



Nagrodę Dziekanów

Wydziału Fizyki i Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki
za najlepszy artykuł *Delta* w roku akademickim 2001/2

otrzymała

Magdalena Sroczyńska-Kożuchowska

za artykuł *Pluton – planeta czy planetoida?* (*Delta* 8/2002)

SPIS TREŚCI NUMERU 2 (345)

O groźbie zderzenia planetoidy 2002 NT7 z Ziemią <i>Grzegorz Sitarski</i>	str. 1
Elektryczne układy samopodobne	str. 4
Elektryczne sieci nieskończone	str. 5
O pewnej idei Fermata <i>Lev Kourliandtchik</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Aktualności	str.10
Zadania	str.10
Klub 44	str.11
Patrz w niebo	str.16
Luty	str.16
Gammalimatias	str.17

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula, Bogdan Cichoński – wiceprzewodniczący, Krzysztof Ciesielski, Jan A. Gaj, Piotr Goldstein, Andrzej Hryniewicz, Wiesław A. Kamiński, Marta Kicińska-Habior, Zbigniew Marciniak, Krzysztof Maślanka, Janusz Matkowski, Andrzej Mąkowski, Zdzisław Pogoda, Michał Różyczka, Konrad Rudnicki, Grzegorz Sitarski, Andrzej Woszczyk, Wiesław Żelazko – przewodniczący.

Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol, Krzysztof Biesaga, Ewa Czuchry, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Anna Ludwicka, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Joanna Udalska, Piotr Zalewski – z-ca red. nac. Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Rysunki techniczne: Marcin Adamski

Adres Redakcji: ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa, tel. 853-59-61, 55-33-216.

Skład systemem T_EX wykonała Redakcja, e-mail: BARTOL@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 2003 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2003 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP SA I O/W-wa, nr 30 10201013 12640143**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na II kwartał 2003 r. wynosi 12 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „RUCH” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną
do 5 XII – na I kwartał roku następnego,
do 5 III – na II kwartał roku bieżącego,
do 5 VI – na III kwartał roku bieżącego,
do 5 IX – na IV kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie; wybór artykułów archiwalnych: <http://www.wiw.pl>

Wybór artykułów w języku angielskim: <http://www.mimuw.edu.pl/delta/>

Internetowa wersja *Malej Delty*: <http://eduseek.ids.pl/delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze:
Pytanie za milion dolarów

O groźbie zderzenia planetoidy 2002 NT7 z Ziemią

Grzegorz SITARSKI

Od kilku lat dowiadujemy się co jakiś czas o możliwości rychłego końca świata spowodowanego zderzeniem planetoidy z Ziemią. Planetoida 1997 XF11 miała uderzyć w Ziemię w 2028 r., planetoida 1999 AN10 jeśli nie w 2027, to z pewnością w 2039 r. Ostatnio w lipcu 2002 r. media doniosły, że nowo odkryta planetoida 2002 NT7 może uderzyć w Ziemię w lutym 2019 r., jakkolwiek szanse katastrofy oceniano jak jeden do miliona (tylko co to właściwie znaczy?). Po kilku dniach jednak, podobnie jak w poprzednich przypadkach, alarm odwołano. Planetoid mogących zagrozić Ziemi znamy już ponad pięćset, a ciągle odkrywa się nowe. Wydaje się, że po odkryciu takiej niebezpiecznej planetoidy astronomowie najpierw straszą zderzeniem, aby potem groźbę odwołać. Postaramy się więc odkryć kulisy badań ruchu planetoid, które prowadzą do przepowiedni końca świata. Opowiemy, jak prowadzi się takie badania w Polsce za pomocą programów komputerowych opracowanych w Centrum Badań Kosmicznych PAN w Warszawie na podstawie oryginalnych pomysłów polskich astronomów.

Ziemia i planetoida krążą po orbitach eliptycznych, w których w jednym z ognisk elipsy znajduje się Słońce. Punkty, w których orbita planetoidy przecina płaszczyznę orbity Ziemi, nazywamy węzłami. Aby mogło nastąpić zderzenie, orbity Ziemi i planetoidy muszą się przecinać, tzn. co najmniej jeden z węzłów orbity planetoidy musi leżeć na orbicie Ziemi. Jest to podstawowy warunek, aby w ogóle dalej zajmować się potencjalną możliwością zderzenia z nowo odkrytą planetoidą. Ale istnieje jeszcze drugi warunek: Ziemia i planetoida muszą znaleźć się w tym niebezpiecznym węźle jednocześnie. Sprawa jest nieco bardziej skomplikowana, bowiem orbity obu ciał zmieniają się ciągle z powodu perturbacji planetarnych. Chociaż zmiany orbit są na ogół niewielkie, to mogą jednak groźbę zderzenia zarówno zmniejszać, jak i zwiększać.

Orbitę eliptyczną na daną datę (epokę) określa sześć tzw. elementów orbity E_k ($k = 1, 2, \dots, 6$): a , e , ω , Ω , i , M , gdzie a jest połową wielkiej osi elipsy, e jej mimośrodem, trzy kąty – długość orbitalna peryhelium ω , długość ekliptyczna węzła wstępującego Ω i nachylenie płaszczyzny orbity do płaszczyzny ekliptyki i – opisują położenie orbity w przestrzeni, natomiast anomalia średnia M określa położenie planetoidy na orbicie względem peryhelium. Płaszczyzna ekliptyki to płaszczyzna drogi Ziemi wokół Słońca, zatem kąty ω , Ω oraz parametry a i e określają położenie punktów przecięcia orbity planetoidy z płaszczyzną orbity Ziemi.

Orbitę nowo odkrytej planetoidy wyznacza się z trzech obserwacji dostatecznie odległych w czasie. Każda obserwacja pozycyjna zawiera moment obserwacji

i dwie współrzędne planetoidy na niebie, rektascensję i deklinację, mierzone niezależnie. Trzy obserwacje dają dziewięć dość skomplikowanych równań, z których można wyznaczyć sześć elementów orbity (i dodatkowo trzy odległości planetoidy od Ziemi). Na podstawie tych wyznaczonych elementów można teraz obliczyć pozycje planetoidy na niebie, a różnice między wartościami współrzędnych obserwowanych i obliczonych, tzw. $O - C$, nazywamy residuami. Oczywiście dla tych trzech obserwacji, z których wyznaczaliśmy orbitę, residua powinny być bliskie zeru, ale dla innych obserwacji, zwłaszcza coraz bardziej odległych w czasie, residua mogą się nawet znacznie różnić od zera. Dzieje się tak dlatego, że obserwacje obarczone są przypadkowymi błędami pomiarowymi, których nie da się uniknąć, zatem ta prowizoryczna orbita jest bardzo niedokładna. Trzeba więc poprawić wartości elementów orbity tak, aby „pasowały” do wszystkich obserwacji. Robi się to w ten sposób, że wyjściowe równania, z których wyznaczono elementy, rozwija się w szereg względem tych elementów, zachowując tylko wyrazy z pierwszymi potęgami ich przyrostów. Tak powstają liniowe tzw. równania obserwacyjne, z których oblicza się te przyrosty, czyli sześć poprawek ΔE_k do wartości początkowych elementów:

$$a_{1,1}\Delta E_1 + a_{2,1}\Delta E_2 + \dots + a_{6,1}\Delta E_6 = (O - C)_1$$

$$a_{1,2}\Delta E_1 + a_{2,2}\Delta E_2 + \dots + a_{6,2}\Delta E_6 = (O - C)_2$$

...

$$a_{1,n}\Delta E_1 + a_{2,n}\Delta E_2 + \dots + a_{6,n}\Delta E_6 = (O - C)_n$$

$a_{i,k}$ oznaczają tu stałe współczynniki przy niewiadomych $\Delta E_1, \dots, \Delta E_6$.

Układu tych równań w zasadzie nie można rozwiązać, bowiem jest ich więcej niż niewiadomych. Jeśli wszystkie wyrazy równań przenieść na jedną stronę i podstawić jakieś wartości niewiadomych $\Delta E_1, \dots, \Delta E_6$, to po prawej stronie otrzyma się wówczas tzw. odchyłki. Ich wartości zależą od niewiadomych, chcielibyśmy więc znaleźć takie wartości niewiadomych, które najlepiej spełniałyby równania obserwacyjne w tym sensie, że dawałyby najmniejsze odchyłki. Problem ten rozwiązuje tzw. metoda najmniejszych kwadratów: poszukujemy takich wartości niewiadomych, aby po podstawieniu do równań obserwacyjnych otrzymać minimalną wartość sumy kwadratów odchyłek. Algorytm rozwiązywania takiego układu równań podał już Gauss, ale w astronomii największą karierę zrobił algorytm oparty na rachunku krakowianowym. Wynalazł go w latach 20. XX wieku krakowski astronom Tadeusz Banachiewicz, usiłując usprawnić prowadzenie obliczeń za pomocą powszechnie wtedy stosowanych ręcznych arytmetometrów. Krakowiany, podobnie jak macierze, to tablice liczbowe, tylko reguła mnożenia jest inna, mianowicie mnożymy

„kolumny przez kolumny”. Ta pozornie drobna zmiana nie tylko ułatwiała praktyczne mnożenie krakowianów, ale wprowadzała inne zasady algebry krakowianowej i stwarzała nowe możliwości zastosowań. Pełny algorytm krakowianowy metody najmniejszych kwadratów nie ma sobie równych w prostocie i przejrzystości, pozwala znaleźć minimalną wartość sumy kwadratów odchylek (bez konieczności korzystania z równań obserwacyjnych), a stąd średni błąd obserwacji μ_o oraz poprawki do elementów orbity i ich błędy średnie.

Odkryta 9 lipca 2002 r., na kilka miesięcy przed przejściem przez peryhelium (28 listopada), planetoida 2002 NT7 była obserwowana przez wielu obserwatorów i przez dwa tygodnie wykonano 113 obserwacji. Wtedy ukazała się pierwsza wiadomość, że jej orbita przecina się w węźle (wstępującym) z orbitą Ziemi. Obiegając Słońce, planetoida przechodzi przez ten węzeł co 837 dni i 1 lutego 2019 r. może dojść do niebezpiecznego zbliżenia do Ziemi, przy czym zderzenie nie jest wykluczone. Szczegółowe dane dostępne były przez Internet (patrz adres na końcu artykułu), więc w Warszawie można było niezwłocznie przystąpić do badań ruchu tej groźnej planetoidy.

Przypadkowe błędy pomiarowe nie są jedynym źródłem błędów obserwacji. Łatwo przewidzieć, że wśród obserwacji mogą się znaleźć pozycje błędne z powodu pomyłki zapisu, przestawienia cyfr itp., co w rezultacie da pojedyncze residua $O - C$ wyraźnie odbiegające od pozostałych. Takie obserwacje trzeba odrzucić, tylko jak je rozpoznać? Otóż w latach 60. XX w. warszawski astronom Maciej Bielicki opracował matematycznie obiektywne kryteria selekcji obserwacji, przyjmując założenie, że rozkład błędów przypadkowych jest normalny (gaussowski). Po „oczyszczeniu” obserwacji metodą Bielickiego ze 113 obserwacji planetoidy 2002 NT7 pozostały do rozwiązania 223 równania obserwacyjne. Stosując metodę najmniejszych kwadratów, dostaliśmy średni błąd obserwacji $\mu_o = 0,5''$ oraz poprawione elementy orbity na epokę 25 lipca 2002 r. wraz z ich błędami średnimi; nazwijmy tę orbitę orbitą nominalną. Skoro jej elementy są dokładne tylko w granicach ich błędów średnich, to może przecież istnieć wiele orbit, o nieco innych (w tych granicach) elementach, równie dobrze „pasujących” do obserwacji. Gdzieś wśród nich znajduje się także ta „prawdziwa” orbita, której poszukujemy, a jeśli jest tam także orbita zagrażająca Ziemi, to bardzo chcielibyśmy ją poznać. Powstaje problem, jak znaleźć ten zbiór innych orbit dobrze pasujących do obserwacji. Wykorzystaliśmy tu następujący pomysł (a za pomocą rachunku krakowianowego można wykazać, że jest on matematycznie poprawny). Jeśli zastosować generator liczb losowych z rozkładem gaussowskim o dyspersji $\sigma \approx \mu_o$, to można wielokrotnie wylosować przypadkowe wartości residuów, obliczyć nowe poprawki do elementów orbity nominalnej i otrzymać w ten sposób

dowolnie liczny zbiór orbit (tj. szóstek elementów) jednakowo dobrze pasujących do obserwacji.

Takie losowanie zostało dokonane i otrzymaliśmy 850 różnych orbit, których odpowiednie elementy wynikają ze 113 obserwacji z błędem średnim równym $0,5''$ – takim, jak orbita nominalna. Korzystając teraz z tego zbioru elementów jako danych początkowych, 850 razy całkowano numerycznie równania ruchu planetoidy do 2019 roku, aby sprawdzić, na jaką minimalną odległość mogłyby się wtedy zbliżyć do Ziemi. W rezultacie otrzymano zbiór 850 minimalnych odległości od Ziemi (dokładniej: od środka Ziemi) w bardzo szerokim zakresie: od 0,42454 j.a. dla orbity nr 149 do 0,000175 j.a. dla orbity nr 570. Widać z tego, że stosunkowo niewielkie różnice w danych początkowych mogą dać zupełnie różne wyniki po kilkunastu latach ruchu planetoidy. Gdyby jednak planetoida biegła po orbicie nr 570, to w 2019 r. mogłyby się rzeczywiście niebezpiecznie zbliżyć do Ziemi. Do zderzenia, co prawda, by nie doszło (promień Ziemi wynosi 0,0000426 j.a.), bo planetoida przeszłaby około 20 tys. km nad powierzchnią Ziemi. Tak więc wśród 850 orbit nie wykryto orbity zderzeniowej. Może po prostu nie została wylosowana? A gdyby tak wylosować ich więcej? Losowanie dziesięciu tysięcy orbit znacznie poszerzyło granice możliwych wartości elementów, tylko że badanie ruchu planetoidy na tylu orbitach nie miałyby już sensu, bo pochłonęłyby zbyt wiele czasu komputerowego, a i tak nie byłoby pewności, że wśród nich znalazłaby się orbita zderzeniowa.

Jeśli jednak mamy już orbitę, na której planetoida może znacznie zbliżyć się do Ziemi, to istnieje sposób znalezienia orbity zderzeniowej. Trzeba zastosować metodę najmniejszych kwadratów z warunkami ścisłymi. Znany przykład z geodezji są np. pośrednie pomiary trzech kątów trójkąta: wartości kątów można wyznaczyć metodą najmniejszych kwadratów, ale ich suma musi wynosić dokładnie 180° . Jest to warunek naturalny wynikający z geometrii euklidesowej, natomiast w przypadku planetoidy warunek ścisły narzucamy: chcemy z obserwacji wyznaczyć metodą najmniejszych kwadratów taką orbitę, aby w 2019 r. minimalna odległość planetoidy od środka Ziemi była mniejsza niż 0,0000426 j.a. Startując z orbity nr 570, stopniowo zmniejszamy odległość od Ziemi od znanej już wartości 0,000175 j.a. Wymaga to wielokrotnego rozwiązywania równań dla sześciu poprawek elementów orbity i dodatkowych trzech parametrów wynikających z narzucenia warunku ścisłego. Procedura ta prowadzi do znalezienia orbity zderzeniowej, ale niezbędny jest pewien komentarz. Otóż jeśli orbita zderzeniowa naprawdę istnieje wśród wielu orbit dobrze pasujących do obserwacji, to średni błąd obserwacji z niej otrzymany będzie taki sam, jak błąd μ_o z orbity nominalnej. Jeśli jednak w rzeczywistości orbita taka

nie istnieje, to metoda wprowadzić tak samo będzie minimalizować sumę kwadratów odchyłek, ale średni błąd wynikający z orbity zderzeniowej uzyskanej „na siłę” będzie większy niż μ_o . Jest to jednocześnie dla nas dobry wskaźnik pozwalający wykluczyć zderzenie.

Orbita zderzeniowa pozwala obliczyć czas i miejsce zderzenia na powierzchni Ziemi. Opisaną wyżej metodą znaleźliśmy całą serię orbit zderzeniowych, które dla 113 obserwacji wszystkie dają średni błąd $\mu_o = 0,5''$. Widać stąd, że alarm dotyczący katastrofy kosmicznej nie był bezpodstawny: opierając się na dotychczasowych danych obserwacyjnych, nie można było wykluczyć groźby zderzenia. W tabeli podajemy parametry zderzenia dla dziesięciu wybranych orbit zderzeniowych. Widać, że zderzenie mogłoby nastąpić 1 lutego 2019 r. tuż przed południem czasu uniwersalnego w okolicach południowego bieguna Ziemi.

W zbiorze 113 obserwacji ostatnich sześć zostało wykonane 24 lipca. Potem nastąpiły cztery dni przerwy i pojawiły się dalsze obserwacje z 28 i 29 lipca. Wtedy właśnie alarm odwołano. Dołączenie tych nowych obserwacji powiększyło ich zbiór do 130, a wyznaczona stąd nowa orbita nominalna dawała nadal średni błąd $\mu_o = 0,5''$. Ale poprzednio uzyskane orbity zderzeniowe już do tych 130 obserwacji nie pasowały: średni błąd μ_o wynosił $0,8''$. Różnica zdawałoby się niewielka, ale wystarczająca, aby zderzenie wykluczyć. Jeśli dodać, że wykorzystanie dalszych obserwacji aż do 7 sierpnia stworzyło zbiór 185 obserwacji nadal ze średnim błędem $\mu_o = 0,5''$, a orbity zderzeniowe dawały już $\mu_o = 1,2''$,

to możemy spać spokojnie: zderzenia w 2019 r. nie będzie i dalsze obserwacje z pewnością to potwierdzą.

A co by było, gdyby dalsze obserwacje potwierdziły pierwszą groźbę zderzenia? Oczywiście, im więcej obserwacji zgromadzimy, zwłaszcza z następnych powrotów planetoidy do Słońca, tym dokładniej można zlokalizować miejsce i czas zderzenia. Gdyby to nawet wypadło w okolicach bieguna południowego, to uderzenie planetoidy o średnicy 2 km z prędkością 28 km/s nie tylko mogłoby całkowicie zniszczyć Antarktydę, ale wywołać niewyobrażalną katastrofę globalną. Powstaje pytanie, czy znając termin katastrofy na wiele lat wcześniej, nie można by jej jakoś zapobiec. O zniszczeniu tak wielkiego obiektu nie może być mowy, ale może dałoby się zmienić nieco tor jego ruchu? Otóż w peryhelium planetoida ma prędkość ponad 40 km/s i okazuje się, że wystarczy ją zwiększyć zaledwie o 1 cm/s (!), aby zderzenia uniknąć. Zanim doszłoby do fatalnego spotkania w 2019 r., planetoida wróci do peryhelium jeszcze sześć razy. Gdyby mieć np. pięć lat na przygotowania, to dokonawszy tej niewielkiej zmiany prędkości w roku 2007, już uniknęlibyśmy zderzenia, bo w 2019 r. planetoida minęłaby Ziemię w odległości 20 tys. km od jej powierzchni. A gdyby przygotowania się opóźniły, to mielibyśmy jeszcze szansę zrobić to w 2009 albo w 2012, a nawet w 2014 r. i wtedy w 2019 r. planetoida przeszłaby odpowiednio 15, 10 lub 5 tys. km nad powierzchnią Ziemi. Sądzę, że jeśli jeszcze nie dziś, to za 10 lat technika umożliwi zmianę prędkości planetoidy o 1 cm/s, dzięki czemu unikniemy, być może, w przyszłości innej katastrofy kosmicznej.

Adres internetowy: <http://newton.dm.unipi.it/cgi-bin/neodys/neoibo?objects:2002NT7;main>

Parametry potencjalnego zderzenia planetoidy 2002 NT7 z Ziemią 1 lutego 2019 r. dla kilku orbit zderzeniowych;
 λ – długość geograficzna wschodnia,
 φ – szerokość geograficzna,
 ψ – kąt między wektorem prędkości planetoidy a kierunkiem pionu w punkcie zderzenia (kąty w stopniach),
 V – prędkość planetoidy względem Ziemi w chwili zderzenia.

Nr	Cz. uniw. h:m:s	λ	φ	ψ	V km/s
1	11:50:55	94.17889	-18.96894	74.60	28.542
2	11:50:19	86.95687	-34.39174	60.70	28.543
3	11:50:05	95.02452	-42.65105	52.04	28.544
4	11:49:57	94.83938	-55.08785	40.13	28.546
5	11:50:06	96.12973	-70.03873	25.54	28.548
6	11:50:13	101.05693	-74.58072	20.67	28.548
7	11:50:24	114.51567	-79.16404	14.94	28.549
8	11:50:30	118.31914	-81.91102	11.99	28.549
9	11:50:35	122.30374	-83.99492	9.73	28.549
10	11:50:42	137.21501	-86.49710	6.45	28.549



Rozwiązanie zadania F 589.

Energia potencjalna klocka jest w obu przypadkach jednakowa, a energia potencjalna wody – nie. Między danymi położeniami nie ma punktów równowagi, zatem położenie równowagi klocka będzie trwałe, gdy środek ciężkości wypartej wody będzie wyżej. Gdy bok kwadratu będącego przekrojem klocka będzie równy 1, wtedy

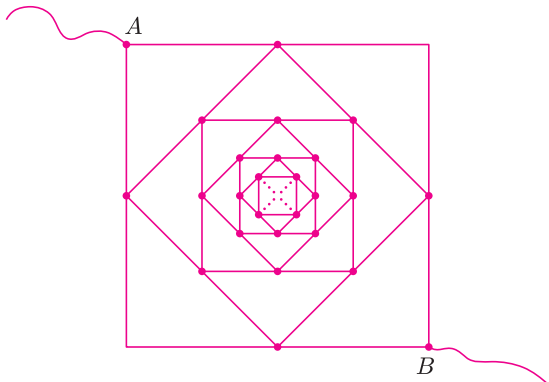
$$h_I = 1/4, \quad h_{II} = \frac{1}{3\sqrt{2}}, \quad h_{II} < h_I,$$

gdzie h to odległość w pionie środka ciężkości wypartej wody od środka ciężkości klocka. Zatem położenie II jest położeniem równowagi trwałej.

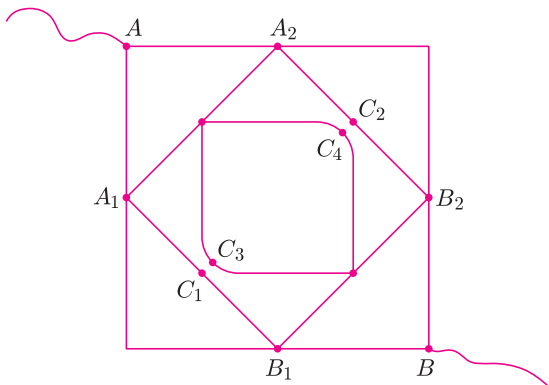
Elektryczne układy samopodobne

W *Delcie* 7/2002 pojawiło się zadanie z fizyki, które spotkało się z odzewem Czytelników. Przypomnijmy jego treść:

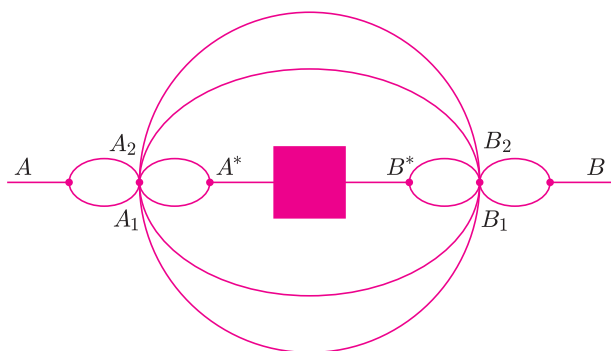
Znaleźć opór między punktami A i B figury przedstawionej na poniższym rysunku. Liczba kwadratów w środku jest bardzo duża.



Rozwiązanie opierało się na obserwacji, zwanej zasadą podobieństwa, że opór zastępczy $R = R_{AB}$ jest liniową funkcją oporu z boku r , czyli $R = \alpha r$, przy czym α jest jakąś bezwymiarową wielkością zależną tylko od geometrii obwodu. Schemat ten można uprościć następująco.



Rozdzielając punkty C_1 i C_3 oraz C_2 i C_4 , w których potencjały są jednakowe i łącząc na chwilę punkty A_1 i A_2 oraz B_1 i B_2 , otrzymamy schemat jak na rysunku poniżej.



Widzimy, że między punktami A^* i B^* jest taki sam kwadrat jak wyjściowy, tylko dwa razy mniejszych rozmiarów. A opór tego kwadratu jest też dwa razy mniejszy (bo proporcjonalny do długości boku) –

korzystamy ze wspomnianej zasady podobieństwa. Rozwiązanie problemu jest już proste:

$$R = \frac{r}{2} + \frac{1}{\frac{1}{r/2} + \frac{1}{r/(2\sqrt{2})} + \frac{1}{R/2+r/(2\sqrt{2})}}$$

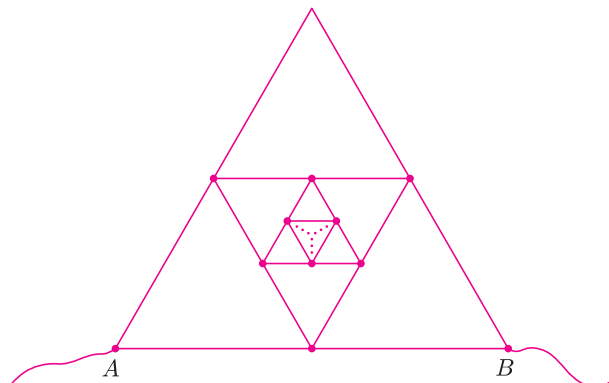
Równanie to upraszcza się do

$$\alpha^2 + (\sqrt{2} - 1)\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,$$

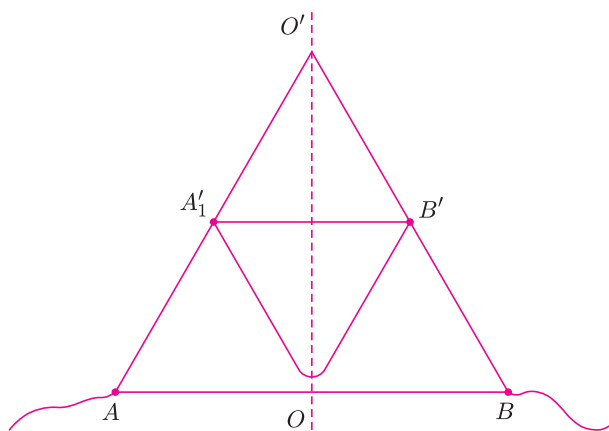
gdzie $\alpha = R/r$. Stąd

$$R_{AB} = R = \frac{r}{2}(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}).$$

Rozwiążmy podobny problem, tym razem obliczając opór między wierzchołkami trójkąta równobocznego, w który jest wbudowany ciąg trójkątów równobocznych wbudowanych jeden w drugi. Liczba trójkątów jest bardzo duża.



Punkty leżące na osi symetrii trójkąta OO' możemy rozdzielić, otrzymując układ pokazany poniżej.



Opór podukładu $A'B'$ wynosi z zasady podobieństwa

$$R_{A'B'} = \alpha r/2.$$

Przyjmując $R_{AB} = \alpha r$, otrzymujemy równanie

$$\frac{1}{\alpha r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r + (\frac{1}{r} + \frac{2}{\alpha r})^{-1}}$$

Rozwiązanie tego równania jest więc następujące

$$\alpha = (\sqrt{7} - 1)/3,$$

zatem

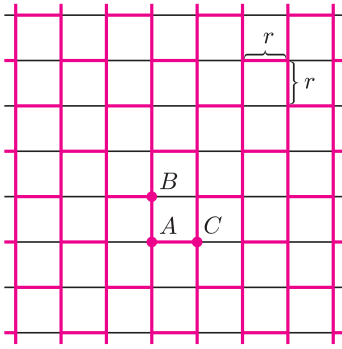
$$R_{AB} = \frac{\sqrt{7} - 1}{3}r.$$

E. Cz.

Elektryczne sieci nieskończone

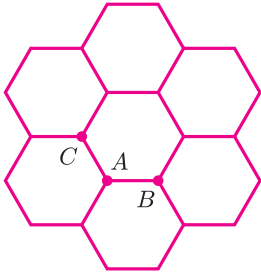
Rozwiążmy następujący problem:

Mamy nieskończoną kwadratową sieć, pokrytą częściowo przewodnikami, a częściowo opornikami.

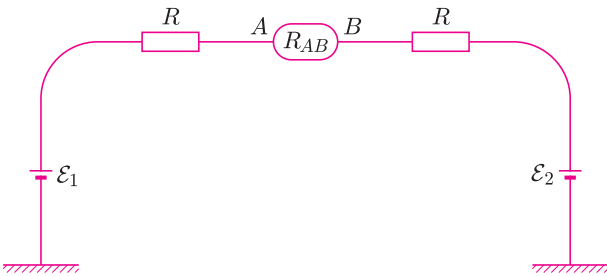


Obliczyć opór między punktami A i B oraz A i C tej sieci.

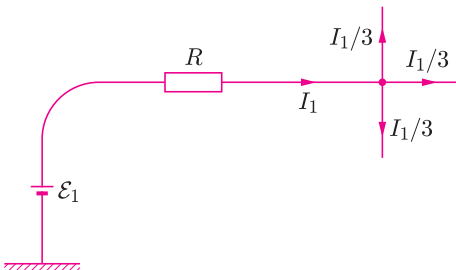
Przystępując do rozwiązania problemu, zauważmy, że powyższy układ można przerysować następująco.



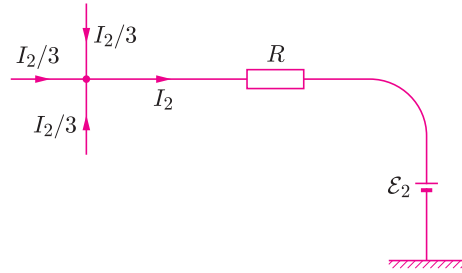
Podłączmy do punktów A i B układu dwa jednakowe źródła prądu o siłach elektromotorycznych $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$ (ich opory wewnętrzne zaniedbujemy), poprzez dwa jednakowe oporniki o opornościach $R \gg r$, dobierając ich parametry tak, żeby $\mathcal{E}/R = 1$ A.



Rozpatrzmy najpierw podłączenie tylko jednego źródła w punkcie A, otrzymując następujące rozgałęzienie wpływającego do węzła A prądu $I_1 = \mathcal{E}/(R + r_{AB}) \approx 1$ A.



Zatem, gdy mamy tylko źródło z siłą elektromotoryczną \mathcal{E}_2 , prąd wypływający z węzła B jest równy $I_2 = \mathcal{E}/(R + r_{AB}) \approx 1$ A.



Prąd ten składa się z prądów z trzech spotykających się w B węzłów sieci i wypływa na zewnątrz przez źródło \mathcal{E}_2 . Podłączmy teraz do punktów A i B oba źródła. Z zasady superpozycji oraz warunku $R \gg r$ otrzymujemy, że przez odcinek AB będzie płynął prąd $I = (I_1 + I_2)/3$, a spadek napięcia będzie równy: $U_{AB} = 2/3$ V. Z drugiej strony, do układu jest podłączone zewnętrzne napięcie $2\mathcal{E}$ i płynie w nim prąd $I \approx 2\mathcal{E}/(2R) = 1$ A. Zatem

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{2}{3} \Omega.$$

W przypadku gdy napięcie zewnętrzne jest przyłożone do punktów A i C, przez analogiczne rozumowanie otrzymujemy:

$$R_{AC} = \frac{2}{3} \Omega.$$

Pozostaje więc znaleźć opór między punktami B i C. Podłączenie tylko jednego źródła prowadzi do tego, że przez odcinek AB popłynie prąd $I/3$, a przez odcinek AC – prąd $I/6$. Podłączmy więc do węzła jeszcze jedno źródło. Z symetrii układu i zasady superpozycji otrzymujemy:

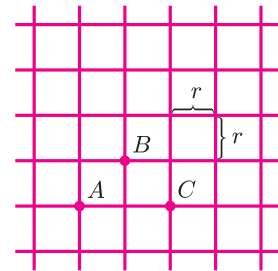
$$U_{BC} = 1 \text{ V} \left(\frac{1}{3} \text{ A} + \frac{1}{6} \text{ A} \right) + 1 \Omega \left(\frac{1}{3} \text{ A} + \frac{1}{6} \text{ A} \right) = 1 \text{ V}$$

oraz

$$R_{BC} = \frac{U_{AC}}{I} = 1 \Omega.$$

Problem ten przypomina zadanie, które pojawiło się na XLIII Olimpiadzie Fizycznej, stopień II:

Z nieskończenie wielu identycznych oporników, każdy o oporze r , zbudowano sieć pokazaną na rysunku obok. Wiedząc, że opór zastępczy tej sieci między punktami A i B wynosi $2r(1 - 2/\pi)$, oblicz opór zastępczy sieci między punktami A i C.



Idea rozwiązania jest podobna do przedstawionej powyżej. Dociekliwych Czytelników odsyłamy do zbiorku [1], ambitniejszym proponujemy samodzielne rozwiązanie. Wynik jest następujący: $R_{AC} = 2r/\pi$.

E. Cz.

[1] W. Ungier, M. Hamera Wybrane zadania z 43 Olimpiad Fizycznych, Wydawnictwo MAGIPPA Warszawa 1994

Rozważmy następujące trzy zadania.

Zadanie 1. Udowodnić, że równanie

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 2xyz_u$$

nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.

Zadanie 2. Ciężar każdego z $2n + 1$ klocków wyraża się całkowitą liczbą gramów. Dowolne $2n$ klocków można tak rozdzielić, kładąc po n na każdą szalkę, że nastąpi równowaga. Udowodnić, że wszystkie klocki mają jednakową wagę.

Zadanie 3. Dany jest arkusz papieru w kratkę. Udowodnić, że dla $n \neq 4$ nie istnieje n -kąąt foremny o wierzchołkach znajdujących się w węzłach kraty. Na pierwszy rzut oka zadania te nie mają nic wspólnego. Jak sami jednak zobaczycie, rozwiązania wszystkich tych zadań opierają się na tej samej idei, którą wymyślił Pierre Fermat. Można przypuszczać, że właśnie za pomocą tej idei starał się on udowodnić swoje słynne Wielkie Twierdzenie.

Ale po kolei.

Najpierw rozwiążemy trzy podane wyżej zadania.

Rozwiązanie zadania 1. Niech liczby x, y, z, u spełniają wypisane wyżej równanie. Ponieważ liczba $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$ jest parzysta, to wśród liczb x, y, z, u jest parzysta liczba liczb nieparzystych, czyli cztery lub dwie, lub zero. Jeżeli wszystkie liczby są nieparzyste, to liczba $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$ jest podzielna przez 4, a liczba $2xyz_u$ nie jest podzielna przez 4. Jeżeli są wśród nich tylko dwie liczby nieparzyste, to liczba $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$ nie jest podzielna przez 4, a liczba $2xyz_u$ jest podzielna przez 4. Zatem wszystkie liczby są parzyste, czyli

$$x = 2x_1, \quad y = 2y_1, \quad z = 2z_1, \quad u = 2u_1.$$

Podstawiając te równości do równania wyjściowego, otrzymujemy

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 = 8x_1y_1z_1u_1.$$

Znów widzimy, że nie mogą być nieparzyste wszystkie cztery liczby, bo wtedy liczba $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2$ nie byłaby podzielna przez 8. Analogicznie nie mogą być nieparzystymi dokładnie dwie liczby, ponieważ wtedy liczba $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2$ nie byłaby podzielna przez 4. Otrzymujemy więc, że wszystkie liczby są parzyste, czyli

$$x_1 = 2x_2, \quad y_1 = 2y_2, \quad z_1 = 2z_2, \quad u_1 = 2u_2.$$

Dlatego

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + u_2^2 = 32x_2y_2z_2u_2.$$

Rozumując w podobny sposób, dowodzimy, że liczby x_2, y_2, z_2, u_2 są parzyste i tak dalej. Łatwo jest zrozumieć, że dla każdej liczby naturalnej s zachodzi równość

$$x_s^2 + y_s^2 + z_s^2 + u_s^2 = 2^{2s+1}x_sy_sz_su_s,$$

przy czym

$$x_k = 2x_{k+1}, \quad y_k = 2y_{k+1}, \quad z_k = 2z_{k+1}, \quad u_k = 2u_{k+1}, \quad k \geq 1.$$

Czyli dla każdej liczby naturalnej s liczby

$$\frac{x}{2^s}, \quad \frac{y}{2^s}, \quad \frac{z}{2^s}, \quad \frac{u}{2^s}$$

są całkowite. Ale to jest niemożliwe.

Rozwiązanie zadania 2. Po pierwsze, oczywiste jest, że wszystkie klocki mają parzystą lub nieparzystą wagę: waga każdego z $2n$ klocków jest parzysta. Odejmujemy teraz od wagi wszystkich klocków wagę najlżejszego klocka (lub najlżejszych klocków, jeżeli jest ich kilka). Nowy układ klocków oczywiście też spełnia warunki zadania, przy czym wśród klocków będą „klocki o wadze zerowej”. Dlatego wagi wszystkich klocków nowego układu są parzyste. Dzieląc te wagi na pół, otrzymamy nowy układ klocków, spełniający warunki zadania, przy czym wśród klocków są „klocki o wadze zerowej”. A zatem znowu waga wszystkich klocków wyraża się liczbą parzystą i tak dalej.

Wynika stąd, że w końcu wszystkie klocki mają zerową wagę, a to oznacza, że wszystkie klocki z zadania wyjściowego mają jednakową wagę.

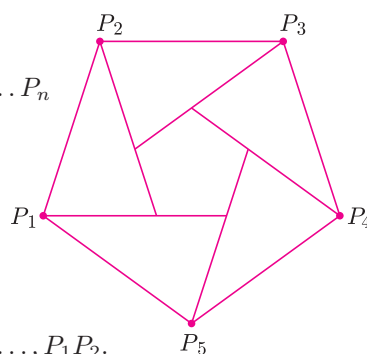
Rozwiązanie zadania 3. Udowodnijmy najpierw, że nie istnieje trójkąt równoboczny o wierzchołkach znajdujących się w węzłach. Przyjmujemy bok kratki jako jednostkę. Rzeczywiście, niech a będzie bokiem tego trójkąta. Wtedy pole tego trójkąta równa się $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ i jest ono liczbą niewymierną, gdyż a^2 jest liczbą całkowitą, zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa. Z drugiej zaś strony jest oczywiste, że pole każdego wielokąta o wierzchołkach w węzłach kraty jest liczbą wymierną.

Ponieważ w sześciokąt foremny można wpisać trójkąt równoboczny o wierzchołkach znajdujących się w wierzchołkach sześciokąta, to dla $n = 6$ stwierdzenie też jest udowodnione.

Niech $n \neq 3, 4, 6$. Przypuśćmy, że $P_1P_2 \dots P_n$ jest n -kątem

o wierzchołkach znajdujących się w węzłach. Odłóżmy

w punktach P_1, P_2, \dots, P_n wektory, równe odpowiednio wektorom $P_2P_3, P_3P_4, \dots, P_1P_2$.



Nowe punkty znowu trafią do węzłów kraty i utworzą n -kąąt foremny wewnątrz n -kąta wyjściowego. Z nowym n -kątem możemy postąpić w ten sam sposób, i tak dalej bez końca. Jednakże kwadrat boku n -kąta jest liczbą naturalną, w naszym zaś przypadku ciągle się ona zmniejsza!

Wszystkie trzy rozwiązania w istocie rzeczy były przeprowadzone według jednego schematu: zakładając, że problem ma rozwiązanie, konstruowaliśmy pewien nieskończony proces, podczas gdy ze sformułowania problemu wynikało, że proces ten musi gdzieś mieć koniec. Taka metoda dowodzenia nazywa się *metodą nieskończonej regresji*.

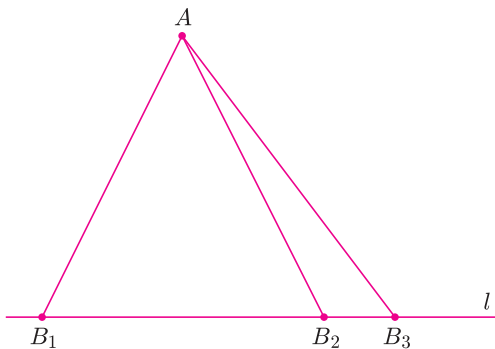
Często metodę regresji stosuje się w prostszej wersji. Zakładając mianowicie, że już dotarliśmy do naturalnego końca procesu, widzimy, iż „zatrzymać się” nie możemy.

Zadanie 4. Jeżeli każda prosta łącząca jakiegokolwiek dwa punkty pewnego skończonego zbioru X zawiera przynajmniej jeszcze jeden punkt tego zbioru, to wszystkie punkty zbioru leżą na tej samej prostej.

Rozwiązanie. Załóżmy, że nie wszystkie punkty zbioru leżą na jednej prostej. Dla każdego punktu A i dla każdej prostej l przechodzącej przez dwa punkty zbioru X , na której A nie leży, rozważmy liczbę $\rho(A, l)$ równą odległości punktu A od prostej l . Ponieważ punktów i prostych jest skończenie wiele, to wśród tych odległości jest odległość najmniejsza.

Niech więc liczba $\rho(A, l)$ będzie najmniejsza wśród tych liczb. Wówczas dla B_1, B_2, B_3 należących do $l \cap X$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} P_{AB_1B_3} &= \rho(A, l) \cdot |B_1B_3| = \\ &= \rho(B_2, AB_1) \cdot |AB_1| + \rho(B_2, AB_3) \cdot |AB_3| \geq \\ &\geq \min(\rho(B_2, AB_1), \rho(B_2, AB_3)) \cdot (|AB_1| + |AB_3|) > \\ &> \min(\rho(B_2, AB_1), \rho(B_2, AB_3)) \cdot |B_1B_3|. \end{aligned}$$



Stąd

$$\rho(A, l) > \min(\rho(B_2, AB_1), \rho(B_2, AB_3)),$$

co przeczy wyborowi punktu A i prostej l .

A teraz rozważmy bardziej skomplikowany przykład geometryczny.

Zadanie 5. Czy można rozciąć sześcián na kilka różnych sześciánów?

Rozwiązanie. Zróbmy najpierw pewne oczywiste spostrzeżenie. Niech kwadrat P będzie podzielony na skończoną liczbę różnych kwadratów. Wtedy najmniejszy kwadracik nie będzie przylegał do granicy kwadratu P .

Niech sześcián Q będzie rozcięty na różne sześciány Q_j , natomiast P będzie jedną ze ścian sześciánu Q . Sześciány Q_j , przylegające do ściany P , tworzą rozbiecie P na parami różne kwadraty. Niech P_1 będzie najmniejszym wśród tych kwadratów, a Q_1 niech będzie odpowiadającym mu sześciánem. Kwadrat P_1 nie przylega do granicy P , a więc jest otoczony dużymi kwadratami. Odpowiednie sześciány tworzą „studnię”, w której leży sześcián Q_1 .

Niech P'_1 będzie „górną” ścianą sześciánu Q_1 . Sześciány przylegające do ściany P'_1 tworzą rozbiecie P'_1 na różne kwadraty. Znowu najmniejszy kwadrat wśród nich, P_2 , znajduje się wewnątrz P'_1 , a więc sześciány otaczające odpowiedni sześcián Q_2 będą większe od Q_1 i znowu tworzą „studnię”. Możemy przedłużać tę konstrukcję, otrzymując „wieżę”, która składa się z sześciánów ciągle malejących, a więc nie możemy w żadnej chwili tego procesu zatrzymać!

* * *

Na koniec proponujemy Czytelnikowi kilka zadań do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie 6. Udowodnić, że równanie

$$x^4 + y^4 = z^4$$

nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.

Zadanie 7. Niech

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

będzie zbiorem liczb całkowitych, z których nie wszystkie są jednakowe ($n > 2$). Utworzymy nowy zbiór postaci

$$\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 + a_3}{2}, \dots, \frac{a_{n-1} + a_n}{2}, \frac{a_n + a_1}{2},$$

a z niego według tej samej reguły następnym zbiór i tak dalej. Udowodnić, że po kilku krokach powstanie zbiór, w którym nie wszystkie liczby będą całkowite.

Zadanie 8. Niech

$$a_1, a_2, \dots, a_{2^n}$$

będzie dowolnym 2^n -elementowym zbiorem liczb naturalnych. Udowodnić, że jeśli utworzymy z niego nowy zbiór

$$l_1, l_2, \dots, l_{2^n}$$

według reguły

$$l_k = |a_{k+1} - a_k|, \quad k = 1, 2, \dots, 2^n, \quad a_{2^n+1} = a_1,$$

a z niego według tej samej reguły następnym zbiór i tak dalej, to po pewnej liczbie kroków dojdziemy do zbioru, który składa się wyłącznie z zer.

Zadanie 9. Dowolne dwie proste, należące do pewnego skończonego zbioru prostych, przecinają się. Przez każdy z punktów przecięcia przechodzi jeszcze przynajmniej jedna należąca do tego zbioru prosta. Wykazać, że wtedy wszystkie rozważane proste przechodzą przez jeden wspólny punkt.



mała delta

Którędy bliżej, którądy taniej?

Najkrótszą linią między dwoma punktami jest linia prosta – tak przynajmniej twierdzą podręczniki szkolnej geometrii. Chwila zastanowienia wystarczy, by zauważyć, że nie zawsze jest to prawda. Na przykład na powierzchni globusa (Ziemi) najkrótszą linią jest linia najwyraźniej krzywa, mianowicie łuk wielkiego okręgu, bo nie sposób dostać się z jednego miasta do innego po cięciwie łuku, czyli przez wnętrze Ziemi. Oznacza to, że odległość zależy od sposobu jej mierzenia. „Na przelaj” to nie to samo co „linią kolejową”, a będzie jeszcze inaczej, gdy umówimy się mierzyć odległość czasem podróży lub ilością zużytego na nią paliwa.



W astronautyce sprawa ta jest chyba jeszcze bardziej zagmatwana. Na proste pytanie w rodzaju „jak daleko jest z Ziemi na Marsa?”, odpowiedź jest bardzo nieprosta. Pierwsze przybliżenie daje uświadomienie sobie rozmiarów orbit tych planet. Jeżeli odległość Ziemi od Słońca (w przybliżeniu promień ziemskiej orbity) uznać za jednostkę (tzw. jednostkę astronomiczną, j.a.), to odległość Marsa od Słońca wynosi 1,5 j.a. Odległość tych planet zmienia się więc w granicach od 0,5 do 2,5 j.a. w okresie ponad dwóch lat.

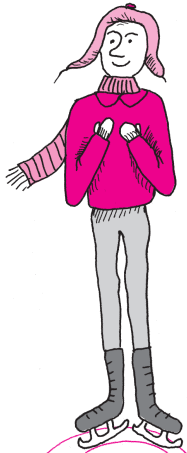
Myliłby się jednak ten, kto myślałby, że podróż na Marsa najkorzystniej jest odbyć wtedy, gdy planety te dzieli najmniejsza odległość. Taką podróż może odbyć tylko światło (lub sygnał radiowy). Rakieta, aby dolecieć do stosunkowo bliskiego Marsa po linii prostej (choćby tylko w przybliżeniu prostej), musiałaby wykonać ogromną pracę przeciw sile ciężenia słonecznego. Pracę tę nietrudno jest obliczyć. Ciało (rakieta) o masie m znajdujące się w polu grawitacyjnym Słońca o masie M_{\odot} ma w odległości r od niego energię potencjalną równą $-GM_{\odot}m/r$, gdzie $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{s}^2 \text{ kg})$ oznacza stałą grawitacji. Aby z orbity Ziemi o promieniu $r_Z = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ wspiąć się na wysokość orbity Marsa o promieniu $r_M = 2,3 \cdot 10^{11} \text{ m}$, rakieta musiałaby własnymi silnikami wykonać pracę równą niezbędnemu przyrostowi energii potencjalnej, czyli

$$GM_{\odot}m \left(\frac{1}{r_Z} - \frac{1}{r_M} \right),$$

co wynosi około $3 \cdot 10^8 \text{ J}$ na kilogram masy rakiety (oczywiście łącznie z paliwem w zbiornikach).

Trzeba tu dodać dwa komentarze. Po pierwsze, obliczony tu przyrost energii potencjalnej nie zależy od drogi, po której będzie poruszać się rakieta, lecz jedynie od początkowej i końcowej odległości od Słońca – taka bowiem jest cecha pól siłowych, dla których w ogóle możliwe jest określenie energii potencjalnej. Takie pola siłowe nazywa się polami

potencjalnymi. Po drugie, pominęliśmy tu wydatek energii potrzebny rakiecie do opuszczenia pola grawitacyjnego Ziemi, czyli do uzyskania drugiej prędkości kosmicznej. Ten wydatek energii jest oczywiście nie do uniknięcia, jest ustalony raz na zawsze i na mocy pierwszego komentarza nie zależy od kierunku, w którym startuje rakiet.



Nie istnieją – i zapewne długo jeszcze nie będą istnieć – ani silniki, ani paliwa mogące umożliwić podróż na Marsa po linii najkrótszej. Dlatego lot na Marsa planuje się po drodze znacznie dłuższej (i w kilometrach, i w dniach), za to możliwej do realizacji obecnie. Drogą tą jest elipsa, której peryhelium leży na orbicie Ziemi, a aphelium na orbicie Marsa. Silniki rakiety pracują tylko przy starcie z Ziemi i przy Marsie, a poza tym cały lot jest lotem bezwładnym – jest to więc podróż najtańsza (manewry niezbędne do odbycia takiej podróży są tematem ligowego zadania z fizyki w *Delcie* 6/2002). Czas takiej podróży łatwo obliczyć na podstawie trzeciego prawa Keplera. Wielka pół elipsy wynosi $(1,5 + 1)/2 = 1,25$ j.a., czas jej bezwładnego obiegu (w latach) to $1,25\sqrt{1,25}$, a czas podróży to jeszcze tego połowa, czyli niecałe trzy kwartały.

Zaraz, zaraz...! Przecież dopiero co powiedzieliśmy, że niezbędny przyrost energii potencjalnej rakiet, czyli zużycie paliwa, nie zależy od toru lotu rakiety! Fakt, ale na ten przyrost mogą złożyć się: energia zużytego paliwa oraz energia ruchu (kinetyczna), którą rakiet ma już na starcie, ponieważ wraz z Ziemią porusza się wokół Słońca. Dzięki temu rakiet startująca w kierunku ruchu orbitalnego Ziemi ma już prędkość względem Słońca $v = 30$ km/s, a więc energię kinetyczną $mv^2/2$ za darmo. Dlatego właśnie podróż okrężna po elipsie jest tańsza od podróży na wprost!

Bezzałogowe sondy mogą sobie tak latać, ludziom jednak chciałoby się czas podróży choć trochę skrócić – w końcu trzy kwartały w stanie nieważkości i w zamknięciu to nie żarty. Można to oczywiście zrobić, bo taką raketę z ludźmi można skierować na inną elipsę, a przebycie jej łuku zajmie mniej czasu. Trzeba by wtedy raketę bardziej rozpędzić przy Ziemi i ostrzej trzeba by manewrować przy Marsie. Ale wymaga to większych ilości paliwa, zatem większej rakiety i tym samym większych pieniędzy. Między innymi dlatego optymalizacja załogowego lotu na Marsa to poważny problem.

A jednak takie podróże „na skróty” już dość dawno się odbyły, i to właściwie za darmo. Mianowicie w latach 70. i 80. XX wieku cztery sondy planet zewnętrznych, Voyager 1 i 2 oraz Pioneer 10 i 11, zostały skierowane na tak dobrane orbity, że docierały do następnej planety dzięki pracy sił pola grawitacyjnego planety poprzedniej, a własne ich paliwo służyło tylko do niewielkich poprawek lotu. Lot tych sond np. od Jowisza do Saturna wcale nie odbywał się po elipsie z peryhelium w odległości Jowisza i aphelium w odległości Saturna, tylko po łuku elipsy znacznie obszerniejszej, a więc też trwał odpowiednio krócej (choć i tak były to miesiące). Trzeba jednak pamiętać, że w przedsięwzięciu tym wykorzystano szczególne położenie planet, które nie zdarza się na zawołanie. Dzięki temu Voyagery wykonały zbliżenia do wszystkich czterech planet olbrzymich, ale do Plutona już nie. A szkoda!



Małą Deltę przygotował Tomasz KWAST

Neutronowa holografia

Holografia została wymyślona przez Denisa Gabora pod koniec lat czterdziestych XX wieku, ale zastosowano ją dopiero 20 lat później dzięki wykorzystaniu laserów. Przez długi czas metoda ta była ograniczona do długości fal odpowiadających światłu. Dopiero w ostatniej dekadzie rozwinięto metody holografii elektronowej i rentgenowskiej pozwalające na obrazowanie w skali atomowej (światło widzialne jest na to trzy rzędy wielkości „za długie”). Metody te mają jednak ograniczone zastosowanie. Użycie elektronów, ze względu na ich silne oddziaływanie z elektronami ciała stałego, pozwala jedynie na obrazowanie powierzchni. Natomiast czułość holografii rentgenowskiej zależy bardzo silnie od rodzaju pierwiastków występujących w badanym materiale. Wiązki neutronowe z kolei, choć pozbawione tych wad, nie były do niedawna wykorzystywane, głównie z powodu ich ograniczonej intensywności. Dopiero ostatnio [1] zaproponowano sposoby przeniesienia metod holografii rentgenowskiej na wiązki neutronów termicznych.

Według pierwszej koncepcji tzw. wewnętrznego źródła (ang. *inside-source*) jądra atomów wodoru (protony) służą jako źródła fal sferycznych. Metoda ta została z powodzeniem zastosowana [2]. Natomiast druga koncepcja, tzw. wewnętrznego detektora (ang. *inside-detector*), właśnie doczekała się realizacji [3].

W holografii zawsze mamy do czynienia z interferencją tzw. wiązki odniesienia, czyli niezakłóconej fali, z tzw. wiązką przedmiotową, niosącą informację o badanym obiekcie. W przypadku metody wewnętrznego detektora wiązką odniesienia jest fala płaska, rejestrowana przez

jądra atomów o dużym przekroju czynnym na absorpcję neutronów, a wiązkę przedmiotową tworzą neutrony, które przed absorpcją oddziaływały z jądrem należącym do obrazowanego obiektu. Jak widać, badany materiał musi zawierać domieszkę atomów, których jądra będą służyć jako wewnętrzne detektory. Detekcja jest sygnalizowana poprzez deekscytację rentgenowską jąder detektorów. W doświadczeniu [3] badanym materiałem był monokryształ ołowiu (99,74%), domieszkowany kadmem 113 (0,26%). „Surowy” hologram pokazany jest na tylnej okładce. Składa się on z pikseli odpowiadających mierzonej intensywności detekcji przy odchyleniu próbki o kąt χ od kierunku padania wiązki neutronowej i obracania jej dookoła tego kierunku o kąt φ (w obu przypadkach ze skokiem 3°). Na drugim rysunku przedstawiona jest trójwymiarowa interpretacja hologramu. Widać 12 czerwonych plam odpowiadających pozycjom jąder atomów najbliższych jądra służącemu jako wewnętrzny detektor neutronów. Zlokalizowane są one na sferze o promieniu $3,49 \text{ \AA}$, równym, zgodnie z przewidywaniem, stałej siatki podzielonej przez pierwiastek z dwóch. Należy zwrócić uwagę, że w holografii neutronowej obrazowana jest pozycja jąder atomowych, a nie kształt orbitali elektronowych.

Piotr ZALEWSKI

- [1] *Atomic resolution neutron holography*, L. Cser, G. Krexner, Gy. Török, *Europhys. Lett.* **54**(2001)747
 [2] *Atomic structure holography using thermal neutrons*, B. Sur, R.B. Rogge, R.P. Hammond, V.N.P. Anghel, J. Katsaras, *Nature* **414**(2001)525
 [3] *Holographic imaging of atoms using thermal neutrons*, L. Cser, Gy. Török, G. Krexner, I. Sharkov, B. Faragó, *Phys. Rev. Lett.* **89**(2002)175504

Nieustający konkurs Wirtualnego Wszechświata i Delta!

Rozwiąż w lutym marcowe zadanie z myszką i wygraj książkę z Wydawnictwa Prószyński i S-ka.

Więcej informacji: <http://www.wiw.pl/delta/konkurs>



Zadania

Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

M 1015. Ciąg a_n określony jest rekurencyjnie wzorami:

$$a_0 = 9, \quad a_{n+1} = a_n^3(3a_n + 4).$$

Wykazać, że a_{10} w zapisie dziesiętnym ma co najmniej 1000 dziewiątek.

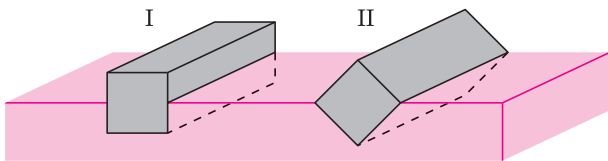
Rozwiązanie na str. 13

M 1016. Niech $1 \leq a \leq b \leq 125$, $a, b \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że ułamek $\frac{a}{b}$ w zapisie dziesiętnym nie ma bloku cyfr 143.

Rozwiązanie na str. 13

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 589. Na powierzchni wody unosi się drewniany klocek o przekroju kwadratowym i gęstości $\rho = 0,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Które z dwóch położen równowagi pokazanych na rysunku, będzie położeniem równowagi trwałej i dlaczego?

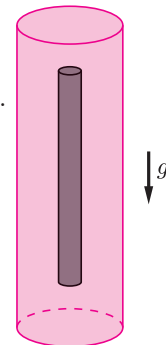


Rozwiązanie na str. 3

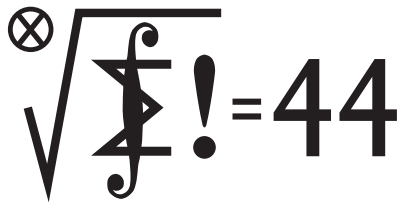
M 1017. Udowodnić, że w rozwinięciu dziesiętnym liczby 3^{-100} występuje blok cyfr 123456789.

Rozwiązanie na str. 16

F 590. W pionowej rurce o promieniu R , wypełnionej cieczą o gęstości ρ_1 , znajduje się okrągły pręt o promieniu r i długości l , przy czym $l \gg R$ (rysunek). Pręt jest umieszczony dokładnie na osi symetrii rurki, a jego gęstość ρ_2 jest mniejsza od ρ_1 . Zaniedbując efekty brzegowe i tarcie, znaleźć prędkość i przyspieszenie pręta w zależności od głębokości h . Pręt pozostaje cały czas zanurzony.



Rozwiązanie na str. 16



Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 2003

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z matematyki nr 455, 456

455. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AB| > |AC|$. Dwusieczna kąta zewnętrznego przy wierzchołku A przecina okrąg opisany na tym trójkącie ponownie w punkcie E . Punkt F jest rzutem prostokątnym punktu E na bok AB . Dowieść, że $|AB| - |AC| = 2|AF|$.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/2002

447. Odcinek CD jest dwusieczną kąta C trójkąta ABC . Prosta ℓ jest styczna do okręgów opisanych na trójkątach ACD i BCD w punktach P i Q . Dowieść, że jest ona także styczna do okręgu przechodzącego przez środki odcinków AD , BD i PQ .

447. Są dwie takie styczne. Rysunek odpowiada sytuacji, gdy odcinek PQ oraz punkt C leżą po tej samej stronie prostej AB , ale przedstawione rozumowanie działa i dla drugiej z tych stycznych.

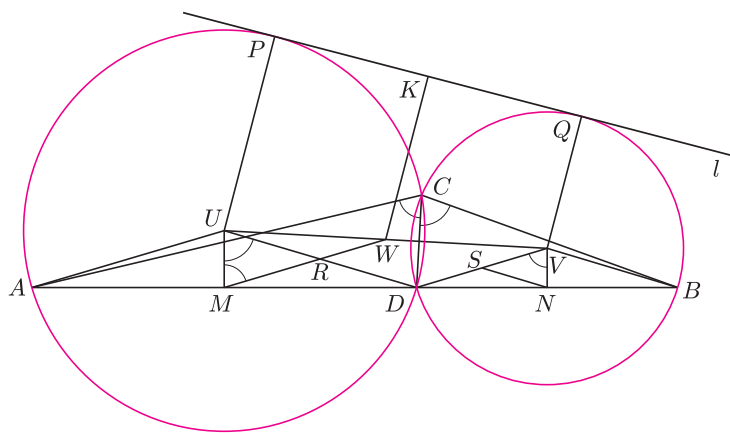
Oznaczmy środki okręgów opisanych na trójkątach ACD i BCD odpowiednio przez U i V , a środki odcinków PQ , AD , BD , UD , VD , UV – odpowiednio przez K , M , N , R , S , W oraz przyjmijmy

$$\begin{aligned} \varphi &= |\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle DUM| = \\ &= |\sphericalangle DVN| = |\sphericalangle UMR|. \end{aligned}$$

Odcinek RW , łączący środki boków trójkąta DUV , jest równoległy do boku DV ; zatem

$$\begin{aligned} |\sphericalangle URM| + |\sphericalangle URW| &= |\sphericalangle URM| + |\sphericalangle UDV| = \\ &= (180^\circ - 2\varphi) + 2\varphi = 180^\circ, \end{aligned}$$

skąd wynika, że punkty M , R , W są współliniowe.



Redaguje Marcin E. KUCZMA

456. Czy istnieją takie liczby niewymierne $\alpha > 1$, $\beta > 1$, że dla każdej pary dodatnich liczb całkowitych m , n zachodzi nierówność $[\alpha^m] \neq [\beta^n]$? (Symbol $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą, która nie przekracza liczby x).

Przypominamy treść zadań:

448. Udowodnić, że dla każdej czwórki liczb dodatnich a , b , c , d zachodzi nierówność

$$\frac{b-a}{d+a} + \frac{c-b}{a+b} + \frac{d-c}{b+c} + \frac{a-d}{c+d} \geq 0.$$

Punkty K i W są środkami nierównoległych boków trapezu $PUVQ$, więc

$$\begin{aligned} |WK| &= \frac{|VQ| + |UP|}{2} = \frac{|VD|}{2} + \frac{|UD|}{2} = \\ &= |WR| + |RM| = |WM|. \end{aligned}$$

Analogicznie stwierdzamy, że $|WK| = |WN|$. To znaczy, że W jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie KMN ; skoro zaś $WK \perp \ell$, okrąg ten jest styczny do prostej ℓ .

448. Wprowadźmy oznaczenia

$$\begin{aligned} d+a &= A, & a+b &= B, & b+c &= C, & c+d &= D, \\ b+d &= P, & a+c &= Q. \end{aligned}$$

Rozważane w zadaniu wyrażenie ma wartość

$$\begin{aligned} W &= \frac{P-A}{A} + \frac{Q-B}{B} + \frac{P-C}{C} + \frac{Q-D}{D} = \\ &= P\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{C}\right) + Q\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{D}\right) - 4. \end{aligned}$$

A ponieważ

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{C} \geq \frac{4}{A+C}$$

(nierówność między średnią arytmetyczną i średnią harmoniczną liczb A , C) i podobnie

$$\frac{1}{B} + \frac{1}{D} \geq \frac{4}{B+D},$$

zatem

$$\begin{aligned} W &\geq \frac{4P}{A+C} + \frac{4Q}{B+D} - 4 = \\ &= \frac{4P}{P+Q} + \frac{4Q}{P+Q} - 4 = 0. \end{aligned}$$

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
 po uwzględnieniu ocen rozwiązań
 zadań **443** ($WT = 1,70$) i **444** ($WT = 1,95$)
 z numeru 6/2002

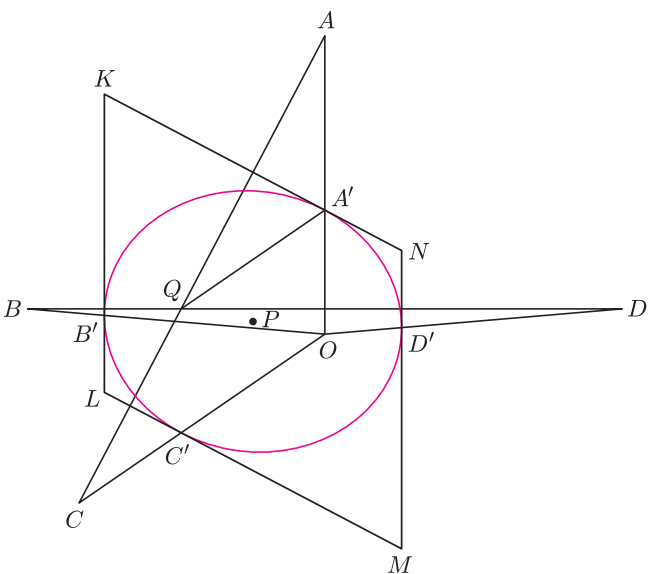
Bartłomiej Dyda	- 2 - 45,69
Piotr Kumor	- 6 - 45,39
Tomasz Rawlik	- 4 - 43,02
Marcin Peczarski	- 2 - 42,30
Janusz Olszewski	- 5 - 34,77
Wojciech Maciak	- 34,30
Marian Lupieżowicz	- 34,24
Nikodem Szpak	- 33,42
Marcin Kasperski	- 2 - 33,10
Krzysztof Jasek	- 32,63
Tomasz Wietecha	- 5 - 31,65
Światosław Gal	- 30,94
Zbigniew Sewartowski	- 30,76
Jerzy Cisło	- 1 - 30,24
Michał Józwickowski	- 27,33
Lech Duraj	- 25,00
Monika Nagórko	- 24,70
Andrzej Nagórko	- 23,40
Paweł Walter	- 23,40
Łukasz Kamiński	- 22,98
Marek Prauza	- 3 - 20,73

Legenda (przykładowo): stan konta 5-34,77 oznacza, że uczestnik już pięciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (szóstej) rundzie ma 34,77 punktów.

Listę otwierają: **Bartłomiej Dyda**, który przekracza próg 44 po raz trzeci (i zostaje dwudziestym trzecim Weteranem Klubu 44 M) oraz Weteran **Piotr Kumor**, kończący już siódmą rundę!

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
 – stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
 – przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2000, 2001 lub 2002.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!



Klub 44 M liczy 97 członków. Okrągła liczba 100 staje się coraz bardziej realna. Kiedy? Kto? Czy w omówieniu za rok będzie można napisać, że liczba członków jest już trzycyfrowa? Czy nazwisko setnej osoby jest jednym z nazwisk widocznych na publikowanej, jak co roku, liście uczestników ze stanem konta ponad 20? Nie jest to oczywiste, bo choć prawie co miesiąc ktoś przekracza czterdziestoczwieropunktową barierę, to w większości są to dawno zarejestrowani uczestnicy, wytrwale pokonujący okrążenie za okrążeniem. Rośnie grono Weteranów, także tych „wielokrotnych”. Czy ktoś okaże tyle wytrwałości, by wypełnić trzykrotną normę weterańską?

Jak w ubiegłych latach, spotkaliśmy się we wrześniu w Warszawie w gronie kilku członków Klubu 44 M, którym czas na to pozwolił. Była, jak zwykle, sesja „szybkiego rozwiązywania zadań”, otwarta dla publiczności i wkomponowana w ciąg imprez VI Festiwalu Nauki; no i dobrych kilka godzin spędziliśmy na swobodnej, miłej rozmowie o *Delcie* i *Lidze*, o konkursach zadaniowych, o szkołach i uczelniach, o książkach i czasopiśmie, o matematyce i o życiu.

A teraz doroczne omówienie wybranych zadań: patrzemy, co ciekawego zaprezentowali w swych rozwiązaniach uczestnicy ligi i które zadania okazały się najtrudniejsze (niewielkie liczby poprawnych rozwiązań).

Zadanie 425. [$X \in \text{int}(ABCD)$: $|\sphericalangle ADX| = |\sphericalangle BCX| < 90^\circ$, $|\sphericalangle DAX| = |\sphericalangle CBX| < 90^\circ$; symetralne boków AB i CD przecinają się w punkcie $Y \Rightarrow |\sphericalangle AYB| = 2|\sphericalangle ADX|$] (współczynnik trudności $WT=3,01$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR=5$). Jeden z uczestników wyraził uznanie: „to bardzo ciekawe zadanie”. Zadanie, choć ciekawe, nie było dobre. Dlaczego? Rozwiązanie firmowe było rachunkowe (liczby zespolone). Tę samą metodę zastosował **L. Grzanka**; a **M. Peczarski** oraz **M. Spychała** użyli trygonometrii. Pozostałe dwa rozwiązania (**W. Bednorz** i **T. Wietecha**) były „czysto geometryczne”, więc takie, jakie chciałoby się oglądać. Ale w tym akurat zadaniu ta „czysta” metoda była dłuższa, a ponadto wymagała rozpatrzenia różnych możliwości usytuowania rozważanych punktów i odcinków. Jak zwykle w takich razach, można napisać „w innych przypadkach modyfikacje są oczywiste” (czy aby na pewno?) – lub konsekwentnie rozważać odcinki i kąty zorientowane. Przy tym ostatnim podejściu, tak jak w rozwiązaniach analitycznych i trygonometrycznych, problemy uzależnienia od przypadku gładko znikają; wszelako – zacytujmy słowa I. F. Szarygina z przedmowy do jednej z jego książek – *gładko znika wówczas także i sama geometria*.

Zadanie 428. [$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$; dla $J \subset \{1, \dots, n\}$: $s_J := \sum_{j \in J} a_j \Rightarrow \sum_J s_J^2 \leq (n+1)2^{n-2} \sum_j a_j^2$] ($WT=1,02$; $LPR=14$). Jak widać, dużo dobrych rozwiązań – wśród nich kilka prostszych od firmowego. Chyba najzgrabniej przedstawił to **M. Adamaszek**: rozwijamy kwadraty sum s_J i dodajemy, otrzymując składniki typu a_j^2 , z których każdy pojawia się 2^{n-1} razy, oraz składniki $2a_i a_j$ ($i < j$), każdy występujący 2^{n-2} razy; teza jest więc równoważna nierówności

$$2^{n-1} \sum_j a_j^2 + 2^{n-2} \sum_{i < j} 2a_i a_j \leq (n+1)2^{n-2} \sum_j a_j^2,$$

czyli, po przekształceniu, $\sum_{i < j} (a_i - a_j)^2 \geq 0$.

Zadanie 429. [Czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg o środku O ; $AC \cap BD = \{Q\}$; K, L, M, N – środki okręgów (QAB) , (QBC) , (QCD) , (QDA) ; $KM \cap LN = \{P\} \Rightarrow O, P, Q$ współliniowe] ($WT=2,58$; $LPR=6$). Ciekawy wariant rozwiązania firmowego przedstawił **J. Olszewski**: czworokąt $KLMN$ jest równoległobokiem zawierającym punkt O ; odcinki OA, OB, OC, OD przecinają jego brzeg w punktach A', B', C', D' tak, że $|OA'| + |QA'| = |OB'| + |QB'| = |OC'| + |QC'| = |OD'| + |QD'|$, a zatem punkty A', B', C', D' leżą na elipsie o ogniskach O, Q (rysunek); przy tym $|\sphericalangle NA'O| = |\sphericalangle AA'K| = |\sphericalangle QA'K|$, więc elipsa jest styczna do boku NK – jest też styczna do pozostałych boków równoległoboku $KLMN$ – skąd nietrudny wniosek, że równoległobok $KLMN$ jest swoim własnym obrazem w symetrii względem środka P' owej elipsy; zatem $P = P' =$ środek OQ .

Weterani Klubu 44 M
(w kolejności uzyskiwania
statusu Weterana)

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Galecki (5),
J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał,
T. Rawlik (4), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin,
J. Ciach (5), M. Prauza, P. Kumor (7),
P. Gadziński (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (5),
L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (5),
T. Józefczyk, J. Witkowski, W. Bednorz,
B. Dyda

(jeśli uczestnik przekroczył barierę
44 punktów więcej niż trzy razy,
sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M
(alfabetycznie)

„dwukrotni”

M. Adamaszek, Z. Bartold, W. Bednarek,
A. Czornik, P. Jędrzejewicz, M. Kasparski,
H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza,
D. Kurpiel, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta,
E. Orzechowski, R. Pagacz, P. Kubit,
K. Patkowski, M. Peczarski, K. Pióro, S. Solecki,
G. Zakrzewski;

„jednokrotni”

T. Biegański, W. Boratyński, J. Cisko,
M. Czerniakowska, A. Daniluk, P. Figurny,
M. Fiszer, Z. Galias, L. Gasiński, A. Gluza,
T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy,
J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz,
T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński,
P. Lizak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak,
M. Matłega, R. Mazurek, H. Mikołajczak,
M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski,
M. Mostowski, W. Olszewski, R. Pikuła,
B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman,
M. Rotkiewicz, A. Ruszel, J. Siwy, Z. Skalik,
A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk,
W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach, K. Witek,
A. Woryna, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus,
K. Zawistawski, P. Zmijewski.



Rozwiązanie zadania M 1015.

Wykażemy, że

$$(*) 10^b \text{ dzieli } a_n + 1 \implies$$

$$\implies 10^{2b} \text{ dzieli } a_{n+1} + 1.$$

Rzeczywiście, jeśli $a_n = k \cdot 10^b - 1$, to
 $a_{n+1} \equiv (k \cdot 10^b - 1)^3 (3k \cdot 10^b - 1) + 4 \equiv$
 $\equiv (3k \cdot 10^b - 1)(3k \cdot 10^b + 1) \equiv 1 \pmod{10^{2b}}.$

Ponieważ $10|a_0 + 1$, więc z (*) wynika, że
 $10^2|a_1 + 1$ i przez indukcję $10^{2^n}|a_n + 1$.
Zatem a_{10} kończy się co najmniej 1024
dziesiątkami.



Rozwiązanie zadania M 1016.

$7 \cdot 0,143 = 1,001!$! Gdyby

$$\frac{a}{b} = 0, \dots, 143 \dots,$$

to

$$10^m a - n = b \cdot 0,143 \dots \in \mathbb{Z}$$

dla pewnych liczb całkowitych m, n .
A zatem również

$$7 \cdot b \cdot 0,143 \dots - b \in \mathbb{Z}.$$

Ale

$$0 < 0,001 \cdot b \leq 7 \cdot b \cdot 0,143 \dots - b <$$

$$< 0,008 \cdot b \leq 1.$$

Autorzy pozostałych dobrych rozwiązań (nie prostszych od firmowego): **J. Cisko, M. Peczarski, T. Rawlik, M. Adamaszek, M. Kieza.**

Zadanie 433. [$f = P/Q$ – funkcja wymierna; $f(x)^2 - f(x^2) = \text{const} \implies f = ?$]
($WT=2,53$; $LPR=5$). Wszystkie poprawne rozwiązania (**J. Cisko, B. Dyda, P. Kumor, M. Peczarski, W. Bednarek**) podobne do firmowego, na ogół przedstawione nieco zgrabniej, ale i tak dość długo. Prowadzący *Ligę* przyznaje się szczerze, iż zadanie to zamieścił w nadziei, że może ktoś z uczestników znajdzie rozwiązanie wyraźnie krótsze i bardziej eleganckie. . .

Zadanie 435. [Słowa binarne: *trójniak* – słowo postaci AAA , gdzie A – dowolne słowo; czy można, startując od słowa 01 i wstawiając bądź wykreślając trójniaki, uzyskać słowo 10?] ($WT=1,66$; $LPR=11$). Sporo dobrych rozwiązań, w większości izomorficznych z firmowym. Jedynie **J. Klisowski** i **P. Kumor** stosują nieco inną metodę: *nieporządkiem* w słowie $W = x_1 x_2 \dots x_n$ nazwijmy każdą parę (i, j) taką, że $1 \leq i < j \leq n$, $x_i = 1$, $x_j = 0$; liczba nieporządków w słowie, brana modulo 3, okazuje się być niezmiennikiem operacji dopuszczalnych w zadaniu – stąd negatywna odpowiedź na postawione pytanie.

Stosując tę metodę, **J. Klisowski** znajduje uogólnienie: rozważa k -niaki, czyli słowa postaci $AA \dots A$ (k -krotne powtórzenie) i wykazuje, że liczba nieporządków w słowie binarnym, brana modulo k (dla k nieparzystych) oraz modulo $k/2$ (dla k parzystych), jest niezmiennikiem operacji wstawiania bądź wykreślania k -niaków.

Zadanie 436. [$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalna, $f(2x) = f(x) + x f'(2x) \implies f = ?$] ($WT=2,63$; $LPR=6$). Wszystkie dobre rozwiązania takie, jak firmowe. Ich autorzy: **J. Cisko, A. Daniluk, P. Kumor, J. Olszewski, M. Peczarski, T. Wietecha.**

Zadanie 441. [$W(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$); $T(x) = x^2 + px + q$; $p = 2 - a + b$; $q = W(-1)$; T ma pierwiastek nieujemny $\implies W$ ma pierwiastek rzeczywisty] ($WT=2,84$; $LPR=6$). To zadanie, w naiwnym zamierzeniu redaktora *Ligi* „łatwe”, rozwiązali jedynie: **P. Kumor, J. Olszewski, M. Peczarski, T. Wietecha, J. Cisko, B. Dyda**; rozwiązania identyczne z firmowym lub nieco bardziej okrzęzne.

Zadanie 442. [Czy istnieje funkcja $f: \langle 1; \infty \rangle \rightarrow \langle 1; \infty \rangle$ ciągła, rosnąca i taka, że funkcja $g(x) = f(x)/x$ przyjmuje wszystkie wartości dodatnie?] ($WT=2,12$; $LPR=9$). W rozwiązaniu firmowym był przykład funkcji o tych własnościach, przedziałami liniowej – i podobne przykłady podawali w większości uczestnicy ligi. Niektórzy jednak, wiedzeni poczuciem estetyki, znajdowali funkcje wyrażalne pojedynczym wzorem analitycznym:

$$f(x) = x^{1+\frac{1}{2} \sin \ln \ln x} \quad \text{dla } x > 1, \quad f(1) = 1 \quad (\mathbf{A. Daniluk});$$

$$f(x) = x^{1+\frac{1}{3} \ln x \cdot \sin \ln(1+\ln x)} \quad (\mathbf{B. Dyda});$$

$$f(x) = 1 + x^2(1 + \sin \ln \sqrt{x}) \quad (\mathbf{J. Olszewski});$$

i jeszcze taki smakowity przykładzik (ponownie **A. Daniluk**):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{2^n} h(x - 2^{2^n} + 1),$$

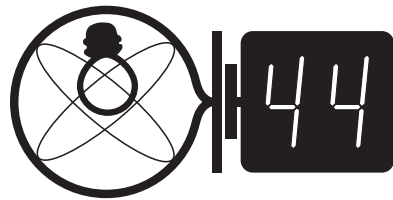
$$h(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x \leq 0. \end{cases}$$

Czytelnikom proponujemy niezbyt trudne sprawdzenie, że wszystkie te funkcje istotnie mają wymagane własności.

Zadanie 443. [Słowa z alfabetu $\{0, 1, 2\}$; A_n – zbiór n -słów bez bloku 11 ani 22; B_n – zbiór n -słów bez bloku 012 ani żadnej jego permutacji $\implies 3|A_n| = |B_{n+1}|$] ($WT=1,70$; $LPR=10$). **M. Adamaszek, J. Cisko, J. Olszewski, M. Peczarski, T. Wietecha** udzielili nam lekcji, jak należy przeprowadzić dowód: niech C_n będzie zbiorem tych słów ze zbioru B_n , które zaczynają się znakiem 0; ponieważ $|B_n| = 3|C_n|$, wystarczy dowieść, że $|A_n| = |C_{n+1}|$; to zaś wynika ze spostrzeżenia, że funkcja $(x_0 x_1 \dots x_n) \mapsto (y_1 \dots y_n)$, gdzie $y_i = x_i - x_{i-1} \pmod{3}$, odwzorowuje zbiór C_{n+1} bijektywnie na A_n .

Pozostałe rozwiązania, w tym i firmowe, polegały na wyprowadzeniu wzorów rekurencyjnych dla rozważanych licznosci – też dobrze, ale mniej pięknie, niż wskazanie bijekcji.

Redaguje Jerzy B. BROJAN



Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 2003

352. Jednorodny pręt może się obracać bez tarcia wokół poziomej osi osadzonej w klocku spoczywającym na poziomej powierzchni (rys. 1). Jaka jest minimalna wartość współczynnika tarcia między klockiem a powierzchnią niezbędna do tego, aby po odchyleniu pręta do poziomu i puszczeniu klocek nie ruszył z miejsca? Masa klocka jest pomijalnie mała w porównaniu z masą pręta.

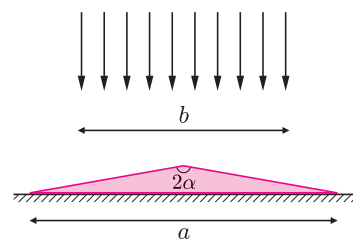


Rys. 1

353. W doświadczeniu opisanym w jednym z zeszłorocznych numerów *Wiedzy i Życia* badano zimne neutrony (tzn. neutrony o bardzo małej energii kinetycznej) odbijające się od poziomej powierzchni i wykryto ich kwantowe poziomy energetyczne w polu

grawitacyjnym Ziemi. Według podanej informacji wysokość stopnia między sąsiednimi poziomami wynosiła $15 \mu m$. Zastosować analizę wymiarową w celu potwierdzenia tej wartości (co do rzędu wielkości).

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/2002

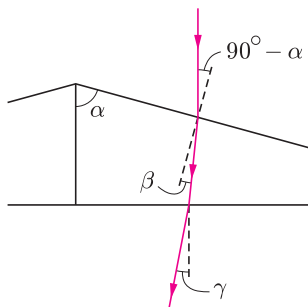


Rys. 2

344. Na powierzchni poziomej może poruszać się bez tarcia pryzmat, którego przekrój poprzeczny jest trójkątem równoramiennym o podstawie a i kącie łamiącym $2\alpha = 160^\circ$ (rys. 2). Współczynnik załamania szkła pryzmatu jest równy $n = 1,5$.

Na pryzmat skierowano pionowo od góry wiązkę światła o szerokości $b = (3/4)a$ i mocy $P = 8000 \text{ W}$, równo rozłożonej na tej szerokości. Naszkicować

344. Kąt padania światła na powierzchnię pryzmatu (rys. 4) jest równy $90^\circ - \alpha$, więc zgodnie z prawem Snella kąt załamania β jest dany wzorem $\sin \beta = \frac{1}{n} \cos \alpha$. Kąt padania na poziomą ściankę wynosi $90^\circ - \alpha - \beta$, a kąt załamania γ znajdziemy po powtórnym zastosowaniu prawa Snella



Rys. 4

$$\sin \gamma = n \cos(\alpha + \arcsin(\frac{1}{n} \cos \alpha)) = 0,0877.$$

Jeśli energia fotonu jest równa E , to składowa pozioma jego pędu po załamaniu w pryzmacie wynosi $(E \sin \gamma)/c$. Ze wzoru $\vec{F} = d\vec{P}/dt$ wnioskujemy, że gdy moc wiązki padającej na jedną ze ścianek pryzmatu wynosi P_1 , to wynikająca stąd siła pozioma działająca na pryzmat ma wartość $(P_1 \sin \gamma)/c$.

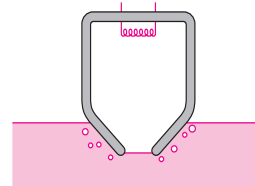
Pozostaje nam teraz tylko kwestia rozkładu mocy wiązki na obie ścianki pryzmatu. Zauważmy, że gdy przesunięcie x pryzmatu jest mniejsze od $\frac{1}{8}a$, to wraz ze wzrostem x liniowo rośnie jedna część tej mocy (oznaczymy ją P_1), a maleje druga (P_2); ponieważ zwroty odpowiednich sił są przeciwne, więc wypadkowa siła rośnie „podwójnie”. W przedziale $\frac{1}{8}a < x < \frac{3}{8}a$ siła wypadkowa także rośnie ze wzrostem x , ale wynika to już tylko ze spadku P_2 , ponieważ ścianka 1 jest już oświetlona na całej szerokości i wartość $P_1 = \frac{2}{3}P$ pozostaje stała. Dla $x = \frac{3}{8}a$ wartość P_2 spada do zera, a siła osiąga wartość maksymalną równą

$$F = (2P \sin \gamma)/3c = 1,56 \mu N.$$

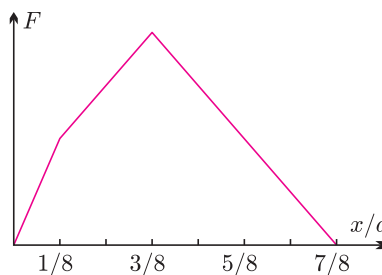
Przypominamy treść zadań:

wykres siły F działającej na pryzmat w kierunku poziomym, w zależności od przesunięcia x środka pryzmatu względem środka wiązki. Obliczyć maksymalną wartość tej siły. Pominąć odbicie światła od którejkolwiek z rozpatrywanych powierzchni.

345. Naczynie o porowatych ściankach włożono otworem do wody (rys. 3). Gdy włączono spiralę grzejną, z naczynia zaczęły wydobywać się pęcherzyki powietrza, przy czym proces ten miał charakter stacjonarny (nie miał po ustaleniu się temperatury). Wyjaśnić przyczynę zjawiska.



Rys. 3



Rys. 5

Przy dalszym wzroście x siła zmniejsza się, gdyż coraz mniejsza część wiązki pada na pryzmat. Spadek siły do zera następuje dla $x = \frac{7}{8}a$. Wykres – zob. rys. 5.

345. Załóżmy wstępnie, że naczynie jest zamknięte, i między powietrzem wewnątrz naczynia a powietrzem zewnętrznym występuje równowaga, tzn. liczba cząsteczek przenikająca przez pory na zewnątrz i do wewnątrz jest jednakowa. Prawdopodobieństwo trafienia cząsteczki do małego otworka w ściance naczynia jest proporcjonalne do drogi przebytej przez cząsteczkę, a zatem liczba cząsteczek trafiająca w ciągu sekundy do otworka jest proporcjonalna do iloczynu liczby cząsteczek na jednostkę objętości n i średniej prędkości cząsteczek v_{sr} . Stąd $n_1 v_{1sr} = n_2 v_{2sr}$. Prędkość średnia jest proporcjonalna do pierwiastka z temperatury absolutnej T , czyli $n_1 \sqrt{T_1} = n_2 \sqrt{T_2}$.

Z drugiej strony, ciśnienie jest proporcjonalne do iloczynu nT (por. równanie Clapeyrona). Wynika stąd, że w naczyniu, gdzie temperatura jest wyższa od zewnętrznej, ciśnienie powietrza osiąga także wyższą wartość. Ostatecznie wnioskujemy, że w naczyniu z otworem założony na początku stan równowagi nie utrzyma się i powietrze będzie z niego wypływać w postaci pęcherzyków.

Rozszerzona czołówka
ligi zadaniowej **Klub 44F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
340 ($WT = 1,25$) i **341** ($WT = 2,00$)
z numeru 6/2002

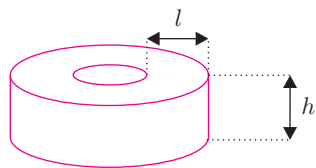
Aleksander Surma	Myszków	3 - 42,81
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	1 - 42,62
Marek Wójcicki	Szczecin	2 - 37,65
Tomasz Rudny	Warszawa	29,50
Andrzej Idzik	Bolesławiec	4 - 28,89
Grzegorz Miłoś	Mielec	24,40
Tomasz Wietecha	Tarnów	4 - 17,25
Marian Lupieżowiec	Gliwice	16,71
Jacek Konieczny	Poznań	12,31
Leszek Grzanka	Chechło	10,98
Michał Józwiowski	Błonie	9,32
Przemysław Gadziński	Środa Śląska	1 - 8,61
Marcin Misiak	Poznań	8,16
Kazimierz Gryszko	Gliwice	7,93
Piotr Kumor	Olsztyn	7,64
Jacek Piotrowski	Rzeszów	1 - 7,59

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2000-2002 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 7 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

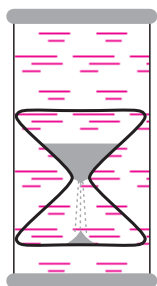
Weterani **Klubu 44 F**
(w kolejności uzyskiwania
statusu Weterana):

P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma,
P. Gworys, A. Idzik (4), T. Wietecha (4),
J. Łazuka

(jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana została odpowiednia liczba).



Rys. 1



Rys. 2

Pozostali członkowie **Klubu 44 F**
(alfabetycznie)
„dwukrotni”:

J. Lipkowski, P. Perkowski, M. Wójcicki;

„jednokrotni”:

A. Borowski, P. Gadziński, A. Gawryszczak,
A. Gluza, W. Kacprzak, B. Mikieliewicz,
L. Motyka, R. Musiał, A. Nowogrodzki,
J. Piotrowski, T. Rawlik, R. Repucha,
J. Stelmach, L. Szalast, P. Wach.

Uczestnicy ubiegłorocznego – piątego już – Turnieju Zadań z Fizyki (organizowanego w ramach warszawskiego Festiwalu Nauki) reprezentowali wyjątkowo szeroki przekrój wieku i wykształcenia, gdyż obok gimnazjalistów na sali znaleźli się absolwenci wyższych uczelni. Pierwsze dwie nagrody – kalkulatory programowalne – wygrali **Piotr Sobolewski** i **Paweł Huryn**. Dalsze miejsca były premiowane nagrodami książkowymi ufundowanymi przez Państwowe Wydawnictwo Naukowe, a wszyscy uczestnicy dostali ponadto kilka numerów *Delty*. Niektóre zadania turniejowe zamieścimy w *Delcie* 9/2003 poświęconej VI Festiwalowi Nauki (z 2002 r.).

A oto najciekawsze rozwiązania zadań z ostatniego rocznika, przysłane przez naszych Czytelników:

Zadanie 325. [Tor plamki na ekranie, gdy obracamy oscyloskop w polu magnetycznym Ziemi] (współczynnik trudności $WT = 2,62$, liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 3$). W rozwiązaniu „firmowym” stwierdzono, że przy danych wartościach liczbowych zmiana kierunku siły działającej na wiązkę elektronów jest niewielka i można zastosować wzór na przesunięcie w ruchu jednostajnie zmiennym. Dwóch Klubowiczów (**T. Wietecha** i **M. Wójcicki**) ujęło się ambicją i spróbowało przeanalizować ruch elektronów ściśle. Obliczenia okazały się tak skomplikowane, że trudno je było doprowadzić do końca, a wykrycie źródła błędu w jednym z wyników przekroczyło siły redaktora tej rubryki. Wyciągnijmy z tego morał: o ile tylko jest to dopuszczalne, trzeba stosować uproszczenia, a ewentualnie w następnej kolejności dopiero badać potrzebę i możliwość odejścia od nich. Trzecie poprawne rozwiązanie (ale także z drobnym błędem) – **J. Piotrowski**.

Zadanie 331. [Jaka budowa rdzenia autotransformatora zapewni najlepsze wytłumienie prądów wirowych?] ($WT = 2,80$, $LPR = 2$). Zamiast wziąć pod uwagę dwie składowe prądu – silniejszą wokół przekroju rdzenia i słabszą wzdłuż rdzenia (jak w rozwiązaniu „firmowym”) **T. Wietecha** zbadał problem ciekawy, lecz nieco inny – jak zależy wartość mocy cieplnej wydzielonej w prostokątnym przekroju rdzenia od jego wymiarów. Według otrzymanego wyniku dla $l > h$ (na rysunku 1 przypominamy sens tych parametrów) korzystniej jest zwinąć rdzeń z długiej taśmy o szerokości h , natomiast dla $l < h$ lepiej jest zestawić rdzeń z płaskich kółek z dziurką ułożonych w stos. Z kolei **M. Wójcicki** przyjrzał się spiralnemu przekrojowi rdzenia zwiniętego z długiej taśmy i doszedł do wniosku, że niezerowa wartość kąta między liniami pola magnetycznego (które są okręgami) a spiralą powoduje efektywne pogrubienie taśmy i ułatwia w ten sposób powstawanie prądów wirowych. Rzeczywiste znaczenie tego efektu wydaje się jednak wątpliwe.

Zadanie 333. [Dlaczego klepsydra z piaskiem, pływająca w cylindrze z cieczą (rys. 2), po obróceniu cylindra zatrzymuje się na pewien czas przy jego dnie?] ($WT = 3,20$, $LPR = 0$). Obok podanego wyjaśnienia (klepsydra „chciałaby” się obrócić, dlatego przytrzymuje ją tarcie) możliwe do zaakceptowania byłyby i inne argumenty, o ile zostałyby przedstawione przekonująco i logicznie. Trudno jednak przyjąć tezę jednego z Czytelników, że przyczyną jest sprężystość szkła i jego odkształcenie spowodowane spadającym piaskiem! Błędne jest też – jak sądzę – zawarte w dwóch innych listach twierdzenie, że przyczyną jest coraz niższa wysokość spadku piasku i malejąca w związku z tym siła nacisku. Spójrzmy bowiem na ruch środka masy: przesuwa się on w dół, a rosnąca wysokość dolnej górnicy oznacza, że tempo jego opadania maleje, czyli przyspieszenie środka masy jest skierowane w górę; w rezultacie klepsydra powinna raczej być dodatkowo dociskana do dna.

Zadanie 335. [Częstość drgań powietrza w butelce] ($WT = 1,83$, $LPR = 3$). Jak stwierdził **A. Idzik**, analizę tego problemu można znaleźć w podręczniku Crawforda *Fale*. Pozostałe dobre rozwiązania – **T. Wietecha** i **M. Józwiowski**.

Zadania 336. [Równowaga sześcianu spoczywającego na dwóch prętach] ($WT = 1,15$, $LPR = 2$) i **337.** [Prędkość spadania przewodzącego pierścienia w zmiennym polu magnetycznym] ($WT = 1,00$, $LPR = 2$). Zadania w tej serii nie były szczególnie łatwe, ale ponieważ dobre rozwiązania przysłali akurat tylko dwaj „najtężsi” zawodnicy (**A. Idzik** i **T. Wietecha**), więc współczynniki WT okazały się niskie, a zysk punktowy – niewielki. Cóż robić, taki jest regulamin!



Rozwiązanie zadania F 590.

Jeśli pręt porusza się z prędkością v , to także ciecz, ponieważ nieściśliwa, przecieka między prętem a ściankami naczyń, w przeciwną stronę niż pręt, z prędkością u . Przy czym $S_1 v = S_2 u$, a więc $\pi r^2 v = \pi(R^2 - r^2)u$, stąd $u = vr^2/(R^2 - r^2)$. Prędkość u cieczy jest jednakowa wszędzie, oprócz niewielkiego obszaru koło końców pręta. Ale jeśli spełniony jest warunek $l \gg r$, to wkład tych cząstek do całkowitej energii można zaniedbać.

Z zasady zachowania energii przy pionowym ruchu pręta zachodzi

$$\rho_2 \pi r^2 l v^2 / 2 + \rho_1 \pi (R^2 - r^2) l u^2 / 2 = (\rho_1 - \rho_2) \pi r^2 l g h.$$

Stąd

$$v = \sqrt{\frac{2gh \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)}{\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{r^2}{R^2 - r^2}}},$$

$$a = \frac{v^2}{2h} = \frac{g \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)}{\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{r^2}{R^2 - r^2}}.$$



Rozwiązanie zadania M 1017.

Niech $0, a_1 a_2 \dots$ będzie zapisem dziesiętnym 3^{-100} .

Wówczas

$$10^{m-1} \cdot 3^{-100} = \overline{\dots, a_m a_{m+1} \dots},$$

więc $0 < r = 10^{m-1} \bmod 3^{100} < 3^{100}$ spełnia $r \cdot 3^{-100} = \overline{0, a_m a_{m+1} \dots}$ oraz $[10^9 \cdot r \cdot 3^{-100}] = \overline{a_m a_{m+1} \dots a_{m+8}}$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

Wystarczy zatem uzasadnić, że istnieje liczba r postaci $10^k \bmod 3^{100}$ spełniająca

$$123456789 < r \frac{10^9}{3^{100}} < 123456789 + 1.$$

Wykażemy, że

$$(*) \{10^k \bmod 3^{100} : k \in \mathbb{N}\} = \{1 \leq l < 3^{100} : l \equiv 1 \pmod{9}\}.$$

Ponieważ $\frac{10^9}{3^{100}} < \frac{1}{9}$, więc (*) zapewni nam istnienie takiej liczby r . Oczywiście $10^k \bmod 3^{100} \equiv 1 \pmod{9}$.

Inkluzja w drugą stronę wynika z następującej obserwacji:

$$(**) 3^{n+1} | 10^{3^{n-1}} - 1, \text{ ale } 3^{n+2} \nmid 10^{3^{n-1}} - 1,$$

którą można łatwo udowodnić przez indukcję.

Dla takich liczb a, n , że $\text{NWD}(a, n) = 1$, oznaczymy przez

$$\text{ord}_n(a) = \min\{i \in \mathbb{N} : a^i \equiv 1 \pmod{n}\}.$$

Z obserwacji (**) wynika, że

$$10^{3^{98}} \equiv 1 \pmod{3^{100}},$$

skąd $\text{ord}_{3^{100}} 10 | 3^{98}$, ale z tej samej obserwacji $\text{ord}_{3^{100}} 10 \neq 3^s$ dla $s < 98$. Zatem $\text{ord}_{3^{100}} 10 = 3^{98}$ i zbiory po obu stronach równości (*) mają po tyle samo (3^{98}) elementów, co kończy dowód.

Patrz w niebo

Błysk meteoru na niebie to oznaka, że do ziemskiej atmosfery wpadła niewielka bryłka skalna lub metaliczna, która wskutek wielkiej prędkości uległa stopieniu, spaleni i rozproszeniu na niezauważalny pył. Taki zazwyczaj jest los bryłek (ciał meteorowych, meteoroidów) wpadających do atmosfery, bowiem ich prędkość jest rzeczywiście ogromna i wyraża się w dziesiątkach kilometrów na sekundę. W sprzyjających okolicznościach prędkość meteoroidu (względem Ziemi) może być nie tak wielka, choćby wtedy, gdy jego ruch jest zbieżny z ruchem Ziemi. Okruch taki może przetrwać lot przez atmosferę i może zostać potem znaleziony jako meteoryt. Na lądzie nie jest łatwo odróżnić meteoryt od zwykłych kamieni – pozaziemskie pochodzenie bryłki stwierdza się w wyniku laboratoryjnych badań mineralogicznych. Za to kosmiczne pochodzenie kamienia jest praktycznie stuprocentowo pewne, gdy znajdzie się go w sterylnych lodach Antarktydy lub Grenlandii, gdyż ziemskich kamieni nie ma prawa tam być. W każdym razie dla każdego meteoroidu droga przez atmosferę jest zawsze niebezpieczna i spotkanie z Ziemią najczęściej owocuje zniszczeniem go w wysokiej temperaturze wywołanej tarciem o atmosferę.

Tymczasem 22 marca 1998 na małą miejscinę Monahans w Teksasie spadły dwa meteority wielkości pięści – zdarza się – z których jeden niedaleko grupy dzieci grających w koszykówkę – też nic w tym osobliwego. Meteority wkrótce powędrowały do laboratorium NASA, gdzie stwierdzono rzecz mocno osobliwą, mianowicie obecność w nich bardzo drobnych (uwaga!) kropelek ciekłej wody. Kropelki te tkwiły w kryształkach niemal czystej soli, które znajdowano już w innych meteorytach. Czy z badań soli i samej wody wyniknie coś ważnego, to już inna sprawa, w każdym razie jest absolutnie niezwykle, że skoro meteoroidy na ogół spalają się doszczętnie podczas przelotu przez atmosferę, w tym egzemplarzu nawet woda ocalała!

Tomasz KWAST

Luty

W lutowe wieczory wzrok przyciąga oczywiście Orion i otaczające go bardzo jasne gwiazdy: Aldebaran w Byku, Procyon w Małym Psie i Syriusz w Wielkim Psie. Przez ten obszar nieba przechodzi także Droga Mleczna, co w sumie stwarza widok wyjątkowo piękny. Na południe od Oriona leży Zając, a jeszcze dalej Gołąb – gwiazdozbiór bardzo niepozorny, w dodatku którego jedynie północna część wyłania się zimą spod horyzontu w naszej szerokości geograficznej – jest więc w Polsce właściwie nieznaną. Warto jednak wiedzieć, że w tym gwiazdozbiórze znajduje się obłok ciemnej materii międzygwiazdowej, który dawni badacze obarczali odpowiedzialnością za wystąpienie epoki lodowej. Pomysł ten wziął się zapewne stąd, że Słońce wraz z układem planetarnym porusza się (względem gwiazd okolicznych) w kierunku Herkulesa, a Gołąb leży dość dokładnie w przeciwnej stronie nieba. Można było więc przypuszczać, że kiedyś Układ Słoneczny mógł przechodzić przez obłok w Gołębiu, a wtedy wskutek przesłonięcia Słońca przez materię obłoku mogło nastąpić globalne ochłodzenie Ziemi. Obecnie uważa się, że przyczyna zlodowaceń nie jest aż tak kosmiczna, że mianowicie powoduje je ruch płyt kontynentalnych i wynikające stąd zmiany cyrkulacji wód oceanicznych.

Wenus jest w Strzelcu, a Mars w Wężowniku i obie te planety wschodzą nad ranem. Saturn jest w Byku i widać go w pierwszej połowie nocy, a Jowisz w Raku, przez co widać go przez całą noc – 2 II jest jego opozycja, czyli znajduje się wtedy po przeciwnej stronie Ziemi co Słońce. 4 II największą kątową odległość od Słońca osiągnie Merkury, dzięki czemu można próbować szukać go nad ranem we wschodniej części nieba. 1 II wypada nów Księżyc, a 17 II pełnia. Żadnych zaćmień ani zakryć jasnych obiektów w lutym nie będzie.

T. K.

O RÓWNYCH SUMACH WSZYSTKICH POTĘG

Dziś ostatni artykuł o równych sumach potęg. Ponieważ nie chcę, aby któremukolwiek wykładnikowi było smutno, że o nim nigdy nie wspominałem, napiszę od razu o wszystkich.

Zachodzi takie oto

Twierdzenie: Dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ istnieje nietrywialne rozwiązanie równania $(n, n+1, n+1)$, tzn. takie liczby całkowite dodatnie $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{n+1}$ oraz $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_{n+1}$, że

$$a_1^n + a_2^n + \dots + a_{n+1}^n = b_1^n + b_2^n + \dots + b_{n+1}^n,$$

a przy tym układy $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ oraz $(b_1, b_2, \dots, b_{n+1})$ nie są identyczne.

Dowód: Niech N będzie dużą liczbą całkowitą, którą sprecyzujemy w dalszej części dowodu. Rozważmy zbiór wszystkich układów liczb całkowitych dodatnich $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$, gdzie $N \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{n+1}$.

Liczba takich układów jest nie mniejsza niż $L = \frac{N^{n+1}}{(n+1)!}$, gdyż wszystkich układów (niekoniecznie nierosnących) jest N^{n+1} , a jeden układ nierosnący odpowiada co najwyżej $(n+1)!$ permutacjom swoich elementów – może być ich mniej, gdy są wśród nich powtórzenia. Tak naprawdę, dokładna liczba nierosnących układów jest **równa** $\binom{N+n}{n+1}$, ale wygodniej jest nam posłużyć się podanym wyżej oszacowaniem.

Każdemu układowi przypiszmy sumę n -tych potęg jego elementów. Taka suma jest liczbą całkowitą dodatnią nie przekraczającą $S = (n+1) \cdot N^n$. Jeśli teraz $L > S$, czyli jeśli rozważanych układów jest więcej niż możliwych sum, które można im przypisać, to na mocy zasady szufladkowej Dirichleta istnieją dwa układy, którym przypisano tę samą sumę. Mamy wówczas

$$a_1^n + a_2^n + \dots + a_{n+1}^n = b_1^n + b_2^n + \dots + b_{n+1}^n,$$

przy czym układy liczb po obu stronach równania są różne, ale mogą mieć wspólne elementy.

Do zakończenia dowodu pozostaje wskazać takie N , aby $L > S$, czyli $\frac{N^{n+1}}{(n+1)!} > (n+1) \cdot N^n$, co zachodzi przy $N > (n+1) \cdot (n+1)!$.

Co daje powyższe twierdzenie?

Dla $n = 2$ jego teza na pewno nie zwala z nóg. Oto bowiem dowiadujemy się, że istnieją równe sumy trzech kwadratów liczb całkowitych dodatnich.

Każdy, kto umie rachować w pamięci do trzydziestu, od razu zauważy, że $27 = 5^2 + 1^2 + 1^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2$.

Umiejętność liczenia do pięćdziesięciu może zaowocować takim oto przykładem

$$\begin{aligned} 12345678901234567890^2 + 7^2 + 1^2 &= \\ &= 12345678901234567890^2 + 5^2 + 5^2. \end{aligned}$$

Jednak dla $n = 24$ dostajemy już coś interesującego. Otóż zgodnie z twierdzeniem istnieje nietrywialne rozwiązanie równania

$$a_1^{24} + a_2^{24} + \dots + a_{25}^{24} = b_1^{24} + b_2^{24} + \dots + b_{25}^{24}$$

w liczbach nie przekraczających

$$25 \cdot 25! + 1 = 387780251083274649600000001.$$

Do dziś nie jest jednak znany przykład takiego rozwiązania. Twierdzenie mówi, że rozwiązanie istnieje, ale nie daje żadnej wskazówki, jak takie rozwiązanie skonstruować.

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (35)

Zanim Kolumb odkrył Amerykę, sądzono, że Ziemia jest płaska. Pogląd taki nie był pozbawiony racji, jako że płaska jest nie tylko Ziemia, ale nawet cała przestrzeń. Zachodzi bowiem następujące

Twierdzenie: Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n , dowolnych n różnych punktów przestrzeni leży w jednej płaszczyźnie.

Dowód: Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na n .

Tradycyjnie, sprawdzenie prawdziwości twierdzenia dla $n = 1$ pozostawiamy Czytelnikowi.

Przeprowadzimy krok indukcyjny. Załóżmy, że n jest taką liczbą, dla której teza twierdzenia jest prawdziwa. Wykażemy prawdziwość twierdzenia dla $n + 1$.

Niech dane będą dowolne punkty przestrzeni $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}$. Zgodnie z założeniem indukcyjnym, dowolnych n punktów przestrzeni leży w jednej płaszczyźnie, w szczególności w jednej płaszczyźnie leżą punkty $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$. Innymi słowy, punkt A_n leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez punkty $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$. Podobnie punkty $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_{n+1}$ leżą w jednej płaszczyźnie, czyli punkt A_{n+1} także leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez punkty $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$. Zatem wszystkie punkty $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}$ leżą w jednej płaszczyźnie, a mianowicie w płaszczyźnie wyznaczonej przez punkty $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$.

Pewnie widzisz już, Drogi Czytelniku, gdzie dowód się „spieje”. Punkty $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ wcale nie muszą wyznaczać płaszczyzny, bo mogą być współliniowe.

Ale to tylko pozorna trudność. Można przecież tak ponumerować dane punkty, aby punkty o numerach od 1 do $n-1$ nie leżały na jednej prostej. Takie ponumerowanie nie jest możliwe tylko wtedy, gdy **dowolne** $n-1$ spośród danych $n+1$ punktów są współliniowe. Ale wówczas (przy dowolnej numeracji) punkty $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-2}, A_{n-1}$ byłyby współliniowe, czyli punkt A_{n-1} leżałby na prostej wyznaczonej przez punkty $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-2}$. Podobnie, na mocy współliniowości punktów $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-2}, A_n$ na tejże prostej leżałby punkt A_n , a dzięki współliniowości punktów $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-2}, A_{n+1}$ także punkt A_{n+1} musiałby leżeć na tej samej prostej. Tak więc w takim przypadku wszystkie dane punkty byłyby nie tylko współpłaszczyznowe, ale nawet współliniowe.

Tym samym dowód indukcyjny jest zakończony, a płaskość Ziemi, wraz z całą przestrzenią, dowiedziona.

Korespondencję do Γ -limatiasu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCLAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl