

SPIS TREŚCI NUMERU 9 (352)

Hipoteza Riemanna <i>Paweł Strzelecki</i>	str. 2
Zadania	str. 4
Odległości w Drodze Mlecznej <i>Paweł Pietrukowicz</i>	str. 5
Mała Delta	str. 6
Jak wysoko płyną nad nami obłoki? <i>Leszek Sidz</i>	str. 8
Aktualności	str. 9
O Hipotezie Poincarégo <i>Tadeusz Koźniewski</i>	str.10
Czy można zobaczyć elektron? Dlaczego elektron nie spada na jądro? <i>Piotr Zalewski</i>	str.12
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Wrzesień	str.16
Gammalimatias	str.17

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula, Bogdan Cichocki – wiceprzewodniczący, Krzysztof Ciesielski, Jan A. Gaj, Piotr Goldstein, Andrzej Hrynkiewicz, Tadeusz Jarzębowski, Wiesław A. Kamiński, Marta Kicińska-Habior, Zbigniew Marciniak, Janusz Matkowski, Andrzej Mąkowski, Adam Michalec, Zdzisław Pogoda, Grzegorz Sitarski, Weronika Śliwa, Andrzej Woszczyk, Wiesław Żelazko – przewodniczący.

Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol, Krzysztof Biesaga, Ewa Czuchry, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Anna Ludwicka, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Rysunki techniczne: Marcin Adamski

Adres Redakcji: ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa, tel. 853-59-61, 55-33-216.

Skład systemem T_EX wykonała Redakcja, e-mail: BARTOL@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2003 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2003 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP SA I O/W-wa, nr 30 10201013 12640143**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na I kwartał 2004 r. wynosi 12 zł.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl

6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII – na I kwartał roku następnego,

do 5 III – na II kwartał roku bieżącego,

do 5 VI – na III kwartał roku bieżącego,

do 5 IX – na IV kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Wybór artykułów archiwalnych: <http://www.wiw.pl>

Wybór artykułów w języku angielskim: <http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wybór artykułów *Małej Delt*: <http://eduseek.ids.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze:

Prawdopodobieństwo

W warszawskich instytucjach naukowych już rośnie VII Festiwal Nauki

Festiwal oznacza święto – ale czy można organizować święto nauki, gdy od kilkunastu już lat nakłady na naukę w Polsce tylko spadają, systematycznie i niezależnie od tego, profesorem jakiej uczelni jest kolejny Minister Finansów (niektórzy nawet zostawali profesorami, służąc Narodowi na tym stanowisku). Szósty warszawski Festiwal ogłosił konkurs na tzw. Katona polskiego (rzymski powtarzał przez wiele lat, że Kartagina powinna być zniszczona, aż ją zniszczono) – hasło, za które nagrodziliśmy Panią Agatę Stasiak z Warszawy, brzmi:

Brak inwestycji w naukę to inwestycja w ignorancję.

Skrzykujemy się co roku w marcu, by móc we wrześniu otworzyć kolejny Festiwal, my, warszawskie środowisko naukowe, niedoinwestowane i niemające posłuchu w żadnych gremiach. Jako nieliczni w naszym kraju (my nie mówimy „w TYM kraju”) wychodzimy z programem pozytywnym, mimo iż nasze warsztaty pracy stają się coraz uboższe, a nasi zdolni absolwenci uczelni wyższych coraz częściej pracę, dobrze płatną i ciekawą, znajdują poza Polską. Festiwal odbywa się przez ostatnich 10 wrześniowych dni. Zapraszamy na imprezy różnorodne tematycznie i w formie: wykłady, debaty, warsztaty, pokazy, filmy, wystawy, wycieczki, dyskusje. Prowadzą je wybitni warszawscy naukowcy i utalentowana naukowa młodzież.

Imprezy cieszą się zmiennym, ale zawsze dużym, powodzeniem: młodzież wychodząca z Wydziałów Fizyki, Matematyki, Chemii, wdycha „ba, gdyby TAK nas w szkole uczono...” Asystenci i studenci starszych lat powtarzają pokazy po kilka razy, mimo iż umawiamy się z nimi tylko na jeden. Nie mieszczą się chętni w salach, w których odbywają się dyskusje socjologiczne i psychologiczne. Można obejrzeć w akcji polskie roboty, lasery, wystawę minerałów, podglądać ptaki w lesie i (w tym roku po raz pierwszy) pokaz tresury psów policyjnych w Jabłonie. Można obejrzeć laboratoryjne mrowisko lub komórki mózgu myszy i ruchy pierwotniaków. Można zabłądzić w „Labiryncie filozofów” i posprzeczać się z bioetykiem na temat eutanazji. Historycy medycyny zaprezentują diagnozy chorób sławnych ludzi, pokażą chorych na obrazach mistrzów. Można też „zajrzeć do ciała ludzkiego” metodą ultrasonografii, zajrzeć do prawdziwej sali operacyjnej.

Będziecie przyjmowani przyjaźnie i z zamiarem jak najciekawszego zaprezentowania naszej pracy. Przyjdźcie koniecznie.

<http://www.icm.edu.pl/festiwal>

Magdalena FIKUS, Wicedyrektor FN,
Przewodnicząca Rady Programowej

Γ-test Jeśli chcesz sprawdzić swoją wiedzę, Drogi Czytelniku, rozwiąż w ciągu 16 minut poniższy test. Zaznacz prawidłowe, Twoim zdaniem, odpowiedzi i sprawdź na 17 stronie, jak wypadłeś. Przy losowym wypełnianiu testu uzyskałbyś średnio 8 poprawnych odpowiedzi, przyzwoity wynik powinien więc być znacznie wyższy.

- Ile pierwiastków ma równanie $x^2 - 6x + 9 = 0$?
a) Jeden.
b) Dwa.
- Rozważamy wielościan będący ostrosłupem o podstawie kwadratowej. Ile wierzchołków ma ten ostrosłup?
a) Jeden.
b) Pięć.
- Czy granica $\lim_{p \rightarrow \infty} \sin(\pi p)$
a) istnieje i jest równa 0,
b) nie istnieje?
- Ile jest liczb naturalnych n spełniających nierówność $n^2 < 10$?
a) Trzy.
b) Cztery.
- Czy zbiór liczb całkowitych jest większy od zbioru liczb całkowitych parzystych?
a) Tak.
b) Nie.
- W pewnym kraju roczna inflacja wynosiła 40%. W ciągu kolejnego roku inflacja zwiększyła się o 25%. Ile była wtedy równa?
a) 65%
b) 50%
- Czy liczba -18 jest 3 razy większa od liczby -6 ?
a) Tak.
b) Nie.
- Czy punkt $(2, 0)$ można otrzymać z punktu $(0, 2)$ przez obrót płaszczyzny o kąt 90° wokół początku układu współrzędnych?
a) Tak.
b) Nie.
- Czy w trójkącie równobocznym wszystkie kąty są równe?
a) Tak.
b) Nie.
- Czy liczby π i $\sqrt{10}$ są sobie równe?
a) Tak.
b) Nie.
- Czy między dowolnymi dwiema różnymi liczbami zespolonymi można postawić znak „<” lub „>”?
a) Tak.
b) Nie.
- Czy punkt przecięcia wysokości może leżeć poza trójkątem?
a) Tak.
b) Nie.
- Ile punktów leży we wnętrzu okręgu?
a) Ani jeden.
b) nieskończenie wiele.
- Czy liczby 105 i 143 mają wspólny dzielnik?
a) Tak.
b) Nie.
- Czy liczbę $\sqrt{7}$ można zapisać w postaci ułamka?
a) Tak.
b) Nie.
- Policzyć boki trójkąta równobocznego opisanego na okręgu o promieniu 1.
a) 3.
b) $2\sqrt{3}$.

Korespondencję do Γ-limitiasu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl

1. Wśród siedmiu problemów, za których rozwiązanie Instytut Claya gotów jest zapłacić milion dolarów, jest hipoteza Riemanna z 1859 roku. Można ją wysłowić tak krótko i sucho, że każdy laik zapyta zdumiony: i to ma być pytanie za milion dolarów? Zacznijmy więc od takiego właśnie sformułowania. Czytelników prosimy o cierpliwość: pod koniec artykułu znajdują równoważne, znacznie bardziej elementarne wersje tytułowej hipotezy.

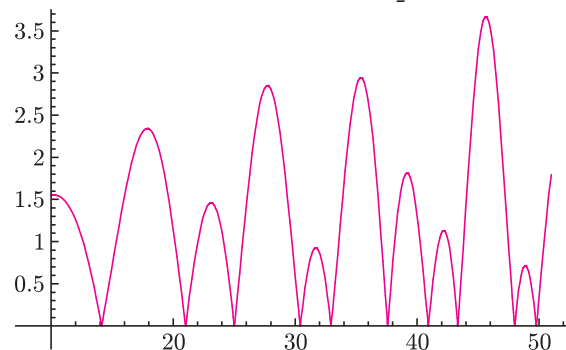
Słynna funkcja ζ Riemanna, dla s rzeczywistych i większych od jedynki, określona jest wzorem

$$(1) \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Metodami analizy zespolonej dowodzi się, że istnieje dokładnie jedna funkcja ζ zmiennej zespolonej, określona na płaszczyźnie nakłutej $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, mająca w całej swej dziedzinie pochodną zespoloną i spełniająca równość (1) dla rzeczywistych $s > 1$. Owa funkcja ma miejsca zerowe dwóch rodzajów: tzw. zera trywialne w punktach $-2, -4, -6, \dots$ i tzw. zera nietrywialne (jest ich nieskończenie wiele) wewnątrz pasa $P = \{z: 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$.

Hipoteza Riemanna głosi:

Jeśli $\rho \in P$ i $\zeta(\rho) = 0$, to $\operatorname{Re} \rho = \frac{1}{2}$.

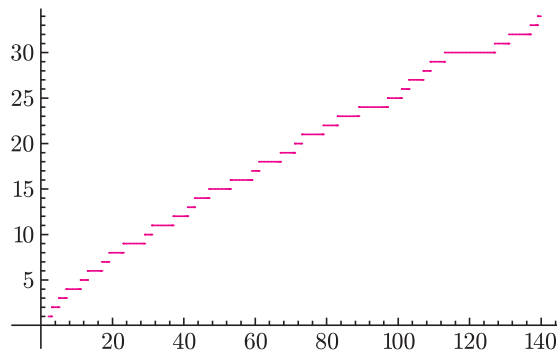


Rys. 1. Wykres $f(t) = |\zeta(\frac{1}{2} + it)|$ i garść nietrywialnych zer funkcji ζ .

Prostą o równaniu $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ matematycy nazywają prostą krytyczną; hipoteza Riemanna głosi więc, innymi słowy, że wszystkie nietrywialne zera funkcji ζ należą do prostej krytycznej. Dlaczego to suche przypuszczenie jest ważne? Otóż funkcja ζ i hipoteza Riemanna są bardzo mocno związane z liczbami pierwszymi. W kolejnych punktach artykułu spróbujemy w ekspresowym tempie naszkicować ów związek (wzory można, w najgorszym razie, potraktować jak dzieła malarstwa abstrakcyjnego).

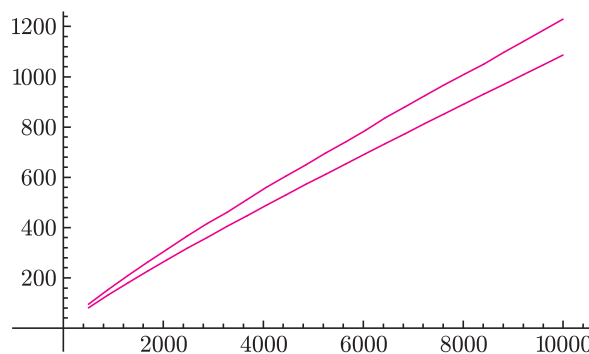
2. Liczby pierwsze pojawiają się wśród innych liczb kapryśnie. Co jakiś czas spotykamy parę bliźniaków, jak np. 3 i 5 czy $33218925 \cdot 2^{169690} \pm 1$, ale istnieją też dowolnie długie przedziały bez żadnej liczby pierwszej – np. dla $n \geq 3$ wszystkie liczby $n! + 2, n! + 3, \dots, n! + n$ są złożone.

Wykres funkcji $\pi(x)$, określonej jako liczba liczb pierwszych w przedziale $[0, x]$, na pierwszy rzut oka wygląda jak przypadkowy zygzak.



Rys. 2. Funkcja $\pi(x)$ dla $x \leq 140$.

Tenże wykres oglądany „z daleka”, tzn. na bardzo dużych przedziałach i w małej skali, wygładza się i porządnie. Można postawić naturalne pytania: jak szybko rośnie $\pi(x)$? Jaka zdefiniowana analitycznym wzorem funkcja dobrze oddaje zachowanie $\pi(x)$?

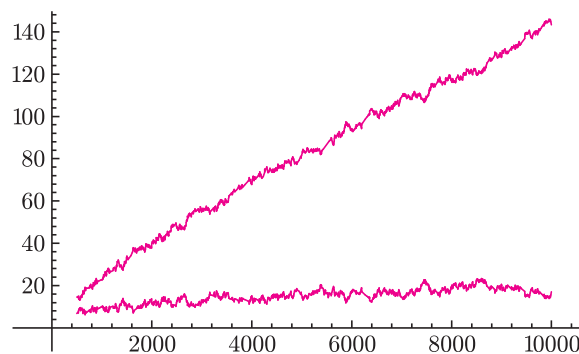


Rys. 3. Funkcja $\pi(x)$ dla $x \leq 10000$ (górny wykres). Dolny wykres to $x/\ln x$. Jak wynika z twierdzenia o liczbach pierwszych, które w 1896 roku udowodnili Hadamard i de la Vallée Poussin, błąd względny przybliżenia $\pi(x) \approx x/\ln x$ dąży do zera dla $x \rightarrow \infty$. (Błąd bezwzględny, niestety, rośnie.)

Gauss, posługując się danymi empirycznymi, sugerował, że

$$(2) \quad \pi(x) \approx \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \operatorname{Li}(x) - \operatorname{Li}(2) \quad \text{dla } x > 2,$$

gdzie $\operatorname{Li}(x)$, tzw. logarytm całkowity, jest na przedziale $(1, \infty)$ tą funkcją pierwotną $1/\ln(x)$, która spełnia warunek $\operatorname{Li}(2) = 1,04\dots$ Przybliżenie Gaussa jest znacznie lepsze od $\pi(x) \approx x/\ln x$.



Rys. 4. Górny wykres to błąd bezwzględny przybliżenia $\pi(x)$ przez $x/\ln x$, dolny wykres – błąd bezwzględny przybliżenia (2).

3. W 1859 roku, w listopadowych sprawozdaniach Berlińskiej Akademii Nauk, ukazała się praca Bernharda Riemanna *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe*, licząca 9 niedużych stron i pełna niezwyklej, dalekosiężnej intuicji. Wyprowadzenia wielu wzorów autor szkicuje szalenie skrótowo lub całkowicie pomija; pełne dowody podali w ciągu kilkudziesięciu późniejszych lat m.in. Hadamard, de la Vallée Poussin i von Mangoldt. Bez dowodu pozostaje do dziś nasza tytułowa hipoteza.

Punktem wyjścia rozważań Riemanna jest pochodząca od Eulera równość

$$(3) \quad \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

gdzie iloczyn nieskończony jest po wszystkich liczbach pierwszych. Riemann szkicuje na dwóch stronach, jak określić prawą stronę dla wszystkich liczb zespolonych $s \neq 1 - i$ tu właśnie mimochodem wtrąca swą hipotezę, poprzedzając ją krótkim *jest bardzo prawdopodobne, że*. Dodaje też, że po kilku nieudanych próbach przestał szukać dowodu, gdyż nie jest to najważniejsze z punktu widzenia jego bezpośrednich planów. Później wprowadza pomocniczą funkcję

$$(4) \quad R(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(\sqrt{x}) + \frac{1}{3}\pi(\sqrt[3]{x}) + \dots,$$

która jest główną bohaterką dalszych jego rachunków. Jak widać, R to funkcja schodkowa, która skacze o 1 w każdej liczbie pierwszej, o $\frac{1}{2}$ w kwadratach liczb pierwszych, o $\frac{1}{3}$ w sześcianach liczb pierwszych itd. Ponieważ $\sqrt[n]{x} < 2$ dla $n > \ln x / \ln 2$, więc suma we wzorze (4) ma zawsze skończenie wiele składników.

Stosując różne bardzo wyrafinowane metody (całkowanie po krzywych w dziedzinie zespolonej, iloczyny nieskończone, wzór na odwrócenie transformaty Fouriera, liczne zmiany kolejności przejść granicznych), Riemann uzyskuje drugi wzór na $R(x)$, mianowicie

$$(5) \quad R(x) = \text{Li}(x) + n(x) + \text{pewien szereg } S(x),$$

gdzie nieistotny składnik $n(x) = -\ln 2 + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\ln t}$ dąży szybko do stałej $-\ln 2$ dla $x \rightarrow \infty$, a $S(x)$ to, z grubsza biorąc, suma wartości $\text{Li}(x^\rho)$ obliczonych dla wszystkich nietrywialnych zer ρ funkcji ζ (ściśła definicja wymaga głębokiego wnikięcia w teorię funkcji analitycznych).

Korzystając z dwóch wzorów na $R(x)$, Riemann zaproponował przybliżenie

$$(6) \quad \pi(x) \approx \text{Li}(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \text{Li}(\sqrt[n]{x}),$$

gdzie współczynnik

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } n \text{ jest iloczynem parzystej} \\ & \text{liczby różnych liczb pierwszych,} \\ -1, & \text{jeśli } n \text{ jest iloczynem nieparzystej} \\ & \text{liczby różnych liczb pierwszych,} \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Dla niezbyt dużych x przybliżenie (6) jest lepsze od tego, które proponował Gauss (gdyby wykres różnicy między lewą i prawą stroną (6) dodać do rysunku 4, to oś x -ów została by dość skutecznie zamazana). Nie to jest jednak najważniejsze. Chodzi o to, że znając wszystkie pierwiastki funkcji ζ , można dokładnie wyznaczyć błąd zarówno przybliżenia (2), jak i przybliżenia (6). Każdy z tych błędów jest najmniejszy właśnie wtedy, gdy wszystkie nietrywialne zera funkcji ζ mają część rzeczywistą równą $\frac{1}{2}$, bo właśnie wtedy sumy częściowe szeregu $S(x)$ mają szczególnie symetryczną postać, co prowadzi do rozmaitych redukcji.

Choćby z tego powodu hipotezę Riemanna uznaje się za najważniejszy nierozstrzygnięty problem teorii liczb.

4. Po tej historycznej dygresji pora na trzy inne przypuszczenia, równoważne hipotezie Riemanna. Pierwsze z nich mocno podkreśla związek hipotezy Riemanna z naszą wiedzą na temat rozkładu liczb pierwszych.

Hipoteza 1 (von Koch, 1901)

Istnieje taka stała C , że

$$(7) \quad |\pi(x) - \text{Li}(x)| \leq C\sqrt{x} \ln x$$

dla każdego $x \geq 2$.

Dużo lepszego oszacowania błędu przybliżenia $\pi(x)$ przez $\text{Li}(x)$ nie ma co oczekiwać: Littlewood wykazał, że istnieją dowolnie duże liczby x , dla których lewa strona jest rzędu $\text{Li}(\sqrt{x}) \ln \ln \ln x$, tzn. można marzyć co najwyżej o rozmaitych logarytmicznych poprawkach nierówności (7).

Warto zaznaczyć, że wynikające z hipotezy Riemanna oszacowania tempa wzrostu funkcji $\pi(x)$ mają nie tylko teoretyczny charakter: zależy od nich np. test pierwszości Millera, stosowany w kryptografii.

Znany dziś inne, zaskakująco elementarne zdanie, równoważne hipotezie Riemanna.

Hipoteza 2 (Lagarias, 2000)

Niech $\sigma(n)$ oznacza sumę dzielników n i niech $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Wtedy dla każdego $n \geq 1$

$$\sigma(n) \leq H_n + e^{H_n} \ln H_n,$$

przy czym równość ma miejsce tylko dla $n = 1$.

Aby wysłowić trzecią hipotezę, podzielimy liczby większe od 1 na trzy klasy: czerwone, niebieskie i bezbarwne. Bezbarwne są te, które dzielą się przez jakikolwiek pełny kwadrat różny od 1. Przykłady liczb bezbarwnych to 72, 99 i 10^{2003} . Czerwone są te, które są iloczynem parzystej liczby różnych czynników pierwszych, np. 6, 15, 210, niebieskie zaś te, które są iloczynem nieparzystej liczby różnych czynników pierwszych, np. 11, 30, czy 1001.

Czytelnik zauważył być może, że bezbarwne są te liczby n , dla których $\mu(n) = 0$, czerwone – te, dla których $\mu(n) = 1$, niebieskie zaś te, dla których $\mu(n) = -1$.

Niech c_k i n_k oznaczają, odpowiednio, liczbę liczb czerwonych i niebieskich w przedziale $[2, k]$ (dla przykładu: $c_{20} = 4$, $n_{20} = 8$).

Hipoteza 3

Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $M > 0$, że

$$|c_k - n_k| \leq M k^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$$

dla wszystkich $k > M$.

Warto wspomnieć, że mocniejsza wersja ostatniej hipotezy,

$$|c_k - n_k| \leq \sqrt{k} \quad \text{dla wszystkich } k \geq 1,$$

znana była od 1897 roku jako hipoteza Mertensa. Dziś jednak wiadomo, że hipoteza Mertensa jest fałszywa dla co najmniej jednej liczby $k < \exp(10^{65})$.

5. Dla tych, którzy wciąż nie są przekonani, czy funkcja ζ ma jakieś poważniejsze związki z teorią liczb, zamieszczamy tabelkę, zaczerpniętą z internetowej *Encyklopedii Matematycznej* Erica Weinsteina. Niech $Q_k(n)$ oznacza liczbę tych liczb naturalnych $\leq n$, które nie dzielą się przez żadną k -tą potęgę.

Oto niektóre z liczb $1/\zeta(k)$ i $Q_k(n)$:

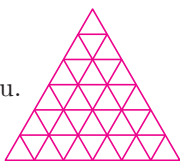
k	$1/\zeta(k)$	$Q_k(1000)$	$Q_k(10^6)$
2	0,607927...	608	607926
3	0,831907...	833	831910
4	0,923938...	925	923939
5	0,964387...	965	964388
6	0,982953...	984	982954



Zadania

Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

We wszystkich poniższych zadaniach rozważamy trójkąt równoboczny o boku n podzielony na trójkąty równoboczne o boku 1 jak na rysunku. Dwa małe trójkąty nazywamy sąsiadami, jeśli mają wspólny bok.



M 1036. Niech punkty $P_1, P_2, \dots, P_k, P_{k+1} = P_1$ będą takie, że P_i, P_{i+1} są środkami sąsiadujących trójkątów, dla $i = 1, 2, \dots, k$. Udowodnić, że k jest liczbą parzystą.

Rozwiązanie na str. 16

M 1037. Niech W będzie wielokątem, którego każdy bok jest odcinkiem łączącym środki dwóch sąsiadujących małych trójkątów. Udowodnić, że pole W jest równe liczbie punktów kratowych leżących wewnątrz W pomnożonej przez $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (punktami kratowymi nazywamy tutaj wierzchołki małych trójkątów).

Rozwiązanie na str. 16

M 1038. Niech bok dużego trójkąta będzie liczbą parzystą. Każdy z małych trójkątów pomalowano na żółto lub niebiesko tak, że każdy wewnętrzny (= ten, który ma 3 sąsiadów) żółty trójkącik ma dokładnie dwóch niebieskich sąsiadów oraz każdy wewnętrzny niebieski trójkącik ma dokładnie dwóch żółtych sąsiadów. Udowodnić, że liczba trójkącików pomalowanych na żółto i na niebiesko jest jednakowa.

Rozwiązanie na str. 16

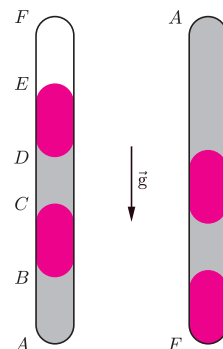
6. Czy są jakieś powody lub poszlaki, pozwalające wierzyć, że hipoteza Riemanna jest prawdziwa? Tak, oto niektóre z nich.

Hardy w 1914 roku wykazał, że na prostej krytycznej leży nieskończenie wiele zer funkcji ζ , a Levinson w 1974 – że na prostej krytycznej leży przynajmniej $\frac{1}{3}$ nietrywialnych zer funkcji ζ . Dzięki eksperymentom komputerowym znane są dziś wartości około 100 miliardów nietrywialnych zer funkcji ζ i wiemy, że jeśli liczba ρ , należąca do pasa krytycznego, stanowi kontrprzykład do hipotezy Riemanna, to z pewnością $|\text{Im } \rho| > 29 \cdot 10^9$. Znane są też niektóre znacznie dalsze zera (na przykład około miliarda zer o częściach urojonych rzędu $2,5 \cdot 10^{15}$, oraz garstka rekordowych zer o częściach urojonych rzędu $1,3 \cdot 10^{21}$). Wszystkie należą do prostej krytycznej.

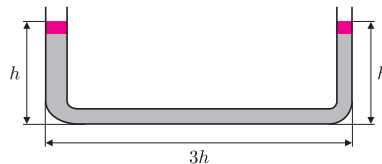
Mimo to wiele osób sądzi, że w poszukiwaniach dowodu wcale nie jesteśmy dalej niż sprawca całego zamieszania.

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 603. Fragmenty AB i CD pionowej zatkaanej na końcach wąskiej szklanej rurki $ABCDEF$ wypełnione są powietrzem, części BC i DE – rtęcią, a w części EF jest próżnia. Długości wszystkich części są równe. Ciśnienie w najniższym punkcie A jest równe p . Rurkę ostrożnie obrócono tak, że punkt F znajduje się na samym dole. Jakie będzie ciśnienie w punkcie F ? Przyjąć, że temperatura powietrza jest stała. Rozwiązanie na str. 9



F 604. W rurce z powietrzem w kształcie litery U na jednakowej wysokości h utrzymywane są dwa korki o masie m każdy. Pole przekroju lewego ramienia rurki wynosi $2S$, prawego ramienia i podstawy jest równe S . Długość podstawy wynosi $3h$.



Ciśnienie powietrza p_0 w rurce jest równe atmosferycznemu. Na jakiej wysokości ustali się położenie korków po ich zwolnieniu? Korki mogą poruszać się tylko w pionowych częściach rurki. Przyjąć, że temperatura powietrza jest stała. Rozwiązanie na str. 9

Odległości w Drodze Mlecznej

Paweł PIETRUKOWICZ

Mierzenie odległości to jedno z najtrudniejszych zagadnień współczesnej astronomii. Można powiedzieć, że jest to tym trudniejsze, im dalej leży badany obiekt. Dotychczas zebrana wiedza umożliwia jednakże sporządzenie trójwymiarowej mapy naszej Galaktyki – Drogi Mlecznej oraz zorientowanie się, jak daleko (i jednocześnie jak gęsto w przestrzeni) leżą wybrane grupy obiektów.

Często proporcje rozmiarów i odległości w Układzie Słonecznym przedstawia się za pomocą modeli pomniejszych w skali kilku miliardów razy. Wówczas planety są wielkości ziarenek piasku i są wzajemnie odległe o dziesiątki metrów. Podobny model można stworzyć dla Galaktyki, w której niemal wszystkie obiekty świecące usytuowane są w cienkim dysku o grubości 6000 i średnicy 130 000 lat świetlnych. Przy oglądaniu dysku od strony bieguna ukaże się nam struktura spiralna ze Słońcem położonym na wewnętrznej krawędzi ramienia zwanego ramieniem Oriona. Bliżej centrum Galaktyki, znajduje się ramię Strzelca, a dalej od centrum – ramię Perseusza.

Obserwacje pokazały, że centrum jest odległe od nas o około 28 000 lat świetlnych i zawiera czarną dziurę o masie 3 mln mas Słońca. Gdybyśmy stworzyli model Drogi Mlecznej, w której powyższą odległość zmniejszylibyśmy do 5 km, to taki model byłby w skali jeden do $5 \cdot 10^6$. Dysk byłby wtedy wielkości Warszawy, tj. o średnicy około 25 km. Zobaczmy teraz, jak daleko leżałyby przykładowe obiekty w Galaktyce, a w szczególności obiekty widoczne na niebie gołym okiem lub za pomocą amatorskich przyrządów optycznych oraz obiekty gwiazdowe w różnych stadiach ewolucji.

Najpierw powinniśmy uświadomić sobie rozmiary naszego układu planetarnego, czyli przestrzeni zawierającej orbity wszystkich 9 planet. Okazuje się, że obszar o średnicy 100 j.a. w modelu miałby $2/7$ mm – mniej niż kropka na końcu tego zdania. Nasza gwiazda dzienna – Słońce – byłaby wręcz mikroskopijna: 0,026 μ m; mniej więcej wielkości dużej cząsteczki organicznej, np. DNA. Najbardziej odległa sonda kosmiczna, Voyager 1, znajdowałaby się zaledwie $1/4$ mm obok.

Przemieścmy się dalej. Najbliższa Słońcu gwiazda, Proxima Centauri – ledwo widoczny przez amatorski teleskop karzeł – byłaby położona w odległości 75,4 cm. Podobnie, wszystkie pobliskie gwiazdy mielibyśmy „w zasięgu ręki”. Nawet stosunkowo blisko leżałaby najbliższa pozasłoneczna znana planeta. Jej macierzystą gwiazdę, ϵ Eridani, dzieli od nas dystans 10,5 roku świetlnego, co dałoby 187 cm w modelu.

Najbliższe Słońcu rozciągle obiekty to otwarte gromady gwiazd, błyszczące pięknie na zimowym

niebie w gwiazdozbiore Byka. Hiady i Plejady są odległe odpowiednio o 150 i 380 lat świetlnych, a w naszej skali o 27 i 68 m. By jednak znaleźć bogatą w gwiazdy gromadę kulistą, jaką jest gromada M4, licząca kilkaset tysięcy składników, należałoby się udać już na odległość 1200 m. Sławnej Wielkiej Mgławicy w Orionie, najbliższej wylęgarni gwiazd, trzeba by szukać w odległości 285 m w ramieniu galaktycznym, do którego należy Słońce. Inne ogromne kolebki gwiazd, leżące w ramieniu Strzelca mgławicy Laguna i Trójlistna Koniczyna, usytuowałibyśmy w odległości 890 m, bo pomiary dają rzeczywistą wartość około 5000 lat świetlnych.

We wspomnianych obłokach rodzi się dziennie kilka gwiazd. Biorąc pod uwagę ekonomiczne i wydajne źródło energii, jakim jest nukleosyneta pierwiastków lekkich (helu i in.), nie dziwi fakt, że gwiazdy w spokojnych fazach ewolucji (ciąg główny, czerwone olbrzymy) dominują na niebie. Obiektów w krótkotrwałych fazach ewolucji należy więc szukać stosunkowo daleko od Słońca. Przykładowo, najbliższa mgławica planetarna (którą tworzy odrzucana powoli otoczka czerwonego olbrzyma i pozostały gorący rdzeń gwiazdy) to mgławica Ślimak, od której światło biegnie 450 lat. To dałoby odległość około 80 m w naszej skali. Co ciekawe, najdalsza widoczna gołym okiem, a zarazem bardzo masywna gwiazda – η Carinae, która jest dobrą kandydatką na supernową, leży w odległości mniej więcej 10 000 lat świetlnych, czyli u nas 1780 m. To już naprawdę daleko.

Na zakończenie przeglądowej listy obiektów galaktycznych warto wspomnieć o pobliskiej gwiazdzie neutronowej, od której dzieli nas dystans 68 m, a także o pulsarze PSR 1257+12, wokół którego Aleksander Wolszczan odkrył pierwszy pozasłoneczny system planetarny. Pulsar ten leżałby znacznie dalej, bo 1430 m od Słońca.

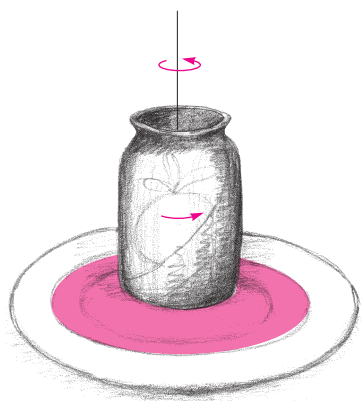
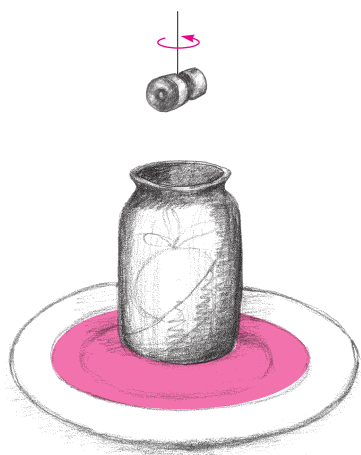
Jak daleko w naszym modelu znajdowałyby się obiekty pozagalaktyczne: inne galaktyki, gromady galaktyk, czy kwazary? Kto chce, może przeliczyć. Tutaj przykładowo podajemy, że najbliższe Drodze Mlecznej skupisko milionów gwiazd, tj. Wielki Obłok Magellana, należałoby umieścić 32 km od Słońca, a obserwowalny Wszechświat sięgnąłby około 5 promieni orbity Księżyca. Jak widać, są to naprawdę kosmiczne odległości.

5

mała delta

Magnetyczna karuzela

Nie wszyscy wiedzą, że jedynym powszechnie dostępnym metalem przyciąganym przez magnes jest żelazo. Każdy wie, że obudowa lodówki jest metalowa i że można do niej przyczepić za pomocą magnesu kartkę „kup ziemniaki”. Lodówek wykonanych z miedzi czy aluminium raczej się nie spotyka, więc większość ludzi uważa, że oddziaływanie z magnesem jest cechą każdego metalu, a nie tylko ferromagnetyków (no bo kto wie, co to jest ferromagnetyk?).



Doświadczenie zaczynamy od sprawdzenia, że magnes nie przyciąga aluminiowej puszkii, czyli puszkii po dowolnym napoju gazowanym. Potrzebne nam będą dość silne, lecz małe magnesy. Najprościej rozbroić dwa małe głośniczki (kilkuzłotowa inwestycja w prywatne badania naukowe). Następnie (jeżeli nie uprzednio) należy puszkę pozbawić wieczka za pomocą zwykłego otwieracza konserw. Potrzebny jeszcze będzie głęboki talerz z wodą, szpagat (sznurek, nie figura gimnastyczna) i spinacz. Puszkę stawiamy na wodzie (to, że można to zrobić, jest ciekawe samo w sobie, ale nie o to tu chodzi). Między magnesy wkładamy spinacz, do którego mocujemy szpagat. Sznurek bierzemy do ręki, unosimy, a drugą ręką skręcamy go. Jak już go dobrze skręcimy, to pozwalamy mu się – wraz z magnesami – rozkręcać. Taką karuzelę ostrożnie wkładamy do puszkii, uważając, żeby nie dotknąć ścianek. Karuzela zwalnia, ale za to puszkii zaczyna się obracać! Jeżeli magnesy szybko wyjmujemy, to ponownie zwiększy się ich prędkość obrotowa. Dlaczego magnesy oddziałują z aluminiową puszką, choć nie jest ona ferromagnetyczna?

Pomysł na wykonanie tego doświadczenia znalazłem kiedyś w *Fotonie* (to była reklama).

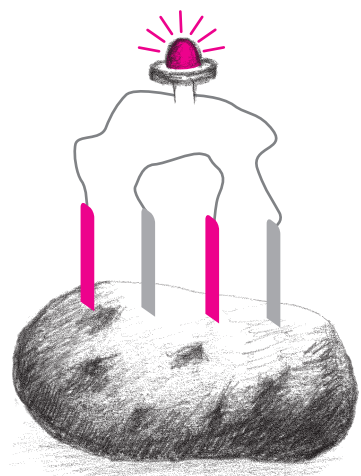
Prąd z ziemniaka

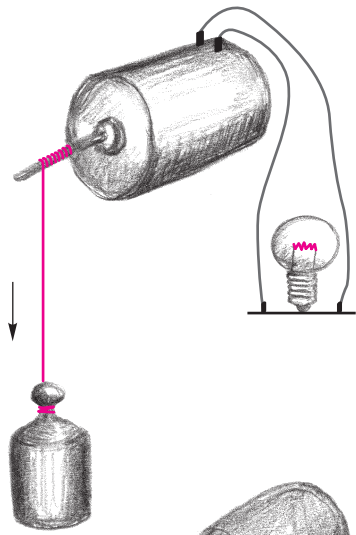
Kupione przed chwilą ziemniaki przydadzą się do kolejnego doświadczenia. Potrzebne jeszcze będą kawałki różnych metali, np. miedzi i cynku (cynk można uzyskać ze starych, płaskich baterii), kabelki (najlepiej ze szczypczykami), uniwersalny miernik oraz świecąca dioda.

Kawałki metali wbijamy w ziemniaka i za pomocą miernika stwierdzamy, że między różnymi metalami pojawia się napięcie. Zadanie polega na takim dobraniu połączeń, żeby za pomocą (uzbrojonego) ziemniaka zaświecić diodkę, a następnie wyjaśnić, dlaczego to jest możliwe.

Opór światła

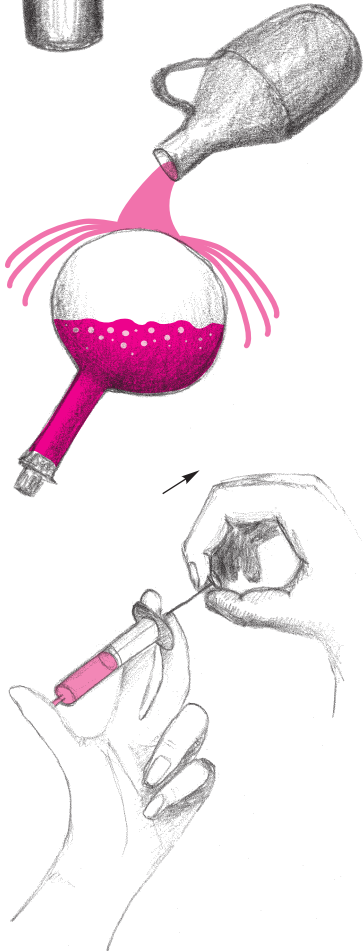
Kolejne doświadczenie wymaga dość solidnego przygotowania. Potrzebny będzie silniczek elektryczny, kawałek wentyla rowerowego,





szpagat, ciężarek, statyw i żaróweczka w oprawce z kabelkami oraz stoper. Przyda się jeszcze miernik uniwersalny.

Na ośkę silniczka nasuwamy wentyl, co ułatwi nam nawinięcie na nią szpagatu. Silniczek mocujemy na statywie, a do końca szpagatu przyczepiamy ciężarek. Jeżeli mamy miernik, to przyłączamy go do kontaktów elektrycznych silniczka jako woltomierz prądu zmiennego. Teraz pozwalamy ciężarkowi rozwinąć szpagat. Mierzmy czas opadania ciężarka, stwierdzając jednocześnie, że woltomierz pokazuje pewne napięcie. Następnie w miejsce woltomierza przyłączamy żaróweczkę i ponownie nawijamy szpagat. Jeżeli teraz pozwolimy mu się rozwinąć, to żaróweczka powinna się lekko zaświecić, a rozwijanie trwać dłużej. Dlaczego?



Gotowanie w lodówce

Wyobraźmy sobie, że przyjechała do nas Ciocia i prosi o herbatę, ale koniecznie zalaną wrzątkiem. Mamy, co prawda, zagotowaną dopiero co wodę, ale jednocześnie skończyła się nam butla z gazem, albo wyłączono prąd, w każdym razie chwilowo nie ma sposobu, żeby wodę ponownie zagotować.

Czy rzeczywiście nie ma?

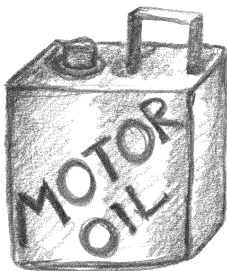
Przeprowadźmy następujące doświadczenie. Potrzebna będzie zatykana korkiem kolba lub zlewka. Najpierw przez chwilę gotujemy w niej wodę. Następnie zatykamy korkiem. Chwilę czekamy, żeby upewnić się, iż woda już się nie gotuje i – polewamy nasze naczynie zimną wodą. Woda wewnątrz zacznie gwałtownie wrzeć! Jeżeli ktoś nie wie dlaczego, może pomoże mu kolejne doświadczenie.

Gotowanie w strzykawce

Wodę z kolby przelewamy do kubeczka i nabieramy jej trochę do dużej plastikowej strzykawki (około 1/10 objętości strzykawki). Wypuszczamy powietrze (jak przed zastrzykiem), zatykamy otworek kciukiem ręki, w której trzymamy korpus strzykawki, a drugą ręką gwałtownie pociągamy za tłoczek – woda w strzykawce zacznie bulgotać. Czy ona wrze? Jeżeli tak, to dlaczego?

Wszechobecna zgniatarka

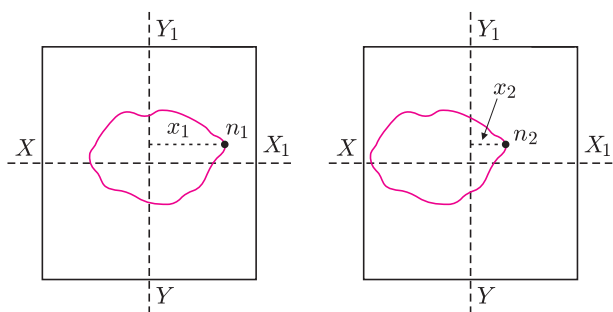
To, co jest potrzebne do ostatniego doświadczenia, jest, niestety, dość trudno dostępne. Chodzi o nieduży **niepotrzebny**, blaszany kanisterek. Nalewamy do niego trochę wody i za pomocą kuchenki gazowej przez chwilę gotujemy. Następnie wyłączamy palnik i uważając, żeby się nie poparzyć (rękawice), zakręcamy kanister. I to wszystko. Co się stanie z kanisterkiem? Czy można to przewidzieć na podstawie poprzednich doświadczeń?



Małą Deltę przygotował Piotr ZALEWSKI

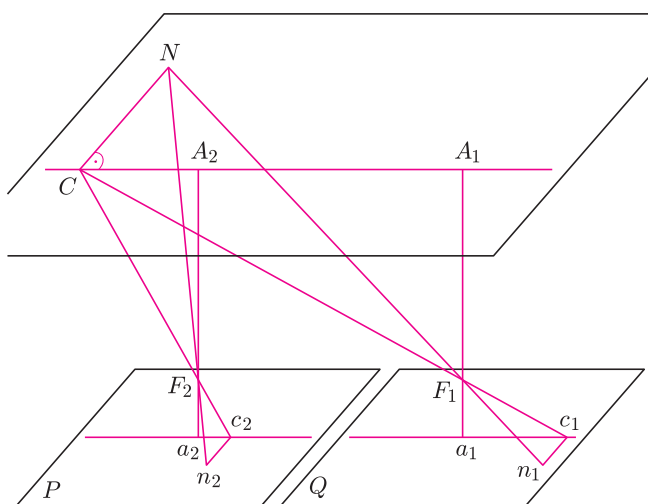
Potwierdzenia znalezionych wyjaśnień tych i podobnych im doświadczeń można szukać na pokazach tegorocznego Festiwalu Nauki na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego, wysyłając e-mail na adres piotr.zalewski@fuw.edu.pl lub pisząc do redakcji.

Widzieliśmy nieraz ślad samolotu odrzutowego na niebie albo piękne, przybierające różne kształty chmury i zadawaliśmy sobie pytanie: jak wysoko leci samolot, jak wysoko płyną obłoki? Podamy tu przykład prostej metody opartej na zasadzie działania dalmierza, która pozwoli nam odpowiedzieć na to pytanie. Potrzebne do tego będą dwa aparaty fotograficzne z jednakową ogniskową F (zwykle podana jest na obudowie obiektywu). Wybieramy dwa punkty na ziemi, które są na mniej więcej tej samej wysokości i mierzymy ich odległość. Niech ta odległość będzie równa d . Ustawiamy aparaty w tych punktach, tak aby ich osie optyczne były skierowane pionowo w górę. Na dany sygnał w tym samym momencie wykonujemy zdjęcia obiektu, którego wysokość nad ziemią chcemy określić. Robimy odbitki o wymiarach równych klatce kliszy (także dla uproszczenia obliczeń). Jak na rysunku 1 prowadzimy proste XX_1 i YY_1 , łączące środki przeciwległych boków zdjęć. Wybieramy charakterystyczny punkt N na fotografowanym obiekcie, oznaczamy jego obraz na obu zdjęciach przez n_1 i n_2 . Określamy odległości tych punktów od prostych XX_1 i YY_1 na obu odbitkach; niech wynoszą x_1, y_1 dla pierwszej odbitki i x_2, y_2 dla drugiej.



Rys. 1

Aby wyprowadzić wzór na szukaną wysokość, rozważmy sytuację z poniższego rysunku.



Rys. 2

Prostokąty P i Q przedstawiają klatki kliszy w obu aparatach, F_1, F_2 – środki optyczne obiektywów aparatów, a_1, a_2 – środki klatek. Wtedy

$$a_1 F_1 = a_2 F_2 = F.$$

Niech $a_1 A_1$ i $a_2 A_2$ będą odcinkami prostopadłymi do klatek, gdzie A_1, A_2 leżą na poziomie punktu N . Wtedy

$$a_1 a_2 = A_1 A_2 = d.$$

Niech n_1, n_2 będą obrazami punktu N . Na prostej $A_1 A_2$ obieramy punkt C tak, że kąt $A_2 C N$ jest prosty i przez c_1, c_2 oznaczamy jego obrazy na zdjęciach. Wtedy

$$a_1 c_1 = x_1, \quad c_1 n_1 = y_1$$

i analogicznie w drugim aparacie. Z podobieństwa trójkątów mamy proporcje:

$$\frac{A_1 C}{x_1} = \frac{A_1 F_1}{F} = \frac{C F_1}{F_1 c_1} = \frac{C N}{y_1},$$

$$\frac{A_2 C}{x_2} = \frac{A_2 F_2}{F} = \frac{C F_2}{F_2 c_2} = \frac{C N}{y_2}.$$

Z tych proporcji dostajemy $y_1 = y_2$ (to może służyć do kontroli ustawienia aparatów, w praktyce równości raczej nie osiągniemy) oraz

$$\frac{A_1 C}{x_1} = \frac{A_2 C}{x_2} = \frac{A_1 C - d}{x_2}.$$

Stąd

$$A_1 F_1 = d \frac{F}{x_1 - x_2},$$

a $A_1 F_1$ można przyjąć za szukaną wysokość.

Jeżeli sfotografowaliśmy obłok i pomiary na zdjęciach wyniosły

$$x_1 = 25 \text{ mm}, \quad x_2 = 10 \text{ mm}, \quad y_1 = 24 \text{ mm}, \quad y_2 = 26 \text{ mm},$$

ogniskowa aparatów $F = 135 \text{ mm}$, a odległość

$d = 200 \text{ m}$, to po zastosowaniu wzoru

$$H = 200 \text{ m} \frac{135 \text{ mm}}{25 \text{ mm} - 10 \text{ mm}}$$

otrzymujemy wysokość obłoku

$$H = 1800 \text{ m}.$$

Gdyby punkty n_1, n_2 były po różnych stronach YY_1 , to punkt C leżałby między A_1, A_2 i wzór miałby postać:

$$H = d \frac{F}{x_1 + x_2}.$$

Jeżeli fotografowany obiekt jest daleko i pionowo ustawiony aparat go „nie widzi”, możemy aparaty ustawić inaczej (na przykład poziomo). Wtedy wzory zmieniają się trochę, ale wyprowadzenie jest podobne. Jeżeli zdjęcia nie są wielkości kliszy, odległości mierzone na nich trzeba proporcjonalnie zmniejszyć lub zwiększyć.

Na koniec dodajmy, że na podstawie obniżania się pułapu pewnych typów chmur można przewidywać opady.

Pioneerskie malowidło naskalne

Tytułowe malowidło (patrz rysunek) zostało 2 marca 1972 roku (3 marca naszego czasu) wyrzuczone wraz z sondą Pioneer-10 w przestrzeń kosmiczną. Sonda ta jest pierwszym wytworem człowieka, który opuścił Układ Słoneczny. W tej chwili jest około 83 j.a. od Słońca i oddala się od niego z prędkością trochę ponad 12 km/s. Ostatni kontakt z sondą nastąpił 23 stycznia bieżącego roku. Nasza cywilizacja nie będzie miała już żadnego wpływu na sondę Pioneer-10.

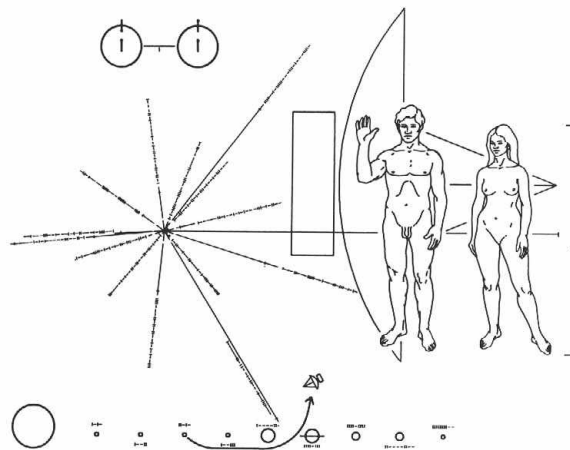
Choć każda kolejna sonda zmierzająca poza nasz układ niesie jakieś przesłanie dla ewentualnych inteligentnych znalazców, to wiadomość Pioneera-10 najbardziej wryła się w społeczną pamięć. Ten obrazek ma w sobie to „coś”. Zamiast zastanawiać się, jak duża (mała) jest szansa, że ktoś kiedyś przychwyci tę wiadomość, postawmy się w roli inteligentnych odbiorców. My też przecież jesteśmy inteligentni. Czy jesteśmy w stanie rozszyfrować przekaz?

Poza rzeczą najprostszą, sylwetkami mężczyzny i kobiety na tle konturu sondy, nie jest to wcale takie oczywiste. To najprostsze, przekazuje tak naprawdę fakt naszej płciowości. Czy jest to aż tak ważna informacja? Jeżeli potraktujemy to jako naskalne malowidło, to – moim zdaniem – tak.

Dalej nie jest już tak łatwo. Kluczem do rozwikłania łamigłówek jest zrozumienie, co przedstawia piktogram po lewej u góry.

Jeżeli domyślimy się, że jest to przejście nadsubtelne (zmiana spinu elektronu) atomu wodoru, którego długość fali ustala jednostkę długości (więc i czasu) na około 21 cm, a pionowe i poziome kreski są binarnym, pozycyjnym zapisem liczb, to już jesteśmy w domu.

Po prawej stronie mamy potwierdzenie naszego domysłu: wzrost kobiety, niezależnie wyznaczony przez rozmiary sondy, to binarne 8 (3 pionowe kreski i jedna pozioma) razy 21 cm, czyli 168 cm.



Po ustaleniu jednostki możemy użyć pulsarowej mapy (to ta gwiazda), identyfikując pulsary za pomocą binarnie zapisanych częstości. Ponieważ okres pulsacji wydłuża się w określony sposób, możliwe jest nie tylko ustalenie skąd, ale i kiedy sonda została wysłana.

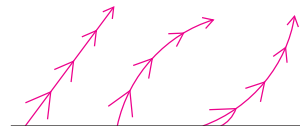
A za biliony lat może być ona jedyną pozostałością po Układzie Słonecznym...

Piotr ZALEWSKI

Zapraszamy na kolejny **Wielki Konkurs Zadań z Fizyki**, który odbędzie się w ramach VII Festiwalu Nauki na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego. Zachęcamy do udziału młodzież z gimnazjów, liceów, uniwersytetów, politechnik, miejsc lekkiej i ciężkiej pracy, odpowiedzialnych stanowisk życia publicznego i domów spokojnej starości. Zapewniamy: dobrą zabawę, atrakcyjne nagrody, ciekawe zadania, odległe od rutyny szkolnej o lata świetlne – i niewymagające zaawansowanej wiedzy. Poniżej przykłady zadań z zeszłorocznej edycji.

Jerzy BROJAN

1. Drzewo zostało ścięte i przewraca się. Który rysunek prawidłowo przedstawia drzewo w tej chwili? Zakładamy, że:
 - a) pień został od razu całkowicie przecięty,
 - b) opór powietrza można pominąć.



2. Na pas transportera poruszającego się ze stałą prędkością v spada piasek z nieruchomego pojemnika, przy czym masa spadającego piasku na sekundę wynosi $s = m/t$. Obliczmy moc silnika transportera niezbędną do podtrzymywania jego ruchu, przy założeniu, że rolki transportera toczą się bez strat energii. Ponieważ w ciągu sekundy masa m uzyskuje energię kinetyczną $mv^2/2$, a energia ta pochodzi z pracy silnika, więc moc P jest równa $P = sv^2/2$. **Podane tu rozwiązanie jest błędne.** Na czym polega błąd? Jaki wynik jest prawidłowy? (Dziękuję p. Zofii Gołąb-Meyer za zwrócenie uwagi na problem.)

3. Motocyklista-kaskader zjeżdża ze skoczni narciarskiej. Jeśli zacznie w czasie lotu koziołkować, to co może zrobić, aby upaść na koła, a nie na głowę? Pomijamy siły oddziaływania powietrza.



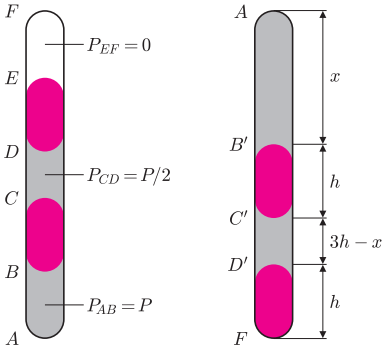
Rozwiązanie zadania F 603.

Na początku: $p_{EF} = 0$, $P_{AB} = p = 2\rho gh$, $p_{CD} = \rho gh = p/2$. Po obrocie rurki: $p_{C'D'} = p_1$, $p_F = p_1 + p/2$, $p_{A'B'} = p_2$, gdzie $AB' = x$, $C'D' = 3h - x$. Z prawa Boyle'a-Mariotte'a mamy:

$$(p/2)h = p_1(3h - x), \quad ph = p_2x.$$

Z warunku równości kropelek rtęci mamy:

$$p_1 - p_2 = \rho gh - p/2, \\ p_F = p_1 + \rho gh = p_1 + p/2.$$



Dla p'_F otrzymujemy równanie:

$$6p'^2_F - 12pp'_F + 5p^2 = 0,$$

stąd

$$p'_F = p(1 \pm 1/\sqrt{6}).$$

Znak minus odrzucamy, ponieważ ciśnienie rośnie. Otrzymujemy więc

$$p'_F = p(1 + 1/\sqrt{6}).$$



Rozwiązanie zadania F 604.

Ponieważ

$$\frac{mg}{S} - p_0 > \frac{mg}{2S} + p_0,$$

to prawy korek na początku opadnie. Niech wysokość korka w lewym ramieniu będzie x . Z prawa Boyle'a-Mariotte'a mamy

$$p(2x + 3h)S = p_0 \cdot 6hS,$$

natomiast z warunku równowagi

$$p = p_0 + mg/2S.$$

Stąd

$$x = \frac{3}{2}h \frac{p_0 - mg/2S}{p_0 + mg/2S} \quad \text{dla } mg/2S < p_0,$$

$$x = 0 \quad \text{dla } mg/2S > p_0.$$

O Hipotezie Poincarégo

Tadeusz KOŹNIEWSKI

W początkach XX wieku znakomity francuski matematyk Henri Poincaré (1854–1912) wprowadził szereg nowych metod geometrycznych i algebraicznych, za pomocą których można badać ważne obiekty geometryczne, jakimi są wielościany i rozmaitości. Metody te często pozwalają stwierdzić, czy dane dwie rozmaitości są „geometrycznie podobne” (ściślej: homeomorficzne). Hipoteza Poincarégo dotyczy takiego właśnie problemu. W poniższym artykule postaramy się przybliżyć Czytelnikowi pojęcia występujące w jej sformułowaniu, wskazać na jej źródła, a także podać pewne jej uogólnienia.

Rozmaitości. Mówimy, że podzbiór $M \subset R^n$ jest rozmaitością 1-wymiarową, jeśli M lokalnie wygląda jak odcinek otwarty (a, b) . Bardziej precyzyjnie można to wyrazić, mówiąc, że M jest lokalnie wykresem ciągłej funkcji jednej zmiennej. Podamy teraz kilka przykładów rozmaitości 1-wymiarowych.

Bezpośrednio z definicji wynika, że jeśli f jest funkcją ciągłą w przedziale (a, b) , to zarówno wykres funkcji $x_2 = f(x_1)$, jak i wykres funkcji $x_1 = f(x_2)$ są rozmaitościami 1-wymiarowymi w R^2 (rys. 1 i 2). Okrąg S^1 z rysunku 3 nie jest wykresem żadnej funkcji, ale jest rozmaitością 1-wymiarową, bo jest lokalnie wykresem funkcji $x_2 = \sqrt{1 - x_1^2}$ lub $x_2 = -\sqrt{1 - x_1^2}$. Linia śrubowa z rysunku 4 jest rozmaitością 1-wymiarową w R^3 , podobnie jak elipsa z rysunku 5. Suma dwóch stycznych okręgów z rysunku 6 nie jest rozmaitością, bo w otoczeniu punktu $(0, 0)$ zbiór X nie jest wykresem żadnej funkcji.

Podzbiór $M \subset R^n$ nazywamy rozmaitością 2-wymiarową, jeśli lokalnie wygląda jak otwarte koło 2-wymiarowe, to znaczy każdy punkt $x \in M$ ma otoczenie, w którym M jest wykresem ciągłej funkcji dwóch zmiennych. Na przykład sfera 2-wymiarowa z rysunku 7 jest rozmaitością 2-wymiarową, bo jest lokalnie wykresem funkcji $x_3 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ lub $x_3 = -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$. Innym przykładem rozmaitości 2-wymiarowej jest torus z rysunku 8. Płaszczyzna rzutowa z rysunku 9, o której możemy myśleć jako o rozmaitości powstałej ze sfery dwuwymiarowej przez sklejenie punktów antypodycznych, jest rozmaitością 2-wymiarową w R^4 .

Powyzsze definicje rozmaitości 1 i 2-wymiarowych w sposób naturalny uogólniają się na przypadek wyższych wymiarów.

Dla dowolnej liczby naturalnej k rozmaitością k -wymiarową nazywamy taki podzbiór $M \subset R^n$ ($k < n$), który lokalnie „wygląda jak” otwarty dysk k -wymiarowy $D^k(a, r) = \{x \in R^k : |x - a| < r\}$ dla pewnych $a \in R^k$ oraz $r > 0$, czyli lokalnie jest wykresem ciągłej funkcji k zmiennych. Na przykład dla każdego naturalnego k sfera k -wymiarowa $S^k = \{(x_1, \dots, x_{k+1}) \in R^{k+1} : x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2 = 1\}$ jest rozmaitością k -wymiarową w R^{k+1} .

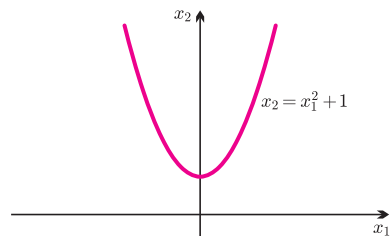
Homeomorfizmy. Zajmiemy się teraz porównywaniem rozmaitości, starając się wyróżnić te, które z naszego punktu widzenia są „takie same”. Rozmaitości k -wymiarowe M_1, M_2 będziemy uznawali za równoważne (inaczej: homeomorficzne), jeśli jedną z nich można uzyskać z drugiej przez rozciąganie i zgniatanie, bez rozrywania i sklejanja.

Dokładniej: przekształcenie ciągłe $h : M_1 \rightarrow M_2$ nazywamy homeomorfizmem, jeśli istnieje takie przekształcenie ciągłe $g : M_2 \rightarrow M_1$, że $g(h(x)) = x$ dla każdego $x \in M_1$ oraz $h(g(x)) = x$ dla każdego $x \in M_2$. Jeśli istnieje homeomorfizm $h : M_1 \rightarrow M_2$, to mówimy, że M_1 i M_2 są homeomorficzne, a przekształcenie g nazywamy homeomorfizmem odwrotnym do h .

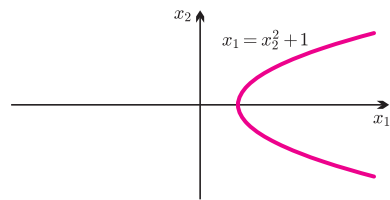
Parabola z rysunku 1 jest homeomorficzna z linią śrubową z rysunku 4. Okrąg S^1 z rysunku 3 jest z kolei homeomorficzny z elipsą M z rysunku 5.

Przekształcenie $h : P \rightarrow W$ paraboli $P = \{(t, t^2 + 1) : t \in R\}$ w linię śrubową $W = \{(\cos(t), \sin(t), t) : t \in R\}$ określone wzorem $h(t, t^2 + 1) = (\cos(t), \sin(t), t)$ jest homeomorfizmem. Przekształcenie $h : S^1 \rightarrow M$, $h(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 5 - x_1)$ to homeomorfizm sfery z rysunku 3 w elipsę z rysunku 5.

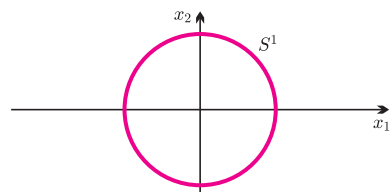
Na to, by stwierdzić, że dwie rozmaitości nie są homeomorficzne, wygodnie jest znać jakąś własność rozmaitości, która nie zmienia się przy homeomorfizmach, to znaczy jeśli rozmaitość M ją ma, to ma ją też każda



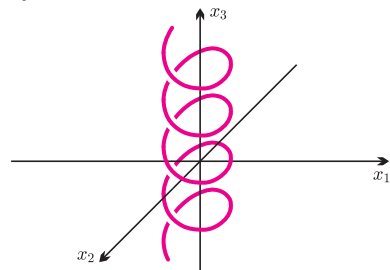
Rys. 1



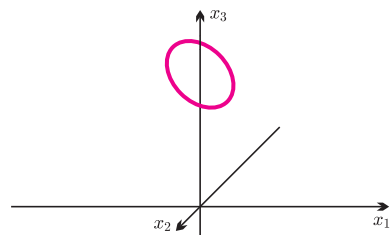
Rys. 2



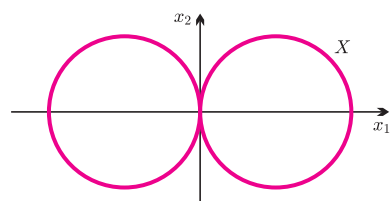
Rys. 3



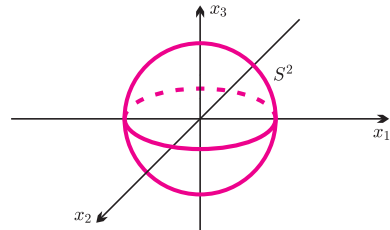
Rys. 4. Linia śrubowa $\{(\cos(t), \sin(t), t) : t \in R\}$.



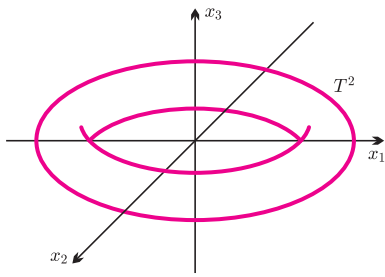
Rys. 5. Elipsa $\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1 \text{ oraz } x_1 + x_3 = 5\}$



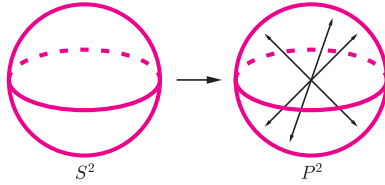
Rys. 6



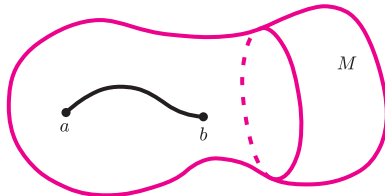
Rys. 7. $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$



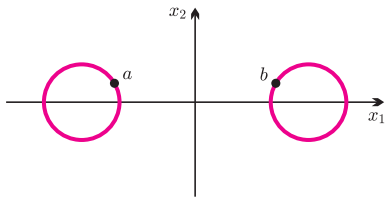
Rys. 8. $T^2 = \{(5 + \cos(\beta)) \cos(\alpha), (5 + \cos(\beta)) \sin(\alpha), \sin(\beta)\}$: $\alpha, \beta \in R$



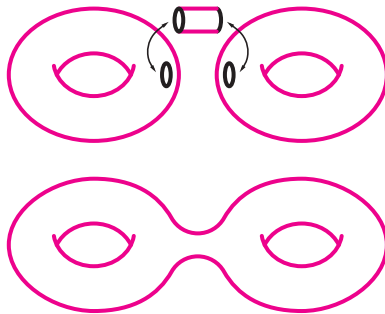
Rys. 9. Płaszczyzna rzutowa $P^2 = \{(x^2 - y^2, xy, yz, zx) \in R^4 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Zauważmy, że funkcja $g: S^2 \rightarrow P^2$, $g(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, yz, zx)$ ma tę własność, że $g(x, y, z) = g(a, b, c) \iff (x, y, z) = \pm(a, b, c)$.



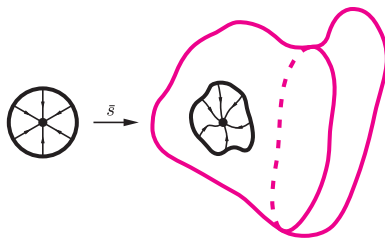
Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12



Rys. 13

rozmaitość homeomorficzna z M . Przykładem takiej własności jest zwartość. Mówimy, że rozmaitość $M \subset R^n$ jest zwarta, jeśli jest domknięta (to znaczy każdy zbieżny w R^n ciąg punktów leżących w M ma granicę w M) oraz jest ograniczona (to znaczy jest zawarta w pewnej n -wymiarowej kuli). Ważną cechą funkcji ciągłych (w szczególności homeomorfizmów) jest to, że przeprowadzają zbiory zwarte na zbiory zwarte. Spośród przykładów na rysunkach 1–5 okrąg i elipsa są rozmaitościami zwartymi, a parabola i linia śrubowa nie. Stąd, na przykład, okrąg nie jest homeomorficzny z parabolą.

Inną własnością rozmaitości zachowywaną przez homeomorfizmy jest spójność. Mówimy, że rozmaitość M jest spójna, jeśli jest ona „w jednym kawałku”. To znaczy, że każde dwa punkty $x, y \in M$ można połączyć łukiem leżącym całkowicie w M , czyli istnieje taka funkcja ciągła z odcinka domkniętego w M , $f: [a, b] \rightarrow M$, że $f(a) = x$, $f(b) = y$ (rys. 10). Wszystkie podane powyżej przykłady rozmaitości są spójne (dlaczego?). Przykładem rozmaitości niespójnej jest suma dwóch rozłącznych okręgów z rysunku 11. Homeomorfizmy przeprowadzają rozmaitości spójne na rozmaitości spójne.

Można wykazać, że każda zwarta i spójna rozmaitość 1-wymiarowa jest homeomorficzna z okręgiem S^1 . Istnieje też pełny opis rozmaitości 2-wymiarowych. W tym celu stosuje się konstrukcję zwaną sumą spójną. Jeśli M_1, M_2 są rozłącznymi rozmaitościami 2-wymiarowymi w R^n , to ich sumę spójną tworzymy, wycinając w każdej z nich okrągły otwór i doklejając do brzegów otrzymanych otworów rurkę tak, by rurka nie przecinała M_1 i M_2 poza punktami doklejenia. Rysunek 12 przedstawia sumę spójną dwóch torusów. Oczywiście, konstrukcję tę można powtarzać, tworząc sumy spójne dowolnej liczby rozmaitości. Dowodzi się, że każda zwarta i spójna rozmaitość 2-wymiarowa jest homeomorficzna ze sferą S^2 lub z sumą spójną pewnej liczby torusów lub z sumą spójną pewnej liczby płaszczyzn rzutowych. Twierdzenie to nazywa się klasyfikacją rozmaitości 2-wymiarowych.

Patrząc na tę klasyfikację, można zadać pytanie, czy istnieje jakaś własność geometryczna, która wyróżnia wśród wszystkich rozmaitości 2-wymiarowych te z nich, które są homeomorficzne ze sferą. Okazuje się, że taka własność istnieje. Jest nią jednospójność.

Jednospójność. Mówimy, że rozmaitość $M \subset R^n$ jest jednospójna, jeśli każdą gumkę recepturkę naciągniętą na powierzchnię rozmaitości M można po powierzchni M ściągnąć do punktu (rys. 13).

Dokładniej: rozmaitość $M \subset R^n$ jest jednospójna, jeśli dla każdego przekształcenia ciągłego $s: S^1 \rightarrow M$ (zwanego pętlą na M) istnieje takie przekształcenie ciągłe $\bar{s}: \overline{D^2} \rightarrow M$, że $\bar{s}(x) = s(x)$ dla każdego $x \in S^1$.

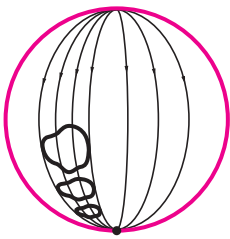
Sfera S^2 jest jednospójna. Jeśli obraz pętli s nie wypełnia całej sfery S^2 (na przykład punkt x nie leży w obrazie s), to ściągnięcie \bar{s} możemy uzyskać przez spychanie s do punktu $-x$ po południkach od x do $-x$ (rys. 14). Jeśli obraz pętli s wypełnia całą S^2 (to może się zdarzyć!), to okazuje się, że można w sposób ciągły zmienić s tak, by już nie cała S^2 była pokryta.

Suma spójna torusów ani suma spójna płaszczyzn rzutowych nie są jednospójne. Na przykład pętla z rysunku 15 nie ma ściągnięcia.

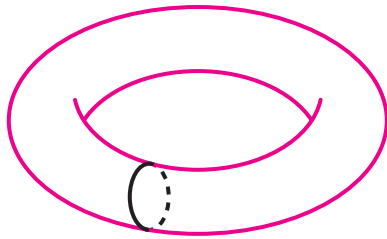
Z klasyfikacji rozmaitości 2-wymiarowych dostajemy więc, że każda zwarta, spójna, jednospójna rozmaitość 2-wymiarowa jest homeomorficzna ze sferą 2-wymiarową S^2 . Hipoteza Poincarégo postuluje to samo dla rozmaitości 3-wymiarowych.

Hipoteza Poincarégo: Każda zwarta, spójna, jednospójna rozmaitość 3-wymiarowa jest homeomorficzna ze sferą 3-wymiarową S^3 .

Hipoteza ta była i ciągle jest przedmiotem badań. W przeszłości wielokrotnie anonsowano znalezienie dowodu. Wszystkie te próby okazały się niepoprawne. Obecnie (lato 2003) przedmiotem analiz jest propozycja dowodu przedstawiona przez G. Perelmana z Instytutu Stieklowa w Petersburgu. Rozważano też uogólnienia Hipotezy Poincarégo na wymiary $k \geq 4$.



Rys. 14



Rys. 15

Dla każdego $k \geq 4$ rozmaitość k -wymiarowa

$$S^2 \times S^{k-2} = \{(x_1, \dots, x_{k+2}) \in R^{k+2} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 = x_4^2 + \dots + x_{k+2}^2\}$$

jest zwarta, spójna, jednospójna, ale nie jest homeomorficzna z S^k . Stąd próba uogólnienia Hipotezy Poincarégo przez po prostu zastąpienie w jej sformułowaniu liczby 3 przez k jest fałszywa. Istnieje jednak uogólnienie Hipotezy Poincarégo, które jest prawdziwe. Powiemy, że rozmaitość M jest m -spójna jeśli dla każdego naturalnego $i \leq m$ i dla każdego przekształcenia ciągłego $s : S^i \rightarrow M$ istnieje takie przekształcenie ciągłe

$$\bar{s} : \overline{D^{i+1}} = \{(x_1, \dots, x_{i+1}) \in R^{i+1} : x_1^2 + \dots + x_{i+1}^2 \leq 1\} \rightarrow M,$$

że $\bar{s}(x) = s(x)$ dla każdego $x \in S^i$.

Uogólniona Hipoteza Poincarégo: Każda zwarta, spójna, $(k-1)$ -spójna rozmaitość k -wymiarowa jest homeomorficzna ze sferą k -wymiarową S^k .

Hipoteza ta została udowodniona dla $k \geq 5$ przez S. Smale'a, J. Stallingsa i M. Newmana w latach 1960-1966 oraz dla $k = 4$ przez M. Freedmana w 1982 roku. Zwarta, spójna rozmaitość 3-wymiarowa jest 2-spójna wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednospójna, więc dla $k = 3$ Uogólniona Hipoteza Poincarégo to zwykła Hipoteza Poincarégo.

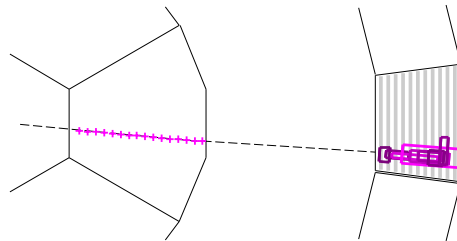
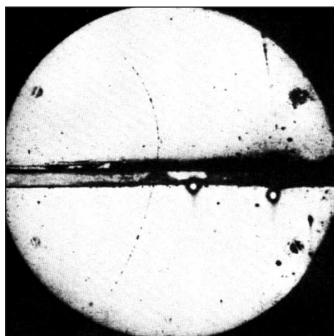
Czy można zobaczyć elektron?

To zależy od tego, co rozumiemy przez „zobaczyć”. Jeżeli ma to oznaczać „zaobserwowanie” kształtu za pomocą światła, to nie można, bo elektron na pewno nie ma „szczegółów” większych niż 10^{-18} metra, a długość fali świetlnej to co najmniej $4 \cdot 10^{-7}$ metra, więc światło ma prawie bilion razy za dużą długość fali.

Jeżeli przyjmiemy, że „zobaczyć” możemy nie tylko za pomocą światła, ale używając fali o dowolnie małej długości, to powyższe ograniczenie zniknie. W ten sposób elektrony bada fizyka cząstek elementarnych. Okazuje się, że nawet przy najwyższych dostępnych energiach elektron pozostaje punktowy – nie widzimy żadnych szczegółów. Z tego, jaka była największa energia, za pomocą której badano elektrony, wynika właśnie, że ich ewentualne „szczegóły” muszą mieć rozmiar mniejszy od 10^{-18} m, bo długość fali jest odwrotnie proporcjonalna do energii.

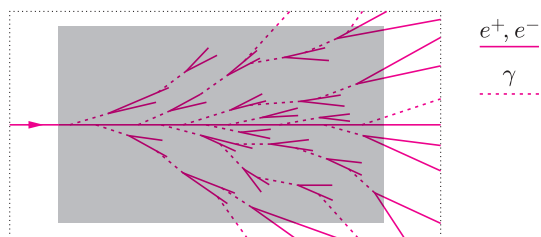
Można jednak obserwować ślad elektronu. Elektron ma ładunek elektryczny. Za jego pomocą oddziałuje z materialnym ośrodkiem. Dzięki temu w ośrodku pozostaje ślad utworzony ze zjonizowanych molekuł. Taki ślad można po prostu zobaczyć, zamieniając jonizację na kropelki przechłodzonej pary, jak robiono to w komorach mgłowych (rys. 1), na pęcherzyki pary przegrzanej cieczy (komory pęcherzykowe) lub na sygnały elektroniczne we współczesnych detektorach, które później można przetworzyć na ich komputerową wizualizację (rys. 2).

Rys. 1. Półkolisty ślad na tym zdjęciu to pierwszy przypadek zarejestrowania antymaterialnej cząstki – pozytonu, czyli antycząstki elektronu. Za pomocą komory mgłowej dokonał tego Carl Anderson w 1932 roku. Źródłem cząstki było promieniowanie kosmiczne.



Rys. 2. Rysunek przedstawia rekonstrukcję przejścia elektronu przez detektor DELPHI. Pokazane są tylko fragmenty dwóch poddetektorów. Elektron pojawia się z lewej strony i przechodzi najpierw przez wypełnioną mieszkanką gazową komorę projekcji czasowej. Jego przejście zarejestrowane zostało w postaci punktów zaznaczonych krzyżykami. Następnie elektron przelatuje do kalorymetru elektromagnetycznego wypełnionego warstwami ołowiu, gdzie inicjuje kaskadę elektromagnetyczną (zobacz rys. 3), zaznaczoną w postaci kolorowych prostokątów. Tam, „rozmienny na drobne”, kończy swoją podróż.

Jeżeli elektron ma dużą energię, to, wpadając do gęstego ośrodka, inicjuje kaskadę fotonowo-elektronową (rys. 3), którą można uznać za najbardziej spektakularne zjawisko towarzyszące omawianej cząstce.



Rys. 3

Podobne lawiny wtórnych cząstek wywołują fotony i oczywiście pozytony. Pozytony i elektrony świecą w silnych polach elektrycznych jąder

fotony, które w tych samych polach zamieniają się na pary elektron – pozyton.

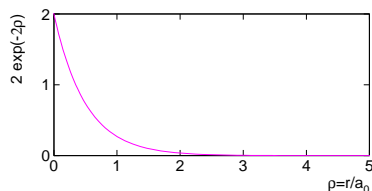
Wszystkie powyższe sposoby nie spełniają jednak warunków normalnego „zobaczania” elektronu. Rejestrujemy obecność elektronu, ale jego samego

Dlaczego elektron nie spada na jądro?

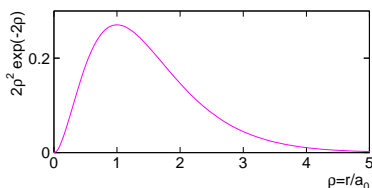
Za samo zadanie takiego pytania można, niesłusznie, dostać pałę na lekcji fizyki. Postawienie go „dowodzi”, że nie zna się choćby modelu atomu Bohra, który, jako historycznie pierwszy, wprowadził dyskretne orbity dostępne dla elektronu. Elektron nie spada, bo nie może promieniować energii w sposób ciągły, a jedynie przeskakując z wyższej na niższą orbitę. W sposób spójny tłumaczy to mechanika kwantowa, której jednak w szkole się nie wprowadza.

Z takiego przedstawienia budowy atomu wynika jednak co najmniej jedna nieprawdziwa intuicja. Nawet jeżeli wiemy (np. z lekcji chemii), że elektrony w atomie występują nie na orbitach, tylko w orbitalach, to dla każdego stanu elektronowego można wyznaczyć bohrowski promień takiej orbity i wynik nie zależy od tego, czy użyjemy tylko modelu Bohra, czy pełnego formalizmu mechaniki kwantowej. Wygląda więc, że elektrony, nawet te na najniższej orbicie, jakosć krążą wokół jądra.

A to właśnie nie jest prawda. Elektrony związane w najniższym stanie kwantowym mają orbitalny moment pędu równy zeru (taki zerowy moment mogą mieć również na wyższych orbitach, ale nie komplikujmy sprawy). Jeżeli tak, to nie mogą krążyć. Kształt odpowiadającego im orbitalu jest sferycznie-symetryczny, a największe prawdopodobieństwo znalezienia elektronu w danym miejscu przypada na środek orbitalu, czyli miejsce gdzie znajduje się jądro! Wartość gęstości tego prawdopodobieństwa dla półprostej wychodzącej z jądra jest pokazana na rysunku 4. Czym jest w takim razie promień orbity Bohra w tym przypadku? Jest to najbardziej prawdopodobna odległość elektronu od jądra. Żeby ją obliczyć, trzeba najpierw znać gęstość prawdopodobieństwa znalezienia elektronu w danej odległości od jądra. Wyznacza się ją, mnożąc wartość tej gęstości dla danego r przez powierzchnię sfery o promieniu r . Wynik przedstawiony jest na rysunku 5.



Rys. 4. Warunkowa gęstość prawdopodobieństwa znalezienia elektronu znajdującego się na danej półprostej wychodzącej ze środka jądra.



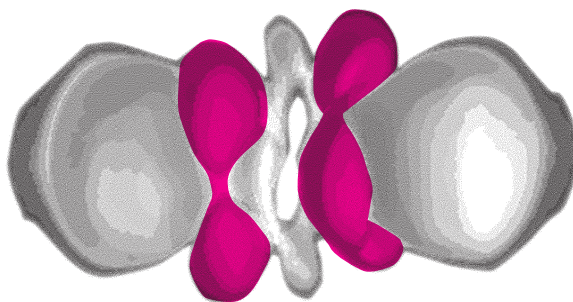
Rys. 5. Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia elektronu w danej odległości od jądra $\rho = r/a_0$, gdzie a_0 jest promieniem Bohra.

nie widzimy. Sprawa nie jest wszakże zupełnie beznadziejna. Jeżeli tylko nie będziemy się upierać przy świetle, to elektron można zobaczyć, o ile uda nam się zobaczyć atom. Dlaczego? Zobacz odpowiedź na kolejne pytanie.

To, że najbardziej prawdopodobna odległość od jądra jest skończona nie oznacza, że elektron wokół tego jądra krąży. Co w takim razie robi? W zasadzie nie wiadomo. Gdybyśmy chcieli to sprawdzić dla związanego w atomie elektronu, musielibyśmy go obserwować za pomocą czegoś, czego długość fali byłaby istotnie mniejsza od rozmiarów atomu. Przekaz energii w takim oddziaływaniu byłby tak duży, że elektron zostałby oderwany od jądra, czyli przestałby być związany.

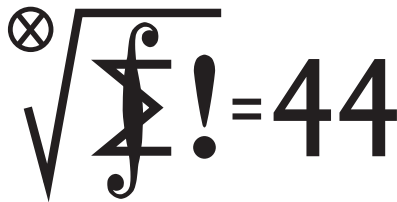
Jeżeli już koniecznie chcemy mieć jakąś intuicję co do „zachowania” elektronu w tym stanie, to według mnie możemy przyjąć, że elektron jest „spadnięty” na jądro. Rozmiar orbitalu jest rzędu długości fali de Broglie’a elektronu i determinuje rozmiar atomu, który jest tak duży w porównaniu z jądrem atomowym, ponieważ elektron jest bardzo lekki (i dość lekko związany). Gdyby elektron był cięższy, to atomy byłyby mniejsze. Elektron traktowany jako fala materii jest tożsamy ze swoim orbitalem. Pozwala to zrozumieć budowę ciał stałych. Atomy muszą zajmować trochę przestrzeni, bo nie są „puste w środku”, jak czasem się mówi, tylko wypełnione orbitalami elektronowymi.

Taki elektron można zobaczyć, jeżeli tylko uda nam się zobaczyć atom, bo to tak naprawdę to samo. Przykładem może być rysunek 6.



Rys. 6. Obraz orbitali elektronowych tlenku miedzi (I) Cu_2O (tlenku miedziawego według starej nomenklatury). Zuo i inni, *Nature*, 2 września 1999 roku.

P. Z.



Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 2003

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
453 ($WT = 1,83$) i **454** ($WT = 2,50$)
z numeru 1/2003

Marian Łupieżowiec – Zebrzydowice 36,24
Michał Adamaszek – Kęty 31,73
Michał Józwickowski – Błonie 31,66

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z matematyki nr 465, 466

Redaguje Marcin E. KUCZMA

465. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EAD|, \quad |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADE|,$$

a pole trójkąta ACD jest średnią geometryczną pól trójkątów ABC i AED . Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P ; przekątne AD i CE przecinają się w punkcie Q . Dowieść, że $|AP| = |AQ|$.

466. Rozwiązać w liczbach całkowitych x, y równanie $x + 2^y = 2^x$.

Zadanie **466** zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/2003

461. Dane są funkcje ciągłe f oraz g ; każda z nich jest ściśle monotonicznym odwzorowaniem zbioru wszystkich liczb rzeczywistych \mathbb{R} na ten sam zbiór. Wiadomo ponadto, że $f(0) = g(0)$ oraz

$$f^{-1}(g(x)) + g^{-1}(f(x)) = 2x \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Wykazać, że $f(x) = g(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$.

461. Funkcja

$$h(x) = f^{-1}(g(x))$$

jest dobrze określona i ściśle monotoniczna oraz spełnia warunki $h(0) = 0$,

$$(1) \quad h(x) + h^{-1}(x) = 2x \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Funkcje h i h^{-1} są jednocześnie rosnące albo malejące; równanie (1) wyklucza tę drugą możliwość. Tak więc h jest funkcją ściśle rosnącą.

Mamy udowodnić, że $h(x) = x$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Przypuścimy więc, że dla pewnej liczby a różnica $a - h(a) = r$ jest niezerowa. Przepisujemy równanie (1) jako

$$2x - h(x) = h^{-1}(x).$$

Stosujemy do obu stron funkcję h :

$$(2) \quad h(2x - h(x)) = x \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Wykażemy przez indukcję względem $n = 0, 1, 2, \dots$, że

$$(3) \quad h(a + nr) = a + (n-1)r.$$

Dla $n = 0$ jest to definicja liczby r . Zakładając słuszność (3) dla liczby całkowitej $n \geq 0$ i podstawiając w równaniu (2) $x = a + nr$, otrzymujemy po krótkim przekształceniu równość

$$h(a + nr + r) = a + nr,$$

czyli tezę indukcyjną (3), z n zastąpionym przez $n+1$.

Zatem równość (3) zachodzi dla każdej nieujemnej liczby całkowitej n . Analogicznie wykazujemy jej prawdziwość dla niedodatnich całkowitych wartości n (indukcja względem $n = 0, -1, -2, \dots$). Równość (3) zachodzi więc dla wszystkich całkowitych n .

Przypominamy treść zadań:

462. Rozważamy rozbicia zbioru wszystkich dodatnich liczb całkowitych na sumę dwóch zbiorów rozłącznych A, B .

- (a) Czy istnieje takie rozbicie, w którym żaden ze zbiorów A, B nie zawiera nieskończonego (i niestałego) ciągu arytmetycznego?
(b) Czy istnieje takie rozbicie, w którym żaden ze zbiorów A, B nie zawiera nieskończonego (i niestałego) ciągu geometrycznego?

Przyjmijmy, że $r > 0$ (gdy $r < 0$, rozumowanie jest takie samo, tylko wszystkie napisane niżej nierówności zmieniają zwrot). Niech n będzie liczbą całkowitą, dla której

$$(4) \quad a + (n-1)r \leq 0 < a + nr.$$

Stosując do prawej nierówności (4) funkcję rosnącą h i uwzględniając wzory (3) oraz $h(0) = 0$, stwierdzamy, że $0 < a + (n-1)r$, co się kłóci z lewą nierównością (4). Sprzeczność kończy dowód.

462. Istnieją takie rozbicia. Oto przykład (jeden z wielu możliwych): rozważamy zbiory

$$C_k = \{k!, k! + 1, \dots, (k+1)! - 1\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Niech A będzie sumą wszystkich zbiorów C_k o numerach nieparzystych, a B – sumą zbiorów C_k o numerach parzystych.

Weźmy pod uwagę dowolny nieskończony (niestały) ciąg geometryczny o wyrazach naturalnych. Niech q będzie ilorzem tego ciągu.

Gdy $k > q$, stosunek największej liczby w zbiorze C_k do najmniejszej liczby w tym zbiorze przekracza q . Rozważany ciąg nie może „przeskoczyć” tego zbioru, czyli pewien jego wyraz należy do C_k . Numer k może być parzysty lub nieparzysty. Stąd wniosek, że każdy nieskończony ciąg geometryczny (o wyrazach naturalnych) ma wyrazy zarówno w zbiorze A , jak i w zbiorze B ; nie jest więc zawarty w żadnym z tych dwóch zbiorów.

To daje twierdzącą odpowiedź na pytanie (b). Oczywiście, ten sam przykład jest dobry i w przypadku pytania (a).



Zadania z fizyki nr 362, 363

Redaguje Jerzy B. BROJAN

362. Stacja kosmiczna o masie $m = 10$ ton zawiera w objętości $V = 40 \text{ m}^3$ powietrze pod ciśnieniem $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ i o temperaturze $T = 20^\circ \text{C}$. Nagle w ścianie stacji powstał otwór o powierzchni $S = 1 \text{ mm}^2$.

- a) Po jakim czasie ciśnienie wewnątrz stacji spadnie do wartości $p_1 = 0,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ (jeśli kosmonauci nie podejmą żadnych kroków zaradczych)? Zakładamy, że rozprężenie przebiega izotermicznie.
- b) Jaką prędkość uzyska stacja wskutek odrzutu? Otwór jest tak położony, że odrzut nie spowoduje obrotu stacji.

363. W Canberze (Australia) jest fontanna, która wytryskuje wodę na wysokość 150 m. W każdej chwili w powietrzu znajduje się 6 m^3 wody. Jaka musi być minimalna moc pompy?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/2003

Przypominamy treść zadań:

358. Przedstawione na rysunku obok urządzenie (zaprojektowane przez Kelvina) składa się z naczynia z wodą, z którego spływa ona cienkimi strugami do dwóch naczyń poniżej niego. Do każdego z dolnych naczyń przyspawano drut, na końcu którego znajduje się pierścien z blaszki otaczający spadającą strugę wody, przy czym woda powinna się dzielić na krople właśnie wewnątrz pierścienia. Po pewnym czasie w miejscu krzyżowania się drutów (gdzie odległość między nimi jest niewielka) zaczynają przeskakiwać iskry. Objasnić działanie przyrządu.

359. Drut miedziany o kształcie spiralnym ma n zwojów, pole przekroju poprzecznego spirali wynosi S , a utworzona w ten sposób sprężyna ma stałą sprężystości k . Na sprężynie zawieszono ciężarek o masie m , a końce sprężyny przyłączono do źródła napięcia $U = U_0 \sin \omega t$. Obliczyć amplitudę drgań ciężarka po długim czasie (tzn. gdy można pominąć zjawiska przejściowe – można tu założyć, że występuje niewielkie tłumienie elektryczne i mechaniczne) oraz przesunięcie środka drgań względem jego położenia, gdy prąd nie płynie. Pominąć masę drutu. Przyjąć, że pole magnetyczne spirali jest takie, jak nieskończenie długiej zwojnicy.

Wskazówka. Przy tym założeniu siła ściskająca zwojnicę (działająca na końce wzdłuż osi) dana jest wzorem

$$F = (1/2)\mu_0 S(I n/l)^2,$$

gdzie l – długość zwojnicy, I – natężenie prądu.

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 2003

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań

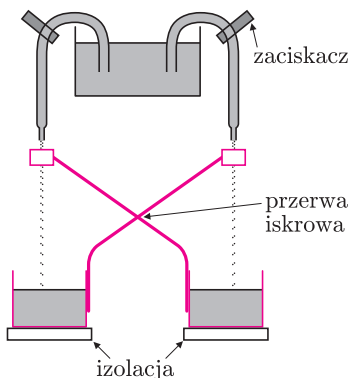
354 ($WT = 1,75$) i **355** ($WT = 2,00$)

z numeru 3/2003

Andrzej Idzik – Bolesławiec 46,75
Andrzej Nowogrodzki – Chocianów 45,22
Tomasz Wietecha – Tarnów 44,58

Prezentujemy czołówkę nieliczną, ale jaką!

Po raz pierwszy od początków ligi fizycznej jej uczestnik pięciokrotnie zaliczył 44 punkty, a wyczynu tego dokonało jednocześnie dwóch liderów naszego peletonu – p. Idzik i p. Wietecha. Drugie okrażenie zamknął natomiast p. Nowogrodzki.



358. Jeśli w pewnej chwili jedno z dolnych naczyń (np. lewe) uzyska przypadkiem nieco wyższy potencjał elektryczny od drugiego, to ta różnica potencjałów wystąpi też między pierścieniami. Ponieważ górne naczynie wraz ze strugami wody niepodzielonej na krople może być uznane za jeden przewodnik, więc dodatni ładunek będzie się gromadził na jednym końcu tego przewodnika, a ujemny – na drugim (w przyjętym przykładzie dodatni na lewym końcu spadającej strugi, a ujemny na prawym). Odrzucające się krople będą zabierać ze sobą ten ładunek do dolnych naczyń, które będą się ładować coraz silniej – aż napięcie między nimi spowoduje przeskoczenie iskry. Na podobnej zasadzie działają maszyny elektrostatyczne.

359. Napięcie zasilające zwojnicę

$$U_0 \sin \omega t$$

należy przyrównać do wyrażenia

$$-d\Phi/dt = -d(LI)/dt,$$

gdzie Φ jest całkowitym strumieniem pola magnetycznego obejmowanym przez obwód. Jeśli pominiemy efekty przejściowe, to stąd wynika, że

$$LI = \frac{U_0}{\omega} \cos \omega t,$$

a po podstawieniu indukcyjności zwojnicy

$$L = \frac{\mu_0 n^2 S}{l}$$

mamy

$$\frac{I}{l} = \frac{1}{\mu_0 n^2 S} \cdot \frac{U_0}{\omega} \cos \omega t.$$

Zgodnie z podaną wskazówką siła ściskająca zwojnicę jest równa

$$F = \frac{1}{2\mu_0 n^2 S} \left(\frac{U_0}{\omega}\right)^2 \cos^2 \omega t.$$

Przedstawmy $\cos^2 \omega t$ w postaci

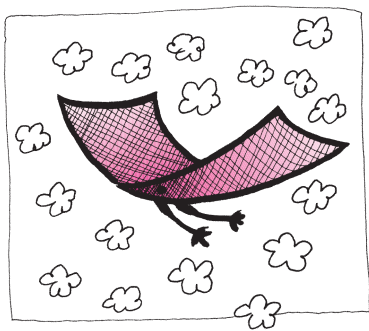
$$\frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t).$$

Pierwszy składnik (liczba 1) jest stałą, powodującą przesunięcie środka drgań o

$$\Delta l = \frac{1}{4\mu_0 n^2 S k} \left(\frac{U_0}{\omega}\right)^2.$$

Drugi składnik jest siłą wymuszającą drgania ciężarka z częstością 2ω . Nietrudno wyliczyć, że amplituda tych drgań wyniesie

$$A = \frac{1}{4\mu_0 n^2 S(k - 4m\omega^2)} \left(\frac{U_0}{\omega}\right)^2.$$



Patrz w niebo

Zapadający się obłok materii międzygwiazdowej wskutek przypadkowych fluktuacji gęstości dzieli się na wiele zgęszczeń, które zapadają się dalej niezależnie, dając początek gwiazdom o najróżniejszych masach. Dlatego gwiazdy powstają całymi grupami. Gwiazdy najmasywniejsze mogą uzyskać masę wielu dziesiątek mas Słońca, a najprawdopodobniej i więcej, tylko że wtedy ich własne promieniowanie jest tak potężne, że „rozwiewa” zewnętrzną warstwę. Taka młoda gwiazda osiąga w końcu stan równowagi przy masie nieprzekraczającej w przybliżeniu 100 mas Słońca, świecąc dziesięć tysięcy razy silniej niż Słońce. Masy drobnych gwiazd mogą być właściwie dowolnie małe, ale jeżeli masa nie przekroczy 0,08 masy Słońca, to obiekt taki nie będzie zasługiwał na nazwę gwiazdy, gdyż nie będzie w stanie rozpaść w sobie jądrowego źródła energii, zapewniającego normalnym gwiazdom świecenie przez miliardy lat. Obiekt taki to tzw. brązowy karzeł, który świeci przez pewien czas w wyniku ogrzania się podczas kolapsu.

Wielka Mgławica w Orionie to wielki obłok materii międzygwiazdowej, którego centralną część widać gołym okiem w zimowe wieczory i noce. Jest on przy tym wielkim obszarem gwiazdotwórczym. Zdjęcia w podczerwieni, wykonane kilka lat temu przez grupę angielskich astronomów ujawniły tam obecność wielkiej liczby brązowych karłów, przy czym masy niektórych z nich zostały ocenione na 8 mas Jowisza. Nasuwa się pytanie, czy aby nie przysługuje im nazwa planet. Niektórzy badacze twierdzą, że tak, inni uważają, że jest to sprawa definicji. Najlżejsze brązowe karły w Mgławicy Oriona na pewno nie są planetami w takim sensie, jak planety obiegające gwiazdę, bowiem powstały w wyniku skondensowania się obłoku materii międzygwiazdowej, a nie dysku protoplanetarnego towarzyszącego jakiejś gwiazdzie. Ich masy są jednak mniejsze niż planet odkrytych już przy niektórych gwiazdach, a których to planet masy sięgają aż 13 Jowiszów. Wreszcie analiza widmowa ujawniła w atmosferach tych brązowych karłów obecność pary wodnej! Woda w „gwieździe” to może już przesada. Jak więc nazwać takie obiekty?

Tomasz KWAST



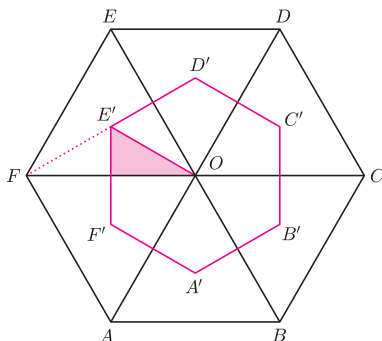
Rozwiązanie zadania M 1036.

Na naszym rysunku są dwa rodzaje trójkątów: „ Δ ” i „ ∇ ”. Zauważmy, że P_i jest środkiem trójkąta „ Δ ” $\iff \iff P_{i+1}$ jest środkiem trójkąta „ ∇ ”. Zatem $P_1, P_3, P_5, \dots, P_{k+1} = P_1$ są środkami trójkątów tego samego rodzaju, więc $k + 1$ jest liczbą nieparzystą.



Rozwiązanie zadania M 1037.

Połączmy środki wszystkich sąsiadujących trójkątów. Otrzymamy siatkę sześciokątów foremnych. Wielokąt W składa się z pewnej ich liczby. Środkami sześciokątów są punkty kratowe. Wystarczy więc zauważyć, że pole sześciokąta jest 2 razy większe od pola trójkątka, co jest łatwo widoczne na rysunku poniżej.



Rozwiązanie zadania M 1038.

Podzielmy duży trójkąt na trójkąty równoboczne o boku 2, każdy składający się z 4 trójkątów. Z założeń zadania wynika, że w każdym takim trójkącie są dokładnie 2 trójkątiki żółte i 2 niebieskie.

Wrzesień

Lis (według niektórych – Lisek) to mały gwiazdozbiór znajdujący się tuż na południe od Łabędzia. We wrześniowe wieczory widać go blisko zenitu. Przez nieduży teleskop można w ciemną noc spróbować dostrzec tam mgławicę (zaliczaną do planetarnych) o nazwie Hantle. Ma ona jasność 7,6 mag. Jest to najprawdopodobniej pozostałość po supernowej, która wybuchła nie dawniej niż 4000 lat temu. Mgławica obecnie rozszerza się jeszcze z prędkością około 50 km/s. Ma dość regularny okrągły kształt, ale świeci nierównomiernie, dlatego na zdjęciach wykonanych z krótszą ekspozycją przypomina przyrząd gimnastyczny, któremu zawdzięcza nazwę. W jej centrum leży bardzo gorąca gwiazda (85 000 K), która dała jej początek. Całość znajduje się w odległości 300 pc.

Wenus znajduje się w Pannie, a Jowisz w Lwie – tych dwóch planet nie widać więc z powodu bliskości Słońca. Mars jest w Wodniku i widać go praktycznie przez całą noc, a Saturn w Bliźniętach, wschodzi zatem dopiero około północy. Pełnia Księżyca wypada 10 IX, a nów 26 IX. Zakrycie Marsa przez Księżyc nastąpi 9 IX, ale zjawisko to będzie widać tylko we wschodniej części Rosji i w północnych Chinach. 27 IX Merkury znajdzie się najdalej kątowno od Słońca i można próbować odszukać go przed wschodem Słońca. 23 IX Słońce wejdzie w znak Wagi, co oznacza równonoc jesienną i nieuchronny początek astronomicznej jesieni.

T. K.



Olimpiada

Zadania I stopnia Olimpiady Astronomicznej, Matematycznej i Fizycznej 2003/2004

XLVII OLIMPIADA ASTRONOMICZNA 2003/2004

ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA

PIERWSZA SERIA

1. Siła ciągu ładownika Księżyca jest skierowana pionowo ku górze. Rozpatrz ruch tego ładownika poruszającego się nad powierzchnią Księżyca, gdy wartość siły ciągu jest równa sile przyciągania grawitacyjnego.

Jeśli przez jakiś czas podczas tego ruchu pionowa siła ciągu silnika zmniejszy się o połowę, to jak zmieni się wtedy ruch ładownika.

W sytuacji ładownika utrzymywanego przez silnik nieruchomo nad powierzchnią Księżyca na dostatecznie dużej wysokości oblicz czas, na jaki należy zmniejszyć siłę ciągu silnika do 0,9 przyspieszenia grawitacyjnego Księżyca, by początkowo nieruchomy ładownik zetknął się z powierzchnią Księżyca z prędkością 3 km/h.

We wszystkich przypadkach zakładamy, że ruch rakiety odbywa się w jednorodnym polu grawitacyjnym Księżyca.

2. Zespół polskich astronomów zaproponował metodę „masowego” odkrywania planet wokół innych gwiazd. Metoda ta umożliwi zarejestrowanie spadku jasności

gwiazdy, gdy przed jej tarczą przechodzi ciemny obiekt (np. planeta). Oceń, jakie spadki jasności rejestruje się wspomnianą metodą w przypadku rejestrowania przejścia ciemnego obiektu o rozmiarach Jowisza na tle tarczy gwiazdy podobnej do Słońca. Wynik podaj w wielkościach gwiazdowych.

3. W dniu 4 sierpnia b.r. Neptun był w opozycji do Słońca, jego odległość od Ziemi wynosiła 4348 mln km. Hipotetyczny obserwator znajdujący się na Neptunie mógłby wtedy oglądać przejście Ziemi przed tarczą Słońca. Na podstawie samodzielnie wyszukanych danych porównaj to zjawisko z przejściem Merkurego przed tarczą Słońca obserwowanym z Ziemi w dniu 7 maja b.r. Przyjmując kołową orbitę ziemskiego Księżyca ($r = 384$ tys. km) oblicz kąt, pod jakim widać Księżyc w stosunku do Ziemi. Wykonaj stosowny rysunek.

4. Zaprojektuj zegar słoneczny, który będzie wskazywał czas prawdziwy słoneczny w Twojej miejscowości. Wykonaj go oraz napisz instrukcję dotyczącą działania i posługiwania się nim. Ewentualnie załącz zdjęcie.

DRUGA SERIA

1. Jakie musi być położenie Ziemi i Marsa względem Słońca, w momencie startu sondy kosmicznej do Czerwonej Planety, aby lot sondy następował przy minimalnym zużyciu energii. Przyjmij, że orbity obu planet są okręgami i znajdują się w jednej płaszczyźnie.

2. Oblicz, jakiej grubości warstwę węgla należałoby rocznie spalić na całej Ziemi, by dostarczyć tyle samo energii, ile dostarcza Słońce. Na ile lat takiego ogrzewania Ziemi wystarczyłoby atmosferycznego tlenu.

Uwagi. Przy obliczeniach przyjmij, że do powierzchni dochodzi ilość energii, która wynika z uwzględnienia średniego albedo wynoszącego 0,39, stała słoneczna wynosi $A = 1368 \text{ W/m}^2$, a węgiel ma wartość opałową $w = 2,4 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$ i gęstość $\rho = 2,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

3. Znajdź wzór Ciołkowskiego

$$v = w \ln \left(\frac{m_0}{m} \right),$$

gdzie odpowiednio v to prędkość końcowa rakiety, w – prędkość gazów odrzutowych, m_0 – początkowa, a m – końcowa masa rakiety, znajdź ilość paliwa potrzebną:

a) do rozpędzenia sondy o masie 1000 kg do prędkości 20 km/s,

b) do lotu na Plutona bez korzystania z przyspieszania polami grawitacyjnymi planet.

Dla uproszczenia załóż, że paliwo (łącznie z utleniaczem) ma wartość opałową typowych węglowodorów (ok. $4 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$) i około jednej czwartej energii można zamienić na energię kinetyczną gazów odrzutowych, oraz że zaczynamy rozważania od sytuacji, gdy sonda z paliwem jest już na orbicie ziemskiej.

4. W dniu zaćmienia Słońca efemerydy obserwowanych w pewnej miejscowości pozycji Słońca i Księżyca są następujące:

	Moment	Rektascensja α	Deklinacja δ
Słońce	5 ^h 40 ^m	4 ^h 29 ^m 59 ^s	+21°49,5
	7 ^h 40 ^m	4 ^h 30 ^m 19 ^s	+21°50,3
	9 ^h 40 ^m	4 ^h 30 ^m 39 ^s	+21°51,1
Księżyc	5 ^h 40 ^m	4 ^h 26 ^m 47 ^s	+21°45,4
	7 ^h 40 ^m	4 ^h 30 ^m 42 ^s	+22°06,8
	9 ^h 40 ^m	4 ^h 34 ^m 37 ^s	+22°26,4

Przyjmij, że w czasie całego zaćmienia obserwowany promień tarczy Słońca wynosi 15'46",5, a Księżyca 14'48",0. Jakie będzie w tym miejscu zaćmienie? Oceń jego początek, koniec, wielkość i moment maksymalnej fazy.

ZADANIA OBSERWACYJNE

Rozwiązanie zadania obserwacyjnego powinno zawierać: dane dotyczące przyrządów użytych do obserwacji i pomiarów, opis metody i programu obserwacji, standardowe dane dotyczące przeprowadzonej obserwacji (m.in. czas, datę, współrzędne geograficzne, warunki atmosferyczne), wyniki obserwacji i ich opracowanie oraz ocenę dokładności uzyskanych rezultatów. W przypadku zastosowania metody fotograficznej należy dołączyć negatywy.

Rozwiązanie jednego zadania obserwacyjnego należy nadesłać wraz z rozwiązaniami drugiej serii zadań zawodów I stopnia – do dnia 17 listopada 2003 r.

1. Obserwacja przelotu Międzynarodowej Stacji Kosmicznej ISS na podstawie samodzielnie znalezionych efemeryd.

2. Obserwacja całkowitego zaćmienia Księżyca w nocy z 8 na 9 listopada 2003 r.

3. Jako rozwiązanie zadania obserwacyjnego można również nadesłać opracowane wyniki innych własnych obserwacji prowadzonych w ostatnim roku, a w szczególności obserwacje Marsa blisko jego wielkiej opozycji.

INFORMACJE REGULAMINOWE

1. Olimpiada Astronomiczna jest organizowana dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych i innych typów szkół dających możliwość uzyskania świadectwa dojrzałości.

2. Zawody olimpiady są trójstopniowe. W zawodach I stopnia (szkolnych) każdy uczestnik rozwiązuje dwie serie zadań, w tym zadanie obserwacyjne. Rozwiązywanie zadań zawodów II stopnia i III stopnia odbywa się w warunkach kontrolowanej samodzielności.

3. W pierwszej serii zadań zawodów I stopnia należy nadesłać, do **13 października 2003 r.**, rozwiązania 3 zadań, dowolnie wybranych przez uczestnika spośród zestawu zawierającego 4 zadania.

4. Uczniowie, którzy przysłał rozwiązania zadań pierwszej serii, otrzymają do końca października bieżącego roku tematy drugiej serii zadań.

5. Rozwiązanie zadania obserwacyjnego należy przesłać wraz z rozwiązaniami zadań drugiej serii zawodów I stopnia, do **17 listopada b.r.** Decyduje data stempla pocztowego. Nadesłanie rozwiązania zadania obserwacyjnego jest warunkiem koniecznym dalszego udziału w olimpiadzie.

6. W przypadku nadesłania rozwiązań większej liczby zadań z danego zestawu, do klasyfikacji zaliczane będą rozwiązania ocenione najwyżej (po trzy zadania z każdej serii i jedno zadanie obserwacyjne).

7. Rozwiązania zadań zawodów I stopnia należy przesłać za pośrednictwem szkoły pod adresem:

KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY ASTRONOMICZNEJ

Planetarium Śląskie

41-500 Chorzów

skr. poczt. 10

w terminach podanych w p. 3 i 5. Decyduje data stempla pocztowego.

8. Rozwiązania zadań powinny być krótkie i zwięzłe, ale z wystarczającym uzasadnieniem. W przypadku polecenia samodzielnego wyszukiwania danych, należy podać ich źródło. Jako dane traktuje się również podręcznikowe stałe astronomiczne i fizyczne.

9. Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnym arkuszu papieru formatu A-4. Każdy arkusz oraz wszelkie załączniki (mapki, wykresy, tabele itp.) należy podpisać imieniem i nazwiskiem. W nagłówku zadania o najniższej numeracji należy umieścić dodatkowo: rok i miejsce urodzenia, pełną nazwę szkoły, jej adres, klasę i jej profil oraz adres prywatny (z kodami pocztowymi).

10. O uprawnieniach laureatów i finalistów decydują senaty wyższych uczelni.

ZALECANA LITERATURA

- obowiązujące w szkołach średnich podręczniki do przedmiotów ścisłych;
- H. Chrupała, M.T. Szczepański, *25 lat olimpiad astronomicznych*;
- *Zadania olimpiad astronomicznych XXVI-XXXV* (w dwóch częściach);
- H. Chrupała, J. Kreiner, M. Szczepański, *Zadania z astronomii z rozwiązaniami*;
- J.M. Kreiner, *Astronomia z astrofizyką*;
- D. H. Levy, *NIEBO – Poradnik użytkownika*;
- J. Mielicki, *Astronomia w geografii*;
- E. Rybka, *Astronomia ogólna*;
- *Słownik szkolny – Astronomia* – praca zbiorowa;
- atlas nieba;
- obrotowa mapa nieba;
- czasopisma: *Delta*, *Fizyka w Szkole*, *Świat Nauki*, *Urania – Postępy Astronomii*, *Wiedza i Życie*.

Rozwiązania zadań I stopnia należy przysyłać do **Okręgowych Komitetów Olimpiady Fizycznej** w terminach: część I – do **25 października b.r.**, część II – do **20 listopada b.r.** O kwalifikacji do zawodów II stopnia będzie decydować suma punktów uzyskanych za rozwiązania zadań części I i II. Szczegóły dotyczące regulaminu oraz organizacji Olimpiady można znaleźć w broszurze i na afiszu rozesłanych do szkół średnich oraz na stronie internetowej <http://www.kgof.edu.pl>.

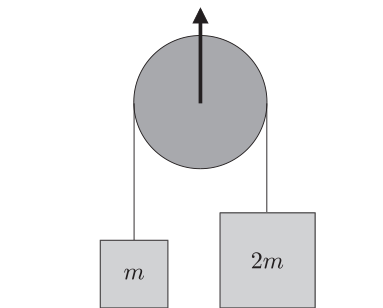
CZĘŚĆ I (termin wysyłania rozwiązań – 25 października 2003 r.)

Uwaga: Rozwiązania zadań należy zamieścić w kolejności zgodnej z ich numeracją. Wszystkie strony pracy powinny być ponumerowane. Na każdym arkuszu należy umieścić nazwisko i imię oraz adres autora pracy. Na pierwszym arkuszu pracy dodatkowo należy podać nazwę, adres szkoły i klasę oraz nazwisko i imię nauczyciela fizyki.

Podaj i krótko uzasadnij odpowiedź.

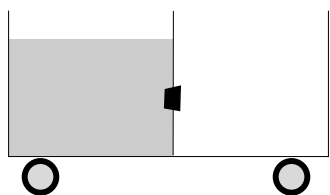
Za każde z 15 zadań można otrzymać maksimum 4 punkty.

1. Dwie masy m i $2m$ połączono nieważką i nierozciągliwą nicią przerzuconą przez nieważki bloczek, jak na rysunku 1. Jaką siłę należy przyłożyć pionowo do bloczka, żeby oderwać masę $2m$ od podłoża?



Rys. 1

2. Na mogącym poruszać się bez tarcia wózku umieszczono akwarium przedzielone pionową przegrodą z zatkanym otworem. Jedną z części akwarium wypełniono wodą – rysunek 2. Co stanie się z wózkiem zaraz po usunięciu korka zatykającego otwór w przegrodzie oraz po ustaleniu się poziomów wody?



Rys. 2

3. W pobliżu stacji transformatorowej słychać buczenie. Jaka jest częstotliwość tego dźwięku?

4. Robert Korzeniowski ma do przejścia pewien dystans. Idąc przez cały czas na granicy biegu może go przebyć w czasie T . Gdyby złośliwa Baba Jaga zmniejszyła Roberta Korzeniowskiego stukrotnie i to samo uczyniła z dystansem, który ma on do pokonania, to jaki czas uzyskałby mini-Korzeniowski idąc znowu na granicy biegu? Dla uproszczenia przyjmij, że chód odbywa się na wyprostowanych nogach.

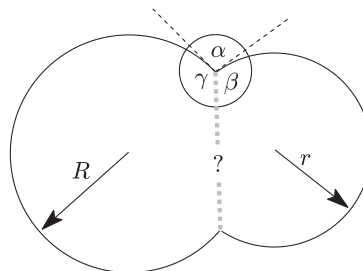
5. Kierowca autobusu gwałtownie zahamował, co spowodowało, że wszyscy pasażerowie pochyłili się do przodu. A co stało się z zielonym, wypełnionym helem balonikiem, który dziewczynka trzymała na sznurku?

6. Ciało rozpadło się w taki sposób, że powstałe części zaczęły swobodnie spadać z początkowymi (nie pionowymi) prędkościami $+\vec{v}_0$ i $-\vec{v}_0$. Po jakim czasie prędkości ciał staną się prostopadłe?

7. Źródło światła porusza się względem obserwatora z relatywistyczną prędkością. Jaki warunek spełnia wektor prędkości źródła, skoro obserwator nie stwierdza zmiany częstotliwości światła związanej z efektem Dopplera?

8. W zawodach w przeciąganiu liny obie drużyny ciągnęły nieważką linię z jednakowymi siłami F . Następnie linię przywiązano do drzewa, a drugi koniec ciągnięty był z siłą F . W którym przypadku ryzyko pęknięcia było większe?

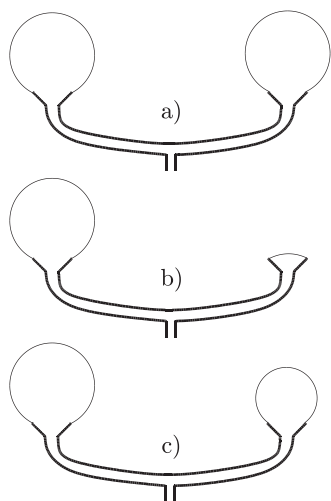
9. Bańka mydlana złożona jest z dwóch części oddzielonych błoną – rysunek 3. Naskicuj błonkę rozdzielającą bańki i wyznacz kąty α , β i γ przyjmując $R = \sqrt{2}r$.



Rys. 3

10. Udowodnij, że proces anihilacji pary proton-antypoton z emisją pojedynczego fotonu nie jest możliwy.

11. W słoneczny dzień można łatwo rozpalić ogień za pomocą soczewki. Jaka jest największa temperatura, którą można by teoretycznie uzyskać skupiając światło za pomocą soczewki?



Rys. 4

12. Jacek porusza się względem spoczywającego Placka z prędkością $v = 0,8c$. Z jaką prędkością porusza się Wacek, jeśli wiadomo, że Jacek i Placek oddalają się od niego z takimi samymi co do wartości, lecz przeciwnie skierowanymi prędkościami?

13. Jegomość w przeciwdeszczowym kapturze idzie przez padający pionowo deszcz. Z jaką prędkością powinien się on poruszać, by zmoknąć jak najmniej podczas pokonywania określonej drogi? Czy powinien poruszać się powoli, czy raczej biec? Pomiń wodę padającą na głowę. Uwzględnij jedynie deszcz padający na jegomościa z przodu.

14. Na końcach rozwidłonej rurki o przekroju wylotów w kształcie okręgu znajdują się błonki mydlane. Jaki kształt przybiorą powstałe bańki (patrz rysunek 4)?

15. Samolot lecący po linii prostej z prędkością dwóch machów przeleciał dokładnie nad obserwatorem stojącym na ziemi. Obserwator usłyszał samolot dopiero wtedy, gdy widział go pod kątem $\beta = 40^\circ$ nad horyzontem. Pod jakim kątem do poziomu leciał samolot?

CZEŚĆ II (termin wysyłania rozwiązań – 20 listopada 2003 r.)

Uwaga: Rozwiązanie każdego zadania powinno być napisane na oddzielnym arkuszu papieru podaniowego. Na każdym arkuszu należy umieścić nazwisko i imię oraz adres autora pracy, a także nazwę i adres szkoły i klasę oraz nazwisko i imię nauczyciela fizyki. Do pracy należy dołączyć kopertę zaadresowaną do siebie.

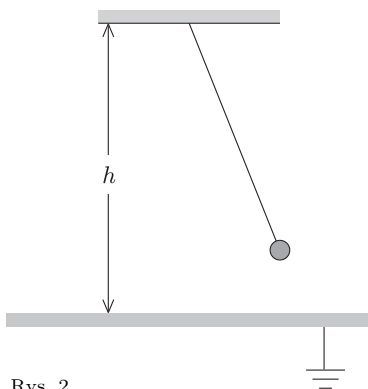
ZADANIA TEORETYCZNE

Za każde z trzech zadań można otrzymać maksimum 20 punktów.

T1. Układ optyczny składa się z dwóch cienkich, płaskowklęsłych soczewek szklanych, między którymi znajduje się woda – rysunek 1. W powietrzu ogniskowa układu wynosi f_1 , a w wodzie jest ona równa f_2 . Czy na podstawie tych danych można obliczyć współczynnik załamania światła w wodzie lub szkle względem powietrza? Jeśli tak, to podaj odpowiednie wyrażenia.

Rys. 1

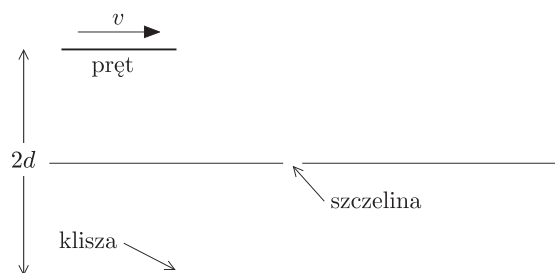
T2. W odległości h od nieskończonej, przewodzącej i uziemionej płaszczyzny matematyczne zaczepiono wahadło matematyczne z kulką o pewnej masie i ładunku elektrycznym – rysunek 2.



Rys. 2

Dla jakiej długości wahadła okres wahań będzie największy? Pomiń wpływ pola grawitacyjnego.

T3. Pręt o długości spoczynkowej $l = 1$ m porusza się z relatywistyczną prędkością $v = 0,9c$ (c – prędkość światła) wzdłuż swojej osi, w odległości $2d = 2$ m od nieruchomej kliszy fotograficznej – rysunek 3. W połowie odległości między prętem a kliszą znajduje się przesłona z wąską szczeliną, która otwiera się na bardzo krótko w chwilach $t_1 = -1$ s i $t_2 = 1$ s. Jakie będą długości pręta zarejestrowane na kliszy na kolejnych zdjęciach? Przyjmij, że w chwili $t = 0$ tylny koniec pręta znajdował się dokładnie nad przesłoną.



Rys. 3

ZADANIA DOŚWIADCZALNE

Przesłać należy rozwiązania dwóch (i tylko dwóch) zadań dowolnie wybranych z trzech podanych zadań doświadczalnych. Za każde zadanie można otrzymać maksimum 40 punktów.

D1. Masz do dyspozycji:

- kamerton, z pudłem rezonansowym, o częstotliwości 440 Hz (a^1) lub zbliżonej,
- cztery obciążniki o równych masach, które można sztywno zamocować do ramion kamertonu,
- mikrofon,
- oscyloskop,
- stoper.

- 1) Wyznacz czas połowicznego zaniku amplitudy drgań kamertonu.
- 2) Zmierz czasy połowicznego zaniku amplitudy drgań po zamocowaniu do jednego z ramion kamertonu l , a do drugiego p obciążników, gdzie $(l, p) = (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1), (4, 0)$. Obciążniki należy mocować w równej odległości od końców ramion kamertonu.
- 3) Przedyskutuj zauważone prawidłowości.

Uwaga!

- a) Do pomiarów wybierz kamerton o jak najdłuższym czasie zaniku drgań.
- b) Jako obciążników możesz użyć np. spinaczy biurowych lub kawałków drutu miedzianego o masie zbliżonej do 0,5 g każdy.
- c) Zamiast zwykłego oscyloskopu możesz użyć komputera z zainstalowaną kartą dźwiękową i odpowiednim programem. Możesz, na przykład, wykorzystać program *Winscope* dostępny na stronie Olimpiady Fizycznej: <http://www.kgof.edu.pl/of53/winscope/> lub program *Oscyloskop* dostępny na płycie CD dołączonej do podręcznika: J. Blinowski, W. Zielicz, *Fizyka z astronomią. Kształcenie w zakresie rozszerzonym*, tom. I, WSiP, Warszawa 2002 (i 2003, II wydanie).

D2. Przyrządź galaretkę rozpuszczając 2 łyżeczki żelatyny w 1/2 szklanki wrzątku.

Masz do dyspozycji:

- stężałą galaretkę,
- płaską wąską linijkę,
- nóż,
- stoper.

Wyznacz moduł sztywności galaretki w temperaturze pokojowej.

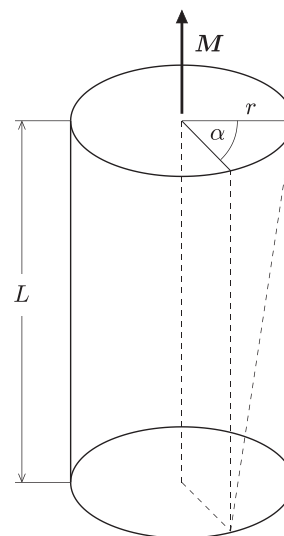
Uwaga!

- a) Możesz przyjąć, że gęstość galaretki wynosi 1 g/cm^3 .

- b) W przypadku idealnie sprężystych odkształceń jednorodnego walca o długości L i promieniu r , którego dolna podstawa jest unieruchomiona, a górna skręcona jest o kąt α pod wpływem momentu siły M (patrz rysunek 4), obowiązuje związek:

$$M = \frac{\pi G r^4}{2L} \alpha,$$

gdzie G – moduł sztywności materiału z jakiego wykonany jest walec.



Rys. 4

- D3.** Rozważmy sprężyste odkształcenie gumki o długości c i prostokątnym przekroju poprzecznym o wymiarach $a \times b$. Jeśli na gumkę działać będzie siła rozciągająca wzdłuż c , to zmianie ulegnie nie tylko jej wymiar c o δc , ale także jej wymiary poprzeczne a i b , odpowiednio o δa i δb .

Zakładamy, że dla małych odkształceń gumy zachodzą następujące związki:

$$\frac{\delta a}{a} = \frac{\delta b}{b} = -\sigma \frac{\delta c}{c},$$

gdzie σ – bezwymiarowa stała.

Masz do dyspozycji:

- długie kawałki gumy o przekroju poprzecznym w kształcie prostokąta o wymiarach co najmniej $1 \times 3 \text{ mm}$,
 - statyw,
 - kilka ciężarków (np. z zestawu odważników do szkolnej wagi laboratoryjnej),
 - kawałek sznurka lub drutu umożliwiającego zawieszenie ciężarków na gumie,
 - linijkę,
 - suwmiarkę,
- wyznacz stałą σ dla gumy.

(Dla ciał izotropowych stała σ nazywana jest współczynnikiem Poissona i wraz z modułem Younga w pełni określa własności sprężyste materiału.)

Uwaga! Do doświadczenia możesz użyć gumy modelarskiej lub gumek dostępnych w stoiskach z artykułami gospodarstwa domowego.

I SERIA

1. Dany jest wielokąt o bokach długości wymiernej, w którym wszystkie kąty wewnętrzne są równe 90° lub 270° . Z ustalonego wierzchołka wypuszczamy promień świetlny do wnętrza wielokąta w kierunku dwusiecznej kąta wewnętrznego przy tym wierzchołku. Promień odbija się zgodnie z zasadą: kąt padania jest równy kątowi odbicia. Udowodnić, że promień trafi w jeden z wierzchołków wielokąta.

2. Rozstrzygnąć, czy istnieje liczba pierwsza p oraz liczby całkowite nieujemne x, y, z spełniające równanie

$$(12x + 5)(12y + 7) = p^z.$$

3. Niech \mathbb{Q} oznacza zbiór wszystkich liczb wymiernych. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ spełniające warunek

$$f(x^2 + y) = xf(x) + f(y)$$

dla każdej pary liczb wymiernych x, y .

4. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Rozważamy wszystkie takie trójkąty równoboczne XYZ , że punkty A, B, C są odpowiednio punktami wewnętrznymi odcinków YZ, ZX, XY . Dowiedzieć, że środki ciężkości wszystkich rozważanych trójkątów XYZ leżą na jednym okręgu.

II SERIA

5. Dla liczb całkowitych dodatnich m, n niech $N(m, n)$ oznacza liczbę m -wyrazowych ciągów niemalejących o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Dowiedzieć, że

$$N(m, n + 1) = N(n, m + 1).$$

6. Niech c będzie taką liczbą rzeczywistą, że wielomian

$$P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x - c$$

ma pięć różnych pierwiastków rzeczywistych x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Wyznaczyć, w zależności od c , sumę wartości bezwzględnych współczynników wielomianu

$$Q(x) = (x - x_1^2)(x - x_2^2)(x - x_3^2)(x - x_4^2)(x - x_5^2).$$

7. Znaleźć wszystkie takie rozwiązania równania

$$a^2 + b^2 = c^2$$

w liczbach całkowitych dodatnich, że liczby a i c są pierwsze, a liczba b jest iloczynem co najwyżej czterech liczb pierwszych.

8. Punkt P leży wewnątrz czworoboku $ABCD$.

Dowiedzieć, że

$$\sphericalangle APB + \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPD + \sphericalangle DPA > 360^\circ.$$

III SERIA

9. Dane są wielomiany

$$W_1(x), W_2(x), W_3(x), \dots, W_n(x)$$

stopnia co najmniej 1, o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że dla pewnej liczby całkowitej a wszystkie liczby

$$W_1(a), W_2(a), W_3(a), \dots, W_n(a)$$

są złożone.

10. Dany jest wielokąt wypukły o parzystej liczbie boków. Każdy bok wielokąta ma długość 2 lub 3, przy czym liczba boków każdej z tych długości jest parzysta. Dowiedzieć, że istnieją dwa wierzchołki wielokąta, które dzielą jego obwód na dwie części jednakowej długości.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

10 października 2003 r. – I seria

12 listopada 2003 r. – II seria

10 grudnia 2003 r. – III seria

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

www.om.edu.pl



ADRESY KOMITETÓW OKRĘGOWYCH OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Dla województwa pomorskiego:

KOOM – Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk.

Dla województwa śląskiego:

KOOM – Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-005 Katowice.

Dla województwa małopolskiego:

KOOM – Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

Dla województwa lubelskiego i podkarpackiego:

KOOM – Oddział Lubelski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, pok. 223, 20-031 Lublin.

Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:

KOOM – Wydział Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

Dla województwa wielkopolskiego:

KOOM – Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań.

Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:

KOOM, ul. Wielkopolska 15, 70-251 Szczecin.

Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:

KOOM – Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:

KOOM – Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, skr. poczt. 21, 00-956 Warszawa 10.

Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:

KOOM – Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

ADRESY KOMITETÓW OKRĘGOWYCH OLIMPIADY FIZYCZNEJ

KOOF w Białymstoku, ul. Lipowa 41, 15-224 Białystok (woj. podlaskie, powiaty: kętrzyński, mławowski, piski, giżycki, olecko-gołdapski, ełcki).

KOOF w Częstochowie, Al. Armii Krajowej 13/15, 42-201 Częstochowa (woj. opolskie, woj. świętokrzyskie, powiaty: częstochowski, kłobucki, lubliniecki, myszkowski).

KOOF w Gdańsku, ul. Narutowicza 11/12, 80-952 Gdańsk-Wrzeszcz (woj. pomorskie, woj. warmińsko-mazurskie z wyłączeniem powiatów: kętrzyńskiego, mławowskiego, piskiego, giżyckiego, olecko-gołdapskiego, ełckiego).

KOOF w Gliwicach, ul. Bolesława Krzywoustego 2, 44-100 Gliwice (woj. katowickie z wyłączeniem powiatów: częstochowskiego, kłobuckiego, lublinieckiego, myszkowskiego).

KOOF w Krakowie, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków (woj. małopolskie).

KOOF w Lublinie, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, 20-031 Lublin (woj. lubelskie).

KOOF w Łodzi, ul. Pomorska 149, 90-236 Łódź (woj. łódzkie).

KOOF w Poznaniu, ul. Umultowska 85, 60-780 Poznań (woj. wielkopolskie).

KOOF w Rzeszowie, ul. Reytana 16A, 35-310 Rzeszów (woj. podkarpackie).

KOOF w Szczecinie, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin (woj. zachodnio-pomorskie, woj. lubuskie).

KOOF w Toruniu, ul. Grudziądzka 5, 87-100 Toruń (woj. kujawsko-pomorskie).

KOOF w Warszawie, ul. Koszykowa 75, 00-662 Warszawa (woj. mazowieckie).

KOOF we Wrocławiu, pl. M. Borna 9, 50-205 Wrocław (woj. wrocławskie).