



SPIS TREŚCI NUMERU 4 (335)

Samotnik <i>Krzysztof Pawłowicz</i>	str. 1
Doświadczalne badanie rezonatorów akustycznych <i>Michał Korch</i> <i>Krzysztof Pstrągowski</i> <i>Jakub Torenc</i>	str. 2
O równości $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ <i>Paweł Strzelecki</i>	str. 4
„Wywoływanie” astronomicznego zdjęcia cyfrowego <i>Grzegorz Wrochna</i>	str. 6
Rozpad meteoru zarejestrowany kamerą CCD <i>Piotr Zalewski</i>	str. 7
Mała Delta	str. 8
O pewnym zadaniu Sierpińskiego <i>Witold Bednarek</i>	str.10
Zadania	str.11
Kto rozwiąże lepiej? <i>Łukasz Wiechecki</i>	str.12
Aktualności	str.13
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Kwiecień	str.16
Gammalimatias	str.17

W następnym numerze: Pomysły

Okładki i ilustracje: *Anna Ludwicka*
Rysunki techniczne: *Joanna Reniger*

Wybór artykułów w języku angielskim
<http://www.mimuw.edu.pl/delta/>
Internetową wersję *Małej Delty*
można znaleźć w portalu Eduseek
<http://eduseek.ids.pl/delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski
Cena 1 egzemplarza 4 zł

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:	Redaguje kolegium w składzie:
Andrzej Białynicki-Birula	Wiktor Bartol
Bogdan Cichocki	Krzysztof Biesaga
– wiceprzewodniczący	Ewa Czuchry
Krzysztof Ciesielski	Krystyna Kordos – sekr. red.
Jan A. Gaj	Marek Kordos – red. nac.
Piotr Goldstein	Tomasz Kwast
Andrzej Hryniewicz	Anna Ludwicka
Wiesław A. Kamiński	Urszula Marciniak
Marta Kicińska-Habior	Anna Rudnik
Zbigniew Marciniak	Witold Sadowski
Krzysztof Maślanka	Joanna Udalska
Janusz Matkowski	Piotr Zalewski – z-ca red. nac.
Andrzej Mąkowski	
Zdzisław Pogoda	Adres Redakcji:
Michał Różycka	ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
Konrad Rudnicki	tel. 853-59-61, 55-33-216
Grzegorz Sitarski	BARTOL@MIMUW.EDU.PL
Andrzej Woszczyk	Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.
Wiesław Żelazko – przewodniczący	Wydrukowano
	w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A.
	w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 2002 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2002 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP SA I O/W-wa, nr 30 10201013 122640143**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na III kwartał 2002 r. wynosi 12 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.

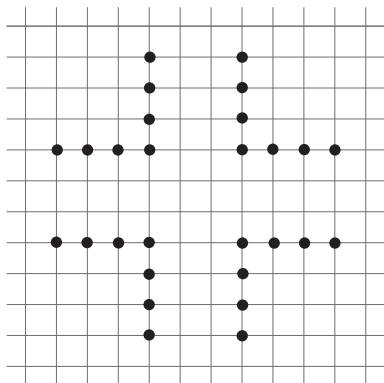
5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego,

Numery archiwalne (od 1985 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

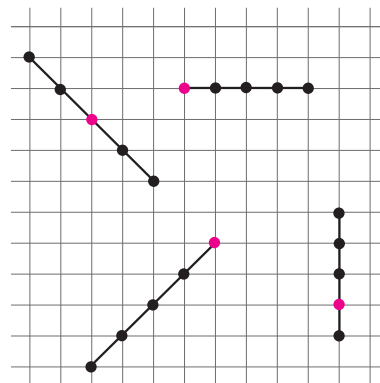
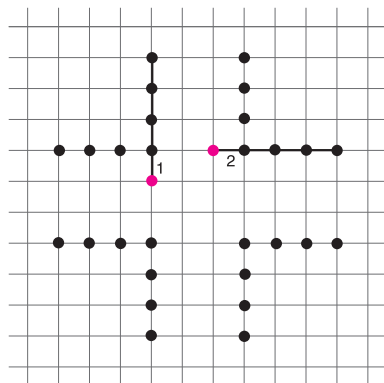
Samotnik

Krzysztof PAWŁOWICZ



Niektórzy Czytelnicy spotkali się być może z grą zwaną samotnikiem. Należy wziąć kartkę papieru w kratkę i zakropkować pewną liczbę przecięć linii – punktów kratowych. W wersji najczęściej spotykanej kropki początkowo naśladują krzyż zbudowany z 28 kropek.

Gra polega na wykonywaniu ciągu operacji – posunięć: zakropkowujemy kolejny punkt kratowy tak, by można było poprowadzić odcinek zawierający ten punkt oraz cztery wcześniej zakropkowane. Odcinek musi zaczynać się i kończyć kropką, a jego długość to „cztery kratki”. Odcinki mogą być pionowe, poziome lub ukośne. Jak to bywa z samotnikami, zadaniem gracza jest możliwie długie kontynuowanie gry.



Tu nasuwa się pytanie: jak długo można grać i czy w ogóle każda gra musi się kiedyś skończyć z powodu wyczerpania dozwolonych posunięć. Z doświadczenia wiem, że przekroczenie granicy 60 nowych kropek (czy odcinków) jest niełatwe. Tu zajmiemy się problemem skończoności gry. Załóżmy, że na początku mamy pewną liczbę kropek na kartce, powiedzmy 28. Z każdą kropką K można związać od 0 do 8 „stopni swobody” oznaczających liczbę sąsiednich pól kratowych niepołączonych jeszcze z K odcinkiem. Początkowo każda z 28 kropek ma „pełną swobodę”, czyli całkowita liczba „stopni swobody” to $28 \cdot 8 = 224$. Liczbę tę nazwiemy energią układu. Wykonanie posunięcia to dorysowanie kropki i odcinka. Dorysowanie kropki zwiększa energię o 8. Natomiast dorysowanie odcinka „zabija” po jednym „stopniu swobody” ze skrajnych kropek i po dwa „stopnie swobody” z wewnętrznych kropek tego odcinka. Łącznie odcinek „zabija” 8 „stopni swobody”, czyli całe posunięcie nie zmienia energii układu. Gdyby posunięcie zmniejszało energię, to łatwo zakończylibyśmy rozumowanie: w skończonej liczbie ruchów osiągnęlibyśmy energię układu mniejszą od potrzebnej na wykonanie posunięcia, czyli możliwe posunięcia wyczerpałyby się po nie więcej niż 224 posunięciach. W naszym przypadku energia się nie zmienia. Jednak można nieco ulepszyć rozumowanie. Zauważmy bowiem, że energia układu to „niewykorzystane” stopnie swobody wszystkich dotychczasowych kropek, w szczególności kropek skrajnych, leżących na brzegu powstającego tworu. Każda z tych kropek dodaje co najmniej 1 do całkowitej liczby stopni swobody. Zatem liczba kropek brzegowych w dowolnym momencie gry nie może przekroczyć początkowej energii układu, nie zmieniającej się w trakcie gry. W naszym przypadku liczba ta wynosi 224. Gry nie można więc kontynuować w nieskończoność, bo wówczas brzeg tworu musiałby się wydłużać nieograniczenie.

Zadanie: znaleźć najlepsze ograniczenie górne na liczbę kresek.

1



Rozwiązanie zadania F 569.

Prędkość strugi wody wypływającej z otworu wynosi $v = 2g(H - h)$. Czas spadania z wysokości h do $H/4$ to

$t = \sqrt{2(h - H/4)/g}$, pozioma odległość pokonana w tym czasie przez strugę

wynosi $s = vt = \sqrt{4(H - h)(h - H/4)}$.

Aby struga wody trafiła do naczynia, musi zachodzić

$$\frac{H}{2} < 2\sqrt{(H - h)(h - H/4)} < \frac{3}{4}H.$$

Z nierówności

$$\frac{H}{2} < 2\sqrt{(H - h)(h - H/4)}$$

otrzymujemy

$$\frac{5 - \sqrt{5}}{8}H < h < \frac{5 + \sqrt{5}}{8}H,$$

z drugiej zaś $h \neq \frac{5}{8}H$. Zatem warunki zadania są spełnione dla

$$\frac{5 - \sqrt{5}}{8}H < h < \frac{5}{8}H$$

lub

$$\frac{5}{8}H < h < \frac{5 + \sqrt{5}}{8}H.$$

Doświadczalne badanie rezonatorów akustycznych

Michał KORCH, Krzysztof PSTRĄGOWSKI,
Jakub TORENC

Badanie rezonatorów rozpoczniemy od stosunkowo prostego układu, jakim jest struna. Możemy traktować go jako ciągły, co pozwala opisać falę, czyli zaburzenie rozchodzące się w strunie, za pomocą jednej ciągłej funkcji położenia i czasu.

Jeżeli założymy, że w położeniu równowagi struna jest rozciągnięta wzdłuż poziomej osi x , a wychylenie z położenia równowagi następuje w kierunku pionowej osi y , to równanie fali biegnącej po strunie będzie miało następującą postać (zobacz np. „Fale” F.C. Crawforda)

$$y(x, t) = A \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - ut),$$

gdzie u jest prędkością rozchodzenia się fali, A jej amplitudą, a λ jej długością (o czym można się przekonać, sprawdzając, że $y(x + \lambda, t) = y(x, t)$, czyli że wychylenie punktów struny odległych o λ jest takie samo).

Jeśli końce naprężonej struny unieruchomimy tak jak np. w gitarze, to będą one odbijać falę, zmieniając znak wychylenia na przeciwny. (Zmianę znaku można zaobserwować za pomocą w miarę długiego, uwiązanego na jednym końcu sznura.) Fala odbita porusza się w przeciwnym kierunku, czyli z prędkością $-u$ i interferuje z pierwotną, tworząc falę stojącą. Zatem wychylenie wypadkowe struny wynosi

$$y = A \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - ut) - A \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x + ut).$$

Korzystając ze wzoru na różnicę kosinusów, otrzymujemy

$$y = -2A \sin \left(2\pi \frac{ut}{\lambda} \right) \cdot \sin \left(2\pi \frac{x}{\lambda} \right).$$

Pierwszy człon opisuje drganie z częstością $f = u/\lambda$, a drugi – przestrzenny kształt fali stojącej. Po skorzystaniu z warunków brzegowych (na końcach struny wychylenie w każdej chwili jest zerowe) otrzymamy następujący związek między długością struny l a długością fali:

$$\lambda = 2l/n,$$

gdzie n jest dowolną liczbą naturalną. Wynika stąd, że częstość kolejnych modów drgań własnych struny powinna być proporcjonalna do numeru modu n i odwrotnie proporcjonalna do długości struny

$$f = u \frac{1}{\lambda} = u \frac{n}{2l}.$$

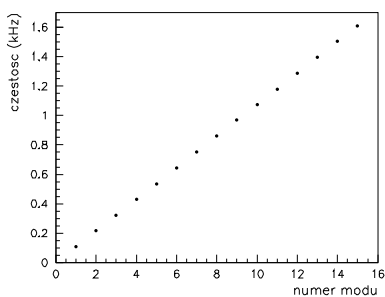
Zależność tę postanowiliśmy sprawdzić doświadczalnie dla struny gitarowej A, nastrojonej tak, że jej podstawowa częstość własna wynosiła 107 Hz.

Do pomiaru wykorzystaliśmy cyfrowy oscyloskop z możliwością analizy częstości, który stanowił integralną część karty muzycznej komputera.

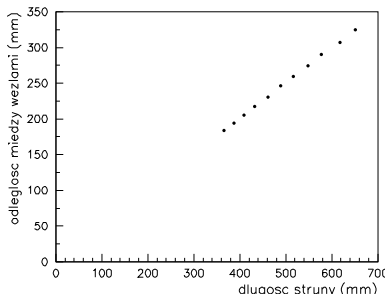
Zmierzyliśmy częstości dla n zawartego w przedziale od 1 do 15. Wyniki pomiarów przedstawia rysunek 1. Widać na nim wyraźnie, że zależność częstości od n jest liniowa, a więc taka, jak oczekiwaliśmy.

Następnym etapem doświadczenia było znalezienie takich punktów na strunie, w których tłumienie (dotknięcie) struny palcem nie powoduje zaniku dźwięku. Takie punkty są węzłami fali stojącej, odpowiadającej określonym modom, bowiem mody nie mające w owych punktach węzłów zostają wytłumione. Staraliśmy się znajdować węzły fali stojącej tak, aby mierzone odległości były równe połowie długości fali. Na rysunku 2 pokazany jest związek między odległością węzłów (przy wzbudzeniu modu numer 2) a długością struny. Zgodnie z przewidywaniem zależność ta jest liniowa.

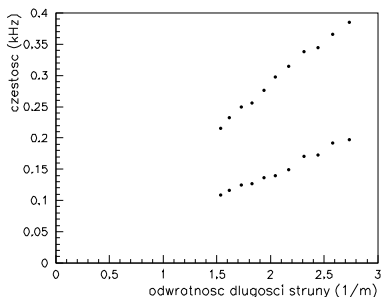
Doświadczalnie sprawdziliśmy również, czy jest spełniona zależność między częstością a długością struny. Otrzymane wyniki ponownie potwierdzają nasze



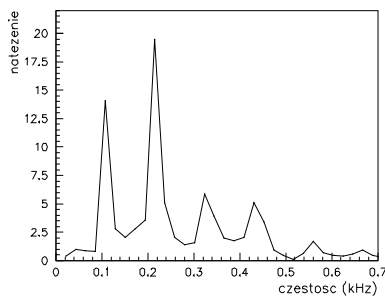
Rys. 1. Zależność częstości drgań struny od numeru wzbudzonego modu.



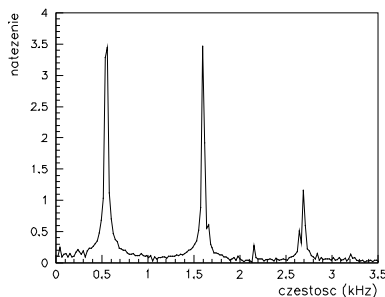
Rys. 2. Związek odległości węzłów z długością struny.



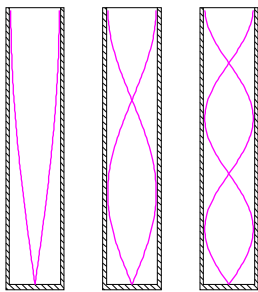
Rys. 3. Zależność częstości drgań struny od odwrotności długości struny dla modów numer 1 i 2.



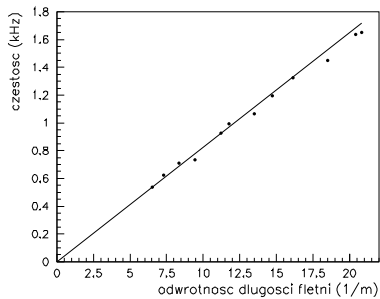
Rys. 4. Widmo częstości drgań struny.



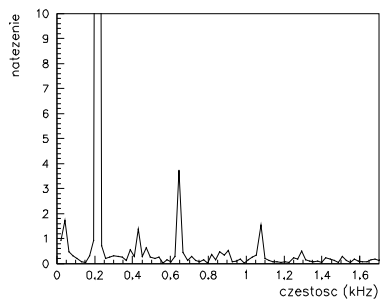
Rys. 5. Widmo częstości drgań fletni.



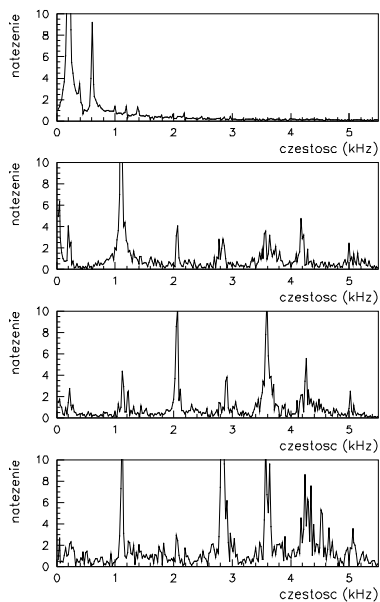
Rys. 6. Kolejne mody drgań ($n = 1, 3, 5$) słupa powietrza we fletni Pana.



Rys. 7. Zależność częstotliwości drgań akustycznych od odwrotności długości fletni.



Rys. 8. Widmo częstotliwości drgań powietrza w butelce. Wzbudzenie drgania podstawowego i jego harmoniczných.



Rys. 9. Widma częstotliwości drgań powietrza w butelce przy różnych sposobach dmuchania.

przewidywania, gdyż częstota zmienia się liniowo z odwrotnością długości struny dla obydwu modów przedstawionych na rysunku 3.

Następne doświadczenie przeprowadziliśmy z fletnią Pana. Badany instrument zbudowany był z rurek bambusowych o różnej długości i średnicy od 1,00 cm do 0,71 cm oraz grubości ścianki 1 mm. Na rysunku 5 przedstawione jest otrzymane przez nas widmo częstotliwości, które można porównać z widmem częstotliwości struny (rys. 4). W widmie fletni widać głównie nieparzyste harmoniczne częstotliwości podstawowej, podczas gdy w strunie wzbudzają się wszystkie harmoniczne. Dzieje się tak, gdyż powstające w rurce fale stojące powinny mieć węzeł na dnie i strzałkę u wylotu rurki. To założenie spełniają tylko fale o częstotliwościach będących nieparzystymi wielokrotnościami częstotliwości podstawowej. Schematycznie ilustruje to rysunek 6.

Następnie zbadaliśmy, jak zależy częstota tonu podstawowego od długości piszczałki. Wyniki pomiarów przedstawiamy na wykresie 7. Okazuje się, że podobnie jak w przypadku struny, częstota jest odwrotnie proporcjonalna do długości drgającego elementu, w tym przypadku słupa powietrza w rurce. Do danych doświadczalnych dopasowaliśmy taką oto zależność:

$$f = \frac{v}{4d},$$

gdzie f jest częstotliwością podstawową, v prędkością dźwięku, a d długością piszczałki.

Ostatnim badanym przez nas rezonatorem była butelka. Dmuchaając odpowiednio w otwór, można wzbudzić drgania powietrza w butelce. Widmo otrzymane w przypadku wzbudzenia drgania o najniższym tonie przedstawia rysunek 8. Oprócz częstotliwości podstawowej w widmie widać wyższe harmoniczne. Pod tym względem butelka przypomina fletnię Pana, gdyż wzbudzane są głównie mody o częstotliwościach, które są nieparzystymi wielokrotnościami modu podstawowego.

Czy jednak da się opisać drgania akustyczne słupa powietrza w butelce w sposób równie prosty jak poprzednie rezonatory?

Na następnym rysunku pokazane są widma drgań wzbudzanych w butelce przy różnych sposobach dmuchania. Jak widać, można z niej wydobyć wiele różnych tonów, które nie są powiązane jakąś prostą zależnością matematyczną, w szczególności nie są wielokrotnościami pewnej częstotliwości podstawowej. Nie jest to jednak dziwne. Butelka jest rezonatorem trójwymiarowym i nie może być w pełni opisana tak prostymi wzorami, jak stosowane dla struny czy fletni, które można traktować jako rezonatory jednowymiarowe.

Zbadaliśmy kilka rezonatorów akustycznych występujących w otaczającym nas świecie. Przekonaliśmy się, że jeżeli rezonator można traktować jako jednowymiarowy, to częstota podstawowa jest odwrotnie proporcjonalna do długości rezonatora. W rezonatorach tych wzbudzane są też częstotliwości harmoniczne, które są wielokrotnością częstotliwości podstawowej, przy czym w rezonatorach akustycznych, zbudowanych tak jak fletnia Pana, generowane są głównie nieparzyste harmoniczne. Bardziej skomplikowane rezonatory, których przykładem może być słup powietrza w butelce, mogą wykazywać pewne podobieństwa do rezonatorów jednowymiarowych, ale nie dają się w pełni opisać prostymi zależnościami matematycznymi.

W jednym z następnych numerów nasi koledzy przedstawiają badanie jeszcze jednego rodzaju często spotykanego rezonatora, jakim jest pręt. Okazuje się, że choć jego widmo nie przypomina widm rezonatorów jednowymiarowych, to zależności między częstotliwościami wzbudzanych drgań a wymiarami pręta dają się opisać analitycznie.

Serdecznie dziękujemy panu profesorowi Janowi Gajowi za pomoc w przygotowaniu doświadczeń i spisaniu wyników.

Pracę wykonano na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego w ramach warsztatów naukowych organizowanych przez Krajowy Fundusz na rzecz Dzieci.

O równości $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$

Paweł STRZELECKI

Więcej informacji o funkcji zeta Riemanna i związanej z nią hipotezie Riemanna (która jest jednym z najsłynniejszych nierozwiązanych problemów w całej matematyce) można znaleźć w dwóch artykułach Romana Dwilewicz i Jána Mináča w *Delcie* 9/1997 i 11/1997.

Funkcja zeta Riemanna, zdefiniowana dla liczb $s > 1$ wzorem

$$(1) \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

przyjmuje w punkcie $s = 2$ wartość $\frac{\pi^2}{6}$; wiedział o tym już Euler 250 lat temu. Wiedział (choć nazwy *zeta Riemanna* nie używał) znacznie więcej: wykazał mianowicie, że dla każdej liczby parzystej dodatniej $s = 2k$ liczba $\zeta(s)$ jest wymierną wielokrotnością π^s , i znalazł niezbyt skomplikowany przepis na współczynnik owej wielokrotności. Dzięki temu potrafimy dziś podać całą serię wzorów na $\zeta(2k)$: np. $\zeta(6) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$, a, dajmy na to,

$$\zeta(30) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{30}} = \frac{6892673020804 \pi^{30}}{5660878804669082674070015625}.$$

Sumowania szeregu (1) dla parzystych s uczy się dziś studentów. Można to robić różnymi sposobami i z różnej okazji; na ogół wykorzystuje się w tym celu szeregi Fouriera lub teorię funkcji analitycznych i twierdzenie o residuach. Zaleta jest taka, że za każdym razem otrzymuje się ogólną metodę sumowania wielu szeregów, wada taka, że trochę się trzeba namęczyć.

W drugim wydaniu książki *Proofs from the Book* Martina Aignera i Günthera Zieglera można znaleźć jeszcze inny dowód równości $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, krótki, błyskotliwy, zupełnie elementarny, obarczony może jedną wadą: nie widać, jak z tej samej sztuczki wycisnąć wzór na $\zeta(2k)$ dla naturalnych $k > 1$. (Tzn. piszący te słowa nie widzi – być może Czytelnicy *Delty* zobaczą.)

Oto ów dowód, ku pokrzepieniu serc w czasach, gdy coraz trudniej szukać rzeczy pewnych i pięknych poza matematyką.

Ustalmy liczbę naturalną k i niech $x_j = j\pi/(2k+1)$ dla $j = 1, \dots, k$. Posłużymy się dwiema tożsamościami:

$$\sum_{j=1}^k \operatorname{ctg}^2 x_j = \frac{2k(2k-1)}{6}, \quad \sum_{j=1}^k \frac{1}{\sin^2 x_j} = k + \frac{2k(2k-1)}{6} = \frac{2k(2k+2)}{6}.$$

Druga z nich natychmiast wynika z pierwszej: wszak $1/\sin^2 x = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$, więc dodając jedynkę do każdego składnika pierwszej sumy, zamienimy kwadraty kotangensów na odwrotności kwadratów sinusów, a cała suma zwiększy się właśnie o k . Pierwsza tożsamość wynika natomiast ze wzoru de Moivre'a $\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n$. Jak? To proste. Kto chce, niech sam się przekona, a potem wróci do tekstu, na początek następnej strony; dla pozostałych zamieszczamy szczegóły.

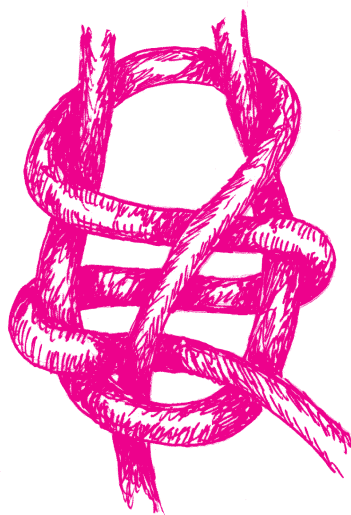
Trzeba rozwinąć wyrażenie $(\cos x + i \sin x)^n$, stosując dwumian Newtona (i pamiętając, że $i^2 = -1$), a następnie porównać części urojone obu stron wzoru de Moivre'a i podzielić otrzymaną równość przez $\sin^n x$. Da to wynik

$$\frac{\sin nx}{\sin^n x} = \binom{n}{1} \operatorname{ctg}^{n-1} x - \binom{n}{3} \operatorname{ctg}^{n-3} x \pm \dots \quad (x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots).$$

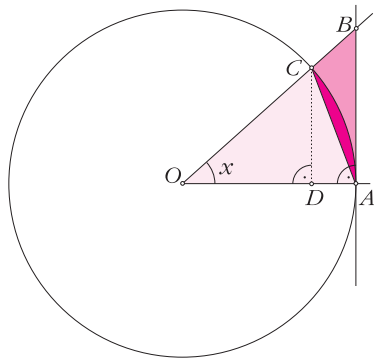
Teraz zaś należy wziąć $n = 2k+1$ i podstawić x_j w miejsce x . Lewa strona zniknie, gdyż $nx_j = j\pi$, a zatem

$$0 = \binom{2k+1}{1} \operatorname{ctg}^{2k} x_j - \binom{2k+1}{3} \operatorname{ctg}^{2k-2} x_j \pm \dots \quad \text{dla } j = 1, \dots, k.$$

Wielomian $W(t) := \binom{2k+1}{1} t^k - \binom{2k+1}{3} t^{k-1} \pm \dots + (-1)^k \binom{2k+1}{2k+1}$ ma więc k pierwiastków: są nimi liczby $t_j = \operatorname{ctg}^2 x_j$, gdzie $j = 1, \dots, k$.



Liczbom zespolonym poświęcona była *Delta* 10/2000.



Stopień tego wielomianu jest równy k , a stąd wynika, że

$$W(t) = \binom{2k+1}{1} (t-t_1) \cdots (t-t_k).$$

Stosując wzór Viète'a na sumę pierwiastków, tzn. porównując współczynniki przy t^{k-1} w obu zapisach wielomianu W , otrzymamy

$$t_1 + \dots + t_k = \frac{\binom{2k+1}{3}}{\binom{2k+1}{1}} = \frac{2k(2k-1)}{6},$$

a to jest właśnie poszukiwany wzór na sumę kwadratów cotangensów liczb x_j .

Posłużymy się też elementarną nierównością $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$, zachodzącą dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Wynika z niej, że

$$0 < \operatorname{ctg} x < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}, \quad \text{a więc} \quad \operatorname{ctg}^2 x < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x} \quad \text{dla } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

W ostatniej nierówności wstawiamy $x = x_j$, gdzie $j = 1, \dots, k$. Otrzymujemy k nierówności, które dodajemy stronami, wykorzystując wcześniejsze wzory na sumy kwadratów odpowiednich funkcji trygonometrycznych. Oto wynik tego postępowania:

$$\frac{2k(2k-1)}{6} < \left(\frac{2k+1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2k+1}{2\pi}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2k+1}{k\pi}\right)^2 < \frac{2k(2k+2)}{6}$$

lub, po pomnożeniu stron przez $\pi^2/(2k+1)^2$,

$$\frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{2k(2k-1)}{(2k+1)^2} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{2k(2k+2)}{(2k+1)^2}.$$

Teraz wystarczy zastosować twierdzenie o trzech ciągach; zarówno lewa, jak i prawa strona powyższego wyrażenia ma dla $k \rightarrow \infty$ granicę $\pi^2/6$, a stąd

$$\zeta(2) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Czytelnik zechce sam sprawdzić, że otrzymaliśmy także oszacowanie tempa zbieżności sum częściowych szeregu $\sum \frac{1}{n^2}$; mianowicie,

$$\frac{\pi^2}{6(2k+1)^2} < \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} < \frac{\pi^2}{4k+2} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots$$

Na zakończenie warto dodać, że o wartościach funkcji ζ dla liczb nieparzystych większych od 1, czyli o sumach szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{2k+1}$, gdzie $k = 1, 2, \dots$, wiadomo bardzo niewiele. W roku 1978, ponad dwieście lat po ukazaniu się *Institutiones calculi differentialis cum ejus usu in analysi finitorum ac doctrina serierum* Leonharda Eulera, książki zawierającej m.in. wzory na $\zeta(2k)$, Roger Apéry wykazał, że $\zeta(3)$ jest liczbą niewymierną. Jego dowód składał się z wielu iście ekwilibrystycznych lematów i oszacowań – i był *pierwszą* nietrywialną informacją o którejkolwiek z liczb $\zeta(2k+1)$. Przez kolejnych dwadzieścia lat nie stało się nic. Późną wiosną roku 2000 Tanguy Rivoal z Uniwersytetu w Caen we Francji dowiódł, że wśród wszystkich liczb $\zeta(2k+1)$ jest nieskończenie wiele liczb niewymiernych; dokładniej, liczba liczb niewymiernych w zbiorze

$$\{\zeta(3), \zeta(5), \dots, \zeta(2n+1)\}$$

rośnie dla $n \rightarrow \infty$ przynajmniej w takim tempie, jak $C \log n$ dla pewnej dodatniej stałej C . Nie wiadomo, niestety, które z liczb $\zeta(2k+1)$ są niewymierne; prócz $\zeta(3)$ nie potrafimy wskazać żadnej.

Jak widać, pole do popisu jest szerokie (a co za tym idzie, niełatwe). Zresztą, nawet gdy się ktoś z wartościami funkcji zeta w liczbach naturalnych do końca upora, to i tak zostanie jeszcze hipoteza Riemanna...

5

Jeśli $\sphericalangle AOB = x$ i $OA = OC = 1$, to $CD = \sin x$ i $AB = \operatorname{tg} x$. Ponadto, $\triangle OAC$ ma pole równe $\frac{1}{2} \sin x$, $\triangle OAB$ – pole równe $\frac{1}{2} \operatorname{tg} x$. Wycinek koła oparty na łuku AC ma pole $\frac{1}{2} x$, a więc $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.



Rozwiązanie zadania M 985.

Założmy, że pierwsze 0 licząc od końca (tzn. od cyfry jedności) w liczbie 5^n stoi na k -tym miejscu ($k > 0$). Dodając do 5^n liczbę $5^n \cdot 10^{k-1}$ sprawimy, że żadna z ostatnich k cyfr powstałej sumy nie jest równa 0. Postępując dalej w ten sposób skonstruujemy liczbę, której ostatnich n cyfr jest różnych od 0. Odrzucając teraz wszystkie cyfry oprócz ostatnich n , otrzymamy szukaną liczbę.



Rozwiązanie zadania M 986.

Najpierw wykażemy, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ istnieje nieskończenie wiele liczb $m \in \mathbb{N}$ spełniających warunek $2^k | (5^m - 1)$. Wśród liczb $5^0, 5^1, 5^2, 5^3, \dots, 5^{2^k}$ istnieją dwie 5^p i 5^q ($p > q$), które dają tę samą resztę przy dzieleniu przez 2^k . Wtedy ich różnica $5^p - 5^q = 5^q(5^{p-q} - 1)$ jest podzielna przez 2^k , czyli dowolna liczba postaci $5^{r(p-q)} - 1$ ($r \in \mathbb{N}$) jest podzielna przez 2^k .

Dla każdego m , dla którego $2^k | (5^m - 1)$ zachodzi $10^k | (5^{m+k} - 5^k)$, tzn. ostatnie k cyfr w liczbach 5^{m+k} i 5^k są takie same. Niech k będzie takie, że $2^k > 10^{2001}$. Wtedy $5^k = \frac{10^k}{2^k} < 10^{k-2001}$, więc 5^k ma nie więcej niż $k - 2001$ cyfr. Stąd i z faktu, że ostatnie k cyfr w liczbach 5^{m+k} i 5^k są takie same wynika, że wszystkie cyfry od miejsca $k - 2000$ do k (jest ich 2001 i stoją kolejno) w liczbie 5^{m+k} są równe 0.

„Wywoływanie” astronomicznego zdjęcia cyfrowego

Grzegorz WROCHNA



Zdjęcie 1. Pojedyncze cyfrowe zdjęcie nocnego nieba. Pokazany jest fragment 135 × 79 pikseli, odpowiadający obszarowi 50' × 30'.



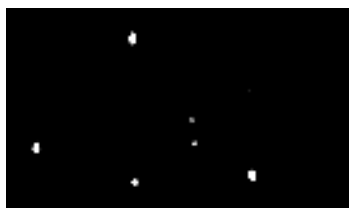
Zdjęcie 2. Rozjaśnianie nie pomaga.



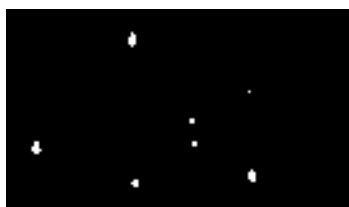
Zdjęcie 3. To samo zdjęcie po odjęciu tła instrumentalnego.



Zdjęcie 4. Nałożenie sekwencji 120 zdjęć bez uwzględnienia ruchu obrotowego Ziemi.



Zdjęcie 5. Ostateczny wynik „cyfrowego wywoływania”. Ile gwiazd widać na tym zdjęciu?



Zdjęcie 6. Sztuczne poprawienie kontrastu. Najsłabsza gwiazda staje się wyraźnie widoczna.

W *Delcie 2/2002* zachęcałem do fotografowania nieba kamerami internetowymi. Przekonywałem, że do wykonania ciekawych obserwacji gwiazd nie trzeba nawet teleskopu. Po przymocowaniu do kamery obiektywu, umieszczeniu całości na statywie i podłączeniu do komputera można rozpocząć obserwacje. Wydawałoby się, że wystarczy tylko przycisnąć guzik i gotowe. Nic bardziej błędnego! Astronomiczne zdjęcie cyfrowe trzeba jeszcze „wywołać”.

Na pojedynczej klatce, jeżeli szczęście nam dopisze, pojawi się najwyżej jedna gwiazda 5 mag lub jaśniejsza (zdjęcie 1). Jeśli rozjaśnimy obraz jakimś programem graficznym, to ukaże się mnóstwo jasnych kropek i nie zgadniemy, które z nich są gwiazdami, a które szumem (zdjęcie 2). Żeby osiągnąć lepsze rezultaty, musimy podpatrzeć, co robią prawdziwi astronomowie.

Każdy piksel sensora CCD generuje sygnał w postaci pewnej ilości ładunku proporcjonalnej do liczby rejestrowanych fotonów. Przy odczycie jego wartość przetwarzana jest do postaci cyfrowej. W tańszych CCD mamy zwykle do dyspozycji 8 bitów, czyli wartości od 0 do 255. Rejestrowany obraz może być zaburzony na różne sposoby. Poszczególne elementy obrazu mogą być prześwietlone lub niedoświetlone. Różne piksele mogą mieć różne wzmocnienia. Zerowemu naświetleniu może odpowiadać różna od zera wartość odczytana. Jest to tzw. tło instrumentalne (ang. *offset*). Wreszcie odczytana wartość może być zwiększona lub zmniejszona przez szum, który ma dwie składowe: o stałej dyspersji – będącą skutkiem odczytu, oraz statystyczną – proporcjonalną do pierwiastka z czasu naświetlania.

Ponieważ wartość interesującego nas sygnału rośnie proporcjonalnie do czasu naświetlania, a szum jedynie jak jego pierwiastek, to długie czasy poprawiają stosunek sygnału do szumu. Ponieważ jednak czas naświetlania pojedynczej klatki w kamerach internetowych jest bardzo ograniczony (zwykle poniżej 1 s), stosuje się trik polegający na sumowaniu wielu klatek. W używanym przeze mnie zestawie (kamera *Philips Vesta PCVC675K*, obiektyw *Zenith 50 mm, f/2*) nałożenie 20, 60 czy 120 klatek pozwala sięgnąć odpowiednio do 8 mag, 9 mag i prawie 10 mag. Jeżeli jednak używamy montażu z napędem, to nie zapomnijmy wyłączyć go na czas ekspozycji. Na skutek obrotu Ziemi obraz danej gwiazdy będzie rejestrowany przez różne piksele. Po nałożeniu klatek spowoduje to dodatkowe uśrednienie szumów.

Obróbkę zdjęcia (wywoływanie) zaczynamy od odjęcia tła instrumentalnego. W tym celu należy przygotować specjalną tzw. *ciemną klatkę* (ang. *dark frame*), będącą mapą tego tła. Uzyskujemy ją, rejestrując sekwencję klatek z zasłoniętym obiektywem, w warunkach możliwie zbliżonych do analizowanych zdjęć (wzmocnienie, czas ekspozycji, temperatura otoczenia itp.) i uśredniając ją. Otrzymaną w ten sposób mapę tła odejmujemy od każdej klatki analizowanej sekwencji.

Wyniki, po tej wstępnej obróbce, przedstawiają zdjęcia 3 i 4. Na pierwszym z nich pokazana jest pojedyncza klatka, a na drugim efekt nałożenia wielu klatek bez uwzględnienia obrotu Ziemi.

Kolejnym krokiem jest nałożenie klatek opracowywanej sekwencji z takim przesunięciem, aby obraz danej gwiazdy znalazł się zawsze w tym samym miejscu. Ręczne przesuwanie byłoby bardzo żmudne. Na szczęście można ten proces zautomatyzować, stosując odpowiednie oprogramowanie. Po przesunięciu obrazy dodajemy albo liczymy ich średnią lub medianę.

W tym momencie mamy już gotowe zdjęcie, które można wykorzystać do analizy astrometrycznej lub fotometrycznej (zdjęcie 5).

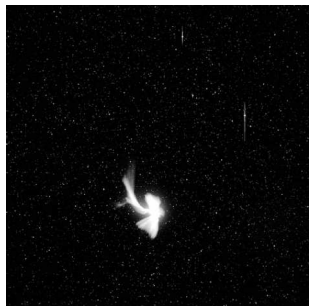
Do prezentacji wizualnej warto uwypuklić słabsze obiekty (zdjęcie 6). Można to zrobić rozciągając skalę 0–255 przez wyświetlanie tylko przedziału np. 3–50 i przypisanie 50 wyższym wartościom. Można też zastosować skalę logarytmiczną.

Analizę fotometryczną najlepiej przeprowadzić jednym z gotowych programów dostępnych w internecie. Więcej szczegółów można znaleźć na stronie <http://hep.fuw.edu.pl/~urochna/astro>.

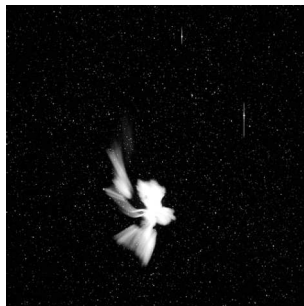
Rozpad meteoru zarejestrowany kamerą CCD



1:31:26



1:32:33



1:33:41



1:34:49



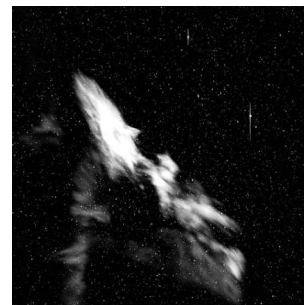
1:35:56



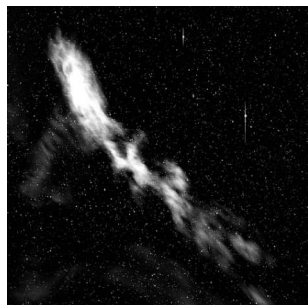
1:38:12



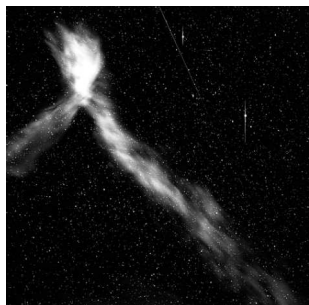
1:40:27



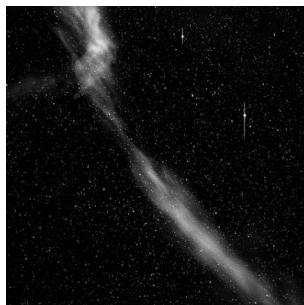
1:43:50



1:48:21



1:52:52



1:59:37



2:06:23

Od dwóch miesięcy Grzegorz Wrochna na naszych łamach namawia do oglądania nieba za pomocą tanich kamer CCD. Powyżej przedstawiamy przykład obserwacji, jakiej taką kamerą można dokonać. Na zdjęciach widać rozpad meteoru z roju leonidów. Zdjęcia zarejestrowała aparatura eksperymentu ROTSE, sześć dni po osiemdziesiątej rocznicy odzyskania niepodległości przez Polskę. Kolejne ekspozycje trwały po 60 sekund każda (nie wszystkie zdjęcia drukujemy – proszę popatrzeć na podane czasy rozpoczęcia ekspozycji). Chyba najbardziej niesamowite jest to, że resztki meteoru świeciły przez ponad pół godziny.



Rozwiązanie zadania F 570.

Z prawa Bernoulliego mamy, że różnica ciśnienia powietrza w rurach A i B wynosi

$$p_B - p_A = \frac{\rho}{2}(v_A^2 - v_B^2).$$

Ponieważ szybkość przepływu u objętości powietrza w jednostce czasu jest stała i równa 15 litrów na minutę (czyli $0,25 \text{ dm}^3$ na sekundę), mamy stąd, że $v_A = u/d_A$ i $v_B = u/d_B$. Zatem

$$p_B - p_A = \frac{\rho}{2}u^2 \left(\frac{1}{d_A^2} - \frac{1}{d_B^2} \right).$$

Ta różnica ciśnień jest równa różnicy ciśnień hydrostatycznych w rurce C, tzn. $p_A - p_B = \rho_{\text{wody}}gh$. A więc

$$h = \frac{\rho}{\rho_{\text{wody}}} \frac{u^2}{2g} \left(\frac{1}{d_B^2} - \frac{1}{d_A^2} \right) \approx 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

ROTSE to ten sam eksperyment, w którym po raz pierwszy zarejestrowano optyczny odpowiednik błysku gamma w trakcie jego trwania (pisaliśmy o tym w *Delcie* 8/2000 w artykule Tomasza Bulika „GRB 990123”). Może jednak kamery ROTSE nie są takie zupełnie amatorskie? To prawda – są profesjonalne, co wcale nie znaczy, że bardzo różne od dostępnych dla amatorów (układ optyczny miał ogniskową 80 mm i przysłonę 1/1,8 – był to dobry, ale zwykły teleobiektyw). Przebieg tego rozpadu zarejestrowałaby każda odpowiednio skierowana „byle jaka” kamera. Zresztą ten meteorologiczny fajerwerk rzeczywiście został uwieczniony przez wielu amatorów (nie bez znaczenia był fakt, że wydarzyło się to nad terytorium Stanów Zjednoczonych Ameryki Północnej – jest tam wielu odpowiednio wyekwipowanych miłośników astronomii).

A więc: czy „byle jakie” kamery mają znaczenie dla „prawdziwej” astronomii, czy nie mają?

P. Z.



mała delta

Jak odróżnić węzły?

– Skąd wiecie, że nie można rozwiązać każdego węzła, czyli jednego sznurka o połączonych końcach? – spytał Pawełek i spojrzawszy na Tomka dodał – pisałeś przecież wypracowanie o Aleksandrze Macedońskim i węźle gordyjskim.

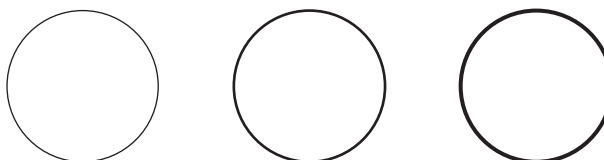
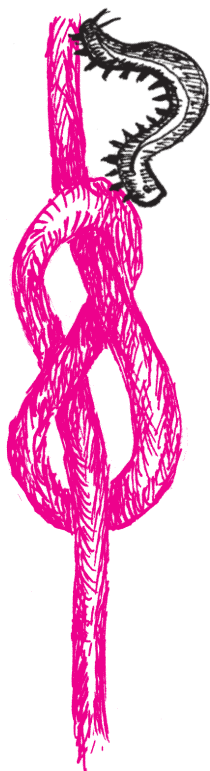
Tomek spojrział na nas niepewnie.

– Ale my nie dopuszczamy cięcia i klejenia. Opowiedz, tata – zwrócił się do mnie – o 3-kolorowaniu, mówiłeś kiedyś, że to najprostsza metoda odróżniania węzłów.

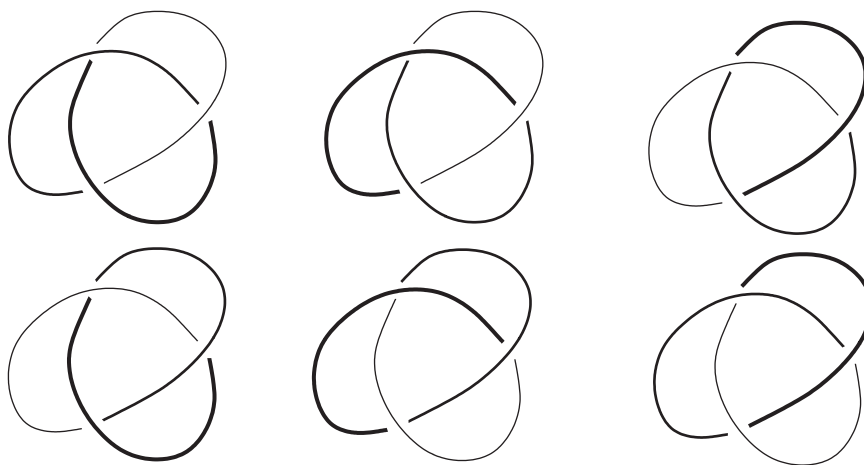
– Już opowiadam – podchwyciłem. – Przygotujcie się na dłuższą historię i pamiętajcie, że trójkolorowanie odróżnia tylko niektóre węzły. Połóżmy węzeł płasko na stole, tak, by jedynymi miejscami, gdzie nie dotyka on stołu, były „mosty” skrzyżowań. Takie położenie nazwiemy diagramem węzła. Pomalujmy teraz nasz diagram węzła trzema kolorami (czerwonym, zielonym i niebieskim), używając tego samego koloru od tunelu do tunelu. Wokół skrzyżowania mamy ograniczenie: albo spotykają się trzy różne kolory, albo całe skrzyżowanie używa tylko jednego koloru.

– To ja pomaluję cały węzeł na zielono – wtrącił Paweł.

– To jest dozwolone – zgodziłem się. – Nazwiemy to trywialnym kolorowaniem. Każdy węzeł ma trzy trywialne kolorowania, ale interesują nas wszystkie dopuszczalne 3-kolorowania i te nietrywialne są ciekawsze. Np. diagram węzła trywialnego ma tylko trzy kolorowania (wszystkie trywialne; rys. 1), ale diagram trójlistnika ma jeszcze sześć nietrywialnych 3-kolorowań, czyli w sumie dziewięć 3-kolorowań (rys. 2).

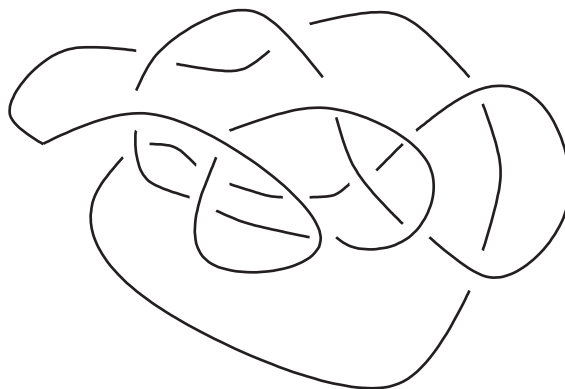
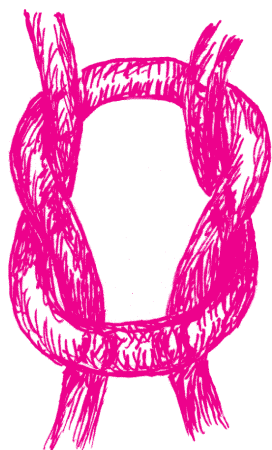


Rys. 1. Różne kolory zaznaczone są różną grubością kreski.



Rys. 2. Sześć nietrywialnych kolorowań węzła trójlistnika.

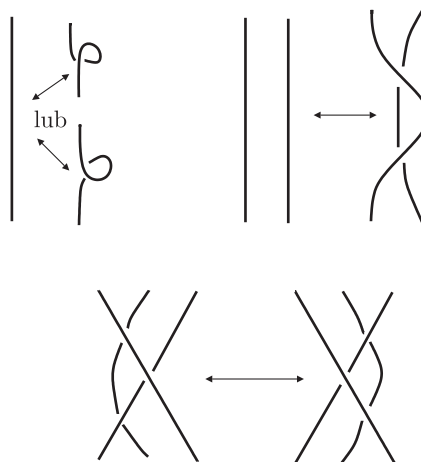
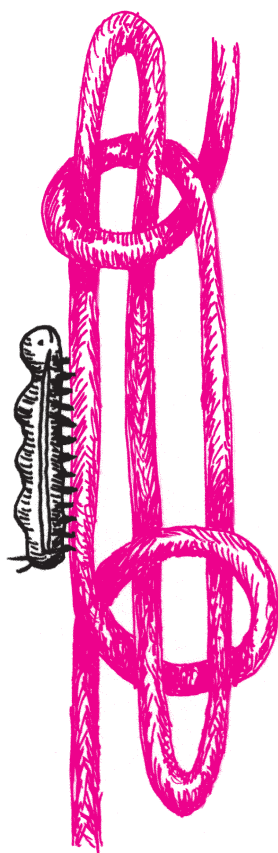
-- Ależ tata! – oburzył się Pawełek. – Każdy widzi, że diagram trywialny jest inny niż diagram trójlistnika, który narysowałeś, ale ja i dla węzła trywialnego znajdę zawiły diagram, jak ten na rysunku 3. Może wtedy będę miał dziewięć 3-kolorowań?



Rys. 3. Nietrywialny diagram trywialnego węzła.

– Na pewno każdy diagram ustalonego węzła da ten sam wynik – zastanawiał się Tomek. – Ale jak to wykazać?

– Główną trudnością – odpowiedziałem – jest przetłumaczenie deformacji węzła w przestrzeni na język diagramów. Zrobił to już dla nas ponad 70 lat temu niemiecki matematyk Kurt Reidemeister. Pokazał on, że ruch w przestrzeni można rozbić na małe kroki i łatwo przetłumaczyć te kroki na małe zmiany diagramu. Są trzy takie elementarne deformacje, które nazywamy ruchami Reidemeistera; pokazane są one poniżej (na rysunku pomijamy część diagramu, która się nie zmienia).



Rys. 4

– Rozumiem – ucieszył się Tomek. – Jeśli dwa diagramy reprezentują ten sam węzeł, to można od jednego do drugiego przejść ruchami Reidemeistera.

– Ciekawe, co robią te ruchy z 3-kolorowaniami – dodał Pawełek. Dzieci zabrały się do sprawdzania tego, że ruchy Reidemeistera nie zmieniają liczby 3-kolorowań diagramu.

Życzę i Wam, Czytelnicy, miłej zabawy.

O pewnym zadaniu Sierpińskiego

Witold BEDNAREK

W książeczce Wacława Sierpińskiego „250 zadań z elementarnej teorii liczb” (Warszawa 1987, WSiP) znajduje się następujące zadanie (nr 125, str. 18):

„Dowieść, że wszystkie liczby

$$2^{2^{2n+1}} + 3, \quad 2^{2^{4n+1}} + 7, \quad 2^{2^{6n+2}} + 13, \quad 2^{2^{10n+1}} + 19, \quad 2^{2^{6n+2}} + 21$$

są złożone dla $n = 1, 2, \dots$ ”

W podanym rozwiązaniu pokazane jest, że każda z rozważanych liczb, niezależnie od n , jest podzielna przez dobraną liczbę pierwszą, odpowiednio: 7, 11, 29, 23, 37. Zauważmy, że są to wartości podanych wyrażeń dla $n = 0$.

W niniejszym artykule wykażemy następujące

Twierdzenie. Jeżeli M jest liczbą całkowitą różną od 0 i 1, to istnieje liczba pierwsza $p > 2$ i liczby naturalne d i e takie, że

$$p | 2^{2^{dn+e}} + M \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Najpierw udowodnimy

Lemat. Niech s będzie nieparzystą liczbą naturalną, a d – liczbą naturalną, dla której $s | 2^d - 1$ (liczba taka zawsze istnieje). Ponadto niech $p = s \cdot 2^l + 1$ będzie liczbą pierwszą, e, l – liczbami naturalnymi $e \geq l \geq 1$, M – liczbą całkowitą. Wówczas

$$p | 2^{2^{dn+e}} + M \iff p | 2^{2^e} + M.$$

Dowód lematu. Wystarczy udowodnić, że

$$p | 2^{2^{dn+e}} - 2^{2^e}.$$

W tym celu będziemy wielokrotnie wykorzystywać podzielność $a - 1 | a^n - 1$. Mamy $s | 2^d - 1 | 2^{dn} - 1$, a więc $2^{dn} - 1 = ks$. Ponadto

$$\begin{aligned} p | 2^{p-1} - 1 &= 2^{s \cdot 2^l} - 1 | 2^{ks \cdot 2^l \cdot 2^{e-l}} - 1 = 2^{ks \cdot 2^e} - 1 | 2^{2^e} (2^{ks \cdot 2^e} - 1) = \\ &= 2^{2^e (ks+1)} - 2^{2^e} = 2^{2^{dn+e}} - 2^{2^e} \end{aligned}$$

(pierwsza podzielność wynika z małego twierdzenia Fermata).

Dowód twierdzenia. Niech M będzie liczbą całkowitą różną od 0 i 1. W świetle naszych rozważań, wystarczy wykazać, że istnieje taka liczba naturalna e , że dla pewnej liczby pierwszej $p = s \cdot 2^l + 1$, gdzie s jest nieparzyste i $l \leq e$, mamy $p | 2^{2^e} + M$. Oznaczmy $M = w \cdot 2^K$, gdzie w jest nieparzyste i K – całkowite nieujemne. Można tak dobrać $e_1, e_2 \in \mathbb{N}$, aby $2^{e_2} > K$ i $2^{2^{e_1}} + M > 2^K$. Niech $e_0 = \max(e_1, e_2)$. Wówczas dla każdego $e \geq e_0$ mamy

$$2^{2^e} + M = 2^{2^e} + w \cdot 2^K = 2^K (2^{2^e-K} + w)$$

i czynnik w nawiasie jest liczbą większą od 1. Zatem dla każdego $e \geq e_0$ liczba $2^{2^e} + M$ ma dzielnik pierwszy nieparzysty.

Zalóżmy teraz wbrew temu, co mamy udowodnić, że dla każdego $e \geq e_0$ każda liczba pierwsza nieparzysta dzieląca $2^{2^e} + M$ jest postaci $t \cdot 2^{l_e} + 1$, gdzie $t, l_e \in \mathbb{N}$ i $l_e \geq e + 1$. Ponieważ iloczyn liczb postaci $t \cdot 2^{l_e} + 1$ jest liczbą tej postaci, więc

$$2^{2^e} + M = 2^K (t \cdot 2^{l_e} + 1)$$

i analogicznie

$$2^{2^{e+1}} + M = 2^K (u \cdot 2^{l_{e+1}} + 1),$$

gdzie $u \in \mathbb{N}$ i $l_{e+1} \geq e + 2$.

Mamy

$$2^K (u \cdot 2^{l_{e+1}} + 1) = 2^{2^{e+1}} + M = (2^K (t \cdot 2^{l_e} + 1) - M)^2 + M.$$

W przypadku $M = 0$ liczby

$$2^{2^m} + M = 2^{2^m}$$

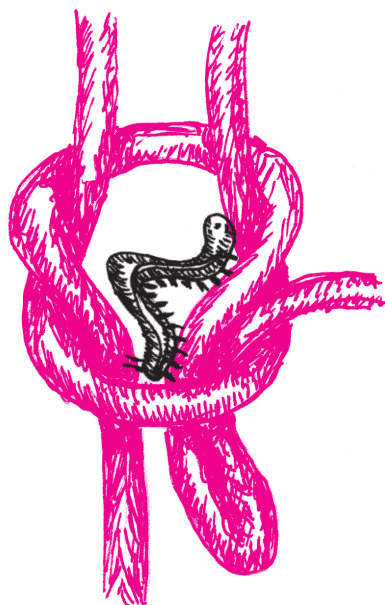
mają tylko dzielnik pierwszy $p = 2$.

Natomiast w przypadku $M = 1$ mamy liczby postaci

$$2^{2^m} + 1,$$

o których wiadomo, że są parami względnie pierwsze.





Ponieważ $l_e, l_{e+1} \geq e + 1$, więc wynika stąd, że

$$2^{K+e+1} | (2^K - M)^2 + M - 2^K \text{ dla każdego } e \geq e_0.$$

Jest to możliwe wtedy gdy $(2^K - M)^2 + M - 2^K = 0$, czyli $(M - 2^K)(M - 2^K + 1) = 0$. Jest więc $M = 2^K$ lub $w \cdot 2^K = M = 2^K - 1$. Z ostatniej równości wynika, że $2^K | 1$, skąd $K = 0$, $w = 0$, co przeczy nieparzystości w . Zbadamy teraz przypadek $M = 2^K$. Niech $K = r \cdot 2^f$, gdzie r jest liczbą nieparzystą naturalną, f – liczbą całkowitą nieujemną i niech liczba pierwsza $p = s \cdot 2^l + 1$ (s, l – naturalne, s – nieparzyste) będzie dzielnikiem liczby $2^{2^f} + 1$. Oczywiście $2^l + 1 \leq s \cdot 2^l + 1 \leq 2^{2^f} + 1$, skąd $l \leq 2^f$.

Wobec tożsamości

$$2^{2^m} - 1 = (2^{2^0} - 1)(2^{2^0} + 1)(2^{2^1} + 1) \dots (2^{2^{m-1}} + 1)$$

mamy $2^{2^f} + 1 | 2^{2^m} - 1$ dla $m \geq f + 1$, a także $2^{2^f} + 1 | 2^{2^f \cdot r} + 1$ (bo r jest nieparzyste).

Zatem dla dowolnego $m \geq f + 1$ mamy

$$2^{2^f} + 1 | (2^{2^m} - 1) + (2^{2^f \cdot r} + 1) = 2^{2^m} + 2^K.$$

Ponieważ $p | 2^{2^f} + 1$, więc $p | 2^{2^m} + 2^K$ dla $m \geq f + 1$.

Położmy $m = 2^f$. (Możemy to zrobić, gdyż $2^f \geq f + 1$ dla każdego $f \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, co można wykazać indukcyjnie.) Wobec tego spełniona jest podzielność

$$p | 2^{2^e} + M,$$

gdzie $e = 2^f$, $M = 2^K$ oraz spełniony jest warunek $l \leq 2^f = e$. Tym samym twierdzenie jest udowodnione.

Wniosek. Jeżeli $M \neq 1$ jest liczbą całkowitą, to wśród liczb postaci $2^{2^m} + M$ ($m = 1, 2, \dots$) jest nieskończenie wiele liczb złożonych. (Twierdzenie to wykazał A. Schinzel – zadanie nr 123, str. 18 i 68, ze wspomnianej książeczki Sierpińskiego.) Udowodnione w niniejszej pracy twierdzenie pokazuje, że gdy m przebiega pewien ciąg arytmetyczny, liczby $2^{2^m} + M$ są złożone.

Uwaga. Dla $M = 1$ mamy liczby Fermata $F_m = 2^{2^m} + 1$. Liczby F_1, F_2, F_3, F_4 są pierwsze. Wiadomo również, że liczby F_5, F_6, \dots, F_{30} są złożone (i niektóre inne).

Nie wiadomo:

Czy wśród liczb Fermata jest nieskończenie wiele liczb złożonych?

Czy wśród liczb Fermata jest nieskończenie wiele liczb pierwszych?



Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 985. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba podzielna przez 5^n i niezawierająca 0 w swoim zapisie dziesiętnym.

Rozwiązanie na str. 5

M 986. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb postaci 5^n ($n \in \mathbb{N}$), w których zapisie dziesiętnym występuje 2001 zer z rzędu.

Rozwiązanie na str. 5

M 987. Udowodnić, że dla dowolnej liczby $m \in \mathbb{N}$ istnieje nieskończenie wiele liczb postaci 5^n ($n \in \mathbb{N}$), w których zapisie dziesiętnym każda z ostatnich m cyfr ma parzystość różną od parzystości cyfr sąsiednich.

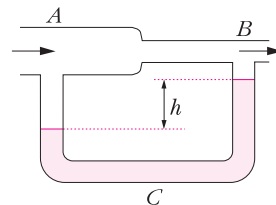
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 569. Na stole stoi duży cylinder wypełniony wodą do wysokości H . W odległości $H/2$ od cylindra znajduje się pojemnik o szerokości $H/4$ i wysokości $H/4$. Na jakiej wysokości h od dna cylindra należy zrobić mały otworek, tak aby struga wody trafiła do pojemnika? Wysokość wody w cylindrze pozostaje stała.

Rozwiązanie na str. 1

F 570. Przez rurę na poniższym rysunku pompowane jest powietrze z szybkością 15 litrów na minutę. Przekrój szerszej części rury A wynosi 2 cm^2 , węższej jest B $0,5 \text{ cm}^2$. Znaleźć różnicę poziomów wody w rurze C , jeśli jej przekrój wynosi $0,5 \text{ cm}^2$. Gęstość powietrza wynosi $\rho = 1,32 \text{ kg/m}^3$.

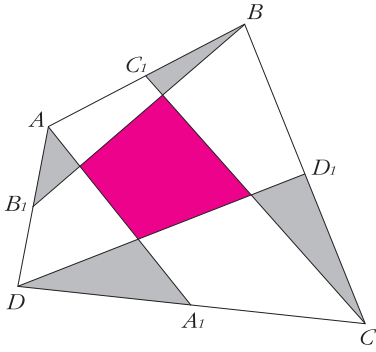


Rozwiązanie na str. 7

Kto rozwiąże lepiej?

Łukasz WIECHECKI

Tradycyjnie już spotkaliśmy się w ramach V Festiwalu Nauki na turnieju rozwiązywania zadań. Jak zwykle nie zabrakło ani herbatki, ani pączków, a wszystkie zadania znalazły swego pogromcę. Jakże one były, przedstawiamy obok.



Rys. 1

Zad. 1. W czworokącie wypukłym połączono wierzchołki z odpowiednimi środkami jak na rysunku 1. Udowodnić, że pole kolorowego czworokąta jest równe sumie pól szarych trójkątów.

Wszystkie są to trójkąty o tej samej podstawie i wysokości, więc ich pola są równe. Pole czworokąta jest równe sumie pól tych trójkątów i pól czworokąta. Zatem pole czworokąta jest równe sumie pól tych trójkątów i pól czworokąta. Zatem pole czworokąta jest równe sumie pól tych trójkątów i pól czworokąta.

Zad. 2. Weźmy prostokątny pasek papieru, który można nakryć kołem o promieniu 1. Zegnijmy w pewnym miejscu pasek (rys. 2). Czy teraz też można nakryć pasek kołem o promieniu 1?

Wszystkie są to trójkąty o tej samej podstawie i wysokości, więc ich pola są równe. Pole czworokąta jest równe sumie pól tych trójkątów i pól czworokąta. Zatem pole czworokąta jest równe sumie pól tych trójkątów i pól czworokąta.

Zad. 3. Znaleźć maksymalną liczbę rosnących trójwyrazowych ciągów arytmetycznych, które mogą być wybrane z ciągu liczb $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Wszystkie są to trójkąty o tej samej podstawie i wysokości, więc ich pola są równe. Pole czworokąta jest równe sumie pól tych trójkątów i pól czworokąta. Zatem pole czworokąta jest równe sumie pól tych trójkątów i pól czworokąta.

Zad. 4. Na okręgu rozmieszczono w pewnym porządku 15 białych i 15 czarnych pionków. W jednym posunięciu można zamienić miejscami dowolne dwa pionki. Jaka jest minimalna liczba przesunięć, która z dowolnego początkowego rozmieszczenia pozwala przejść do rozmieszczenia, w którym dowolne dwa sąsiednie pionki są różnego koloru?

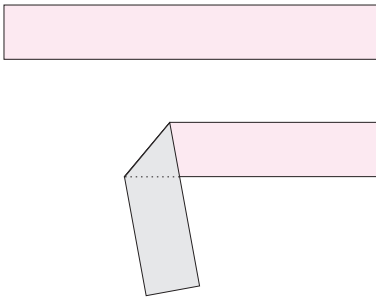
Wszystkie są to trójkąty o tej samej podstawie i wysokości, więc ich pola są równe. Pole czworokąta jest równe sumie pól tych trójkątów i pól czworokąta. Zatem pole czworokąta jest równe sumie pól tych trójkątów i pól czworokąta.

Zad. 5. W turnieju uczestniczy $2m$ drużyn. W pierwszej turze grało pewnych m par drużyn, w drugiej zaś m innych par. Udowodnić, że po dwóch turach można wybrać m drużyn, z których żadne dwie nie grały ze sobą.

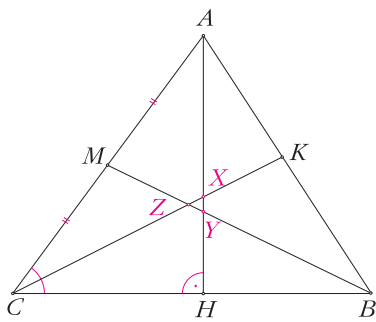
Wszystkie są to trójkąty o tej samej podstawie i wysokości, więc ich pola są równe. Pole czworokąta jest równe sumie pól tych trójkątów i pól czworokąta. Zatem pole czworokąta jest równe sumie pól tych trójkątów i pól czworokąta.

Zad. 6. W trójkącie ostrokątnym poprowadzono z różnych wierzchołków środkową, dwusieczną kąta i wysokość. Czy możliwe jest, aby punkty ich przecięcia tworzyły trójkąt równoboczny?

Wszystkie są to trójkąty o tej samej podstawie i wysokości, więc ich pola są równe. Pole czworokąta jest równe sumie pól tych trójkątów i pól czworokąta. Zatem pole czworokąta jest równe sumie pól tych trójkątów i pól czworokąta.



Rys. 2



Rys. 3

Entropia Wieży Babel

Już w czasach biblijnych różnorodność języków utrudniała kontakty handlowe i była traktowana jako dopust Boży (Rdz 11,1–9). Współczesnym odpowiednikiem biblijnego przedsięwzięcia jest powstająca na naszych oczach globalna wioska (ciekawe, czy wynik będzie lepszy niż w Księdze Rodzaju). Choć po raz kolejny wykształcono *lingua franca*, to nie rozwiązuje to wszystkich problemów językowych (tym bardziej że, jak zwykle, wybór nie był specjalnie szczęśliwy). Dodatkowo, im dostęp do „informacji wszelakiej” staje się powszechniejszy, tym trudniej odnaleźć tę poszukiwaną.

Bardzo pomocna mogłaby się okazać możliwość automatycznego stwierdzania nie tylko, w jakim języku dana informacja została zapisana, ale również czego dotyczy, czy jej autorem jest ktoś powszechnie znany itd. O takim narzędziu marzą nie tylko internauci, ale również np. antyterrorysty. Wydawałoby się, że trudno o taką metodę, zwłaszcza jeżeli miałyby być uniwersalna. Pogląd taki opiera się jednak na założeniu, że do selekcji informacji potrzebne jest jej rozumienie. Czy tak jest w rzeczywistości? Stosunkowo mało ludzi zna więcej niż kilka języków. Jednak większość z nas potrafi rozpoznać ich całkiem sporo. Bez trudu również dostrzegamy „obcy akcent” u osoby mówiącej językiem, który dobrze znamy. Umiejętności te opierają się na rozpoznawaniu dźwięków, melodii lub słów charakterystycznych dla danego języka. Wiemy, że ktoś mówi po włosku, francusku czy niemiecku, niekoniecznie wiedząc, co mówi. Nadal jednak nie widać sposobu na prostą algorytmizację takiej umiejętności. Specjaliści potrafią ocenić prawdziwość przypisania danego tekstu danemu, znanemu autorowi, ale wymaga to lat studiów i dobrego wyczucia.

A jednak taka prosta i uniwersalna metoda była od lat w zasięgu ręki. Wystarczyło sięgnąć po standardowy program kompresji danych. Dlaczego jednak artykuł [1] z doniesieniem na ten temat ukazał się w *Physical Review Letters*? Powód jest bardzo prosty. Autorzy użyli powszechnie znanego (przynajmniej tym, którzy używają unixa) gzipa do pomiaru względnej entropii urywków tekstu. W zasadzie nie odkryli niczego nowego. No, może poza jednym. Chyba nikt przed nimi nie przypuszczał, że akademicką wiedzę z tej dziedziny można tak łatwo i tak efektywnie zastosować.

Wiadomo powszechnie, że każde odkrycie staje się banalne, jak się już go dokona. Wystarczyło sięgnąć do źródłosłowiu nazwy biblijnej wieży, wywodzącej się od określenia „pomieszanie”, żeby problem rozpoznawania języków skojarzyć z entropią, czyli miarą nieuporządkowania. Entropię informacji zakodowanej w postaci ciągu znaków można zdefiniować (Chaitin–Kolmogorow) jako minimalną wielkość programu (czyli innego ciągu znaków), który pozwala na odtworzenie pierwotnej informacji. Oczywiście, jak każda zwięzła definicja, jest ona niepraktyczna, gdyż nie sposób podać przepisu na najlepsze kodowanie. Jednak wiele z funkcjonujących na rynku programów kompresujących zbliża się do ideału tym lepiej, im ciąg znaków podlegających kodowaniu jest dłuższy.

Autorzy pracy użyli gzipa, który wykorzystuje algorytm LZ77 autorstwa Lempela i Ziva. Program ten szuka powtarzających się sekwencji znaków, zapisując dla nich (oprócz nich samych) odległości między poszczególnymi wystąpieniami. Dzięki temu często występujące sekwencje potrzebują mało miejsca do zakodowania ich pozycji, bo odległości między tymi pozycjami są małe.

W jaki sposób można wykorzystać tak działający program kompresujący do rozpoznawania tekstu? Wystarczy jego próbkę dołączyć na końcu tekstu referencyjnego. Jeżeli teksty są podobne, to program kompresujący „nie musi” uczyć się niczego nowego i zakodowana całość zajmuje mało miejsca – entropia nie rośnie znacząco. W przeciwnym przypadku program zaczyna pracę jakby od nowa i kompresja nie jest tak efektywna.

Autorzy pracy [1] przeprowadzili dwie analizy. W pierwszej starali się rozpoznać klasyków literatury włoskiej. Wybrali 90 tekstów 11 autorów i sprawdzali każdy z każdym, szukając najmniejszego przyrostu długości skompresowanego tekstu. Za sukces uznawali przypadek, w którym najbliższym tekstem okazywał się tekst tego samego autora. Udało się to w 84 przypadkach. Dodatkowo tylko raz zdarzyło się, że tekst tego samego autora nie znalazł się na co najmniej drugiej pozycji.

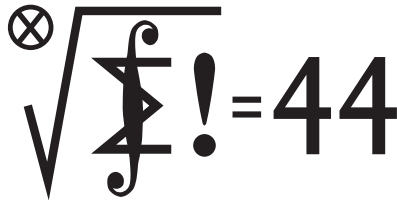
W drugiej analizie wzięli pod uwagę tekst „Powszechnej deklaracji praw człowieka” w pięćdziesięciu wersjach językowych (ograniczyli się do języków zapisywanych alfabetem łacińskim). Za pomocą (kosmetycznie) zmodyfikowanej metody z poprzedniej analizy wyznaczyli macierz odległości między językami, a następnie używając algorytmów wywodzących się z filogenetyki, zbudowali drzewo pokrewieństwa. Jako poszczególne konary tego drzewa otrzymali zasadniczo wszystkie podstawowe grupy językowe (wybranej pięćdziesiątki języków): romańską, celtycką, germańską, ugro-fińską, słowiańską, bałtyjską i altajską; a jako osobne gałęzie języki baskijski, maltański, ale również węgierski (który w tym ujęciu okazał się bliżej spokrewniony z tureckim niż fińskim i estońskim), angielski (najbliższy językom romańskim), bretoński (najbliższy germańskim) oraz języki albański i rumuński. Jak widać, choć metoda ta daje wyniki nie zawsze w pełni zgodne z filologią, to jak na procedurę całkowicie automatyczną sprawia się znakomicie.

Autorzy sugerują, że ich algorytm jest bardzo ogólny i może być zastosowany do dowolnych serii znaków, takich jak sekwencje genetyczne, szeregi czasowe, dane medyczne itp. Podkreślają, że żadna uprzednia wiedza o naturze analizowanych danych nie jest potrzebna.

A jakby tak obliczyć średnią entropię naszych wieszczów? Już dobrze ponad wiek trwa spór o to, „kto większym poetą był?” Jeszcze tylko należy się zdecydować, czy bardziej wartościowy jest utwór o jak najmniejszej, czy o jak największej entropii, ale potem będzie już ściśle i naukowo...

Piotr ZALEWSKI

[1] *Language Trees and Zipping*; D. Benedetto, E. Caglioti i V. Lereto *Phys. Rev. Lett.* **88**(2002)48702



Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 2002

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań **425** (WT = 3,01) i **426** (WT = 1,21)
z numeru 9/2001

Tomasz Wietecha	– Tarnów	44,68
Witold Bednarek	– Łódź	42,67
Michał Adamaszek	– Kęty	41,85
Jerzy Cisło	– Wrocław	39,87

Tomasz Wietecha już piąty raz przekracza próg czterdziestu czterech punktów!

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań **324** (WT = 1,72), **325** (WT = 2,62),
z numeru 10/2001

Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	41,54
Aleksander Surma	– Myszków	38,98
Jacek Piotrowski	– Rzeszów	38,90
Tomasz Wietecha	– Tarnów	31,74
Marek Wójcicki	– Szczecin	28,59

431. Niech m będzie największą liczbą, dla której istnieje student A mający m przyjaciół B_1, \dots, B_m w jednej z dwóch grup (poza jego własną, którą nazwiemy grupą pierwszą); grupę, do której należą B_1, \dots, B_m , nazwijmy grupą drugą. Student A jest zaprzyjaźniony z co najmniej jednym studentem C w grupie trzeciej (jeśli jest ich więcej, wybieramy jednego dowolnie).

Przyjmijmy, że student C jest zaprzyjaźniony z k studentami z grupy pierwszej oraz l studentami z grupy drugiej. W myśl warunku zadania, $k + l \geq n + 1$; a z maksymalności m wynika, że $k \leq m$. Wobec tego $l \geq n - m + 1$. Zatem w l -osobowym gronie przyjaciół studenta C w grupie drugiej znajduje się co najmniej jeden spośród studentów B_1, \dots, B_m . Wraz ze studentami A i C tworzy on trójkę, której istnienie mieliśmy wykazać.

432. Należy udowodnić, że funkcja

$$f(x) = \sin x - \arctg x$$

przyjmuje w przedziale $(0; \frac{\pi}{3})$ wartości dodatnie.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002.

Zadania z matematyki nr 439, 440

Redaguje Marcin E. KUCZMA

439. Rozważamy graf skierowany o skończonym zbiorze wierzchołków V . Każde dwa różne punkty (wierzchołki) $v_1, v_2 \in V$ łączy co najwyżej jedna z dwóch zorientowanych krawędzi: $v_1 \rightarrow v_2$ lub $v_2 \rightarrow v_1$. Punkt w jest *osiągalny* z punktu v , jeśli startując z v można dotrzeć do w , idąc wzdłuż krawędzi grafu zgodnie z ich orientacją. Zbiór $Z \subset V$ jest *docelowy*, gdy spełnia warunki:
(i) z każdego punktu $v \in V$ jest osiągalny pewien punkt $z \in Z$;
(ii) z żadnego punktu $z \in Z$ nie jest osiągalny żaden inny punkt $z' \in Z$.
Udowodnić, że wszystkie zbiory docelowe są równoliczne.

440. Wyznaczyć największą wartość, jaką może mieć suma pól dwóch kół bez wspólnych punktów wewnętrznych, umieszczonych w kwadracie o boku długości 1.

Zadanie 440 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/2001

Przypominamy treść zadań:

431. Każda z trzech grup studenckich liczy n osób. Każdy student jest zaprzyjaźniony z co najmniej $n + 1$ osobami z dwóch grup poza tą, do której sam należy (przyjmujemy, że relacja zaprzyjaźnienia jest symetryczna). Wykazać, że istnieje co najmniej jedna trójka przyjaciół złożona ze studentów z trzech różnych grup.

432. Udowodnić, że dla $x \in (0; \pi/3)$ zachodzi nierówność $\operatorname{tg}(\sin x) > x$.

Ponieważ $f(0) = 0$, wystarczy dowieść, że jej pochodna

$$f'(x) = \cos x - \frac{1}{1+x^2}$$

jest w tym przedziale dodatnia.

Korzystamy z nierówności $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$:

$$f'(x) > 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2 - x^4}{2(1+x^2)} \geq 0$$

dla $x \in (0; 1)$; w szczególności $f'(1) > 0$.

W przedziale $\langle 1; \frac{\pi}{3} \rangle$ funkcja $\frac{1}{1+x^2}$ jest wypukła, więc f' jest funkcją wklęsłą, zatem przyjmuje swą najmniejszą wartość w jednym z końców tego przedziału. Skoro zaś $f'(1) > 0$ oraz

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \left(1 + \left(\frac{\pi}{3}\right)^2\right)^{-1} > 0,$$

to

$$f'(x) > 0 \quad \text{dla } x \in \langle 1; \frac{\pi}{3} \rangle$$

i dowód jest zakończony.



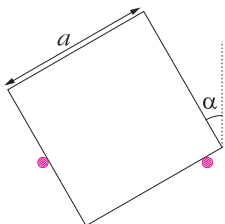
Zadania z fizyki nr 336, 337

Redaguje Jerzy B. BROJAN

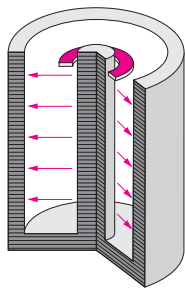
336. Sześcian o boku a leży na dwóch równoległych i znajdujących się na tej samej wysokości poziomych prętach odległych wzajemnie także o a . W jakim zakresie kątów α (zob. rys. 1) sześcian może być w równowadze, jeśli współczynnik tarcia między prętami a sześcianem jest równy $\mu = 0,2$?

337. Magnes wytwarza w przestrzeni między wewnętrznym walcem (biegunem N) a zewnętrzną powłoką walcową (biegunem S) radialne pole magnetyczne (rys. 2), którego indukcja w odległości a od osi walca wynosi B_a ; wartość ta jest niezależna od współrzędnej pionowej. Linie pola zamykają się od dołu (tzn. w zewnętrznej powłoce) biegają w dół, a dalej do wewnątrz i wzdłuż wewnętrznego walca do góry). Jeśli w przestrzeni między biegunami spada swobodnie pierścień o wewnętrznym promieniu a i zewnętrznym b oraz grubości d , wykonany z niemagnetycznego metalu o gęstości ρ i przewodnictwie właściwym σ , to jaką prędkość osiągnie po długim czasie? Wariant nieco łatwiejszy: rozważyć cienki pierścień, tzn. b niewiele większe od a .

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 2002



Rys. 1



Rys. 2

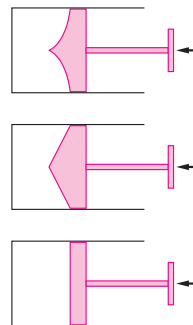
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/2001

Przypominamy treść zadań:

328. Trzy strzykawkki (pompki) mają jednakową średnicę cylindra, ale różnią się kształtem tłoka (patrz rysunek obok). Jeśli na wszystkie tłoki działamy jednakowymi siłami, to w której strzykawkce ciśnienie jest najwyższe, a w której – najniższe (czy też ciśnienie jest jednakowe)?

329. Układ optyczny (niekoniecznie pojedyncza soczewka) wytworzył w odległości 70 cm od przedmiotu rzeczywisty obraz odwrócony, powiększony 3 razy. Gdy umieszczono przedmiot o 2 cm bliżej układu, obraz oddalił się od układu o 30 cm. Podać możliwą budowę układu (przykładowe wartości parametrów soczewek i ich położenia). Ile wynosiło powiększenie obrazu przesuniętego?

Poza konkursem: Czy istniałoby rozwiązanie, jeśli początkowa odległość obrazu od przedmiotu wynosiłaby 1 m (zamiast 70 cm), a pozostałe dane byłyby niezmiennione?



328. Załóżmy, że we wszystkich strzykawkach przesunęliśmy tłok o ten sam odcinek Δx – zatem wykonaliśmy tę samą pracę $W = F\Delta x$. Dostarczona w ten sposób energia może zostać przekształcona np. w energię kinetyczną wytryskującej cieczy (lub gazu) albo odebrana przez naczynie połączone z wylotem strzykawkki, w którym ciśnienie jest równe ciśnieniu w strzykawkce. Ponieważ objętość wyrzuconej cieczy $\Delta V = S\Delta x$ (gdzie S – powierzchnia przekroju cylindra) jest jednakowa, więc z zasady zachowania energii wnioskujemy, że ciśnienie we wszystkich strzykawkach także ma jednakową wartość.

329. Nietrudno sprawdzić, że dla pojedynczej, cienkiej soczewki otrzymamy sprzeczny układ równań. W następnej próbie weźmy pod uwagę dwie identyczne cienkie soczewki o ogniskowej f odległe wzajemnie o d , przy czym pierwsza z nich jest odległa od przedmiotu o x . Stosując równanie $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$ do pierwszej soczewki, wyznaczamy położenie obrazu $y_1 = fx/(x - f)$ i jego powiększenie $p_1 = y_1/x = f/(x - f)$. Do równania drugiej soczewki podstawimy $x_2 = d - y_1$ i wyznaczamy położenie obrazu (jego odległość od drugiej soczewki oznaczmy po prostu y zamiast y_2) oraz powiększenie:

$$y = \frac{f(df - dx + fx)}{df - f^2 + 2fx - dx}, \quad p_2 = \frac{y}{x_2},$$

$$p = -p_1 p_2 = \frac{f^2}{df - f^2 + 2fx - dx}.$$

Minus we wzorze na powiększenie wynika stąd, że dodatnie powiększenie przypisaliśmy obrazowi odwróconemu, a taki obraz powstanie, gdy jedna z soczewek da obraz odwrócony, a druga – prosty. Dalsze przekształcenia bardzo się uproszczają, jeśli odpowiednio dobierając parametry A i F , zapiszemy związek między x a y w postaci

$$(*) \quad \frac{1}{x + A} + \frac{1}{y + A} = \frac{1}{F}.$$

Znajdujemy

$$A = \frac{fd}{2f - d}, \quad F = \frac{f^2}{2f - d},$$

a powiększenie okazuje się równe $p = (y + A)/(x + A)$. Po podstawieniu $p = 3$ wyznaczamy $x + A = (4/3)F$, $y + A = 4F$. Następnie z równania

$$\frac{1}{x + A - 2 \text{ cm}} + \frac{1}{y + A + 30 \text{ cm}} = \frac{1}{F}$$

obliczamy $F = 15 \text{ cm}$, $x + A = 20 \text{ cm}$, $y + A = 60 \text{ cm}$. Szukane powiększenie obrazu przesuniętego wynosi $p' = (y + A + 30 \text{ cm})/(x + A - 2 \text{ cm}) = 5$. Jeśli chcemy ustalić wartości pozostałych parametrów, A , f i d , to skorzystajmy z danej odległości początkowej między przedmiotem a obrazem: $x + y + d = 70 \text{ cm}$. Proste przekształcenia prowadzą do wyników $A = \sqrt{1,5} \cdot 10 \text{ cm} \approx 12,25 \text{ cm}$, $d = (2\sqrt{1,5} - 1) \cdot 10 \text{ cm} \approx 14,49 \text{ cm}$, $f = (3 - \sqrt{1,5}) \cdot 10 \text{ cm} \approx 17,75 \text{ cm}$.

Dodajmy, że równanie $(*)$ ma ważną interpretację geometryczną: $x + A$ i $y + A$ są odległościami przedmiotu i obrazu od płaszczyzn głównych układu optycznego (zob. np. hasło *kardynalne punkty układu optycznego* w *Encyklopedii Fizyki*, PWN 1972), a F jest ogniskową układu. Równanie to jest słuszne dla dowolnego układu soczewek; z tego względu wyprowadzone z niego wnioski (wartości F i p') pozostaną w mocy w najogólniejszym przypadku – także wtedy, gdy początkowa odległość między przedmiotem a obrazem będzie równa 1 m. Przy tej wartości jednak układ dwóch jednakowych soczewek skupiających przestaje spełniać warunki zadania (otrzymalibyśmy $d^2 < 0$) i należy poszukać innego.



Rozwiązanie zadania M 987.

Też zadania udowodnimy przez indukcję ze względu na m . Dla $m = 1$ jest ona prawdziwa, ponieważ dla każdego $n > 1$ ostatnie dwie cyfry liczby 5^n to 25. Załóżmy, że teza zadania jest prawdziwa dla pewnego $m \geq 1$, tzn. istnieje nieskończenie wiele liczb postaci 5^n kończących się $m + 1$ cyframi o zmieniającej się na przemian parzystości. Niech 5^n będzie jedną z takich liczb, przy czym $5^n > 10^{m+2}$. Skonstruujemy teraz na jej bazie liczbę 5^k kończącą się $m + 2$ cyframi o zmieniającej się na przemian parzystości. Jeśli cyfry liczby 5^n stojące na miejscach $m + 2$ i $m + 1$ (licząc od prawej) mają różną parzystości, to przyjmujemy $k = n$. W przeciwnym przypadku przyjmujemy $k = n + 2^{m-1}$. Wtedy

$$5^k - 5^n = 5^n (5^{2^{m-1}} - 1).$$

Za pomocą prostej indukcji można dowieść, że dla każdego $m \in \mathbb{N}$ liczba $5^{2^{m-1}} - 1$ jest podzielna przez 2^{m+1} , ale nie przez 2^{m+2} . Tak więc $5^{2^{m-1}} - 1 = 2^{m+2} \cdot s + 2^{m+1}$ dla pewnego $s \in \mathbb{N}$. Stąd

$$5^k - 5^n = 5^n (2^{m+2} \cdot s + 2^{m+1}) = 5^{n-m-2} (10^{m+2} \cdot s + 5 \cdot 10^{m+1}),$$

a więc liczby 5^k i 5^n mają identyczne ostatnich $m + 1$ cyfr, a cyfry stojące na $(m + 2)$ miejscu są różnej parzystości. Liczba 5^k spełnia więc pokładane w niej nadzieje (tzn. ma ostatnich $m + 2$ cyfr o zmieniającej się na przemian parzystości), przy czym $5^k \geq 5^n$. Tak więc teza zadania jest spełniona również dla $m + 1$.

Stan równowagi w wielkim zbiorowisku punktów materialnych polega na tym, że w każdej chwili tyle samo cząstek leci w prawo co w lewo, tyle samo w górę co w dół itd. Jeżeli cząstkami są atomy, to w jednostce czasu tyle samo atomów wyświeca jakiś foton co pochłania, tyle samo atomów ulega jonizacji co rekombinacji itd. Krótko mówiąc, w stanie równowagi wszystkie procesy mikroskopowe są dokładnie (statystycznie) zrównoważone. Nie koniec na tym, bo towarzyszą temu jeszcze inne zjawiska, m.in. tzw. ekwipartycja energii. To z kolei oznacza – jak nazwa wskazuje – że wszystkie cząstki mają (średnio) identyczną energię kinetyczną. Prawo to dotyczy także gromad gwiazd. Skoro tak, to gwiazdy o mniejszych masach muszą uzyskać większe prędkości i rychło znaleźć się na peryferiach swojej gromady. I rzeczywiście, z reguły taką sytuację się obserwuje: otoczki gromad kulistych składają się z gwiazd o niewielkich masach. Stwierdzenie tego nie jest zresztą łatwe, bo masy gwiazd w gromadzie wyznacza się mozolnie na podstawie ich cech fotometrycznych.

Okazuje się, że są wyjątki od tego prawa. Kilka lat temu za pomocą pierwszego z czterech 8-metrowych teleskopów zbudowanych w Chile stwierdzono, że gromada kulista NGC 6712 (położona w Tarczy w odległości ponad 7 kpc) wykazuje znaczny niedobór gwiazd o małych masach. Wytłumaczenie tego faktu jest właściwie jedno: gwiazdy stanowiące otoczkę gromady zostały od niej oderwane w wyniku pływowego działania centralnego zgęszczenia Galaktyki. Mechanizm zjawiska jest identyczny jak w przypadku pływów ziemskich oceanów wywoływanych przez Księżyc. Mianowicie gwiazdy należące do otoczki gromady po jej stronie zwróconej na centrum Galaktyki są przez to centrum przyciągane silniej niż reszta gromady, a gwiazdy po stronie odwrotnej – słabiej. Dostatecznie duża różnica tych oddziaływań może doprowadzić do oderwania się peryferyjnych gwiazd od gromady; w przypadku ziemskich pływów działanie Księżyca powoduje zaledwie kilkumetrowe wypiętrzanie się oceanów po stronie podksiężycowej i odksiężycowej Ziemi. Efekt pływowego działania dość silnie zależy od odległości od ciała powodującego pływy. Ziemi ze strony Księżyca nic nie grozi, bo odległość między tymi ciałami niewiele się zmienia, natomiast okołogalaktyczne orbity gromad kulistych są silnie wydłużone i dlatego skład gwiazdowy niektórych gromad może bardzo zmienić się nawet w wyniku jednokrotnego zbliżenia się do centrum Galaktyki.

Tomasz KWAST

Kwiecień

Wieczorem wysoko na niebie, a im później, to tym bardziej ku zachodowi, znajduje się niepozorny gwiazdozbiór Raka. Jest on tak dalece niepozorny, że nawet najjaśniejsze jego gwiazdy są słabsze od położonej w nim dość znanej gromady otwartej Praesepe (M 44, NGC 2632), która ma jasność 3,9 mag (jedynie beta jest jaśniejsza zaledwie o 0,1 mag). Leży ona w odległości 160 pc i zawiera ponad 300 gwiazd. Jej wiek oceniono – fakt, że z małą precyzją – na pół do półtora miliarda lat, co i tak oznacza, że w skali Wszechświata jest to obiekt młody. Tak się składa, że w Raku znajduje się jeszcze jedna gromada otwarta M 67 (NGC 2682) też dostrzegalna bez trudności (4 mag), położona w odległości 800 pc i licząca około 100 gwiazd. Ona, dla odmiany, jest jedną z najstarszych gromad tego typu, gdyż oceniono ją na 5 mld lat. Trochę to dziwne, bowiem gromady otwarte – jako obiekty dość luźno związane – szybko rozpraszają się w wyniku pływowego działania centrum Galaktyki.

Wenus jest w Baranie i widać ją krótko po zachodzie Słońca. Mars jest w Byku i też widać go dość krótko wieczorem. W Byku jest też Saturn, a w Bliźniętach Jowisz, który o północy już zachodzi. Nów Księżyca wypada 12 IV, a pełnia 27 IV. Księżyc zakryje Saturna 16 IV, ale zjawisko to widać będzie z Oceanu Arktycznego i tylko z północnej Europy. Żadnych jasnych gwiazd Księżyca w kwietniu nie zakrywa.

T.K.

O RÓWNYCH SUMACH DWÓCH BIKWADRATÓW

Istnieją liczby, które można przedstawić w postaci sumy dwóch bikwadratów (czyli czwartych potęg) na więcej niż jeden sposób. Oto „najmniejsze” rozwiązania (a, b, c, d) równania

$$(44) \quad a^4 + b^4 = c^4 + d^4 :$$

(158,59,134,133), (239,7,227,157), (292,193,257,256),
(502,271,497,298), (542,103,514,359), (631,222,558,503),

(1203,76,1176,653), (1381,878,1342,997),
(2189,1324,1997,1784), (2461,1042,2141,2026).

Oczywiście uwzględniamy tylko rozwiązania pierwotne, tzn. spełniające warunek $\text{NWD}(a, b, c, d) = 1$.

Równanie (44) ma nieskończenie wiele rozwiązań pierwotnych, można bowiem podać rozwiązanie parametryczne:

$$\begin{aligned} a &= x^6 y + 3 x^5 y^2 - 2 x^4 y^3 + x^2 y^5 + y^7, \\ b &= x^7 + x^5 y^2 - 2 x^3 y^4 - 3 x^2 y^5 + x y^6, \\ c &= x^6 y - 3 x^5 y^2 - 2 x^4 y^3 + x^2 y^5 + y^7, \\ d &= x^7 + x^5 y^2 - 2 x^3 y^4 + 3 x^2 y^5 + x y^6. \end{aligned}$$

Niestety, nie wiadomo, czy istnieją liczby reprezentowane w postaci sumy dwóch bikwadratów na więcej niż dwa sposoby. Na otarcie łez podajemy dwa przykłady trzech równych różnic bikwadratów:

$$\begin{aligned} 264047^4 - 1169^4 &= 265076^4 - 93436^4 = 335084^4 - 296668^4, \\ 401168^4 - 17228^4 &= 415137^4 - 248289^4 = \\ &= 421296^4 - 273588^4. \end{aligned}$$

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (29')

Wyjaśnienie oszustwa (29):

Usterka drobna: pamiętaj kolego, nie dziel przez zero. Takie dzielenie potencjalnie występuje w dowodzie nierówności Cauchy'ego, gdy $A = 0$ lub $B = 0$. Jeśli jednak $A = 0$, to $a_n = 0$ dla wszystkich n i nierówność przyjmuje postać $0 \leq 0$. Drobiazg, ale taka uwaga w porządnym dowodzie znaleźć się powinna. Identycznie w przypadku $B = 0$.

Podobnie w dowodzie nierówności Minkowskiego dzielimy przez $\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2}$, co może być zerem, ale wówczas dowodzona nierówność przyjmuje postać

$$0 \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2},$$

jest więc oczywiście prawdziwa.

Drobne niedomówienie.

Zapis $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ma zawsze sens, gdy $c_n \geq 0$. Jeśli szereg jest rozbieżny, to jest rozbieżny do nieskończoności, więc można z sensem napisać $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = +\infty$. Jednak szeregi, które mogą mieć także wyrazy ujemne, nie muszą być ani zbieżne, ani rozbieżne do $+\infty$ lub $-\infty$. Tak więc napis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ w nierówności Cauchy'ego wymaga pewnego wytłumaczenia. Można to uczynić na dwa sposoby.

Sposób I

Zakładamy w nierówności Cauchy'ego, że $a_n \geq 0$ i $b_n \geq 0$. Nierówność Minkowskiego dowodzimy najpierw dla $a_n \geq 0$ i $b_n \geq 0$, a następnie dla dowolnych a_n, b_n piszemy

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2} &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2}. \end{aligned}$$

Sposób II

Dowodzimy nierówność Cauchy'ego najpierw dla $a_n, b_n \geq 0$, a następnie stwierdzamy, że przy dowolnych a_n, b_n z nierówności

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2}$$

wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$, która pociąga zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Nie zaszkodziłoby też nadać sformułowaniu lematu następującej, precyzyjniejszej treści:

Dla dowolnych ciągów liczb rzeczywistych $(a_n), (b_n)$, dla których sumy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ są skończone, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny i zachodzi nierówność

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2}.$$

Usterka najpoważniejsza.

W dowodzie nierówności Minkowskiego wykonujemy dzielenie przez $\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2}$, nie wiedząc nawet, czy ta suma jest skończona!!! Widać dwa sposoby naprawienia tego błędu.

Sposób I

Początkowo wszystkie sumy zastępujemy sumami skończonymi $\sum_{n=1}^N$. Otrzymujemy wówczas

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{n=1}^N (a_n + b_n)^2} &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^N a_n^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^N b_n^2} \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2} \end{aligned}$$

dla dowolnego N , skąd po przejściu z N do nieskończoności

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2}.$$

Sposób II

Na początku dowodu nierówności Minkowskiego dowodzimy skończoności sumy $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$. Ponieważ nie zależy nam na dokładności oszacowań, szacujemy dość grubo, np. tak:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)^2 \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (2 \cdot \max(|a_n|, |b_n|))^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (2|a_n|)^2 + (2|b_n|)^2 = \\ &= 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) < +\infty. \end{aligned}$$

Korespondencję do Γ -limatiasu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCLAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl