzystując dwumian Newtona, otrzymamy tożsamość

$$\begin{aligned} (*) \quad P(z_0 + \rho e^{i\theta}) &= \sum_{k=0}^n a_k (z_0 + \rho e^{i\theta})^k = \\ &= P(z_0) + w_1(z_0) \rho e^{i\theta} + \dots + w_n(z_0) \rho^n e^{in\theta}, \end{aligned}$$

gdzie $w_j(z_0)$ są współczynnikami zależnymi od wielomianu P i liczby z_0 , ale nie od ρ . Nietrudno zauważyć, że któraś z liczb $w_j(z_0)$ nie znika, bowiem w przeciwnym razie wielomian P byłby stały na okręgu $|z - z_0| = \rho$, a wielomian $Q(z) = P(z) - P(z_0)$ miałby nieskończenie wiele pierwiastków! Niech k będzie najmniejszą liczbą naturalną, dla której $w_k(z_0) \neq 0$. Wtedy z tożsamości (*) otrzymamy

$$\begin{aligned} |P(z_0 + \rho e^{i\theta})| &= |P(z_0) + w_k(z_0) \rho^k e^{ik\theta} + \text{wyrazy wyższych rzędów}| \leq \\ &\leq |P(z_0) + w_k(z_0) \rho^k e^{ik\theta}| + C \rho^{k+1}, \end{aligned}$$

gdzie można wziąć np. $C = 1 + n \cdot \max_j |w_j(z_0)|$.

Kładąc $\theta = \theta_0 := (\pi - \arg w_k(z_0))/k$, dostaniemy stąd (patrz rysunek)

$$|P(z_0 + \rho e^{i\theta_0})| \leq m - |w_k(z_0)| \rho^k + C \rho^{k+1}.$$

Dla wszystkich dodatnich $\rho < |w_k(z_0)|/C$ prawa strona tej nierówności jest mniejsza od $m = P(z_0) = |P(z_0)| = \inf |P|$. Ta sprzeczność kończy dowód.

A po co w fizyce liczby zespolone?

Tomasz HOFMOKL

Zagadnieniu temu poświęcony jest artykuł Włodzimierza Ducha „Czym jest kognitywistyka” *Kognitywistyka i media w edukacji* nr 1(1998)7.

Od zarania dziejów ludzkość stara się zrozumieć otaczający świat. Być może ta dążność do zrozumienia jest jednym z ważniejszych wyróżników człowieka w stosunku do całego otaczającego go świata materii ożywionej. Co to znaczy zrozumieć? Zrozumienie to odwołanie się do pewnego modelu świata. Dla człowieka szukającego przyczyny choroby w ramach magicznego modelu świata zrozumienie oznacza odkrycie, kto rzucił urok na chorego. Dla człowieka szukającego wyjaśnień w ramach współczesnej medycyny zrozumienie choroby może oznaczać ustalenie rodzaju zakażenia. Ten prosty przykład pokazuje, jak istotny jest w każdym procesie poznawczym wybór modelu świata.

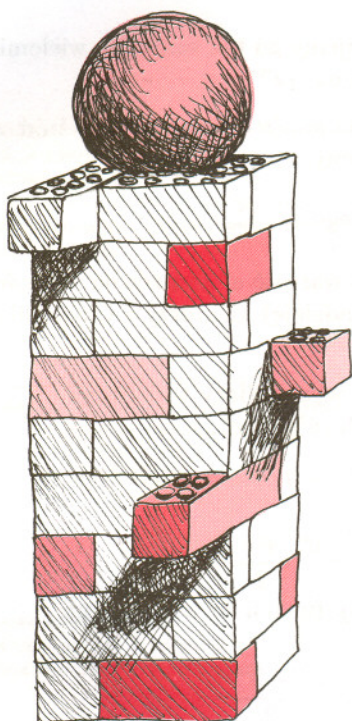
Wybór „modelu świata” ma lub powinien mieć również praktyczne znaczenie. Powinien umożliwiać analizę obserwowanych zjawisk, a w szczególności odwzorowywać w ramach przyjętego modelu przebieg rzeczywistych procesów. W takich ramach powinno być możliwe obliczenie wyników założonego procesu.

Spróbujmy obliczyć prawdopodobieństwo wysłania przez rozżarzoną do czerwoności podkowę w kuźni promieniowania podczerwonego o długości fali zawartej w zakresie $(\lambda, \lambda + \Delta\lambda)$. Przed takim problemem stanęli fizycy pod koniec XIX w. Problem dawał się rozwiązać klasycznie, ale cóż z tego, jeżeli jego przewidywania prowadziły do sprzeczności z wynikami doświadczeń. Podkowa, w modelu klasycznym, powinna emitować nieskończoną energię, co oczywiście nie miało i nie mogło mieć miejsca. Było to dobrze już dziś znane zagadnienie promieniowania ciała doskonale czarnego. Jego rozwiązanie przedstawił Max Planck na posiedzeniu Niemieckiego Towarzystwa Fizycznego w grudniu 1899 r. w Berlinie. Wynik był poprawny, ale Planck musiał zbudować nowy model emisji i pochłaniania promieniowania elektromagnetycznego zakładający, że emisja i pochłanianie przebiega porcjami – do fizyki wkroczyły kwanty, a wraz z nimi nowy sposób opisu zjawisk – mechanika kwantowa. Ona zaś nie przewiduje, co zdarzy się na pewno. Pozwala jedynie obliczyć prawdopodobieństwo zajścia określonego procesu, a więc musimy zmienić radykalnie nasze podejście do obliczania przewidywań teoretycznych. Musimy skorzystać z innego modelu rzeczywistości.

Gdy Redakcja *Delt*y poprosiła mnie o wyrażenie opinii o tym, jakie znaczenie mają w fizyce liczby zespolone, od razu nasunęło mi się znacznie szersze pytanie: jakie znaczenie ma dla fizyki matematyka? To, co teraz powiem, być może dla wielu osób zabrzmia jak herezja – jest to w każdym razie mój osobisty pogląd.

Skłaniam się do porównania matematyki do bardzo zaawansowanych klocków Lego™. Możemy z nich zbudować model, na przykład, domku i z pewną niewielką dokładnością wyciągać wnioski, czy konstrukcja rzeczywista będzie dobrze wyglądać, a nawet, czy ustawiona na zboczu góry będzie stabilna. Badania modelu mogą dostarczyć nam informacji o rzeczywistym zachowaniu się domu. Może w przypadku klocków Lego™ informacji tych nie będzie zbyt wiele i zbyt cennych, ale pokazuje to, że badanie modelu, o ile jest on dobrze dobrany, dostarcza informacji o rzeczywistym zachowaniu się obiektu. W mechanice kwantowej operujemy innymi pojęciami niż w mechanice klasycznej (newtonowskiej). Zderzenia dwóch cząstek elementarnych nie możemy przybliżyć za pomocą zderzenia dwóch kul bilardowych. Nie potrafilibyśmy bowiem odtworzyć bardzo wielu obserwowanych zjawisk. Aparat matematyczny użyteczny do opisu zderzenia kul bilardowych nie pasuje do opisu zderzeń cząstek elementarnych. Nasze „klocki lego” okazują się niewystarczające. Nie mamy narzędzia, które pozwoli określić poprawnie prawdopodobieństwo zajścia interesującego nas procesu. Musimy skorzystać z pojęcia funkcji falowej. Funkcja ta jest funkcją zespoloną i dopiero kwadrat jej modułu daje nam miarę prawdopodobieństwa procesu, który faktycznie funkcja ta opisuje.

Odpowiadając więc bardzo krótko na postawione w tytule pytanie, po co nam liczby i funkcje zespolone, możemy stwierdzić, że pozwalają na większą swobodę modelowania – są po prostu bardziej zaawansowaną wersją klocków Lego™. W wielu gałęziach fizyki, jak dotychczas, ten rodzaj klocków jest niezbędny.



Rozwiązanie zadania F 533.

Przy obliczaniu impedancji „zastępczej” stosujemy takie same reguły, jak przy obliczaniu oporu zastępczego. Impedancja Z_1 kondensatora i cewki połączonych równolegle jest dana wzorem

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{L\omega i} + \frac{1}{C\omega i},$$

stąd

$$Z_1 = \frac{L\omega i}{1 - LC\omega^2}.$$

Impedancja całego obwodu wynosi więc

$$Z = R + \frac{L\omega i}{1 - LC\omega^2}.$$

Pochodna zespolona, czyli funkcje holomorficzne

Piotr HAJŁASZ

O wielomianach i homografiach można przeczytać więcej w artykułach na stronach 2 i 8.

Dla usunięcia wątpliwości podajmy precyzyjną definicję granicy (*). Mówimy, że granica ta jest równa $f'(z_0)$, jeżeli dla każdego ciągu liczb zespolonych $h_n \rightarrow 0$, $h_n \neq 0$ iloraz liczb zespolonych $(f(z_0 + h_n) - f(z_0))/h_n$ dąży do $f'(z_0)$. Przypomnijmy, że ciąg liczb zespolonych w_n dąży do w , jeżeli odległość w_n od w dąży do 0.

Pochodne zespolone mają podobne własności do pochodnych rzeczywistych: $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$ o ile $g \neq 0$.

Dokładniej: o funkcji holomorficznego zakładamy, że jest określona w zbiorze otwartym i że jest różniczkowalna w sensie zespolonym w każdym punkcie dziedziny. Funkcje holomorficzne nazywane są też funkcjami *analitycznymi*.

Liczby rzeczywiste x utożsamiamy z liczbami zespolonymi postaci $x + i \cdot 0 = (x, 0)$, czyli przy interpretacji geometrycznej liczbom rzeczywistym odpowiada oś x .

Szeregiem potęgowym nazywamy szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Jest to funkcja zmiennej zespolonej z . Szereg potęgowy wolno różniczkować wyraz po wyrazie

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1},$$

a więc szereg potęgowy określa funkcję holomorficzną.

Funkcje holomorficzne mają ładną interpretację geometryczną. Po pierwsze, są one odwzorowaniami ze zbioru na płaszczyźnie w zbiór na płaszczyźnie. Otóż funkcje holomorficzne o pochodnej różnej od zera to dokładnie odwzorowania *wiernokątne*, czyli takie, które zachowują kąty i orientację. Patrz również artykuł na stronie 2.

Funkcja $f(x) = x^2$ dla $x \geq 0$ i $-x^2$ dla $x < 0$ jest różniczkowalna. Jej pochodna to $f'(x) = 2|x|$, więc funkcja f nie ma drugiej pochodnej dla $x = 0$. Można podać przykład funkcji różniczkowalnej, która nie ma drugiej pochodnej w żadnym punkcie.

Obiektem naszych rozważań będą funkcje zespolone, czyli funkcje zmiennej zespolonej przyjmujące wartości zespolone. Przykładem takiej funkcji jest wielomian $w(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, gdzie współczynniki a_n, \dots, a_0 są liczbami zespolonymi. Innym przykładem jest funkcja wymierna – iloraz dwóch wielomianów, a w szczególności homografia $L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

Pochodną funkcji zespolonej określamy na obraz i podobieństwo pochodnej funkcji rzeczywistej. Mówimy, że funkcja $f(z)$ jest różniczkowalna (w sensie zespolonym) w punkcie $z_0 \in \mathbb{C}$, jeżeli istnieje granica

$$(*) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Granice tę oznaczamy przez $f'(z_0)$ i nazywamy *pochodną (w sensie zespolonym) funkcji f* .

Funkcje różniczkowalne w sensie zespolonym nazywamy funkcjami *holomorficznymi*.

Wielomian jest funkcją holomorficzną, różniczkujemy go tak samo jak wielomian zmiennej rzeczywistej $w'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \dots + a_1$.

Wiele funkcji takich jak np. e^x , $\sin x$, $\cos x, \dots$ ma swoje odpowiedniki wśród funkcji zmiennej zespolonej. Funkcję e^z definiujemy wzorem

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \text{dla każdego } z \in \mathbb{C}.$$

Jeśli więc $z = x + i \cdot 0$ jest liczbą rzeczywistą, to wartość e^z jest równa wartości funkcji rzeczywistej e^x , którą to funkcję (mam nadzieję) niektórzy z Czytelników mieli szansę poznać w szkole średniej.

Różniczkując wyraz po wyrazie szereg potęgowy występujący w definicji e^z , otrzymujemy... z powrotem ten sam szereg, czyli $(e^z)' = e^z$.

Można udowodnić, że dla $z = x + iy$ jest $e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$, stąd zaś łatwo otrzymujemy słynne *wzory Eulera*:

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}, \quad \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}.$$

Wzory te podsuwają pomysł rozszerzenia definicji funkcji $\sin \varphi$ i $\cos \varphi$ na przypadek zmiennej zespolonej

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Korzystając z faktu, że $(e^z)' = e^z$, łatwo wykazać równości $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$. Również łatwo sprawdzić, że $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$. Zdarzają się jednak niespodzianki: $\cos i = (e^{-1} + e)/2 > 1$.

Tak więc $\sin z$, $\cos z$, podobnie jak e^z , są funkcjami holomorficznymi.

Wbrew pozorom podobieństw między funkcjami zmiennej rzeczywistej i zmiennej zespolonej nie jest zbyt wiele. Funkcje holomorficzne mają bowiem wiele zdumiewających, magicznych wręcz, własności.

Jeżeli funkcja zmiennej rzeczywistej jest różniczkowalna, to nie musi być ona dwukrotnie różniczkowalna. W przypadku pochodnej zespolonej jest zupełnie inaczej: każda funkcja holomorficzna $f(z)$ ma nieskończenie wiele pochodnych! Co więcej, w otoczeniu dowolnego punktu z_0 może zostać ona zapisana w postaci szeregu potęgowego (szeregu Taylora)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{gdzie } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Może się zdarzyć, że funkcja $f(z)$ ma *osobliwość* w jakimś punkcie, tzn. $f(z)$ nie jest zdefiniowane w jakimś punkcie. Na przykład $f(z) = (z - i)^{-7}$ ma osobliwość w punkcie $z = i$, a funkcja $f(z) = e^{1/z}$ ma osobliwość dla $z = 0$.

Zadanie. Korzystając ze wzorów podanych w tekście, przedstawić funkcje $\sin z$ i $\cos z$ w postaci szeregu potęgowego dla $z_0 = 0$.

Dokładniej: residuum $\operatorname{res}_{z_0} f$ określone jest w przypadku, gdy funkcja f nie jest określona w z_0 , natomiast jest holomorphyzna w pewnym otoczeniu z_0 . Tak jest w przypadku funkcji $(z-i)^{-7}$ oraz $e^{1/z}$.

Pisząc „dla wielu całek”, chcieliśmy zaznaczyć, że w sformułowaniu twierdzenia zostały pominięte pewne dodatkowe założenia.

Funkcje holomorphyzne mają bardzo liczne zastosowania poza samą matematyką. Stosuje się je, między innymi, w elektronice, aerodynamice, hydrodynamice, optyce i wielu innych działach fizyki.

Jest wiele książek poświęconych funkcjom holomorphyzycznym, na przykład: F. Leja *Funkcje zespolone*, PWN, Warszawa 1979.

Dowód twierdzenia o liczbach pierwszych można znaleźć w książce: W. Narkiewicz, *Teoria liczb*, PWN, Warszawa 1990.

Gauss wysunął swoją hipotezę, badając funkcję $\pi(x)$ dla konkretnych wartości x . Korzystał z metod statystyki matematycznej.

Do niedawna najslawniejszą hipotezą w matematyce było *Wielkie Twierdzenie Fermata*, zostało ono jednak udowodnione przez A. Wileasa w 1994 roku, co wykluczyło je z grona szlachetnych hipotez. Heroiczny wyczyn Wileasa został opisany w książkach: A.D. Aczel, *Wielkie Twierdzenie Fermata*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1998 oraz S. Singh, *Tajemnica Fermata*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1999.

Jeżeli funkcja $f(z)$ ma osobliwość w punkcie z_0 , to możemy w tym punkcie wyliczyć pewną „magiczną” liczbę $\operatorname{res}_{z_0} f$, zwaną *residuum* funkcji f w punkcie z_0 . Liczbę tę obliczamy za pomocą konkretnego i nietrudnego wzoru (niestety, z braku miejsca nie przytaczamy definicji residuum). Magia tej liczby wynika z jej zdumiewających własności.

Residuum pozwala, między innymi, na obliczenie wielce skomplikowanych całek, szeregów, iloczynów nieskończonych... w których wcale nie ma mowy o liczbach zespolonych! W szczególności pozwala ono na obliczenie wielu całek $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$, w których $f(x)$ jest funkcją rzeczywistą.

Dla wielu takich całek postępujemy, jak następuje. Funkcję $f(x)$ zamieniamy na funkcję zespoloną $f(z)$. Funkcja $f(z)$ może mieć osobliwości w wielu punktach. Załóżmy, że w górnej półpłaszczyźnie (tzn. dla $z = x + iy$, $y > 0$) ma ona osobliwości w punktach z_1, z_2, \dots, z_n . Wówczas

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} f.$$

Metoda ta pozwala, między innymi, na łatwe obliczenie całki

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2ax + b}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a^2 < b.$$

Postępujemy tak. Funkcję, którą chcemy scałkować, zamieniamy na funkcję zmiennej zespolonej $f(z) = 1/(z^2 + 2az + b)$. Mianownik ma dwa pierwiastki zespolone $z_{1,2} = -a \pm i\sqrt{b - a^2}$, czyli funkcja $f(z)$ ma osobliwość w dwóch punktach: z_1 i z_2 . Tylko jedna z tych osobliwości znajduje się w górnej półpłaszczyźnie, $z_1 = -a + i\sqrt{b - a^2}$. Wprost z definicji residuum wynika, że $\operatorname{res}_{z_1} f = 1/(2i\sqrt{b - a^2})$, skąd

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2ax + b} = 2\pi i \operatorname{res}_{z_1} f = \frac{\pi}{\sqrt{b - a^2}}.$$

Ta zdumiewająco prosta metoda (i jej modyfikacje) jest najbardziej efektywną metodą, pozwalającą na obliczanie skomplikowanych całek, w których *a priori* nie ma mowy o liczbach zespolonych.

Inne zastosowania dotyczą teorii liczb. Jedno z najbardziej spektakularnych to tzw. *twierdzenie o liczbach pierwszych*. Twierdzenie to, udowodnione w 1896 roku przez Hadamarda i Vallée-Poussina, jest jednym z największych osiągnięć matematyki XIX wieku. A oto i ono.

Jeżeli $\pi(x)$ jest liczbą liczb pierwszych nie większych niż x , to $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \ln x}{x} = 1$.

Twierdzenie to głosi, że dla dużych x liczba $\pi(x)$ jest równa w przybliżeniu $\frac{x}{\ln x}$.

Około roku 1800 Gauss wysunął przypuszczenie, że twierdzenie to powinno być prawdziwe, nie umiał go jednak udowodnić. Dopiero zastosowanie bardzo zaawansowanych metod funkcji holomorphyzycznych przyniosło efekt. Otóż nietrudno udowodnić następujący *wzór Eulera*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-s}},$$

gdzie $s > 1$, p_n zaś jest n -tą liczbą pierwszą. Wzór ten sprowadza badanie funkcji $\pi(x)$ do badania funkcji $\zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ (*funkcja dzeta Riemanna*).

Genialny pomysł polega na takim rozszerzeniu definicji funkcji ζ , by za s móc podstawiać liczby zespolone (to nie jest proste!). Wówczas ζ staje się funkcją holomorphyzną z jednym punktem osobliwym dla $s = 1$. Właśnie badanie funkcji holomorphyzycznej ζ było podstawą dowodu twierdzenia o liczbach pierwszych. Funkcja ζ nadal kryje w sobie wiele tajemnic. Największa z nich to słynna *hipoteza Riemanna*, która mówi, gdzie znajdują się miejsca zerowe funkcji ζ . Obok *hipotezy Poincarégo* jest to najslawniejsza hipoteza w matematyce.

Skąd się wzięły liczby zespolone?

4 lutego 1535 roku Tartaglia odkrył, że przez zmyślne podzielenie sześciannu można dojść do algorytmu rozwiązującego dla dodatnich a i b równanie

$$x^3 + ax = b, \quad \text{czyli} \quad x^3 + ax - b = 0.$$

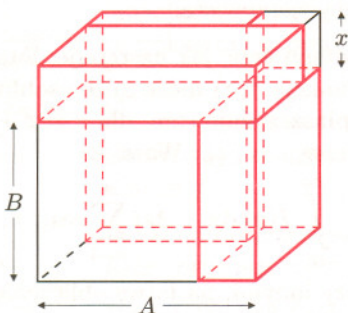
Wzór był taki

$$\sqrt[3]{\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} + \frac{b}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} - \frac{b}{2}},$$

z czego wynika, że otrzymany pierwiastek był także dodatni.

Oto sposób Tartaglii.

Wycinając przy przeciwległych wierzchołkach sześciannu o krawędzi A i sześciannu o krawędzi B i sześciannu o krawędzi x , możemy dostrzec, że pozostałość daje się podzielić na trzy jednakowe „cegielki” – prostopadłościanny o krawędziach długości A , B i x . Stąd mamy



$$A^3 = B^3 + x^3 + 3ABx, \quad \text{czyli} \quad x^3 + 3ABx = A^3 - B^3,$$

co jest równaniem takim, jak wyjściowe. Mamy więc

$$a = 3AB \quad \text{i} \quad b = A^3 - B^3.$$

Podstawiając $p = A^3$, $q = B^3$, otrzymujemy

$$pq = \frac{a^3}{27} \quad \text{i} \quad p - q = b, \quad \text{co daje} \quad q^2 + bq = \frac{a^3}{27},$$

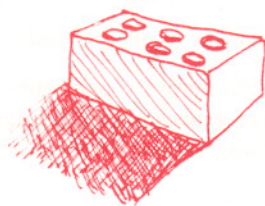
skąd mamy (q jest dodatnie!)

$$q = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} - \frac{b}{2} \quad \text{i} \quad p = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} + \frac{b}{2}.$$

Wracając do rysunku, mamy

$$x = A - B = \sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{q},$$

czyli właśnie wzór Tartaglii.



Wzory, które podał Tartaglia, są dziś nazywane wzorami Cardano, a to z dwóch przyczyn. Pierwsza to ta, że je tak bardzo uogólnił, druga zaś taka, że pierwszy je opublikował. Czy to słuszne – historycy spierają się bez końca.

Od razu powstał problem, jak ogólny jest ten wynik, czyli – czy wzór można stosować bez ograniczeń na a i b , oraz czy da się go uogólnić na przypadek „pełnego” równania trzeciego stopnia. Na drugie pytanie odpowiedź jest pozytywna i ma proste uzasadnienie: jeśli w równaniu

$$y^3 + sy^2 + ty + u = 0$$

podstawimy $y = x - \frac{1}{3}s$, to wyraz z drugą potęgą zniknie. Pozostaje zatem pierwszy problem.

Gdy nie mamy wstępu do liczb ujemnych (i rachowania), to sprawdzamy bezpośrednio, iż np. do równań

$$x^3 - 6x - 9 = 0, \quad x^3 - 6x + 9 = 0, \quad x^3 + 6x + 7 = 0$$

wzór się nada (uwaga na znak przy wyrazie wolnym!). Łatwo też stwierdzamy, jaka jest granica takiej bezproblemowej stosowalności wzoru: jest to warunek, by wyrażenie pod pierwiastkiem kwadratowym było nieujemne, czyli znak b nie odgrywa żadnej roli, natomiast musi być

$$a \geq -\sqrt[3]{\frac{27}{4}b^2}.$$

Co jednak zrobić, gdy warunek ten nie jest spełniony?

Z faktu, że wielomian stopnia trzeciego dla bardzo małych liczb (ujemnych, o dużych wartościach bezwzględnych) przyjmuje wartości ujemne, a dla bardzo dużych – dodatnie, wynika, że zawsze ma pierwiastek rzeczywisty. Stąd pokusa, aby jakimiś zręcznymi manipulacjami uzyskać ten pierwiastek również, gdy podany warunek nie jest spełniony (takie równanie nazywa się *nieprzywiedlne*; później okazało się, że ma zawsze aż trzy pierwiastki rzeczywiste). Stosowne manipulacje zaproponował Cardano dziesięć lat później. Manipulacje te to rachowanie na liczbach zawierających składnik $\sqrt{0 \text{ m. } a}$ (gdzie $a > 0$), jak pisano, co jest zakamuflowanym oznaczeniem dla $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$. I tak po raz pierwszy zapisano liczby zespolone. Istotą tych zabiegów, mówiąc dzisiejszym językiem, było takie operowanie nowymi obiektami, aby wykazać, że odejmowane we wzorze Tartaglii pierwiastki stopnia trzeciego reprezentują liczby zespolone o takich samych częściach urojonych. I wtedy okazało się, że takim sposobem można zawsze za pomocą wzorów Tartaglii znaleźć pierwiastek rzeczywisty równania stopnia trzeciego.

Napisałem wyżej, że Cardano manipulował „obiettami”, zamiast „liczbami”. Użyłem tego zwrotu dlatego, że sam Cardano używanych przez siebie liczb zespolonych wcale za liczby nie uważał. Mówił on o swoich manipulacjach, że jest to hiperbola intelektualna: umysł matematyka potrafi wznieść się na niedostępne dla profanów wyżyny, tam obcować z niedostępnymi dla nich obiektami, by – po uzyskaniu rozwiązania równania – z gotowym wynikiem na Ziemię do profanów powrócić. Status przyzwoitych liczb dla liczb zespolonych wywalczył dopiero Gauss, dowodząc w 1799 roku ich domkniętości algebraicznej (czyli tego, że każdy wielomian – różny od stałej – o współczynnikach zespolonych ma zespolony pierwiastek – patrz str. 8).

Kalamarnica Schrödingera

Kalamarnice (kalmary, *Teuthoidea*) to podrząd dziesięciornic (*Decabrachia*, *Decapoda*) z gromady głowonogów (*Cephalopoda*). Należy do nich największy bezkręgowiec (*Architheuthis dex*) o długości 30 metrów.

Kalmar to po angielsku squid, a SQUID to akronim utworzony z pierwszych liter określenia Superconducting QUantum Interference Device. „Choć nie mruczy, to ten mały nadprzewodzący pierścień najbardziej przypomina jednocześnie żywego i martwego kota Schrödingera” [1]. Na Marcowym Spotkaniu American Physical Society dwie grupy fizyków ogłosiły, że w odpowiednich warunkach prąd może płynąć w SQUIDzie w obie strony naraz. Ponieważ prąd ten jest związany z ruchem milionów elektronów, to jest to najbardziej makroskopowy obiekt, jaki udało się zaobserwować w dwóch stanach kwantowych jednocześnie.

Całkowity strumień pola magnetycznego przechodzącego przez nienadprzewodzący środek nadprzewodzącego pierścienia SQUIDu jest skwantowany, tzn. równy wielokrotności fundamentalnego kwantu strumienia. Jeżeli zewnętrzne pole wzrośnie do ułamka tej fundamentalnej wartości, to w pierścieniu wzbudza się prąd kompensujący nadmiar lub niedobór pola. Prąd może zostać wzbudzony albo w jedną stronę – tak aby strumień wzrósł do jednego kwantu, albo w drugą – tak aby całkowity strumień był zerowy. Zastanawiające piękno mechaniki kwantowej polega na tym, że w takim przypadku prąd może zostać wzbudzony naraz w obydwie strony.

Spróbujcie to sobie wyobrazić. Bez zapisania postaci funkcji falowej za pomocą liczb zespolonych nie jest to łatwe. (Chyba że szukać analogii w zachowaniach polityków.) Jest to nie tylko trudne do wyobrażenia, ale również trudne do sprawdzenia. Każdy przywoity i zlokalizowany układ kwantowy ma dyskretne poziomy energetyczne. Jeżeli strumień zewnętrznego pola magnetycznego jest różny od połowy fundamentalnego kwantu, to przerwy pomiędzy kolejnymi poziomami energetycznymi dla prądu płynącego w jedną i drugą stronę są trochę różne. Schizofreniczna kalamarnica

może absorbować obie częstotliwości odpowiadające przejściom pomiędzy kolejnymi poziomami, a kalmar zasadniczy (o zdecydowanych poglądach) tylko jedną z nich. Właśnie absorpcję obu częstotliwości udało się zaobserwować, co dowodzi, że rzeczywiście prąd w SQUIDzie może płynąć w obie strony jednocześnie.

Kwantowe kalmary mogą znaleźć szereg zastosowań przy badaniu podstaw mechaniki kwantowej i budowaniu prototypów komputerów kwantowych. W tej samej dziedzinie poszukuje się sposobów na splatanie funkcji falowych. Chodzi o to, że funkcja falowa, opisująca stan kilku obiektów, może nie być rozkładalna na iloczyn funkcji falowych poszczególnych elementów. Przykładem mogłaby być para jonów, które jednocześnie znajdują się albo oba w stanie podstawowym, albo oba w stanie wzbudzonym. Mierząc stan jednego z nich, dowiadujemy się o stanie drugiego. Kontrolowane przygotowywanie takich splecionych stanów wielu elementów będzie jedną z podstaw, na których oparte będą komputery kwantowe (o ile powstaną).

Grupa naukowców [2] wykorzystała pomysł [3] i zademonstrowała splatanie aż czterech jonów ${}^9\text{Be}^+$ na żądanie – za pomocą jednej serii pulsów laserowych. Splatanie możliwe jest dzięki temu, że początkowo znajdujące się w podstawowym stanie jony przeprowadzane są parami do stanu wzbudzonego w taki sposób, aby ich prawdopodobieństwo przejścia było bliskie 1/2, a prawdopodobieństwo wzbudzenia tylko jednego jonu z pary było jak najmniejsze. Niestety, splatanie, choć statystycznie istotne, na razie nie okazało się bardzo skuteczne. Nie tracimy jednak nadziei. W końcu nie święci wypłatają koszyki.

Piotr ZALEWSKI

- [1] A. Cho, *Physicists unveil Schrödingers SQUID*, *Science* **287**(31.3.2000)2395,
 [2] C.A. Sackett i inni, *Experimental entanglement of four particles*, *Nature* **404**(16.3.2000)256,
 [3] K. Mølmer i A. Sørensen, *Multiparticle entanglement of hot trapped ions*, *Phys. Rev. Lett.* **82**(1999)1835.



Rozwiązanie zadania M 931.

Niech O będzie środkiem n -kąta, A_1, \dots, A_n – jego wierzchołkami, $R = |OA_i|$, $\angle(O, \overline{OA_1}) = \alpha$, $\phi = \frac{2\pi}{n}$. Mamy wtedy

$$S = R^2 [\sin^2 \alpha + \sin^2(\alpha + \phi) + \sin^2(\alpha + 2\phi) + \dots + \sin^2(\alpha + (n-1)\phi)].$$

Stosując wzór $\sin^2 \beta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\beta)$ przekształcimy powyższą sumę do postaci $S = \frac{1}{2}R^2(n - T)$, gdzie

$$T = \cos 2\alpha + \cos(2\alpha + 2\phi) + \cos(2\alpha + 4\phi) + \dots + \cos(2\alpha + (2n-2)\phi).$$

Ze wzoru Eulera wynika, że

$$T = \text{Re} [e^{i \cdot 2\alpha} + e^{i(2\alpha+2\phi)} + e^{i(2\alpha+4\phi)} + \dots + e^{i(2\alpha+(2n-2)\phi)}].$$

Ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego mamy

$$T = \text{Re} [e^{i \cdot 2\alpha} \frac{1 - e^{i2n\phi}}{1 - e^{i2\phi}}].$$

Ponieważ $2n\phi = 4\pi$, a $e^{i \cdot 4\pi} = 1$, więc $T = 0$. Mamy więc $S = \frac{1}{2}R^2n$, co nie zależy od α .



Rozwiązanie zadania M 933.

Niech $A_1A_2A_3$ i $B_1B_2B_3$ będą danymi trójkątami równobocznymi, C_1, C_2, C_3 – środkami odcinków A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 odpowiednio, a_i, b_i, c_i – liczbami zespolonymi reprezentującymi punkty A_i, B_i, C_i . To, że trójkąt $A_1A_2A_3$ jest równoboczny, jest równoważne równości $a_3 - a_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}(a_2 - a_1)$ ($\overrightarrow{A_1A_3}$ powstaje z $\overrightarrow{A_1A_2}$ przez obrót o $\frac{\pi}{3}$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara). Analogicznie

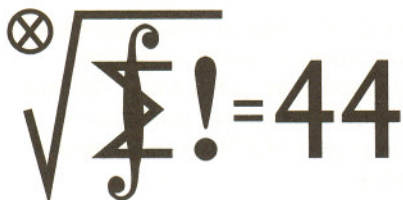
$$b_3 - b_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}(b_2 - b_1).$$

Ponieważ C_i jest środkiem odcinka A_iB_i , więc $c_i = \frac{1}{2}(a_i + b_i)$.

Z powyższych równości wyprowadzamy

$$\begin{aligned} c_3 - c_1 &= \frac{1}{2}(a_3 + b_3) - \frac{1}{2}(a_1 + b_1) = \frac{1}{2}(a_3 - a_1) + \frac{1}{2}(b_3 - b_1) = \\ &= \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}(a_2 - a_1) + \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}(b_2 - b_1) = e^{i\frac{\pi}{3}}(c_2 - c_1), \end{aligned}$$

czyli $c_3 - c_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}(c_2 - c_1)$, co oznacza, że trójkąt $C_1C_2C_3$ jest równoboczny (lub $C_1 = C_2 = C_3$).



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2000

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2000.

Zadania z matematyki nr 407, 408

Redaguje Marcin E. KUCZMA

407. Dana jest liczba naturalna n oraz n -elementowy zbiór M , zawarty w zbiorze $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$, nie zawierający żadnej pary liczb o sumie równej $2n + 1$. Suma wszystkich liczb ze zbioru M jest znana i wynosi S . Obliczyć sumę kwadratów wszystkich liczb ze zbioru M .

408. Przez punkt P , leżący wewnątrz trójkąta ABC o środku ciężkości G , prowadzimy proste PD, PE, PF równoległe odpowiednio do prostych AG, BG, CG ; punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB . Wykazać, że suma pól trójkątów PAF, PBD i PCE nie zależy od położenia punktu P .

Zadanie 408 zaproponowała pani Joanna Jasznińska z Warszawy.

UWAGA: listy ligowe Klubu 44 M i F tym razem wyjątkowo na str. 16.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/2000

Przypominamy treść zadań:

403. Ciągi $b(0), b(1), b(2), \dots$ oraz $d(0), d(1), d(2), \dots$ są określone wzorami: $b(0) = d(0) = 1, b(n+1) = 2^{b(n)}, d(n+1) = 10^{d(n)}$. Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną n , dla której $b(n) > d(44)$.

404. Udowodnić, że liczba wszystkich podziałów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ na zbiory niepuste, rozłączne, jest równa wartości, jaką przyjmuje w punkcie $x = 0$ pochodna n -tego rzędu funkcji $f(x) = \exp(e^x - 1)$.

403. Udowodnimy, że dla liczb naturalnych $n \geq 2$ zachodzi nierówność podwójna

$$6d(n-1) < b(n+2) < d(n).$$

Dla $n = 2$ jest to prawda ($6 \cdot 10 < 2^{16} < 10^{10}$). Weźmy liczbę naturalną $n \geq 2$ i założmy, że nierówność jest prawdziwa dla tej liczby n . Wówczas

$$b(n+3) = 2^{b(n+2)} \begin{cases} < 2^{d(n)} < 10^{d(n)} = d(n+1), \\ > 2^{6 \cdot d(n-1)} = 64^{d(n-1)} > 6^{d(n-1)} \cdot 10^{d(n-1)} = 6^{d(n-1)} \cdot d(n) > 6d(n); \end{cases}$$

otrzymaliśmy tezę indukcyjną. Z udowodnionej nierówności wynika, że $b(46) < d(44)$ oraz $b(47) > 6d(44) > d(44)$. Zatem szukana liczba jest równa 47.

404. Niech $S_{n,k}$ będzie liczbą podziałów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ na k niepustych rozłącznych podzbiorów ($n \geq k \geq 1$). Jest jasne, że

$$(1) \quad S_{n,1} = S_{n,n} = 1 \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Weźmy pod uwagę dowolny podział zbioru $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ na k niepustych rozłącznych podzbiorów ($2 \leq k \leq n$).

Podział taki uzyskujemy z podziału zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ na k podzbiorów przez dołączenie elementu $n+1$ do jednego z tych k podzbiorów, albo z podziału zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ na $k-1$ podzbiorów przez utworzenie dodatkowego podzbioru jednoelementowego $\{n+1\}$. To daje zależność rekurencyjną

$$(2) \quad S_{n+1,k} = kS_{n,k} + S_{n,k-1} \quad \text{dla } n \geq k \geq 2.$$

Uwaga. Liczby $S_{n,k}$ są zwane liczbami *Stirlinga drugiego rodzaju*, a suma $B_n = \sum_{k=1}^n S_{n,k}$ to n -ta liczba *Bella*.

Zajmiemy się teraz przedstawieniem pochodnej n -tego rzędu funkcji $f(x) = \exp(e^x - 1)$. Wykażemy, że ma ona postać

$$(3) \quad f^{(n)}(x) = \left(\sum_{k=1}^n A_{n,k} e^{kx} \right) f(x)$$

dla pewnych stałych $A_{n,1}, \dots, A_{n,n}$. Dla $n = 1$ wzór (3) zachodzi ze stałą $A_{1,1} = 1$, bowiem $f'(x) = e^x f(x)$. Ustalmy $n \geq 1$. Jeśli równość (3) zachodzi dla tej liczby n (i pewnych stałych $A_{n,k}$), to różniczkując tę równość otrzymujemy

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(\sum_{k=1}^n A_{n,k} \cdot k e^{kx} \right) f(x) + \left(\sum_{k=1}^n A_{n,k} e^{kx} \right) e^x f(x) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n k A_{n,k} e^{kx} + \sum_{k=2}^{n+1} A_{n,k-1} e^{kx} \right) f(x) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} A_{n+1,k} e^{kx} \right) f(x), \end{aligned}$$

gdzie

$$(4) \quad A_{n+1,1} = A_{n,1}, \quad A_{n+1,n+1} = A_{n,n},$$

$$(5) \quad A_{n+1,k} = kA_{n,k} + A_{n,k-1} \quad \text{dla } n \geq k \geq 2.$$

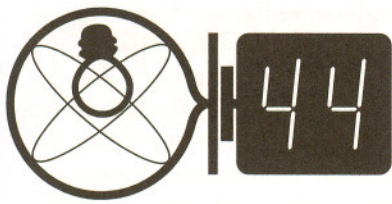
Stąd przez indukcję wynika słuszność wzoru (3) dla stałych $A_{n,k}$ określonych wzorami (4), (5) (ze startem $A_{1,1} = 1$).

Z równości (4) oczywiście wynika, że $A_{n,1} = A_{n,n} = 1$ dla wszystkich n . Tak więc zależności rekurencyjne dla liczb $A_{n,k}$ są identyczne ze wzorami (1), (2) dla liczb $S_{n,k}$. Zatem $S_{n,k} = A_{n,k}$ dla $n \geq k \geq 1$.

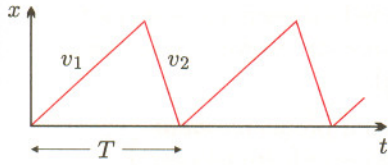
Pozostaje zauważyć, że $f(0) = 1$, i wobec tego

$$f^{(n)}(0) = \left(\sum_{k=1}^n A_{n,k} \right) f(0) = \sum_{k=1}^n S_{n,k}$$

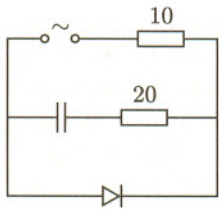
jest liczbą wszystkich podziałów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ na zbiory niepuste, rozłączne.



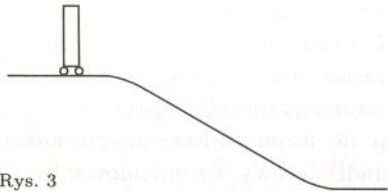
Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2000



Rys. 1

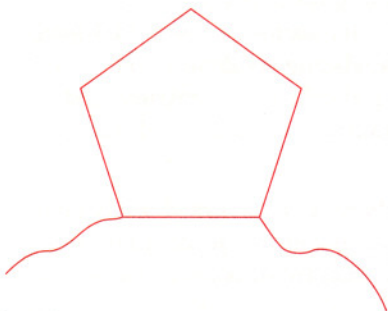


Rys. 2



Rys. 3

Uwzględnienie w tym rachunku siły odśrodkowej mv^2/R może budzić wątpliwości, gdyż rozpatrujemy tu przejście od łuku do prostej poziomej, na której ta siła nie występuje. Jeśliby jednak człon ten pominąć, to nierówność zostałaby naruszona jeszcze silniej, czyli wyciągnięty wniosek pozostaje i tak w mocy. Wyprowadzając z zasady zachowania energii wzór na v^2 , pominęliśmy energię ruchu obrotowego wózka wokół środka masy, gdyż jest kilkadziesiąt tysięcy razy mniejsza od energii ruchu postępowego.



Rys. 4

304. Poziomy stół wykonuje okresowy ruch poziomy według wykresu (rys. 1). Jeśli na tym stole położymy klocek i zaczekamy odpowiednio długo, to jak będzie zależeć jego średnia prędkość przemieszczania się od współczynnika tarcia μ , okresu T ruchu stołu oraz prędkości ruchu jednostajnego stołu v_1 i v_2 ?

305. Do źródła napięcia przemiennego (sinusoidalnego) o amplitudzie $U_0 = 30$ V przyłączono obwód składający się z diody (doskonałej, tzn. o zerowym oporze w kierunku przewodzenia i nieskończonym oporze w kierunku zaporowym), oporników 10Ω i 20Ω oraz kondensatora o dużej pojemności (rys. 2). Do jakiego napięcia naładuje się kondensator po długim czasie? Pojemność kondensatora jest tak duża, że to napięcie osiąga wartość stałą.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 6/2000

Przypominamy treść zadań:

300. Przedstawiony na rysunku 3 przekrój pochylni składa się z odcinka o długości $l = 2$ m nachylnego pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do poziomu oraz dwóch łuków o promieniu $R = 10$ m gładko łączących ten odcinek z półprostymi poziomymi. Na górnym poziomie postawiono wózek i nadano mu bardzo niewielką prędkość w prawo. Czy w czasie zjazdu wózek oderwie się jedną parą kółek od podłoża? Korpus wózka jest jednorodną płytką prostokątną o długości $d = 5$ cm i wysokości $h = 20$ cm (trzeci wymiar jest nieistotny), osie kółek są osadzone na końcach dolnego boku płytki (tzn. w odległości 5 cm), a masę kółek, ich promień i tarcie należy pominąć. Uwaga: wystarczające jest rozwiązanie przybliżone, słuszne dla podanych wartości liczbowych.

301. Z jednorodnego drutu o oporze ρ na jednostkę długości wykonano pięciokąt foremny o boku a . Ile wynosi wartość indukcji magnetycznej B w środku tego pięciokąta, jeśli do dwóch sąsiednich wierzchołków pięciokąta przyłączyć źródło napięcia U ? Pominąć pole przewodów doprowadzających i przyjąć względną przenikalność magnetyczną ośrodka równą 1.

300. Rozważmy okolicę końca pochylni, gdzie wózek przestaje zjeżdżać po łuku, a zaczyna poruszać się po dolnym poziomie. Z punktu widzenia dynamiki ruchu obrotowego wokół środka masy jest to przejście od ruchu obrotowego z prędkością kątową $\omega = v/R$ (gdzie v – prędkość liniowa, ze względu na małe rozmiary wózka w przybliżeniu jednakowa dla różnych jego punktów) do spoczynku (braku obrotu). Ta zmiana prędkości kątowej następuje w przedziale czasu od minięcia końca pochylni przez pierwszą oś wózka do minięcia jej przez drugą oś, zatem pomijając zmiany prędkości liniowej, otrzymujemy czas $t = d/v$ i przyspieszenie kątowe $\epsilon = \omega/t = v^2/Rd$. Podstawiając do II zasady dynamiki ruchu obrotowego znalezione ϵ oraz moment bezwładności $I = (1/12)m(d^2 + h^2)$, znajdujemy moment siły względem środka $M = I\epsilon$; z drugiej strony moment ten nie może przekraczać wartości obliczonej dla przypadku granicznego, w którym przednie koła prawie odrywają się od podłoża. Wtedy $M_{\max} = Fd/2$, gdzie siłę reakcji podłoża F podstawimy równą sumie siły ciężkości i siły odśrodkowej, tzn. $F = mg + mv^2/R$. Otrzymaliśmy zatem warunek przejazdu na czterech kołach w postaci nierówności

$$\frac{1}{12}m(d^2 + h^2) \frac{v^2}{Rd} \leq \frac{md}{2} \left(g + \frac{v^2}{R} \right).$$

Jako wniosek z zasady zachowania energii podstawiamy tu

$$v^2 = 2g(2R(1 - \cos \alpha) + l \sin \alpha),$$

a następnie możemy skrócić mg . Po wprowadzeniu danych liczbowych przekonujemy się, że wartość lewej strony przekracza wartość prawej o około 20%, czyli przednie koła zerwą kontakt z podłożem.

Innymi „podejrzanymi” punktami są: przejście od wypukłego łuku do równi pochyłej oraz przejście od równi pochyłej do wklęsłego łuku – według obliczeń autora w żadnym z nich nie nastąpi oderwanie się kółek od podłoża. Można także rozpatrywać sam ruch po łuku, który ze względu na nachylenie jest przyspieszony, a zatem w ruchu obrotowym także występuje przyspieszenie – jednak tutaj wymagany moment siły jest co najmniej kilkadziesiąt razy mniejszy od maksymalnego momentu sił reakcji kółek, więc oderwanie nie nastąpi z całą pewnością.

301. Pole magnetyczne w środku pięciokąta jest sumą pól wytworzonych przez jego pięć boków, przy czym dla czterech boków połączonych szeregowo (górną gałąź na rys. 4) wkład ten jest jednakowy co do kierunku, zwrotu i wartości, natomiast dla piątego (dolnego) boku ma przeciwny zwrot. Ponieważ opór dolnego boku jest czterokrotnie mniejszy, więc płynie przez niego czterokrotnie większy prąd i widzimy, że wypadkowe pole magnetyczne jest równe zero. Taki sam wynik otrzymalibyśmy dla dowolnego n -kąta foremnego, przy zasilaniu dołączonym do dowolnych dwóch jego wierzchołków (lub w środkach boków).

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 395 (WT=1,12) i 396 (WT=3,30)
z numeru 2/2000

Tomasz Wietecha	- Tarnów	48,02
Rafał Piłkuła	- Wrocław	43,69
Marcin Peczański	- Warszawa	42,29
Jerzy Witkowski	- Radlin	41,24
Michał Adamaszek	- Kęty	41,18
Andrzej Józwiak	- Kielce	37,72
Konrad Patkowski	- Gdańsk	37,60

Weteran Tomasz Wietecha kończy
w efektywnym stylu już czwartą rundę.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 294 (WT=1,75) i 295 (WT=1,83)
z numeru 3/2000

Jarosław Łazuka	- Warszawa	34,93
Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	32,24
Aleksander Surma	- Myszków	31,76
Marek Wójcicki	- Szczecin	31,62
Grzegorz Miłoś	- Mielec	24,40

Promieniowanie rentgenowskie zalicza się do promieniowania wysokoenergetycznego. Jego typowej długości fali rzędu 1 nm odpowiada częstość promieniowania równa 3×10^{17} Hz, co po pomnożeniu przez stałą Plancka daje energię kwantu rzędu 2×10^{-16} J = 1200 eV. Taką średnią energię mają cząstki gazu w temperaturze 15 mln K, czyli zbliżonej do temperatury wnętrza Słońca. Można by więc przypuszczać, że każde źródło promieniowania rentgenowskiego musi być gorące, i byłoby to przypuszczenie słuszne, ale tylko dla termicznego sposobu wytwarzania tego promieniowania. Tymczasem są inne sposoby. Oczywiście, na wytworzenie każdego kwantu trzeba zawsze co najmniej tyle energii, ile wynosi energia kwantu – zasady zachowania energii nie da się ominąć – ale do tego nie potrzeba temperatury wnętrza Słońca. Na przykład, lampy rentgenowskie emitują tzw. promieniowanie hamowania powstające, gdy pędząca cząstka naładowana (elektron) zostanie gwałtownie zahamowana w zderzeniu z przyciągającą ją elektrodą (anodą).

Chyba jednak mało kto przypuszczałby, że źródłami promieniowania rentgenowskiego mogą być obiekty pozbawione własnych źródeł energii i tak ze swej natury zimne jak komety. Fakt ten ujawnił w 1996 roku sztuczny satelita Rosat, wykrywając promieniowanie X u komety Hyakutake. Powstały trzy hipotezy na temat pochodzenia tego promieniowania: jest to skutek oddziaływania komety z wiatrem słonecznym, jest to słoneczne promieniowanie X rozproszone przez materię komety, bądź wreszcie jest to promieniowanie hamowania powstające przy oddziaływaniu rozproszonych w przestrzeni swobodnych elektronów z atomami komety. Dziś wydaje się, że najbardziej prawdopodobna jest pierwsza możliwość. Mechanizm powstawania wtedy promieniowania X jest wysoce nieoczywisty. Przypuszcza się, że wielokrotnie zjonizowane atomy węgla, azotu i tlenu, obecne w wietrze słonecznym, oddziałują z cząsteczkami wody zawartej w głowie komety w ten sposób, że każdy jon zabiera cząsteczkę wody jeden elektron, stając się wtedy jonem w stanie wzbudzonym. Przejściu z tego właśnie stanu wzbudzonego do podstawowego towarzyszy emisja fotonu rentgenowskiego. Jeżeli cząsteczkę wody zabierze elektron atom helu, to przechodząc do stanu podstawowego, może wyświecić foton o mniejszej energii, mianowicie nadfioletowy. Promieniowanie nadfioletowe również zostało zaobserwowane u komet. A czy nie jest to powstawanie promieniowania „z niczego”? Oczywiście, że nie, bo przecież Słońce musiało wcześniej zużyć pewną ilość energii na zjonizowanie atomów węgla, azotu, tlenu i helu.

Tomasz KWAST

Październik



Rozwiązanie zadania F 534.
Impedancja obwodu wynosi

$$Z = \frac{R_1}{1 + R_1 C \omega i} + \frac{R_2 L \omega i}{R_2 + L \omega i}$$

Wydzielając w powyższym wyrażeniu część rzeczywistą i urojoną, mamy

$$Z = \frac{R_1}{(1 + R_1 C \omega)^2} + \frac{R_2 L^2 \omega^2}{(R_2 + L \omega)^2} + i \left(-\frac{R_1^2 C}{(1 + R_1 C \omega)^2} + \frac{R_2 L \omega}{(R_2 + L \omega)^2} \right)$$

Impedancja obwodu będzie rzeczywista, tzn. jej część urojona będzie równa zeru, dla

$$R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

W kierunku południowym nisko nad horyzontem widać wieczorami najjaśniejszą gwiazdę Ryby Południowej – Fomalhaut. Nad nią znajduje się rozległy, ale mało wyraźny zodiakalny gwiazdozbiór Wodnika. W jego południowej części leży jedna z największych na naszym niebie mgławic planetarnych NGC 7293, zwana Ślimak lub – jak kto woli – Helix, gdyż wygląda jak dwa zwoje kosmicznej linii śrubowej. Mgławicę można dostrzec za pomocą co najmniej lornetki, jej jasność wynosi 6,5 mag. Jest to otoczka odrzucona kiedyś przez zaawansowaną ewolucyjnie gwiazdę, którą przez teleskop byłoby widać w centrum mgławicy. Gwiazda ta to dawny czerwonolbryzowy olbrzym pozbawiony teraz zewnętrznych warstw, a więc obiekt bardzo gorący, choć słaby – jej jasność wynosi 13,3 mag, a temperatura lekko przekracza 100 000 K. Taka właśnie struktura tych obiektów, tzn. mgławica planetarna plus gorąca gwiazda w jej centrum, jest bardzo powszechna, gdyż obiekty te powstają praktycznie według jednego scenariusza.

Wenus widać w Wadze po zachodzie Słońca, a Marsa w Lwie przed wschodem. Jowisz i Saturn są w Byku i obie planety widać od późnego wieczora do rana. Pełnia Księżyca wypada 13 X, a now 27 X. W październiku Księżyc nie zakryje żadnej jasnej gwiazdy.

T.K.

ZADANIE: Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cdot \sin 2000x dx,$$

gdzie n jest liczbą naturalną.Rozwiązanie: Oznaczamy szukaną całkę przez I_n , a następnie wykonujemy dwukrotnie całkowanie przez części:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{2\pi} \sin nx \cdot \sin 2000x dx = \sin nx \cdot \left(\frac{-\cos 2000x}{2000} \right) \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} n \cos nx \cdot \left(\frac{-\cos 2000x}{2000} \right) dx = \frac{n}{2000} \int_0^{2\pi} \cos nx \cdot \cos 2000x dx = \\ &= \frac{n}{2000} \cos nx \cdot \left(\frac{\sin 2000x}{2000} \right) \Big|_0^{2\pi} - \frac{n}{2000} \int_0^{2\pi} (-n \sin nx) \cdot \left(\frac{\sin 2000x}{2000} \right) dx = \frac{n^2}{4000000} \int_0^{2\pi} \sin nx \cdot \sin 2000x dx = \frac{n^2}{4000000} \cdot I_n, \end{aligned}$$

skąd $\frac{4000000 - n^2}{4000000} \cdot I_n = 0$. Zatem $I_n = 0$.

Odpowiedź: Wartość danej całki oznaczonej wynosi 0.

JWR

GRY (17)

Pozycja	Liczba Grundy'ego
3 kregle	
2	2
1	1
1, 1	$1 + 2 = 1 = 0$
4 kregle	
3	3
2	2
1, 2	$1 + 2 = 2 = 3$
1, 1	$1 + 2 = 1 = 0$
5 kregli	
4	1
3	3
1, 3	$1 + 2 = 3 = 2$
1, 2	$1 + 2 = 2 = 3$
2, 2	$2 + 2 = 2 = 0$
6 kregli	
5	4
4	1
1, 4	$1 + 2 = 1 = 0$
1, 3	$1 + 2 = 3 = 2$
2, 3	$2 + 2 = 3 = 1$
2, 2	$2 + 2 = 2 = 0$
7 kregli	
6	3
5	4
1, 5	$1 + 2 = 4 = 5$
1, 4	$1 + 2 = 1 = 0$
2, 4	$2 + 2 = 1 = 3$
2, 3	$2 + 2 = 3 = 1$
3, 3	$3 + 2 = 3 = 0$

Pozycja	Liczba Grundy'ego
8 kregli	
7	2
6	3
1, 6	$1 + 2 = 3 = 2$
1, 5	$1 + 2 = 4 = 5$
2, 5	$2 + 2 = 4 = 6$
2, 4	$2 + 2 = 1 = 3$
3, 4	$3 + 2 = 1 = 2$
3, 3	$3 + 2 = 3 = 0$
9 kregli	
8	1
7	2
1, 7	$1 + 2 = 2 = 3$
1, 6	$1 + 2 = 3 = 2$
2, 6	$2 + 2 = 3 = 1$
2, 5	$2 + 2 = 4 = 6$
3, 5	$3 + 2 = 4 = 7$
3, 4	$3 + 2 = 1 = 2$
4, 4	$1 + 2 = 1 = 0$
10 kregli	
9	4
8	1
1, 8	$1 + 2 = 1 = 0$
1, 7	$1 + 2 = 2 = 3$
2, 7	$2 + 2 = 2 = 0$
2, 6	$2 + 2 = 3 = 1$
3, 6	$3 + 2 = 3 = 0$
3, 5	$3 + 2 = 4 = 7$
4, 5	$1 + 2 = 4 = 5$
4, 4	$1 + 2 = 1 = 0$

W grze KREGLE, którą opisaliśmy przed miesiącem, sumy gier pojawiają się w naturalny sposób. Pełne zrozumienie gry polega, jak zwykle, na wyznaczeniu liczby Grundy'ego $k(n)$ pozycji złożonej z n kregli ustawionych obok siebie.

Bez trudu ustalamy, że $k(0) = 0$, $k(1) = 1$ i $k(2) = 2$, gdyż w tych przypadkach gra KREGLE nie różni się od gry NIM. W pozycji złożonej z 3 kregli mamy 3 możliwości wykonania ruchu (ruchy prowadzące do identycznych pozycji utożsamiamy). Ruchy te przedstawione są w tabeli obok. Możemy strącić dwa kregle, pozostawiając jeden (liczba Grundy'ego takiej pozycji wynosi 1). Możemy strącić jeden kregiel, przy czym może to być kregiel skrajny (pozostają wtedy dwa kregle stojące obok siebie) lub środkowy (co prowadzi do pozycji złożonej z dwóch samotnie stojących kregli). Prowadzi to do pozycji o liczbie Grundy'ego odpowiednio 2 i 0. Zatem $k(3) = 3$, gdyż 3 jest najmniejszą liczbą całkowitą nieujemną niewystępującą wśród liczb 0, 1 i 2.

Podobnie postępujemy w celu wyznaczenia dalszych wartości $k(n)$.

Z powyższych rozważań można otrzymać wartości $k(n)$ dla $n \leq 10$. Dla przykładu przyjrzyjmy się analizie pozycji złożonej z 8 kregli. Istnieje 8 możliwości wykonania ruchu. Możemy strącić jeden lub dwa kregle z brzegu, pozostawiając 6 lub 7 kregli stojących obok siebie. Możemy też strącić jeden lub dwa kregle, dzieląc pozostałe kregle na dwie grupki. Prowadzi to do pozycji mających liczbę Grundy'ego 0, 2, 3, 5 i 6. Tak więc $k(8) = 1$, gdyż 1 jest najmniejszą liczbą całkowitą nieujemną niewystępującą wśród wyżej wymienionych.

JWR

Korespondencję do Γ -limatiás prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCLAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl