

SPIS TREŚCI NUMERU 12 (355)

| | |
|---|--------|
| Dziwny atraktor Lorenza | str. 1 |
| Kondensacja Bosego-Einsteina | str. 1 |
| Genetyka: zawrót głowy od sukcesów | str. 2 |
| Kwantowa teleportacja | str. 2 |
| Wielkie Twierdzenie Fermata | str. 3 |
| Model standardowy oddziaływań cząstek elementarnych | str. 3 |
| Klasyfikacja skończonych grup prostych | str. 4 |
| Pozasłoneczne układy planetarne | str. 4 |
| Wzór Blacka-Scholesa | str. 5 |
| Kosmiczny Teleskop Hubble'a | str. 6 |
| Neutrino | str. 6 |
| Mikrofalowe promieniowanie tła | str. 7 |
| Okres trzy wywołuje chaos | str. 7 |
| Czterowymiarowa hipoteza Poincarégo, czyli wyniki Freedmana | str. 8 |
| Egzotyczne \mathbb{R}^4 , czyli wyniki Donaldsona | str. 8 |
| Duża Mała Delta | |
| Własny (podłączony) komputer Nano | str. 9 |
| Zagadnienie czterech barw | str. 9 |
| Falki | str.10 |
| Stała kosmologiczna | str.10 |
| Stała Feigenbauma | str.11 |
| Różblyski promieniowania gamma | str.12 |
| Ciemna materia | str.13 |
| XXV Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki i XX Ogólnopolski Sejmik Matematyków | str.14 |
| Klub 44 | str.15 |
| Grudzień | str.16 |
| Zadania | str.16 |
| Gammalimatias | str.17 |

Numer przygotowali: *Wiktor Bartol, Jerzy Browkin, Ewa Czuchry, Marek Demiański, Magdalena Fikus, Michał Jaroszyński, Jan Kalinowski, Danuta Kielczewska, Marcin Kiraga, Marek Kordos, Tomasz Kwast, Mirosław Lachowicz, Zbigniew Marciniak, Andrzej Palczewski, Zdzisław Pogoda, Ewa Rondio, Michał Różyczka, Witold Sadowski, Paweł Strzelecki, Przemysław Wojtaszczyk, Piotr Zalewski.*

W następnym numerze:
Co udowodnił Perelman

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych. Komitet Redakcyjny: Andrzej Białynicki-Birula, Bogdan Cichoński – wiceprzewodniczący, Krzysztof Ciesielski, Jan A. Gaj, Piotr Goldstein, Andrzej Hryniewicz, Tadeusz Jarzembowski, Wiesław A. Kamiński, Marta Kicińska-Habior, Zbigniew Marciniak, Janusz Matkowski, Andrzej Mąkowski, Adam Michalec, Zdzisław Pogoda, Grzegorz Sitarski, Weronika Śliwa, Andrzej Woszczyk, Wiesław Żelazko – przewodniczący. Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Krzysztof Biesaga, Ewa Czuchry, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Anna Ludwicka, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac. Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Rysunki techniczne: Marcin Adamski Adres Redakcji: ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa, tel. 853-59-61, 55-33-216. Skład systemem \TeX wykonała Redakcja, e-mail: BARTOL@MIMUW.EDU.PL Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2004 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.
W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2004 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.
Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.
Konto AMOS-u: **PKO BP SA I O/W-wa, nr 30 10201013 12640143**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na II kwartał 2004 r. wynosi 12 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru. Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 68124010531111000004430494 lub kasa Oddziału.
5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

| | | |
|----------|----------|--------------------------|
| do 5 XII | – na I | kwartał roku następnego, |
| do 5 III | – na II | kwartał roku bieżącego, |
| do 5 VI | – na III | kwartał roku bieżącego, |
| do 5 IX | – na IV | kwartał roku bieżącego. |

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

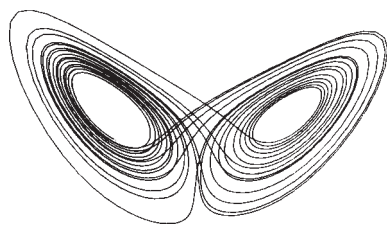
Strona internetowa *Delty*: <http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wybór artykułów archiwalnych: <http://www.wiwi.pl>

Wybór artykułów *Małej Delty*: <http://eduseek.ids.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł



Dziwny atraktor Lorenza

Badanie (deterministycznych) zjawisk chaotycznych jest jednym z najmłodniejszych kierunków we współczesnych naukach przyrodniczych⁽¹⁾. Formułowane są opinie, że teoria chaosu, obok teorii względności i mechaniki kwantowej, jest trzecią wielką rewolucją naukową.

Jednym z możliwych sposobów opisu chaosu jest badanie obiektów, zwanych *dziwnymi atraktorami*.

Globalny atraktor jest zbiorem, do którego zbliżają się asymptotycznie orbity (trajektorie) startujące z jego dopełnienia. Poznanie dynamiki w atraktorze pozwala zatem zrozumieć długookresową dynamikę danego układu. Atraktory układów n -wymiarowych (z czasem ciągłym), dla $n \geq 3$ mogą mieć bardzo skomplikowaną strukturę geometryczną⁽²⁾. Atraktory o skomplikowanej strukturze, to właśnie dziwne atraktory (nazywa się je też chaotycznymi).

Jednym z najbardziej znanych dziwnych atraktorów jest atraktor Lorenza dla 3 równań różniczkowych zwyczajnych (zwanych układem Lorenza), będących bardzo uproszczonym modelem konwekcji cieplnej. Geometryczna struktura atraktora Lorenza przypominająca motyla była znana z symulacji komputerowych od dziesiątków lat: można ją zobaczyć w każdej publikacji poświęconej atraktorom. Jednakże mimo licznych prób w ostatnim ćwierćwieczu XX wieku wydawało się, że ścisły dowód, iż atraktor Lorenza jest dziwnym atraktorem, leży poza możliwościami matematyków. Było to jedno z największych wyzwań dla świata matematyki. W roku 1995 Mischaikov i Mrozek⁽³⁾ pokazali, że układ Lorenza ma bardzo bogatą dynamikę, ale problem istnienia dziwnego atraktora Lorenza był w dalszym ciągu otwarty. W roku 1998 problem ten został uznany przez

Stevena Smale'a za jeden z 18 najważniejszych nierozwiązanych problemów matematycznych pod koniec XX wieku („XIV problem Smale'a”)⁽⁴⁾. W roku 1999 okazało się, że XIV problem Smale'a został rozwiązany: Warwick Tucker z Uppsali zaanonsował⁽⁵⁾ pozytywne rozwiązanie problemu istnienia dziwnego atraktora Lorenza. Dowód W. Tuckera jest oparty na ścisłych metodach numerycznych⁽⁶⁾.

⁽¹⁾ O popularności tych badań świadczy liczba publikacji, opracowań i książek poświęconych *chaosowi deterministycznemu* (D.A. Hill – *Chaotic chaos*, Math. Intellig., 22, 2000 – doliczył się ponad 7000 pozycji), a także fakt, że naukowcy dostrzegają zjawiska chaotyczne w wielu procesach przyrodniczych (np. jeden z paragrafów rozdziału VII książki *Strzałka czasu* Coveneya i Highfielda nosi tytuł *Chaos przyczyną seksu*).

⁽²⁾ Układy jedno-, lub dwuwymiarowe z czasem ciągłym nie mogą mieć atraktorów o skomplikowanej strukturze, a zatem nie mogą mieć skomplikowanej dynamiki.

⁽³⁾ Bull. Amer. Math. Soc., 32, 1995, 66–72.

⁽⁴⁾ Lista 18 Problemów Smale'a (Math. Intellig., 20, 2, 1998, 7–15) została zaproponowana w podobnym duchu, jak lista 23 najważniejszych problemów matematycznych D. Hilberta *Problemy przyszłości matematyki* w roku 1900 u progu XX w.

⁽⁵⁾ Compt. Rend. Acad. Sci., Paris, Math., 328, 1999, 1197–1202.

⁽⁶⁾ Pełny dowód W. Tuckera ukazał się w roku 2002 (Found. Comput. Math., 2, 2002, 53–117). Przegląd idei matematycznych dotyczących badania atraktora Lorenza oraz idei dowodowych W. Tuckera można znaleźć w artykule Marcelo Viany (Math. Intellig., 22, 2000, 6–19).

Mirosław LACHOWICZ

Kondensacja Bosego–Einsteina

W 1995 roku zespół badawczy z Boulder (Kolorado) wytworzył niezwykłą kroplę. Ochładzając kilka tysięcy atomów rubidu do temperatury rzędu jednej stumiliardowej stopnia powyżej zera bezwzględnego uzyskano warunki, w których na prawie 10 sekund atomy straciły swoją tożsamość i upodobniły się do siebie pod względem własności fizycznych. Wytworzony w ten sposób, po raz pierwszy w gazie, tzw. kondensat Bosego–Einsteina był doświadczalnym urzeczywistnieniem teoretycznych przewidywań Alberta Einsteina i hinduskiego fizyka Satyendry Natha Bosego z 1924 roku. W temperaturze pokojowej atomy gazu poruszają się chaotycznie wewnątrz całej objętości pojemnika, w którym się znajdują. Ich prędkości (a co za tym idzie, energie) są bardzo zróżnicowane: jedne atomy poruszają się z bardzo dużą prędkością, inne z mniejszą, przy czym wartość średnia kwadratów prędkości jest proporcjonalna do temperatury gazu. Uogólniając pracę Bosego z 1920 roku, Einstein przewidywał, że jeśli taki gaz zostanie odpowiednio oziębiony, to większość atomów będzie się znajdowała w stanie o najniższej możliwej

energii. Fale, które w matematycznym formalizmie teorii opisują fizyczne cechy atomów, takie jak np. położenie i prędkość, zlewają się wzajemnie i nie można odróżnić jednego atomu od drugiego.

Przewidziane przez Einsteina istnienie takiej formy materii nie spotkało się początkowo z dużym zainteresowaniem fizyków. Było to spowodowane głównie niewiarą w możliwość uzyskania dostatecznie niskiej temperatury potrzebnej do istnienia kondensatu. Jednak postęp, który w ciągu kilkunastu lat dokonał się w technologii chłodzenia, umożliwił próby stworzenia warunków odpowiednich do zajścia kondensacji Bosego–Einsteina.

Wytworzenie kondensatu było nie tylko wyzwaniem samym w sobie, wyprodukowaniem nowej formy materii, ale też możliwością zaobserwowania w warunkach makroskopowych subtelnych efektów kwantowych, możliwością podejrzenia „gołym okiem” dziwnego świata mechaniki kwantowej.

Nagroda Nobla w 2001 roku (Aktualności, *Delta* 1/2002).

E. Cz.

Genetyka: zawrót głowy od sukcesów

Właśnie 30 lat temu ukazała się publikacja Paula Berga (Nagroda Nobla z Chemii, 1980) i współpracowników z Uniwersytetu Stanforda, którą tradycyjnie uważa się za start w nową, tajemniczą i pełną obietnic dziedzinę – inżynierię genetyczną. Amerykańscy uczeni połączyli trwale geny pochodzące od wirusa bakteryjnego i od wirusa małp. Uzyskali genetyczną chimere. Nigdy nie dowiedzieliśmy się, w jakim organizmie i jak mogłaby działać, ponieważ od razu odezwały się pierwsze głosy ostrzegawcze co do skutków stosowania nowej techniki, głosy przypominające, do czego doprowadzili świat fizycy zafascynowani odkryciami i zastosowaniami badań w dziedzinie fizyki jądrowej. I tak już jest do dziś: biolodzy tworzą nowe konstrukcje genowe, które wydają się im rewelacyjne z każdego punktu widzenia, opinia publiczna ostrzega przed potencjalnymi zagrożeniami płynącymi z tych badań.

Inżynieria genetyczna, która przez te 30 lat dostarczyła wielu wspaniałych odkryć, pozwoliła na uzyskanie pełnej informacji o budowie setek tysięcy genów i białek, egzekutorów instrukcji genowych, na pełną analizę setek genomów organizmów, od wirusów do człowieka, na kontrolowane zmiany i modyfikacje genów i genomów. Te modyfikacje udzielają odpowiedzi wprost na liczne pytania badań podstawowych o istotę życia i zaspokajają potrzeby praktyczne współczesnego świata. Nie odnotowano ani jednego poważnego, niekontrolowanego wypadku, ani katastrofy związanej z rozwojem tej dziedziny.

Pojawiły się nowe gałęzie nauki (lub niewiarygodnie szybko rozwinęły już istniejące): genomika, proteomika, bioinformatyka, farmakogenetyka, molekularny

ewolucjonizm, inżynieria komórkowa i tkankowa, embriologia, biotechnologia. Ta ostatnia przyniosła wiele nowych rozwiązań technologicznych, wiele nowych, dotychczas nieosiągalnych produktów, znalazła szerokie zastosowania medyczne i farmakologiczne, od dokładnej diagnostyki licznych chorób, do bardziej lub mniej pomyślnych prób terapii genowych. Dzięki zwierzętom zajrzeliśmy w obszary zakazane dla medycyny: transgenizację i klonowanie. Do dyskusji o celowości badań w tych zakresach i dopuszczalnych ich granicach włączyli się etycy wielu kierunków, prawnicy, socjologowie, psychologowie.

Nie ma dnia, by media nie donosiły o jakimś nowym genie, terapii, leku, transgenicznej roślinie, ratowanym przez genetyków ginącym gatunku, badaniach archeologicznych wspartych analizą genów, historii ludzkich wędrówek przez stulecia i kontynenty. Poranny telefon z radia oznacza dla mnie, że coś się wydarzyło w genetyce, a dziennikarz przeczytał o tym w Internecie. Filmy i książki traktują o mutantach i klonowanych osobnikach, wyruszamy w nich w Kosmos w towarzystwie twórców inżynierii genetycznej. . . O nie, na brak uwagi z tej strony naprawdę nie możemy narzekać. Żeby to jeszcze przekładało się na wysokość nakładów na genetykę w Polsce. . .

VI Festiwal Nauki rozstrzygnął konkurs na tzw. Polskiego Katona, który mógłby kończyć każde swoje wystąpienie tym samym zdaniem: „. . . a poza tym sądzę, że brak inwestycji w naukę oznacza inwestycje w ignorancję”. Co niniejszym pozostawiam Czytelnikom do refleksji. . .

Magdalena FIKUS

Kwantowa teleportacja

Słowo *teleportacja* stworzyła literatura science-fiction do opisu sytuacji, w której jakiś przedmiot lub osoba znikają w jednym miejscu, a ich dokładna kopia pojawia się momentalnie, bądź chwilę później, gdzie indziej. Miało to być dokonywane w ten sposób, że najpierw teleportowany obiekt jest bardzo dokładnie skanowany, informacja zaś stąd uzyskana jest przesyłana i użyta następnie do jego rekonstrukcji. Naukowcy nie traktowali tego pomysłu zbyt poważnie, ponieważ zgodnie z leżącą u podstaw mechaniki kwantowej zasadą nieoznaczoności, która nie pozwala w jakimkolwiek pomiarze fizycznym uzyskać całkowitej dokładnej informacji o badanym obiekcie, np. jego prędkości i położeniu, dokładny pomiar („zeskanowanie”) nie jest możliwy. Ale w 1993 roku międzynarodowa grupa fizyków wykazała, nie naruszając zasady nieoznaczoności, że teleportacja jest teoretycznie możliwa (ale tylko wtedy, gdy „oryginał” ulegnie zniszczeniu).

Sedno kwantowej teleportacji tkwi w tzw. efekcie Einsteina-Podolskiego-Rosena. Efekt ten polega na tym, że dwa fotony mogą być ze sobą związane

niezależnie od tego, jak są oddalone, dopóki nie zostanie przeprowadzony pomiar, który momentalnie wprowadza oba w określony stan. Pomysł na przeprowadzenie kwantowej teleportacji był następujący. Wytwarzamy dwa splątane fotony, tzw. parę fotonów EPR, *A* i *B*. Jeden obserwator – „stacja nadawcza” – bierze foton *A*, drugi obserwator – „stacja odbiorcza” – bierze foton *B*. W stacji nadawczej dokonuje się pomiaru fotonu *A* względem pewnego trzeciego fotonu *C* i przekazuje wynik pomiaru do stacji odbiorczej. Tam wynik tego względnego pomiaru może zostać wykorzystany do odtworzenia fotonu *C* właśnie (który jest zmodyfikowanym w prosty sposób – np. obróconym o pewien kąt – fotonem *B*). Zasada nieoznaczoności nie została naruszona, ponieważ nie uzyskaliśmy żadnej informacji o stanie fotonu *C*, zaś foton *A* został zniszczony.

W 1997 roku grupie badawczej z Innsbrucku pod kierunkiem Antona Zeilingera udało się przeprowadzić doświadczalnie eksperyment teleportacyjny dla fotonów. Ambicją fizyków jest przeprowadzenie podobnego doświadczenia dla większych obiektów.

E. Cz.

Wielkie Twierdzenie Fermata

Pierre de Fermat (1601–1665) sformułował następujące twierdzenie:

Równanie $X^n + Y^n = Z^n$, gdzie $n \geq 3$, nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.

Dowód tego twierdzenia został opublikowany przez A. Wilesa w roku 1995 w ponad 300 lat od jego sformułowania.

Długa i bogata historia poszukiwania dowodu jest opisana w książce P. Ribenboima *Wielkie Twierdzenie Fermata dla laików*, WNT, Warszawa 2001.

Do badania rozwiązań tego równania próbowano stosować różne metody. Począwszy od elementarnych (teoria podzielności liczb całkowitych), które doprowadziły do udowodnienia Wielkiego Twierdzenia Fermata dla $n = 4$, poprzez metody algebraicznej teorii liczb (bada ona własności liczb niewymiernych, które są pierwiastkami wielomianów o współczynnikach całkowitych), które pozwoliły udowodnić Wielkie Twierdzenie Fermata dla wielu innych małych

wykładników, na przykład dla wszystkich wykładników pierwszych mniejszych od 100 000, aż do metod analitycznej teorii liczb, które pozwoliły wykazać, że Wielkie Twierdzenie Fermata zachodzi dla nieskończenie wielu wykładników pierwszych.

Decydujące jednak okazało się zastosowanie metod z bardziej zaawansowanych działów matematyki znacznie rozwiniętych w XX wieku, jak teoria krzywych eliptycznych. Zasadniczy nowy pomysł należał do G. Freya, który z rozwiązaniem $X = a$, $Y = b$, $Z = c$ równania Fermata w liczbach naturalnych związał krzywą o równaniu $Y^2 = X(X - a^n)(X + b^n)$. Jest to właśnie pewna krzywa eliptyczna. Wielu matematyków zaczęło badać własności takiej krzywej i okazały się one zadziwiające. Wreszcie A. Wiles doprowadził rozumowanie do końca dowodząc, że krzywej o tak zadziwiających własnościach być nie może, a więc i równanie Fermata nie ma rozwiązań.

Jerzy BROWKIN

Model standardowy oddziaływań cząstek elementarnych

W momencie ukazania się pierwszego numeru *Delty* model standardowy oddziaływań cząstek elementarnych był już w zasadzie sformułowany. W ciągu 30 lat model ten, zwany modelem Glashowa, Salama i Weinberga (GSW), został sprawdzony do odległości rzędu 10^{-18} m, to jest do skali energii rzędu 100 GeV.

Podstawą tego modelu jest przyjęcie nieprzemiennej symetrii oddziaływań silnych, elektromagnetycznych i słabych względem grupy $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ transformacji pól opisujących kwarki i leptony. W momencie formułowania modelu GSW znane były trzy typy kwarków (u , d i s) i cztery leptony (e , ν_e , μ i ν_μ). Odkrycie czwartego kwarka c w listopadzie 1974 r., koniecznego dla matematycznej poprawności modelu, było wielkim wydarzeniem. Rok wcześniej dokonano dwóch innych doniosłych odkryć: słabych oddziaływań fermionów bez zmiany ich ładunku elektrycznego i tzw. swobody asymptotycznej oddziaływań silnych, tłumaczącej jakościowo proton jako stan związany kwarków. Te fakty spowodowały uznanie modelu GSW.

Obecnie znamy trzy „generacje” fermionów: pierwsza zawiera u , d , e , ν_e , druga – c , s , μ , ν_μ , trzecia – t , b , τ , ν_τ oraz 12 bozonów cechowania: 8 bezmasowych gluonów przenoszących oddziaływania silne, 3 masywne bozony pośredniczące w oddziaływaniach słabych W^\pm , Z^0 (odkryte w 1983 roku) i foton. Każdy z kwarków występuje w trzech „kolorach”; kolor w oddziaływaniach silnych jest tym, czym ładunek elektryczny w oddziaływaniach elektromagnetycznych. Mamy więc 8 fermionów (i 8 antyfermionów) w każdej

generacji. Skład fundamentalnych cząstek zamyka bozon Higgsa H , na którego odkrycie czeka niecierpliwie całe środowisko fizyków cząstek elementarnych. Bozon ten jest „pozostałością” tzw. mechanizmu Higgsa, generowania mas W^\pm , Z^0 i fermionów.

Model standardowy redukuje więc zbiór kilkuset cząstek elementarnych do 24 fermionów (i 24 antyfermionów) oraz 13 bozonów, których masy i stałe sprzężenia są swobodnymi parametrami teorii ustalonymi doświadczalnie.

Sformułowanie modelu standardowego jest niewątpliwie wielkim sukcesem fizyki cząstek elementarnych. Ale nadal nie znamy odpowiedzi na wiele pytań: dlaczego fermiony układają się w generacje (i tylko trzy generacje), dlaczego grupą symetrii jest $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, czy poprawny jest mechanizm Higgsa, jak włączyć oddziaływania grawitacyjne itp. Przez wiele lat te pytania można było ignorować, gdyż od strony doświadczalnej nie było potrzeby modyfikacji teorii. Sytuacja zaczyna na szczęście ulegać zmianie. Wyniki ostatnich doświadczeń neutrinowych, wskazujących na niezerową masę neutrin i ich mieszanie, nie pasują do minimalnej wersji modelu standardowego i zmuszają nas do przeformułowania teorii oddziaływań elementarnych. Na rynku jest wiele propozycji teoretycznych: supersymetria, superstruny, modele z replikami grup cechowania, dodatkowe wymiary itp. Jedyne przyszłe doświadczenia pozwolą nam rozstrzygnąć, która koncepcja teoretyczna jest poprawna.

Jan KALINOWSKI

Klasyfikacja skończonych grup prostych

Wszystkie izometrie płaszczyzny nakładające ustaloną figurę na siebie tworzą zbiór przekształceń, zamknięty ze względu na składanie i odwracanie. Zbiór ten, zwany grupą symetrii własnych figury, mierzy symetryczność: figurę bardzo symetryczną można nakładać na siebie na wiele różnych sposobów.

Już w XIX wieku zauważono, że tak samo można mierzyć symetryczność dowolnych obiektów matematycznych (wielomianów, systemów liczbowych itd). Doprowadziło to do powstania pojęcia abstrakcyjnej grupy: jest to zbiór G wyposażony w łączne mnożenie (odpowiednik składania przekształceń). Ponadto każda grupa powinna mieć element neutralny, każdy zaś element $g \in G$ – odwrotność $g^{-1} \in G$.

W skończonym zbiorze można wprowadzić takie mnożenie na skończenie wiele sposobów – teoretycznie istnieje więc możliwość sporządzenia pełnej listy grup o co najwyżej n elementach. W praktyce jest to niewykonalne; znane interesujące grupy o setkach tysięcy elementów, podczas gdy różnych grup dla $n \leq 2000$ jest już blisko 5 miliardów!

Istnieje inny, bardziej efektywny sposób klasyfikowania grup skończonych. Jeśli $H \subset G$ jest podgrupą G , to zbiór G można rozłożyć na parami rozłączne podzbiory (warstwy) $G = H_1 \cup \dots \cup H_m$: elementy $x, y \in G$ zaliczymy do tej samej warstwy, gdy $xy^{-1} \in H$.

Warstwy te można mnożyć w następujący sposób: aby obliczyć $H_i \cdot H_j$ bierzemy dowolne $x \in H_i, y \in H_j$. Wtedy $x \cdot y$ leży w jednej z warstw H_k , więc definiujemy $H_i \cdot H_j = H_k$. Podgrupę $H \subset G$ nazywamy *normalną*,

jeśli ta definicja jest poprawna, tj. wynik mnożenia nie zależy od wyboru x, y . Wtedy zbiór warstw wraz z tym mnożeniem tworzy m -elementową grupę, oznaczaną przez G/H . Jeśli $1 < |H| < |G|$, to opis grupy G redukuje się do opisu *mniejszych* grup: H oraz G/H .

Pozostaje opisać grupy skończone bez właściwych podgrup normalnych, czyli tzw. *grupy proste*.

W roku 1984 ogłoszono zakończenie procesu ich klasyfikacji. Było to przedsięwzięcie bez precedensu: kompletowanie listy grup prostych zajęło ponad 30 lat, a wyniki tych badań są opisane w około 500 pracach naukowych kilkuset autorów, zajmujących w sumie prawie 10 000 stron druku!

Jaka wygląda ta lista? Bez dalszych wyjaśnień, wyliczmy. Każda skończona grupa prosta albo należy do jednej z trzech, znanych od dawna, nieskończonych rodzin grup „klasycznych”:

- 1) grupy cykliczne C_n , gdzie n jest liczbą pierwszą,
- 2) grupy A_n permutacji parzystych,
- 3) grupy „typu Lie” nad ciałami skończonymi,

albo jest jedną z 26 grup sporadycznych: $M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_1, J_2, J_3, J_4, HS, Mc, Suz, Ru, He, Ly, ON, .1, .2, .3, M(22), M(23), M(24)', F_5, F_3, F_2, F_1$.

Grupy sporadyczne wypisane są tu w porządku rosnącym; największa z nich – grupa Fishera F_1 – ma $2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 \approx 10^{54}$ elementów.

Zbigniew MARCINIAK

Pozasłoneczne układy planetarne

Pierwszy pozasłoneczny układ planetarny został odkryty w 1992 roku przez Aleksandra Wolszczana. Jego obiektem centralnym jest gwiazda neutronowa – obiekt o rozmiarach niewielkiej planetoidy i masie porównywalnej z masą Słońca, który zamiast światła widzialnego emituje fale radiowe, promienie rentgenowskie i wysokoenergetyczne cząstki elementarne. Taki obiekt powstaje podczas wybuchu supernowej – potężnej eksplozji kończącej życie gwiazdy o masie co najmniej dziesięciokrotnie większej od masy Słońca. Ponieważ supernowa na pewno zniszczyłaby lub odrzuciła okrążające ją planety, układ Wolszczana musiał powstać już po wybuchu. Prawdopodobnie supernowa miała niewielkiego gwiazdowego towarzysza, który „przeżył” wybuch i powoli „parował” pod działaniem strumieni cząstek elementarnych, przy czym część traconej przez niego materii utworzyła cienki dysk otaczający gwiazdę neutronową. Warunki panujące w takim dysku mogły sprzyjać formowaniu się planet.

Kolejną przełomową datą w historii pozasłonecznych układów planetarnych jest rok 1995, w którym Michel

Mayor i Didier Queloz znaleźli planetę przy zwykłej gwiazdzie podobnej do Słońca. Od tej pory doniesienia o odkryciu kolejnych układów planetarnych pojawiają się średnio raz na miesiąc, a liczba znanych planet krążących wokół innych słońc przekroczyła już setkę. Większości odkryć dokonano metodą spektroskopową, obserwując efekt Dopplera związany z drobnymi ruchami gwiazdy wokół środka masy układu planetarnego. Współczesne spektrografy mierzą prędkość radialną z dokładnością 1 m/s, co w Układzie Słonecznym oglądanym z zewnątrz umożliwiłoby wykrycie obecności Saturna (pod warunkiem, że obserwacje byłyby prowadzone przez co najmniej 30 lat – tyle, ile wynosi okres orbitalny Saturna).

Ostatnio coraz większe znaczenie zdobywa metoda fotometryczna, w której poszukuje się tzw. tranzytów – nieznacznych „przygaśnień” gwiazdy spowodowanych zakryciem części jej tarczy przez okrążający ją obiekt. Pionierami tej metody są Andrzej Udalski (który zaobserwował tranzyty i wytypował szereg gwiazd „podejrzanych” o posiadanie układów planetarnych)

oraz Maciej Konacki (który za pomocą obserwacji spektroskopowych wykazał, że w przypadku jednej z tych gwiazd obiektem odpowiedzialnym za zmiany blasku jest rzeczywiście planeta).

Odkrywane obecnie układy pozasłoneczne są zupełnie niepodobne do naszego. Aż 70% znajdujących się w nich planet ma orbity spłaszczone znacznie silniej, niż większość planet słonecznych, ponad 50% krąży bliżej swych gwiazd niż Merkury Słońca. Ponadto przy kilku gwiazdach znaleziono planety-giganty o masie ponad dziesięciokrotnie większej od masy Jowisza. Niezwykłe cechy tych układów próbuje się objaśnić skomplikowanymi oddziaływaniami, jakie zachodziły między formującymi się planetami i dyskami

protoplanetarnymi (w ich wyniku planeta mogła m.in. przemieszczać się z pierwotnej orbity na orbitę położoną znacznie bliżej gwiazdy). Spójnej teorii opisującej powstawanie układów krańcowo różnych od słonecznego na razie nie ma. Wiadomo jedynie, że są nieliczne – występują tylko u około 5% gwiazd podobnych do Słońca. Znaczna część pozostałych 95% może posiadać układy podobne do słonecznego, w których blisko gwiazdy krążą planety o niewielkich rozmiarach. Czy tak jest rzeczywiście, przekonamy się za kilka lat, gdy rozpoczną prace konstruowania planet teleskopy orbitalne przeznaczone do wykrywania planet ziemopodobnych.

Michał RÓŻYCZKA

Wzór Blacka–Scholesa

Matematyczny model rynku finansowego, zwany w literaturze modelem Blacka–Scholesa, powstał w wyniku wieloletnich prac wielu autorów jako naturalna formalizacja i idealizacja rzeczywistych rynków. Jednak powszechną akceptację zyskał dopiero po pierwszym spektakularnym sukcesie, jakim był wzór Blacka–Scholesa na cenę opcji europejskiej.

Opcja europejska jest kontraktem, który swemu posiadaczowi daje prawo (ale nie obowiązek) kupienia (lub sprzedania) akcji w ustalonej chwili w przyszłości (termin realizacji) po ustalonej cenie (cena realizacji).

Za badania te Myron Scholes wraz z Robertem Mertonem otrzymali w 1997 roku nagrodę Nobla z ekonomii, Fisher Black zmarł dwa lata wcześniej, ale według powszechnej opinii, gdyby żył, byłby trzecim laureatem tej nagrody.

W modelu rynku finansowego ceny akcji są opisane przez procesy stochastyczne, a celem modelowania jest znalezienie cen opcji na akcje. W podejściu Blacka i Scholesa kluczowe okazały się dwa założenia. Po pierwsze, że na rynku finansowym znajdującym się w stanie równowagi nie istnieje możliwość generowania pewnego zysku z zerowego kapitału, czyli jeśli istnieje strategia inwestycyjna, która może przynieść zysk, nawet gdy zaczynamy inwestycje bez żadnych środków, to strategia taka musi być obciążona ryzykiem poniesienia strat.

Drugim kluczowym założeniem modelu Blacka–Scholesa jest wybór klasy procesów stochastycznych, które opisują ceny akcji. Od dawna znany był chaotyczny charakter cen instrumentów giełdowych. Jednak dopiero w latach sześćdziesiątych XX w. znaleziono właściwe matematyczne sformułowanie tego zjawiska: względne zmiany cen są opisywane procesem Wienera z dryfem (często w literaturze mówi się, że ceny podlegają geometrycznemu procesowi Wienera).

Połączenie powyższych dwóch elementów umożliwiło Blackowi i Scholesowi napisanie równania różniczkowego, które spełnia cena opcji europejskiej (równanie Blacka–Scholesa).

Równanie Blacka-Scholesa na cenę $F(t, s)$ opcji:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + rx \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) - rF(t, x) = 0$$

z warunkiem końcowym $F(T, x) = H(x)$. W równaniu tym t oznacza czas, a T jest czasem realizacji opcji (interesuje nas znalezienie rozwiązania tylko dla $t < T$). Zmienna x oznacza cenę akcji, a $H(x)$ funkcję wypłaty z opcji w chwili T , stała σ^2 jest wariancją procesu opisującego ceny akcji, a r stałą stopą procentową.

Dwie rzeczy są niezwykle w tym równaniu. Po pierwsze, nie występuje w nim współczynnik dryfu procesu Wienera. Ponieważ współczynnik ten opisuje średni zysk z akcji, oznacza to, że dobrą cenę opcji można wyznaczyć bez wiedzy o tym, czy akcje przynoszą zysk, czy stratę. Po drugie, równanie można rozwiązać analitycznie (prowadzi to do wzoru Blacka–Scholesa), co nie jest częstym zjawiskiem dla równań różniczkowych cząstkowych. Odegrało to bardzo ważną rolę w rozwoju rynku instrumentów pochodnych w epoce przedkomputerowej (komputery w tym czasie były dostępne tylko dla dużych i bogatych instytucji, a praca na nich wymagała specjalistycznych umiejętności programistycznych).

Dla europejskiej opcji kupna akcji S za cenę K w chwili T , odpowiadającej wypłacie

$$H(S(T)) = \max(S(T) - K, 0),$$

zachodzi następujący wzór na cenę opcji w chwili 0:

$$F(0, S(0)) = S(0)N(d_1(S(0), T)) - Ke^{-r(T)}N(d_2(S(0), T)),$$

gdzie $N(x)$ jest dystrybucją rozkładu normalnego, a

$$d_1(S, T) = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2(S, T) = \frac{\ln(S/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Andrzej PALCZEWSKI

Kosmiczny Teleskop Hubble'a

Pomysł zbudowania Wielkiego Teleskopu Kosmicznego powstał pod koniec lat 60. ubiegłego wieku – a więc kiedy jeszcze nie było *Delty*. Po ponad 20 latach pomysł doczekał się realizacji, mianowicie 25 kwietnia 1990 roku teleskop został umieszczony na okołozemskiej orbicie jako *Hubble Space Telescope* – HST. Co prawda wkrótce okazało się, że główne lustro (o średnicy 2,4 m) jest wykonane wadliwie, ale po dodaniu optycznych korektorów osiągnął – jako pierwszy w historii wielki teleskop – zdolność rozdzielczą określoną tylko przez falową naturę światła: dla promieniowania widzialnego i przy takiej średnicy teleskopu wynosi ona $0''05$. Skoro Neptun ma kątowe rozmiary około $2''5$, a Jowisz maksymalnie $50''$, to widać, że HST umożliwia np. śledzenie zmian pokrywy chmur na wielkich planetach, co z Ziemi jest wykluczone przez warstwę atmosfery. W dodatku wszelkie obserwacje można swobodnie prowadzić również w bliskiej podczerwieni i bliskim nadfiolecie. Jeszcze jednym zyskiem z umieszczenia teleskopu poza atmosferą jest to, że dla niego tło nieba jest właściwie naprawdę czarne, dzięki czemu kontrast obrazu i zasięg teleskopu niezmiernie przewyższa możliwości teleskopów naziemnych.

HST pracuje już ponad 10 lat i będzie pracować jeszcze co najmniej drugie tyle. Plon jego pracy już jest ogromny. Dzięki niemu można było na bieżąco śledzić

otoczenie supernowej SN 1987A ze szczegółami o rozmiarach poniżej $1/10$ roku świetlnego. W licznych mgławicach została poznana struktura kondensujących się obłoków protogwiazdowych, przy czym okazało się, że dyski protoplanetarne są nadspodziewanie powszechne. Dzięki HST wiemy teraz, że powszechne są też zwarte obiekty zajmujące centralne miejsce w galaktykach – chyba nikt już nie wątpi, że są to supermasywne czarne dziury. Stwierdzono, że kwazary to też galaktyki, tylko że ich struktura jest praktycznie niewidoczna w oślepiającym blasku bijącym z centrum. To tam czarna dziura pochłania materię własnej galaktyki, często zniekształconej w wyniku zderzenia z inną. Obrazy, takie jak tzw. Głębokie Pole Hubble'a, sięgnęły do epoki, gdy Wszechświat był znacznie młodszy, a ówczesne galaktyki znacznie mniejsze od „współczesnych”, w rodzaju naszej. HST odkrył wiele przypadków soczewkowania grawitacyjnego i doprowadził do uściślenia wartości stałej Hubble'a, a przez to wieku Wszechświata na 12–14 mld lat. Te wyliczanki to oczywiście tylko część wkładu, jaki HST wniósł w powiększenie wiedzy o Wszechświecie. Wprawdzie nie odkrył niczego, co wywracałoby wiedzę dotychczasową i często tylko potwierdzał wcześniejsze hipotezy, to jednak wydane nań 2 mld dolarów nie poszły na marne.

T. K.

Neutrino

Cząstki, które przyniosły najwięcej niespodzianek w ciągu ostatnich 30 lat, to neutrino. Przez długi czas fascynowała fizyków zagadka niedoboru neutrin docierających do nas ze Słońca. Obserwowano ich znacznie mniej, niż przewidywał to coraz bardziej precyzyjny model naszej gwiazdy. Bilansu docierających do nas neutrin próbowano dokonać najpierw w eksperymentach radiochemicznych, a następnie zliczając je w wielkich podziemnych detektorach czerenkowskich. Wreszcie, w 2001 roku, eksperyment SNO ostatecznie rozwiązał zagadkę, wykazując, że całkowita liczba wszystkich rodzajów docierających do nas neutrin zgadza się z oczekiwaniami, ale jeśli wykrywamy tylko neutrino elektronowe, czyli te, które są produkowane wewnątrz Słońca, to jest ich za mało. Oznacza to, że wysyłane przez Słońce neutrino podlegają przemianom i tylko część dochodzi do Ziemi jako elektronowe, a reszta jako mionowe lub taonowe. Badania neutrin docierających do nas z kosmosu zostały w zeszłym roku uhonorowane Nagrodą Nobla dla R. Davisa (pionierskie badania radiochemiczne) i M. Koshiby (Super-Kamiokande).

Drugiej zagadki dostarczyły neutrino atmosferyczne, traktowane początkowo jako uciążliwe tło w poszukiwaniach rozpadów protonów. Okazało się, że przy przejściu przez Ziemię gubią się po drodze neutrino mionowe, natomiast elektronowe docierają bez przeszkód. Po ponad 10 latach uzyskiwania

niejednoznacznych wyników udało się rozwiązać tę zagadkę. W 1998 roku, w detektorze Super-Kamiokande, zawierającym 50 kiloton bardzo czystej wody, precyzyjnie zmierzono rozkłady kątowe, które można wyjaśnić jedynie poprzez przemianę neutrin mionowych w taonowe na ich drodze przez Ziemię.

Występowanie oscylacji (przemian jednego rodzaju neutrin w inne) oznacza, że neutrino mają niezerowe masy, wbrew temu, co zakładano w modelu standardowym oddziaływań cząstek elementarnych. Pomiary oscylacji neutrin słonecznych i atmosferycznych umożliwiają wyznaczenie różnic mas między trzema rodzajami neutrin. Informacje te są istotne dla zrozumienia tak zasadniczych problemów, jak mechanizm, dzięki któremu cząstki elementarne uzyskują masy oraz mechanizm odpowiedzialny za istnienie nadmiaru materii nad antymaterią we Wszechświecie. Jeśli dodać do tego, że w 1987 roku zaobserwowano neutrino z Supernowej 1987A, dzięki czemu mogliśmy „zajrzeć” w samo jądro zapadającej się grawitacyjnie gwiazdy, to można bez przesady stwierdzić, że w ostatnich latach z badań neutrin, jak z rogu obfitości, wysypywały się zarówno zagadki, jak i ich frapujące rozwiązania.

W tej dziedzinie bardzo wiele się dzieje i planowane są liczne nowe eksperymenty.

Danuta KIEŁCZEWSKA, Ewa RONDIO

Mikrofalowe promieniowanie tła

Mikrofalowe promieniowanie tła zostało wykryte przypadkiem (choć odkrycie to było oczekiwane) w roku 1965 przez Arno Penziasa i Roberta Wilsona (Nagroda Nobla 1978) z Bell Labs jako niemożliwy do usunięcia szum ograniczający możliwości obserwacji radioastronomicznych. Szybko wykryto, iż natężenie mikrofal niezwykle słabo zależy od kierunku i wykazuje jedynie małe maksimum w kierunku południowej części gwiazdozbioru Lwa i minimum w kierunku wschodniej części Ryb. Odpowiada za to ruch obserwatora w przestrzeni i efekt Dopplera: Układ Słoneczny zmierza właśnie w kierunku Lwa z prędkością 370 km/s. Możliwe jest określenie układu odniesienia, w którym promieniowanie tła byłoby izotropowe z dokładnością do 10^{-5} , a takiej izotropii nie spotyka się w rozkładzie żadnych znanych obiektów astronomicznych.

Widmo mikrofalowego promieniowania tła okazało się widmem ciała doskonale czarnego o temperaturze 2,7 K. Potwierdziło to przewidywania, że jest ono pozostałością (reliktem) po początkowych fazach ewolucji Wszechświata, gdy wypełniała go bardzo gęsta i gorąca materia oraz będące z nią w równowadze promieniowanie o widmie Plancka. W przybliżeniu 300 000 lat po Wielkim Wybuchu promieniowanie przestało oddziaływać z materią, a do dziś wskutek nieustannej ekspansji Wszechświata temperatura promieniowania spadła do poziomu 2,7 K.

Obiekty astronomiczne powstały w początkowo jednorodnym Wszechświecie, jeszcze w epoce, gdy materia i promieniowanie wzajemnie oddziaływały, jako efekt niestabilności grawitacyjnej. Zgęszczenia i rozrzedzenia materii, jako miejsca gorętsze i chłodniejsze, powinny zostawić swoje ślady w rozkładzie promieniowania relikтового. I rzeczywiście, drobne fluktuacje jego rozkładu na niebie wykrył satelita COBE (*Cosmic Background Explorer*), wystrzelony w 1989 r. Satelita ten wykazał też, że widmo promieniowania odpowiada z wysoką dokładnością funkcji Plancka.

Rozwój technik obserwacyjnych (zwłaszcza wystrzelenie nowych wyspecjalizowanych sztucznych satelitów) pozwolił uczynić obserwacje promieniowania mikrofalowego podstawowym narzędziem weryfikacji modeli kosmologicznych. Mianowicie podstawowe właściwości modelu, takie jak skład materii, natura ciemnej materii, mechanizm powstania pierwotnych zaburzeń gęstości itd., mają wpływ na przebieg formowania się obiektów, a co za tym idzie – na rozkład fluktuacji promieniowania na niebie. Dzięki temu wkroczyliśmy w epokę „precyzyjnej kosmologii”.

Michał JAROSZYŃSKI

Okres trzy wywołuje chaos

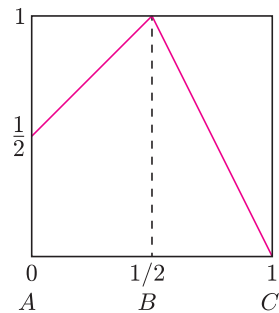
W 1975 roku Tien-Yien Li oraz James Yorke opublikowali pracę o wdzięcznym tytule „Okres trzy wywołuje chaos”. Zawarty w niej wynik był częściowo łatwym wnioskiem z ogólniejszego (choć wtedy mało znanego) twierdzenia Szarkowskiego z 1962 roku, ale w swej istocie dotyczył zjawiska chaosu i właśnie na fali zainteresowania chaosem deterministycznym wypłynął na szersze wody, stając się – obok atraktora Lorenza, stałej Feigenbauma i fraktali – ulubioną maskotką popularyzatorów „nowej matematyki”. Sens twierdzenia Li-Yorke’a można wyrazić następująco. Stwórzmy ciąg iteracji pewnej ciągłej funkcji $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ tzn. ciąg $a_1, a_2 = f(a_1), a_3 = f(a_2), \dots$. Jeśli można tak dobrać a_1 , że ciąg składa się z powtarzających się okresowo trzech różnych liczb, to istnieje bardzo duży zbiór punktów

startowych a_1 , których kolejne iteracje (tj. a_2, a_3, \dots) chaotycznie biegają po odcinku (w szczególności jest olbrzymia liczba par punktów a_1 oraz a'_1 , które początkowo są blisko siebie, a potem rozjeżdżają się na duże odległości tak, że ich dalsze ewolucje nie mają ze sobą nic wspólnego). Dlaczego tak jest? Otóż liczby tworzące okres trzy to niejako karuzela, na jaką wskazują kolejne liczby. Zabawa ta z kolei nieuchronnie prowadzi do chaosu. Spójrzmy bowiem na rysunek 1. Funkcja f działa następująco: odcinek AB przesuwa na miejsce BC , zaś BC rozciąga dwukrotnie i odwraca. Punkty A, B i C to karuzela:

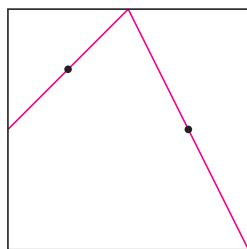
$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow \dots$$

Kolejne obrazki przedstawiają punkty wskazujące w kolejnych etapach na trzy siedzenia karuzeli. Czytelnik zechce sobie wyobrazić, dlaczego prowadzi to do chaosu.

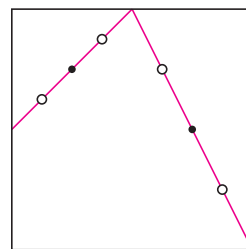
Rys. 1
 $f(0) = \frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}) = 1, f(1) = 0.$



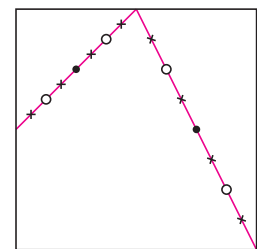
Rys. 2
 $f(\frac{1}{4}) = \frac{3}{4}, f(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2}.$



Rys. 3
 $f(\frac{7}{8}) = \frac{1}{2}, f(\frac{5}{8}) = \frac{3}{4}, \dots$



Rys. 4



W. S.

Czterowymiarowa hipoteza Poincarégo czyli wyniki Freedmana

Ważnym problemem w matematyce jest klasyfikacja badanych obiektów. Rozmaitości będące przestrzeniami o specyficznych własnościach również zostały poddane klasyfikacji. Najprostsza jest klasyfikacja rozmaitości jednowymiarowych. Mamy dokładnie dwa przypadki: okrąg i prostą. W przypadku rozmaitości dwuwymiarowych, czyli powierzchni – tu i w dalszym ciągu ograniczymy się do rozmaitości zwartych – klasyfikacja również się powiodła; wszystkie można uzyskać ze sfery poprzez odpowiednie doklejanie rączek i zaklejanie wyciętych kołowych otworów. Rozmaitości trójwymiarowych do dziś nie udało się jeszcze sklasyfikować i nie wiadomo, czy uda się to zrobić. Rozmaitości cztero- i wyżejwymiarowe nie mają klasyfikacji. Dokładniej, udowodniono, że nie istnieje algorytm pozwalający sklasyfikować te obiekty. Można jednak próbować klasyfikować bardziej specjalne rodziny rozmaitości. Jedną z najprostszych takich klas jest rodzina rozmaitości jednorodnych. Jednorodność przestrzeni oznacza, że każda pętla zawarta w tej przestrzeni może być w niej ściągnięta do punktu. Jednorodna jest prosta i koło; nie spełnia tego warunku okrąg oraz koło bez środka. Wydaje się, że rozmaitości jednorodnych nie ma zbyt wiele. Dla wymiaru jeden mamy tylko niezwartą prostą, dwuwymiarowa, zwarta i jednorodna jest tylko sfera. Przypuszcza się, że podobnie jest w przypadku rozmaitości trójwymiarowych – tylko sfera. Jest to

jednak klasyczna hipoteza Poincarégo, problem do dziś nierozstrzygnięty mimo ogromnych wysiłków. Sytuacja gwałtownie się zmienia w czterech wymiarach – istnieje całe mnóstwo jednorodnych rozmaitości czterowymiarowych (i, pamiętajmy, zwartych) na czele ze sferą czterowymiarową. Innym przykładem jest $S^2 \times S^2$. Właśnie Michael H. Freedman dokonał ich klasyfikacji w 1982 roku. Zauważył on, że każdej jednorodnej czterowymiarowej rozmaitości odpowiada tzw. „forma przecięcia” – coś w rodzaju iloczynu skalarnego. Więcej, pokazał wzajemnie jednoznaczność odpowiedniości (z dokładnością do pewnych szczegółów) między takimi formami i jednorodnymi rozmaitościami czterowymiarowymi. „Iloczyny skalarne” i związane z nimi macierze klasyfikuje się dużo łatwiej. Wynik ten był wielkim sukcesem w topologii rozmaitości, a jego konsekwencje okazały się sensacyjne. Najpierw z tej klasyfikacji Freedman wyprowadził dowód czterowymiarowego odpowiednika hipotezy Poincarégo, ostatniego obok trójwymiarowego nierozstrzygniętego przypadku hipotezy. Dalej okazało się, że istnieje obszerna rodzina czterowymiarowych rozmaitości jednorodnych, które nie dopuszczają gładkiej struktury. „Niewygładzalne” rozmaitości znane już były wcześniej, ale były to skomplikowane wysokowymiarowe przykłady, a tu okazało się, że niemal w zasięgu ręki są takie dziwaczne obiekty. I wreszcie, pewne szczegóły dowodów podsunęły Donaldsonowi sugestie istnienia egzotycznego \mathbb{R}^4 .

Zdzisław POGODA

Egzotyczne \mathbb{R}^4 , czyli wyniki Donaldsona

Czy składając w jedną całość mapy powierzchni Ziemi możemy otrzymać obraz przedstawiający coś zupełnie innego, niż oczekujemy, np. powierzchnię jakiejś abstrakcyjnej planety? Wydaje się, że to zupełnie absurdalne. A jednak coś podobnego zdarzyło się w matematyce.

Rozmaitość jest to przestrzeń (topologiczna) lokalnie przypominająca odpowiednią przestrzeń euklidesową. Czyli obiekt jest rozmaitością np. czterowymiarową, gdy każdy jego punkt ma otoczenia homeomorficzne z przestrzenią \mathbb{R}^4 . Każde takie otoczenie, wraz z odpowiednim homeomorfizmem, nazywamy mapą – podobnie jak w geografii. I dalej konsekwentnie zbiór map nazywamy atlasem. Każdy atlas wyznacza na rozmaitości strukturę tejże.

Jeśli teraz zażądamy, żeby przejście od jednej mapy do drugiej odbywało się w sposób gładki, to mówimy, że na rozmaitości zadana jest struktura różniczkowa, a rozmaitość nazywamy różniczkową (lub różniczkowalną) albo gładką. Jeśli natomiast pozostaniemy przy poprzednich założeniach, to mamy do czynienia z rozmaitością topologiczną. Na każdej rozmaitości topologicznej wymiaru jeden, dwa i trzy zawsze można wprowadzić strukturę różniczkową. W wyższych wymiarach zaczynają się kłopoty, ale uważano, że jeśli struktura różniczkowa istnieje,

to jest już wyznaczona jednoznacznie, co najwyżej z dokładnością do pewnej równoważności. Sensację wywołał rezultat J. Milnora z 1957 roku, że na sferach począwszy od siedmiowymiarowej istnieją struktury różniczkowe całkowicie nierównoważne. A jak jest w przypadku najprostszych rozmaitości – przestrzeni euklidesowych \mathbb{R}^n ? Tu nie było sensacji, choć dowód okazał się zadziwiająco trudny. Dokonali tego w 1977 roku R. Kirby i L. Siebenmann z jednym drobnym wyjątkiem $n = 4$. W 1983 roku okazało się, że ten wyjątek jest szczególnie wyjątkowy. Simon Donaldson, formułując kryteria istnienia struktur różniczkowych na rozmaitościach czterowymiarowych, pokazał, że na \mathbb{R}^4 , oprócz standardowej, istnieje jeszcze inna struktura, nazwana egzotyczną. Mówiąc bardzo nieściśle, można dobrać taki układ map, że po ich złożeniu powstanie coś, co topologicznie jest \mathbb{R}^4 , ale różniczkowo zachowuje się zupełnie inaczej. Więcej, cztery lata później pokazano (C.H. Taubes), że takich nierównoważnych struktur na \mathbb{R}^4 jest nieprzeliczalnie wiele. Donaldson uzyskał swoje rezultaty, wykorzystując metody geometrii różniczkowej i algebraicznej, teorii równań różniczkowych i... fizyki teoretycznej, a dokładniej teorii pól Yanga–Millsa. Istotny wpływ na jego prace miały niemniej sensacyjne wyniki Michaela H. Freedmana.

Zdzisław POGODA

Własny (podłączony) komputer

Historycy spierają się kiedy pojawiło się tytułowe urządzenie. Niektórzy twierdzą, że był nim nawet *Simon*, którego plany opublikował Edmund Berkeley w latach 1950/1951. Większość jednak zgodnie przyznaje, że rewolucja dokonała się dzięki modelowi *Apple II* wprowadzonemu przez Stevena Wozniaka w kwietniu 1977 roku. Twórca popularnego jabłuszka był (i jest) hackerem, w pierwotnym znaczeniu tego terminu, czyli człowiekiem, którego *modus vivendi* jest poznawanie i udostępnianie wszelkiej informatycznej wiedzy praktycznej.

Następny punkt przełomowy nastąpił również w kwietniu, ale 1993 roku. Było nim powszechne udostępnienie przez CERN protokołów WWW stworzonych przez Tima Bernersa-Lee. To, co łączy te dwa wydarzenia (oprócz niewątpliwych konsekwencji dla miliardów ludzi), to przeświadczenie ich twórców o potrzebie otwartości systemów informatycznych.

Obecnie rewolucję mamy już w pełni za sobą. Jej produktem jest własny, podłączony do Internetu komputer. Sytuacja przeciętnego użytkownika komputera w ciągu ostatnich 30 lat zmieniła się z pozycji tkwiącego w kolejce do markietanki żołdaka (kto jeszcze pamięta oczekujące na wyczytanie pliki kart fortranowskich?) na otoczonego hurysami mieszkańca rajy (oczywiście w porównaniu tym chodzi wyłącznie o liczbę i możliwości przypadających na jednego użytkownika procesorów).

Jeżeli jednak jest tak dobrze, to dlaczego jest tak źle? Może dlatego, że hurysy są dziewicami? Żołdak mógł przez chwilę czuć się wybrańcem bogów, a resztę czasu spędzić na myśleniu, co zrobi następnym razem. W rajy z hurysami jest natomiast piekielnie nudno. Przeciętny jego mieszkaniec nie ma pojęcia, co robić ze swoim szczęściem, a już o tym, żeby pomyśleć, raczej nie pomyśli.

Tak jednak jest zawsze, gdy wąskie grono uczniów przeradza się w rzesze „wiernych”.

Co nas w tym rajy czeka w niedalekiej przyszłości? Ci nieliczni, którzy komputerów używają zgodnie z ich pierwotnym przeznaczeniem, otrzymają do dyspozycji wirtualne maszyny, które oparte będą na doskonale usieciowionych farmach procesorów i zasobów pamięci. Wszyscy dostaną możliwość wymiany standardowego, wyjącego pudła komputera na małe, bezszmerowe pudełeczko, lub wręcz jego brak. Przeciętny komputer stanie się praktycznie tożsamy z płaskim ekranem o dużej rozdzielczości, nie zawsze zaopatrzonym w klawiaturę (sterowanie dotykowe i sterowanie głosem), ale zawsze wyposażonym w (najczęściej bezprzewodową) łączność ze światem. Moim zdaniem nastąpi ponowne rozejście się komputerów na coraz bardziej zaawansowane, ale wyciszone końcówki oraz modularne zestawy przeznaczone do obliczeń. W ten sposób PeCetowa rewolucja zakończyłaby się zniknięciem PeCeta.

P. Z.

Nano

Przedrostek ten, oznaczający jedną miliardową, zrobił w ostatnich latach błyskotliwą karierę. Najczęściej występuje w słowie *nanotechnologia*, które zostało zaproponowane w 1974 roku przez Norio Taniguchiego jako określenie mechaniki precyzyjniejszej niż mikrometr. Co to słowo obecnie oznacza, niewiele wiadomo. Chyba tylko tyle, że chodzi o coś małego o rozmiarach rzędu co najwyżej dziesiątek (setek) nanometrów, czyli niewiele przekraczających rozmiary atomów (które są rzędu 0,1 nm). To niedoprecyzowanie powoduje, że pod sztandar nanotechnologii wciągane są bardzo różne rzeczy. A chodzi oczywiście o pieniądze. Nanotechnologia jest dziedziną notującą niespotykaną dynamikę wzrostu funduszy na nią przeznaczanych. Od kilku lat wzrost ten w krajach wysokorozwiniętych wynosi do kilkudziesięciu procent rocznie.

Czym ten boom jest spowodowany? To, że prędkiej czy później opanujemy manipulowanie pojedynczymi atomami pierwszy publicznie zapowiedział Richard Feynman w 1959 roku. Na potwierdzenie tej możliwości trzeba było poczekać aż do roku 1981, w którym wynaleziono tunelowy mikroskop skaningowy, którego modyfikacja – mikroskop sił atomowych (działający po prostu na zasadzie fonografu) rzeczywiście pozwala na przesuwanie pojedynczych atomów. W międzyczasie odkryto nowe alotropowe odmiany węgla o rozmiarach nanometrycznych i niezwykłych własnościach, czyli

fulereny i nanorurki. Natomiast badając nanoskopijne obwody stwierdzono kwantyzację przewodności elektrycznej i cieplnej oraz np. skonstruowano jednoelektronowy tranzystor.

Czy osiągnięcia te sugerują, że jesteśmy na drodze do zbudowania samopowielających się nanoskopowych urządzeń, które następnie będą mogły być użyte do... rozwiązywania wszelkich problemów technologicznych, czy medycznych? Taką wizję roztaczają niektórzy futurologowie. Jeżeli mielibyśmy na myśli jakąś drastyczną miniaturyzację urządzeń makroskopowych, to odpowiedź brzmi – nie. Nie pozwalają na to ograniczenia energetyczne, efekty powierzchniowe (nanostruktury mają bardzo duży stosunek powierzchni do objętości) i kwantowe. Jeszcze długo nanotechnologia będzie bardziej fascynującą dziedziną badań podstawowych niż użyteczną technologią. Nie oznacza to, że nie będą pojawiały się praktyczne, często zaskakujące zastosowania, jak np. wykorzystanie kropek kwantowych w postaci nanokryształów jako uniwersalnych znaczników zastępujących znaczniki fluorescencyjne w medycynie (ich kolor zależy po prostu od rozmiaru).

Czy zatem świat samopowielających się robotów (nanobotów) jest nie do pomyślenia? Wprost przeciwnie. Takich nanobotów jest pełno w każdej żywej komórce. Marzenia futurologów są po prostu równoznaczne z chęcią stworzenia sztucznego życia.

P. Z.

Zagadnienie czterech barw

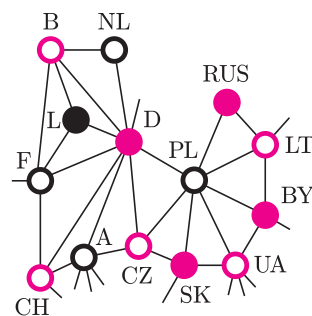
Francis Guthrie, student z Londynu, wyraził w 1852 r. przypuszczenie, że państwa na dowolnej mapie – zarówno na płaszczyźnie, jak i na globusie – można za pomocą czterech barw pokolorować tak, żeby każde dwa państwa, mające wspólny odcinek granicy, miały różne kolory. (Przykład Luksemburga, Belgii, Francji i Niemiec pokazuje, że czwórki nie można zmniejszyć.) Do końca XIX w. problem stał się bardzo znany, m.in. za sprawą pomysłowych, lecz błędnych prób rozwiązania.

Aby uniknąć subtelności związanych z definiowaniem państw, granic itp., problem formułuje się równoważnie w języku teorii grafów. *Graf*, na nasze potrzeby, to skończona liczba kropek (*wierzchołków*) połączonych kreskami (*krawędziami*). Graf *planarny* to graf narysowany na płaszczyźnie w taki sposób, że żadne dwie krawędzie się nie przecinają. Graf jest *czterokolorowalny*, jeśli jego wierzchołki można pomalować czterema kolorami w taki sposób, by każda krawędź miała końce różnych kolorów.

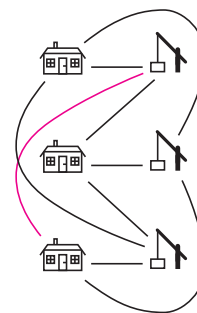
Zagadnienie czterech barw to pytanie: Czy każdy graf planarny jest czterokolorowalny?

Twierdzącej odpowiedzi udzielili w 1976 roku K. Appel i W. Haken. Ich dowód liczył ponad 130 stron druku i 400 stron mikrofilmów z tysiącami rysunków; co więcej, liczne fakty zostały sprawdzone za pomocą wieluset godzin pracy komputera. W latach 90. XX w. N. Robertson, P. Seymour, D. Sanders i R. Thomas rozpoczęli wszechstronne niezależne sprawdzanie dowodu Appela i Hakena – i zniechęceni ogromem

niezbędnego wysiłku programistycznego postanowili, że spróbują podać inny, własny dowód. Zamiar się powiódł; nowy dowód, opublikowany w 1997 r., ma 40 stron elementarnego tekstu; nadal wprawdzie dowody dwóch lematów wymagają użycia komputera, jest ono jednak znacznie skromniejsze niż w pracy Appela i Hakena (i dostarcza szybszego algorytmu kolorowania grafów).



(a) Graf planarny (fragment mapy Europy; kropki oznaczają państwa, kreski zaś – wspólne granice).



(b) Graf niesplaszczalny (nie można go narysować tak, żeby był planarny).

Dowód Robertsona, Seymoura, Sandersa i Thomasa został niezależnie sprawdzony (łącznie z napisaniem od nowa programów niezbędnych w jego komputerowej części). Klasycznego dowodu wciąż jednak nie znamy.

Więcej na podobne tematy w *Deltach*: 5/1977, 5/1997, 4/1999, na stronie www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html oraz w książce R. Wilsona *Four colors suffice. How the map problem was solved* (wyd. Princeton University Press, 2002).

Paweł STRZELECKI

Falki

Gdy dana jest funkcja $f(x)$ (dla ustalenia uwagi będziemy przyjmować, że wszystkie funkcje określone są na całej prostej rzeczywistej), to często chcielibyśmy ją przedstawić jako sumę

$$f = \sum_k a_k F_k,$$

gdzie a_k to pewne współczynniki liczbowe, a F_k to ustalona rodzina „prostych” funkcji. Chcemy przy tym (ze względów praktycznych), aby już skończona suma dobrze przybliżała naszą funkcję f .

W praktycznych zastosowaniach f może być wykresem EKG lub drgań sejsmicznych, zapisem dźwięku itp. Jeśli f jest funkcją dwu zmiennych, to może ona reprezentować obraz.

Powstaje kilka istotnych problemów, np.

- 1) Jak obliczyć współczynniki a_k ?
- 2) Jak znaleźć skończoną sumę, która dobrze przybliży f ?
- 3) I co to znaczy: *dobrze przybliży*?

Oczywiście, rozwiązania powyższych problemów zależą od wybranej rodziny funkcji F_k .

W zasadzie odpowiedź na pytanie 1 znana jest od co najmniej 200 lat: układ F_k powinien być ortonormalny, co znaczy, że

$$\int F_k(x) F_l(x) dx$$

równa się 0, gdy $k \neq l$, i 1, gdy $k = l$ – to pozwala już obliczyć a_k (aby było $f = \sum_k a_k F_k$, potrzeba jeszcze, by układ spełniał pewien warunek, zwany zupełnością, ale to można zapewnić).

Otóż falki są to pewne specjalne funkcje, które łatwo generują takie układy ortonormalne, że można poradzić sobie z problemami 2) i 3).

Funkcję Φ nazywamy *falką*, jeśli układ funkcji $\Phi_{j,k}$, określony jako

$$\Phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \Phi(2^j x - k),$$

gdzie j i k przebiegają wszystkie liczby całkowite, jest układem ortonormalnym i zupełnym.

Pierwszą falę zbudował prawie sto lat temu węgierski matematyk A. Haar. Oto ona

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & \text{dla } 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Z definicji natychmiast wynika, że funkcja $h_{j,k}$ jest zerem poza odcinkiem $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]$, wobec tego współczynnik $a_{j,k}$ zależy tylko od wartości, jakie funkcja f przyjmuje na tym odcinku. Oczywiście funkcje $a_{j,k}h_{j,k}$, jak i ich skończone sumy, są nieciągłe.

Następne fale skonstruował w 1981 roku szwedzki matematyk Jan-Olov Strömberg. Jego fale były już ciągłe, a nawet miały kilka pochodnych. Gdzieś około 1986 roku matematyk francuski, Yves Meyer,

skonstruował następne fale i stworzył ogólną teorię. Najczęściej nie istnieje zwarta formuła definiująca falę, natomiast często istnieją efektywne rekurencyjne algorytmy pozwalające obliczać zarówno falę, jak i współczynniki $a_{j,k}$.

Co do problemu 3), to praktyczną regułą jest, że dla dobrej fali skończone sumy szeregu $\sum_k a_{j,k}h_{j,k}(x)$ przybliżają funkcję f dla wszystkich sposobów obliczania odległości między funkcjami. Na pytanie 2) bardzo często dobra jest odpowiedź najprostsza: do sumy wybierz składniki, w których współczynniki są największe.

Przemysław WOJTASZCZYK

Stała kosmologiczna

Zaraz po sformułowaniu ogólnej teorii względności w 1916 roku Albert Einstein postanowił zastosować ją do opisu największego istniejącego układu fizycznego – całego Wszechświata. W 1916 roku astronomowie nie wiedzieli jeszcze o tym, że istnieją inne galaktyki i cały Wszechświat utożsamiali z Drogą Mleczną – ogromnym dyskopodobnym skupiskiem gwiazd, które powoli krążą wokół jej centrum. Astronomowie nie byli też pewni, czy gwiazdy wypełniają całą przestrzeń, czy też są skupione w obszarze Drogi Mlecznej, a poza nią istnieje tylko pusta przestrzeń. W obu jednak przypadkach uważano, że rozkład gwiazd jest stacjonarny, a przestrzeń jest statyczna. Einstein szybko przekonał się, że równania ogólnej teorii względności nie mogą opisać takiego statycznego wszechświata. Zawierając astronomicznej wizji Wszechświata Einstein zmodyfikował swoje równania dodając do nich dodatkowy człon – stałą kosmologiczną, który opisywał stałą siłę równoważącą siłę grawitacyjnego przyciągania między gwiazdami. Zakładając, że Wszechświat jest statyczny i ma stałą dodatnią krzywiznę, a więc ma skończoną objętość, Einstein wyprowadził zależność między promieniem krzywizny a średnią gęstością materii we Wszechświecie oraz wyznaczył wartość stałej kosmologicznej. Einstein był bardzo dumny ze swojego modelu Wszechświata. W 1917 roku pisał do M. Grossmanna: *jestem w stanie wewnętrznej euforii. Okazało się, że moja ogólna teoria względności jest kluczem do zrozumienia całego Wszechświata. Gdy tylko astronomowie zmierzają średnią gęstość Wszechświata, będę mógł im powiedzieć, jaki jest on duży.* Euforia Einsteina nie trwała zbyt długo. W 1923 roku Edwin Hubble odkrył, że tak zwane mgławice spiralne, uważane za świecące obłoki gazu, są ogromnymi skupiskami gwiazd – galaktykami – położonymi daleko poza granicami Drogi Mlecznej. Sześć lat później Hubble wykazał, że galaktyki oddalają się od nas z prędkością proporcjonalną do ich odległości. Statyczny model Wszechświata legł w gruzach, a wraz z nim koncepcja stałej kosmologicznej. Wiele lat później Einstein przyznał, że wprowadzenie stałej kosmologicznej było największą pomyłką w jego życiu.

Choć statyczny model Wszechświata odszedł w zapomnienie, nie zapomniano o stałej kosmologicznej. Oto w telegraficznym skrócie dalsze jej losy. O stałej kosmologicznej przypomniano sobie przy pierwszych próbach kwantowania pola grawitacyjnego. W kwantowej teorii pola stan próżni nie musi i wręcz nie może mieć energii dokładnie równej zero. W mechanice kwantowej i klasycznej nie stanowi to problemu, gdyż istotne są jedynie różnice energii. W ogólnej teorii względności natomiast każda postać energii zakrzywia przestrzeń. Energię próżni kojarzono ze stałą kosmologiczną głównie z powodu podobnych praw transformacyjnych. Proste oszacowania pokazują jednak, że gęstość energii próżni o ponad sto rzędów wielkości przewyższa kosmologicznie akceptowalne ograniczenia na wartość stałej kosmologicznej. Do tej pory nie znaleziono zadowalającego rozwiązania tego problemu.

Mniej więcej dziesięć lat temu do pomiaru tempa rozszerzania się Wszechświata astronomowie zaczęli wykorzystywać supernowe typu Ia (są to wybuchające białe karły w układach podwójnych, które powiększyły swoją masę kosztem masy towarzysza ponad dopuszczalną granicę). Z obserwacji dalekich supernowych wynika, że obecnie Wszechświat rozszerza się coraz szybciej zamiast coraz wolniej, tak jak powinien, gdyby zawierał jedynie zwykłą materię. Ten niespodziewany wynik obserwacyjny można wyjaśnić zakładając, że obecnie gęstość energii-materii we Wszechświecie jest zdominowana przez „ciemną energię” lub stałą kosmologiczną. Ten bardzo ważny wynik został ostatnio potwierdzony przez satelitę WMAP, który mierzy anizotropię temperatury promieniowania relikowego. Okazało się, że obecnie Wszechświat składa się w 73% z ciemnej energii, w 23% z ciemnej egzotycznej materii, natomiast zwykła materia stanowi zaledwie 4% średniej gęstości materii (energii). Wyjaśnienie natury ciemnej energii (stałej kosmologicznej) i ciemnej materii jest wielkim wyzwaniem dla kosmologii i fizyki cząstek elementarnych.

Marek DEMIAŃSKI



Rozwiązanie zadania F 609.

Oznaczmy przez α kąt nachylenia nici do pionu: $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30^\circ$. Siła wyporu jest dwukrotnie większa od siły ciężkości, zatem na kulkę w kierunku pionowym działa siła $F = mg$. Siła naprężenia nici T , siła reakcji ściany N i siła F znoszą się, dając w sumie zero. Zatem:

$$\frac{N}{F} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

i stąd

$$N = \frac{mg}{\sqrt{3}}.$$



Rozwiązanie zadania F 610.

Cienka warstwa cieczy całkowicie przenosi jej ciśnienie. Na klin działają zatem trzy siły: siła ciężkości, siła oporu i siła wyporu, których suma jest równa zero. Zatem

$$F_{op} = (\rho_2 - \rho_1)gV \sin \alpha.$$



Stała Feigenbauma

Zjawisko chaosu deterministycznego nie byłoby zapewne tak intensywnie badane w ostatnich latach, gdyby nie to, że udaje się znaleźć w nim porządek, pewne prawidłowości ogólne. Jedną z takich prawidłowości reprezentuje odkryta w 1978 roku stała Feigenbauma. Wiąże się ona ze zjawiskiem bifurkacji, które możemy zaobserwować w następującym przykładzie. Niech $f(x) = ax(1-x)$, gdzie a jest parametrem. Rozpatrujemy ciąg iteracji funkcji $f: x_n = f^n(x_0)$. Ciąg, w którym pojawia się dokładnie n różnych liczb, nazywamy orbitą rzędu n . Zwiększając parametr a w przedziale $(0; 4)$, możemy obserwować, jak pojawiają się orbity rzędu 2, 4, 8, 16, itd. Oznaczmy przez a_k wartość parametru a , dla której pojawia się po raz pierwszy orbita rzędu 2^k . Okazuje się, że istnieje wtedy granica

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k - a_{k-1}} = F.$$

Prawa strona równości to właśnie stała Feigenbauma. Jej znaczenie polega na tym, że jest ona taka sama ($F = 4,669\dots$) dla wielu rodzin funkcji zależnych od pojedynczego parametru.

W. S.

Rozbłyski promieniowania gamma

W roku 1973 opublikowano wiadomość o odkryciu nowego typu zjawisk astronomicznych – rozbłysków promieniowania gamma (w publikacjach astronomicznych na ogół używa się skrótu GRB, od *gamma ray burst*). Zostały one dostrzeżone za pomocą satelitów Vela, które służyły kontroli zakazu prób z bronią jądrową w przestrzeni kosmicznej. Szybko się jednak okazało, że błyski nie pochodzą z otoczenia Ziemi, a ich źródło znajduje się poza Układem Słonecznym. Przypuszczano początkowo, że zachodzą one na gwiazdach neutronowych znajdujących się w naszej Galaktyce. W roku 1991 na orbicie został umieszczony satelita GRO *Gamma Ray Observatory*, na którym umieszczono szereg instrumentów do obserwacji Kosmosu w zakresie promieniowania gamma, w tym detektor tajemniczych rozbłysków (w zakresie energii fotonów od kilkudziesięciu do kilkuset kiloelektronowoltów). Okazało się, że rozbłyski rejestrowano w tempie prawie jeden dziennie, w zupełnie przypadkowych kierunkach. Szczególnym zaskoczeniem był brak koncentracji rozbłysków wokół płaszczyzny Galaktyki. Wszystko to razem dowodziło, że źródła rozbłysków są albo bliżej, niż wynosi charakterystyczna grubość dysku galaktycznego (kilkaset parseków), albo znajdują się znacznie dalej niż pobliskie gromady galaktyk (kilka megaparseków). Większość astronomów zgadzała się z argumentami przedstawionymi przez Bohdana Paczyńskiego, który uważał, że rozbłyski powstają w wielkich odległościach.

Rok 1997 przyniósł tego potwierdzenie. Stało się to dzięki satelicie rentgenowskiemu BeppoSax, który obserwował rozbłyski w zakresie rentgenowskim, przez co współrzędne zjawisk zostały poznane dokładniej, niż było to możliwe za pomocą detektorów promieniowania gamma. Dzięki temu zarejestrowano po raz pierwszy poświatę w promieniowaniu optycznym błysku GRB 970228 (czyli z 28 lutego 1997 roku). Wkrótce potem w widmie błysku GRB 970508 wykryto linie absorpcyjne pochodzące z gazu znajdującego się między nim a nami, ponadto zmierzono jego przesunięcie ku czerwieni (otrzymując $z = 0,835$). W ostatnich latach wykonano fotometryczne obserwacje jasności poświaty pozostałych po GRB i wyznaczono przesunięcia ku czerwieni około 30 zjawisk. Obserwacje rozbłysków w obszarach tworzenia się gwiazd sugerują, że GRB towarzyszą końcowi ewolucji masywnych gwiazd. Charakter spadku jasności optycznej poświaty

potwierdza przypuszczenie, że rozbłyski emitowane są przez strugi materii wyrzucane z prędkościami bliskimi prędkości światła (z czynnikiem Lorentza rzędu 100) w określonych kierunkach, najprawdopodobniej wzdłuż osi rotacji obiektu będącego ich źródłem. Jeśli tak, to energię promieniowania gamma, emitowaną podczas rozbłysku, można oszacować na nie więcej niż około $2 \cdot 10^{51}$ erg. Założenie bowiem, że promieniowanie było emitowane izotropowo, prowadziło w przypadku rozbłysku GRB 990123 do wniosku, że w zakresie gamma wyemitowana została energia około $3 \cdot 10^{54}$ erg, tj. więcej niż wynosi energia równoważna masie spoczynkowej Słońca. Do tej pory optyczne poświaty obserwowano tylko wokół błysków gamma trwających dłużej niż kilka sekund. Wiele wskazuje na to, że błyski krótsze mogą stanowić inną klasę zjawisk.

Marcin KIRAGA

Ciemna materia



Głównym zadaniem astronomii jest zdobywanie informacji o podstawowych obiektach astronomicznych – gwiazdach, galaktykach i gromadach galaktyk. Podstawowym źródłem informacji o tych obiektach jest światło, które emitują. Jednym z najważniejszych parametrów fizycznych charakteryzujących te obiekty jest ich masa. Masę różnych obiektów astronomicznych można mierzyć, korzystając z prawa powszechnego ciążenia Newtona. Ziemia cały czas spada na Słońce. Mierząc przyspieszenie, z jakim porusza się Ziemia oraz znając odległość między Ziemią i Słońcem można łatwo wyznaczyć masę Słońca. W podobny sposób wyznacza się masy gwiazd, które tworzą układ podwójny. Masy bardziej skomplikowanych obiektów – gromad kulistych oraz galaktyk szacuje się na podstawie „ilości światła”, które emitują. Korzysta się przy tym z następującego prostego rozumowania. Nasze Słońce jest dość typową gwiazdą. Znamy jego masę M_{\odot} i jego jasność (moc promieniowania) L_{\odot} . Jeżeli jasność jakiegoś obiektu astronomicznego złożonego z gwiazd wynosi L , to jego masa w przybliżeniu wynosi $M \approx (L/L_{\odot})M_{\odot}$. W podobny sposób szacuje się masy gromad galaktyk.

W 1933 roku Fritz Zwicky zmierzył prędkości kilkunastu galaktyk w gromadzie galaktyk znajdującej się w obszarze nieba zajmowanym przez gwiazdozbiór Panny. Okazało się, że prędkości galaktyk są bardzo duże i aby gromada mogła istnieć jako obiekt grawitacyjnie związany, jej masa powinna być kilkadziesiąt razy większa od sumy mas tworzących ją galaktyk. Tak oto pojawił się problem „brakującej masy”. Początkowo astronomowie nie traktowali tego problemu poważnie, uważając, że pomiary Zwicky’ego mogą być obciążone dużym błędem. Choć wyniki Zwicky’ego potwierdzili inni badacze i stwierdzono, że masy brakuje też w innych gromadach galaktyk, problemem tym zainteresowano się dopiero w końcu lat sześćdziesiątych, gdy zaczęto mierzyć prędkości, z jakimi gwiazdy w galaktykach spiralnych okrążają centrum galaktyki. Jasność galaktyk spiralnych jest zdominowana przez centralną część galaktyki – jej jądro, naturalnym było więc założenie, że skupiona jest tam większość masy galaktyki. Gdyby tak było, to podobnie jak planety w Układzie Słonecznym gwiazdy znajdujące się coraz dalej od centrum galaktyki powinny poruszać się coraz wolniej (trzecie prawo Keplera). Z pomiarów wynikało natomiast, że prędkości gwiazd nie maleją wraz z odległością. Korzystając z tych danych można oszacować masę galaktyki. Tak oszacowana masa galaktyki jest od kilku do kilkudziesięciu razy większa od masy oszacowanej na podstawie jej jasności. Z pomiarów prędkości gwiazd w galaktykach eliptycznych wynika, że w nich też brakuje masy.

W ciągu ostatnich kilkunastu lat pojawiły się nowe argumenty świadczące o tym, że gromady galaktyk zawierają bardzo dużo ciemnej materii. Dzięki obserwacjom satelitarnym stwierdzono, że centralne obszary gromad galaktyk zawierają bardzo gorący gaz, który świeci głównie w promieniach Roentgena. Gorący gaz jest tam utrzymywany przez odpowiednio silne siły grawitacyjne, które świadczą o dużej masie gromady. Masy kilku gromad galaktyk można było oszacować korzystając ze zjawiska soczewkowania grawitacyjnego. Wszystkie te metody prowadzą do podobnego wniosku, że dla gromad galaktyk M/L wynosi kilkaset, a dla galaktyk kilkadziesiąt. Z drugiej strony z obserwacji rozpowszechnienia lekkich pierwiastków, głównie deuteru, trytu i litu, można wyznaczyć średnią gęstość standardowej materii barionowej ρ_B . W kosmologii przyjęto mierzyć gęstość materii w jednostkach gęstości krytycznej ρ_{kryt} , tzn. średniej gęstości materii w płaskim wszechświecie, który rozszerza się w takim samym tempie jak nasz. Z obserwacji wynika, że $W_B = \rho_B/\rho_{\text{kryt}} = 0,04$, natomiast średnia gęstość materii we Wszechświecie oceniana na podstawie mierzonych wartości M/L wynosi $W_m = 0,27$. Wnioski wynikające z porównania tych dwóch liczb są szokujące. Okazuje się bowiem, że znaczna część materii wypełniającej Wszechświat nie tylko nie świeci, ale nie może być złożona ze znanych cząstek. Pomimo wielu prób nie udało się dotychczas odkryć cząstek, które tworzą ciemną materię. Odkrycie tych cząstek otworzy przed nami nowy, zupełnie inny, Wszechświat.

Marek DEMIAŃSKI



Rozwiązanie zadania M 1047.

Niekoniecznie. Wykażemy, że istnieje taki ciąg (a_n) , że

$$(1) \quad a_n < a_{n+1} < a_n + 2003 \quad \text{oraz}$$

$$(2) \quad a_m \neq a_n + n!.$$

Weźmy dowolny taki ciąg (b_n) , że $b_n \in \mathbb{N}$, $2 \leq b_n \leq 2000$.

Niech $a_n = b_1 + \dots + b_n$. Dla kolejnych liczb $m = 2, 3, \dots$ sprawdzamy, czy istnieje takie n , że $a_m = a_n + n!$. Jeśli tak, to zamieniamy a_m

na $a_m + 1$. Wówczas nadal zachodzi (1) oraz nowe a_m spełnia (2), gdyż $1 + a_k + k! \neq a_l + l!$ dla $k < l$. Kontynuujemy ten proces zamiany dla kolejnych wyrazów a_{m+1}, a_{m+2}, \dots .

Zauważmy teraz, że ciąg spełniający (2) nie może zawierać podciągu arytmetycznego. Załóżmy przeciwnie, że a_{n_1}, a_{n_2}, \dots jest podciągiem arytmetycznym o różnicy $d > 1$. Niech $n_k \geq d$. Wówczas $a_{n_k} + n_k!$ jest również wyrazem tego podciągu (bo $d|n_k!$), ale z (2) wiemy, że nie jest wyrazem ciągu (a_n) .

Protokół posiedzenia Jury XXV Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki w składzie: Antoni Leon Dawidowicz – przewodniczący, Marek Kordos, Witold Sadowski, Agnieszka Wojciechowska, Jarosław Wróblewski, na posiedzeniu w dniu 4 września 2003 roku w Poznaniu, po wysłuchaniu prezentacji prac dopuszczonych do finału, biorąc pod uwagę dobór tematu, treść pracy i sposób jej prezentacji, postanowiło:

1) przyznać 2 złote medale i nagrody pieniężne po 650 zł:

Marcelowi Kołodziejczykowi z I LO im. Kopernika w Łodzi za pracę *Waga szalkowa i uogólniony problem fałszywej monety* oraz

Aleksandrze Kwiatkowskiej z XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu za pracę *O istnieniu funkcji ciągłej, przyjmującej każdą wartość z góry zadaną ilość razy*;

2) przyznać srebrny medal i nagrodę pieniężną 500 zł:

Juliuszowi Jabłeckiemu z III LO im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu za pracę *O rozrzedzeniach zbioru liczb naturalnych i szeregach P -harmonicznych*;

3) przyznać 2 brązowe medale i nagrody pieniężne po 300 zł:

Krzysztofowi Mroczkowi z Liceum Przymierza Rodzin w Warszawie za pracę *Problem komiwojażera* oraz

Piotrowi Szafrudze z II LO im. Jana III Sobieskiego w Krakowie za pracę *Wielowymiarowe muzeum i jego strażnicy*;

4) przyznać trzy wyróżnienia i nagrody pieniężne po 200 zł:

Juliuszowi Jabłeckiemu i Lechowi Stawikowskiemu z III LO im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu za wspólną pracę *O porządkowaniu zależności wektorów losowych związanym z pewną klasą funkcji* oraz

Arkadiuszowi Męclowi z I LO im. St. Dubois w Koszalinie za pracę *Od twierdzenia Morleya do funkcji na wymiar*, a także

Robertowi Obrykowi z Gimnazjum nr 16 im. Stefana Batorego w Krakowie za pracę *O ukrytej podzielności wielomianów jednej zmiennej*;

5) wyrazić podziękowania i wręczyć dyplomy honorowe nauczycielom – opiekunom laureatów:

prof. dr. hab. Ewie Damek,
mgr. Jackowi Dymelowi,
dr. hab. Wojciechowi Guzickiemu,
dr. Andrzejowi Komisarakiemu,
dr. Rafałowi Kulikowi
mgr. Jerzemu Marcowi
mgr. Pawłowi Rudeckiemu.

Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki zamieścimy w numerze 1/2004.

Redakcja *Delta* rekomendowała prace nagrodzone złotym i srebrnym medalem do polskich eliminacji Konkursu na Młodego Uczzonego Europejskiego.

Wyniki finału XX edycji Ogólnopolskiego Sejmiku Matematyków

Konkurs ten polega na przedstawieniu opracowania jednego z tematów zaproponowanych (wraz z bibliografią) przez Jury lub tematu własnego oraz, w przypadku zakwalifikowania się do finału, krótkim zreferowaniu publicznie tego opracowania.

Konkursy organizuje Pracownia Matematyki Pałacu Młodzieży w Katowicach przy współudziale Uniwersytetu Śląskiego.

W roku 2003 na konkurs wpłynęły 153 prace, z których do finału zakwalifikowano 20, wyróżniono zaś listami gratulacyjnymi 31.

Zwycięzcy otrzymali liczne nagrody, wśród których corocznie są 3 indeksy na studia matematyczne w Uniwersytecie Śląskim.

Więcej informacji o konkursach można uzyskać pod adresem

dkolany@router.pm.katowice.pl

Jury w składzie: dr hab. Maciej Sablik – przewodniczący, mgr Marzena Ciemala, mgr Radosław Czaja, dr Maria Górniołek, dr Katarzyna Horbacz, dr Józef Kalinowski, dr Krzysztof Łoskot, mgr Michał Machura, mgr Katarzyna Osiak, mgr Anna Maria Szczerba-Zubek na posiedzeniu w Zakopanem w dniu 23 maja 2003 roku postanowiło przyznać

I miejsce ex aequo

Michałowi Januszewskiemu z VIII LO w Katowicach za pracę *Fraktale w przestrzeni trójwymiarowej i czterowymiarowej*; opiekun dr Krystyna Skórnik; Pawłowi Zaczkowi z Publicznego Gimnazjum w Węgierskiej Górcie za pracę *Figury geometryczne w różnych metrykach*; opiekun mgr Tomasz Szymczyk.

II miejsce

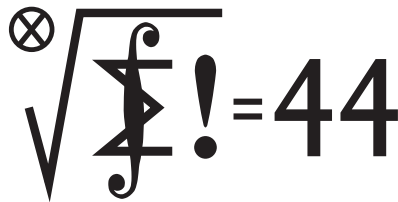
Adamowi Bzowskiemu z IV LO w Sosnowcu za pracę *Metody numeryczne w rozwiązywaniu równań wielomianowych*; opiekun mgr Władysława Koba.

Wyróżnienia

Michałowi Domaszewiczowi z II LO w Będzinie, Maciejowi Łaziczonkowi z V LO w Krakowie, Łukaszowi Siewierskiemu z I LO w Koszalinie i Annie Stelmaszczuk z I LO w Sandomierzu.

Wyniki głosowania publiczności na najlepszy referat:

nauczyciele wybrali Adama Bzowskiego, uczniowie wybrali Michała Januszewskiego.



Termin nadsyłania rozwiązań:

29 II 2004

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań

459 ($WT = 1,71$) i **460** ($WT = 1,86$)

z numeru 4/2003

| | | |
|--------------------|----------------|-------|
| Michał Adamaszek | – Kęty | 39,76 |
| Paweł Najman | – Jaworzno | 37,80 |
| Marian Łupieżowiec | – Zebrzydowice | 37,40 |
| Michał Józwiowski | – Błonie | 36,70 |
| Paweł Kubit | – Kraków | 35,39 |
| Zbigniew | | |
| Sewartowski | – Wieliczka | 34,15 |

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z matematyki nr 471, 472

Redaguje Marcin E. KUCZMA

471. Wyznaczyć wszystkie rzeczywiste pierwiastki równania

$$(x + 1)(x^2 + 1)(x^3 + 1)(x^4 + 1) = 210x^5.$$

472. Czy istnieje nieskończony ciąg liczb rzeczywistych a_1, a_2, a_3, \dots taki, że szereg $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ jest zbieżny, a szereg $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots$ jest rozbieżny?

Zadanie 472 zaproponował pan Michał Józwiowski z Błonia.

Zadania z fizyki nr 368, 369

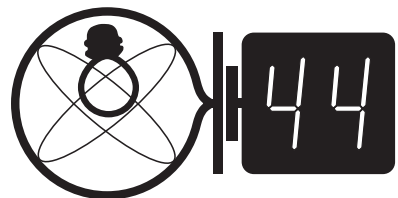
Redaguje Jerzy B. BROJAN

368. Dyzio strasznie dzisiaj dokazywał, gdy wyszedł na spacer na zewnątrz stacji kosmicznej krążącej wokół Ziemi. Zamiast pilnować swojej piłki, rzucił ją gdzieś i zanim ktokolwiek się zorientował, już jej nie było. „Dyzio, nie zaśmiecaj Kosmosu,” – upomniał go tata – „każdy swobodnie lecący przedmiot może być przyczyną katastrofy innych stacji!”. „Jak to dobrze, że przynajmniej nam nic z tego powodu nie grozi!” – odpowiedział niegrzeczny chłopiec. „Żałuję tylko, że mi zginęła, będąc się rozglądał, czy kiedyś nie przeleci obok, może ją złapię”.

Czy piłka może w przyszłości stanowić zagrożenie dla tej stacji? Czy Dyzio ma realną szansę ją odzyskać? Zakładamy, że stacja i piłka poruszają się tylko pod wpływem grawitacji ziemskiej, a Ziemia przyciąga tak, jak punkt materialny. Rozważyć przypadki stacji poruszającej się po orbicie kołowej i eliptycznej.

369. Silnik raketowy spala łącznie 100 g wodoru i tlenu na sekundę, a temperatura w komorze spalania wynosi 1000 K. Obliczyć przybliżoną wartość siły ciągu silnika.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:

29 II 2004



Rozwiązanie zadania M 1045.

Odnotujmy, że $0 < f_n(x) < 1$ dla $x \in (0, 1)$. Dowodzimy jednocześnie, że dla $n \in \mathbb{N}$

$$(1) \quad \exists_{0 < \delta_n < 1} f_{2n-1}(x) < x^{\frac{1}{2}} \quad \text{dla } x \in (0, \delta_n),$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f_{2n}(x) = 1.$$

Dla $n = 1$: $x < \sqrt{x}$ dla $x \in (0, 1)$, skąd (1). Ponadto $x^x = e^{x \ln x}$, skąd (2), gdyż $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$. Z założenia indukcyjnego wynika, że $f_{2n}(x) > \frac{1}{2}$ dla $x \in (0, \delta_{n+1})$ i pewnego $0 < \delta_{n+1} < 1$. Zatem

$$f_{2n+1}(x) = x^{f_{2n}(x)} < x^{\frac{1}{2}}$$

dla $0 < x < \delta_{n+1} < 1$. Ponadto, z powyższej nierówności wynika, że

$$f_{2n+2}(x) = x^{f_{2n+1}(x)} > x^{x^{\frac{1}{2}}} = e^{x^{\frac{1}{2}} \ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1,$$

gdyż $x^{\frac{1}{2}} \ln x = 2x^{\frac{1}{2}} \ln x^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$. To kończy dowód indukcyjny.

Oczywiście (1) implikuje, że $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_{2003}(x) = 0$.



Rozwiązanie zadania M 1046.

Niech $\{x\} = x - [x]$. Mamy

$$n \leq \frac{1}{\{x\}} < n + 1,$$

skąd

$$\frac{1}{n + 1} < \{x\} \leq \frac{1}{n}.$$

Zatem

$$n - 1 = \frac{n^2 - 1}{n + 1} < (n^2 - 1)\{x\} \leq \frac{n^2 - 1}{n} = n - \frac{1}{n} < n.$$

Dodając stronami $(n^2 - 1)[x]$ otrzymamy

$$n - 1 + k(n + 1) < (n^2 - 1)x < n + k(n + 1)$$

dla pewnej liczby całkowitej k . Zatem

$$[(n^2 - 1)x] = n - 1 + k(n + 1),$$

co dowodzi tezy.

W grudniowe wieczory Kasjopeję widać w pobliżu zenitu. Ten niewielki, ale bardzo charakterystyczny gwiazdozbiór leży w Drodze Mlecznej, wskutek czego znajduje się tam mrowie gwiazd, a więc też „dużo tam się dzieje”. Na przykład najjaśniejsza gwiazda Kasjopei (gamma) jest gwiazdą zmienną pulsującą, a do tego okresowo źródłem rentgenowskim. Bardzo słaba obecnie (19 mag) tzw. Gwiazda Tychona Brahego wybuchła 11 listopada 1572 r. jako supernowa, którą było widać nawet w dzień (Kasjopeja jest dla Europy gwiazdozbiorem niezachodzącym). Inna supernowa, której wybuch około roku 1700 w ogóle nie został dostrzeżony, pozostawiła po sobie radioźródło Cassiopeia A. Przez lornetkę widzimy tu liczne gromady otwarte, a nawet jest też tu jedna galaktyka, co prawda normalnie niewidoczna przez warstwę materii międzygwiazdowej skupionej w Drodze Mlecznej – widać ją tylko w podczerwieni. Nazywa się Maffei 1, od nazwiska włoskiego astronoma, który odkrył ją w 1968 r.



Wenus jest w Strzelcu i widać ją wieczorem dość nisko na zachodzie. Mars jest w Rybach i widać go w pierwszej połowie nocy. Jowisz jest w Lwie, wschodzi więc koło północy, a Saturn w Bliźniętach, przez co widać go przez całą noc; 31 XII, czyli w noc sylwestrową, nastąpi jego opozycja. 9 XII Merkury znajdzie się najdalej kątowno od Słońca i można próbować odszukać go o zmierzchu. 22 XII nastąpi przesilenie zimowe i dni zaczną się wydłużać. Pełnia Księżyca wypada 8 XII, a nów 23 XII. Żadnych zaćmień ani zakryć jasnych gwiazd w grudniu nie zobaczymy (wprawdzie 12 XII Księżyc zakryje planetoidę Ceres, ale zjawisko będzie widoczne tylko na południowym Atlantyku). Szczęśliwego Nowego Roku!



Tomasz KWAST

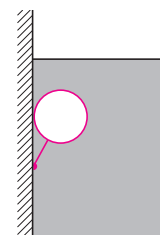


Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 609. Kulka o masie m i promieniu r wrzucona do wody pływa zanurzona do połowy. Z jaką siłą kulka będzie naciskać na pionową ściankę naczynia, jeśli ją do niej przymocujemy za pomocą nitki o długości równej promieniowi kulki (rys. 1)?

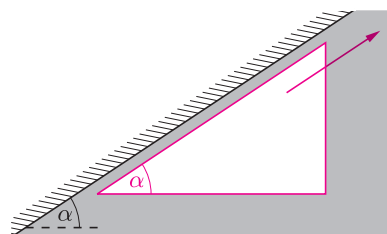
Rozwiązanie na str. 12



Rys. 1

F 610. Trójkątny klin o objętości V i gęstości ρ_1 zanurzony jest w cieczy o gęstości $\rho_2 > \rho_1$ (rys. 2). Klin ten porusza się wzdłuż ścianki nachylonej pod kątem α do poziomu ze stałą prędkością, ślizgając się po cienkiej warstwie cieczy. Znaleźć siłę oporu ruchu.

Rozwiązanie na str. 12



Rys. 2

Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

M 1045. Definiujemy następujący ciąg funkcji:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^x, \quad f_3(x) = x^{x^x}, \text{ itd.}$$

Obliczyć $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_{2003}(x)$.

Rozwiązanie na str. 15

M 1046. Niech x będzie niecałkowitą dodatnią liczbą rzeczywistą i niech $n = \left[\frac{1}{x - [x]} \right]$, gdzie $[a]$ oznacza część całkowitą liczby a . Udowodnić, że liczba $[(n^2 - 1)x] + 2$ jest podzielna przez $n + 1$.

Rozwiązanie na str. 15

M 1047. Ciąg liczb naturalnych (a_n) spełnia warunek $a_n < a_{n+1} < a_n + 2003$. Czy z ciągu (a_n) można zawsze wybrać podciąg arytmetyczny?

Rozwiązanie na str. 13



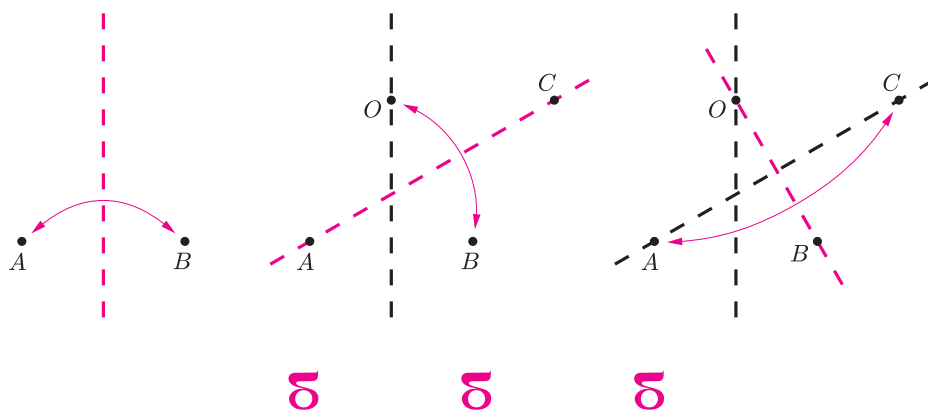


mała delta

Trzydziestka na trzydziestolecie

1. Wiadomo, że nie każdą konstrukcję da się wykonać za pomocą cyrkla i linijki. A jakie konstrukcje da się wykonać, gdy nie mamy ani cyrkla, ani linijki, tylko czystą kartkę z dwoma zaznaczonymi punktami A i B ? Cóż, koła raczej z takiej kartki nie wymodelujemy, ale np. sześciokąt foremny jak najbardziej. Zginamy zatem kartkę tak, by punkt A znalazł się na punkcie B (patrzmy pod światło) i wzdłuż zgięcia otrzymujemy symetralną odcinka AB . Potem zginamy kartkę tak, by punkt A leżał na zgięciu, natomiast punkt B wskoczył na pewien punkt O położony na symetralnej odcinka AB . Uzyskany punkt O jest wierzchołkiem równobocznego trójkąta ABO i zarazem środkiem szukanego sześciokąta. Zginamy teraz kartkę wzdłuż odcinka BO i punkt A ląduje na pewnym punkcie C , który jest trzecim bokiem sześciokąta. Znalazienie kolejnych jest bardzo proste.

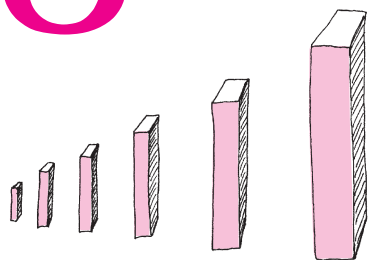
A jak, zginając kartkę, otrzymać ośmiokąt foremny?



2. Pomylenie dodawania z mnożeniem (lub – co gorsza – z potęgowaniem) prowadzi zwykle do katastrofy na wszelkiego rodzaju klasówkach. Na szczęście nie zawsze, mamy bowiem równość:

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} = \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \dots}}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\dots}}} = 2$$

3. Rektyfikacja okręgu to znalezienie za pomocą cyrkla i linijki odcinka o długości równej obwodowi danego okręgu. Przybliżona konstrukcja pochodząca od Kochańskiego jest na tyle dokładna, że ludzkie oko może spostrzec błąd dopiero, gdy okrąg ma średnicę około pół metra. Lepsza jest konstrukcja Ramanujana: błąd dostrzeżemy dopiero, gdy okrąg będzie wielkości Polski. Nie zmienia to faktu, że rektyfikacja okręgu jest niewykonalna. Dowiódł tego w 1883 roku Lindemann.



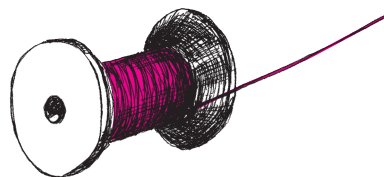
4. Lawina

Potrzebne jest „wykładnicze” domino. Każdy kolejny klocek powinien mieć wymiary od $\sqrt{2}$ do 1,5 raza większe niż poprzedni. Dobór odpowiednich materiałów pozostawiamy inwencji czytelników. Wystarczy dziewięć klocków. Największy będzie miał wymiary od 16 do 25 razy większe niż najmniejszy. Ustawiamy domina począwszy od największego. Każde mniejsze stawiamy połowę jego wysokości przed większym (patrz rysunek).

Po ustawieniu, wytrącamy z równowagi najmniejsze domino, które cichutko przewraca większe, które z kolei odrobinę głośniej przewraca następne... ŁUUP!



5. Posłuszna szpula

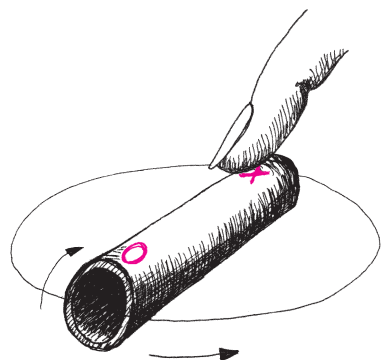


Potrzebna jest szpula (albo szpulka) z nawiniętą mocną nitką, sznureczkiem, a najlepiej tasiemką. Szpulę kładziemy na ziemi i ciągnąc za tasiemkę powodujemy rozwinięcie się szpuli (patrz rysunek).

Czy ciągnąc za tę samą tasiemkę można spowodować, żeby szpulka się z powrotem nawinęła?



6. Tajemnicza rurka



Potrzebny jest kawałek giętkiej rurki o średnicy około 2 cm, pisak do folii i gładki stół. Odcinamy kawałki rurki o długości trzech, czterech i pięciu zewnętrznych średnic. Eksperyment zaczynamy od rurki trzy razy dłuższej niż jej średnica. Na jednym jej końcu zaznaczamy \times , a na drugim \circ . Kładziemy ją na stole i naciskając palcem koniec oznaczony krzyżykiem, gwałtownie wprowadzamy rurkę w szybką podwójną rotację: wokół osi cylindra i wokół osi prostopadłej do rurki i stołu. (Patrz rysunek) Trzeba trochę potrenować, żeby to się udało.

Obserwując szybko obracającą się rurkę dostrzeżemy, że widzimy trójkąt utworzony z krzyżyków, a kółek nie widzimy wcale! (Patrz rysunek)

Co i dlaczego zobaczymy dla pozostałych rurek?

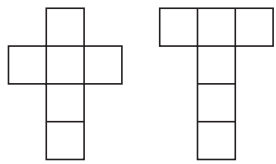


7. Ukryte kolory (doświadczenie dla zaawansowanych)

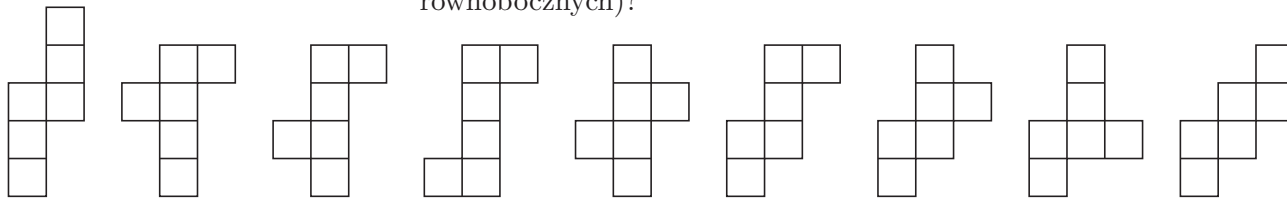
Potrzebny jest ciekłokrystaliczny wyświetlacz (sklep komputerowy, hipermarket?) oraz dwa opakowania po płytach CD albo kasetach magnetofonowych. Patrząc na odbicie ekranu w jednym z pudełek, należy wstawić pomiędzy ekran a jego obraz przezroczystą część drugiego opakowania. Zobaczymy fantastyczne kolorowe wzory, których nie widać, gdy patrzymy przez pudełko bezpośrednio na ekran!

Wyjaśnić to zjawisko pamiętając, że światło polaryzuje się częściowo przez odbicie i wiedząc, że użyty plastik skręca polaryzację światła.

W jaki sposób spolaryzowane jest światło emitowane przez ekran (i dlaczego właśnie tak)?



8. Sześcián ma jednaście siatek, to znaczy jego powierzchnię można na 11 sposobów rozciąć wzdłuż krawędzi tak, aby pozostała nadal w jednym kawałku, ale dawała się położyć na płaszczyźnie – wszystkie one są na rysunku. A ile siatek ma foremny czworościan albo foremny ośmiościan (ich powierzchnia składa się, odpowiednio, z 4 i z 8 trójkątów równobocznych)?

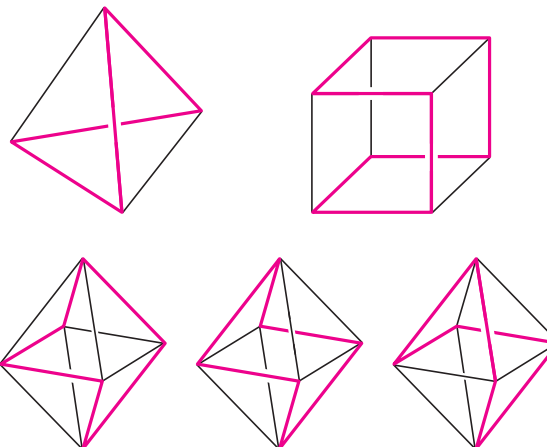


σ

σ

σ

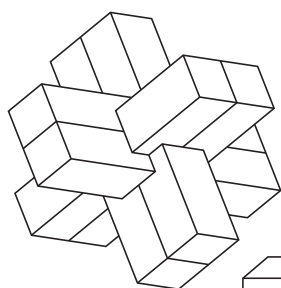
9. Cykl Hamiltona to taka droga po krawędziach grafu (czyli układu kresek, zwanych krawędziami, łączących punkty, zwane wierzchołkami), że idąc po niej, odwiedzimy dokładnie raz każdy wierzchołek i powrócimy do tego, od którego zaczęliśmy. Można szukać cykli Hamiltona w modelu krawędziowym wielościanu, np. foremnego – bo to przecież graf. I czworościan, i sześcián mają tylko po jednym cyklu Hamiltona, gdy zgodzimy się utożsamiać cykle wyglądające tak samo. Ośmiościan ma ich trzy. Są one na rysunkach. A ile różnego kształtu cykli Hamiltona mają pozostałe wielościany foremne?



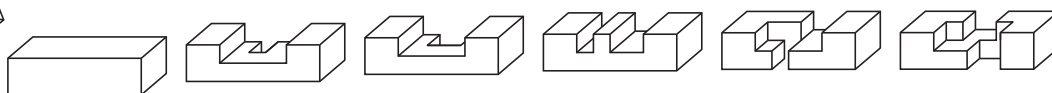
σ

σ

σ



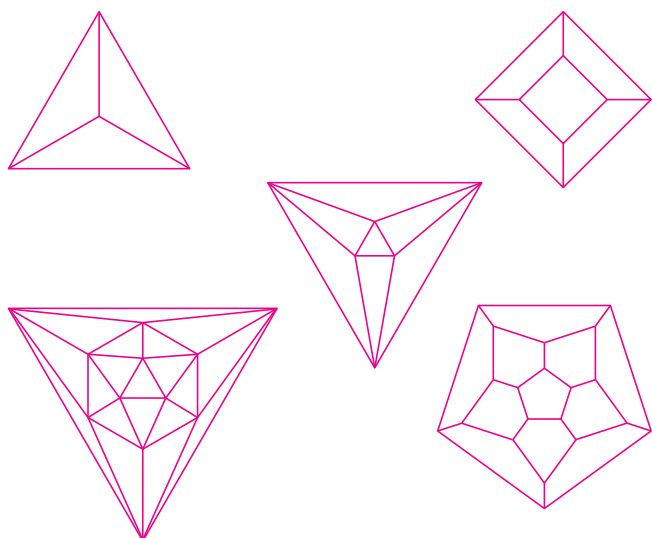
10. Podwójny krzyż dający się ułożyć z drewnianych patyczków podobno został wymyślony całe wieki temu przez litewskich drwali. Na rysunku pokazany jest kształt takich sześciu patyczków. Wystrugajcie sobie takie patyczki i ułóżcie z nich krzyż. Istnieje jeszcze jeden układ takich patyczków nieznacznie różniący się od narysowanego. Znajdźcie go.



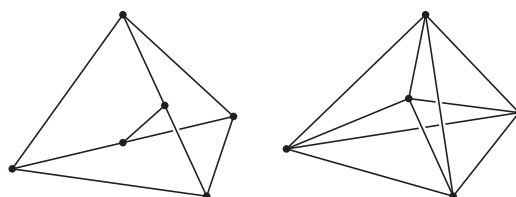
σ

σ

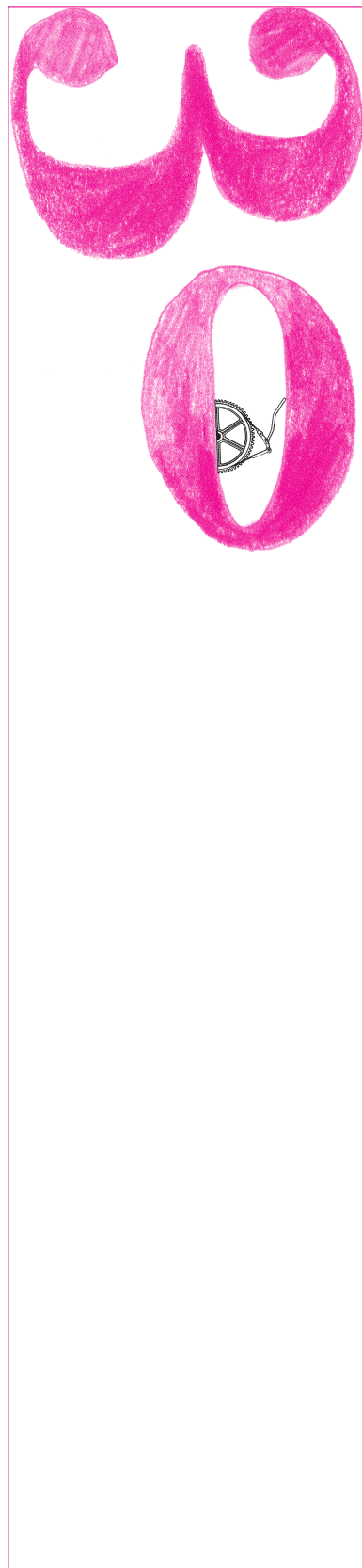
σ



11. Nie każdy graf można przedstawić na płaszczyźnie, to znaczy narysować go w ten sposób (uwaga: długość ani krzywizna kresek nie są ważne), by żadne dwie jego krawędzie nie przecinały się. Graf każdego wielościanu foremnego da się tak narysować. Obok są narysowane ich spłaszczone grafy. Niżej – dwa grafy, których spłaszczyć się nie da. To ważne grafy, bo każdy niesplaszczalny graf zawiera w sobie (jako fragment) co najmniej jeden z nich.



iii



12. Gdyby ktoś mógł zobaczyć Układ Słoneczny od strony północnego bieguna świata (np. z Gwiazdy Polarnej), to zobaczyłby, że wszystkie planety obiegają Słońce w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (jest to tzw. ruch prosty). W tym samym kierunku obiega swoje planety większość satelitów. Właśnie – nie wszystkie! Co najmniej cztery takie satelity (mówi się o ruchu wstecznym) ma Jowisz; nadano im specjalnie nazwy kończące się na -e. Oto one: Ananke, Carme, Pasiphae i Sinope. Saturn też ma wstecznego satelitę: Phoebe. Co do Urana to trudno powiedzieć, bo jego satelity obiegają go w płaszczyźnie praktycznie prostopadłej do płaszczyzny orbity. Podobnie jest z układem Pluton-Charon. Problem pochodzenia satelitów o ruchu wstecznym jest ciągle daleki od wyjaśnienia.

δ

δ

δ

13. Heliometr to wbrew nazwie nie „przyrząd do mierzenia Słońca”, cokolwiek by to miało znaczyć. Był to osobliwy teleskop przeznaczony do mierzenia małych względnych odległości kątowych gwiazd. Zbudował go Fraunhofer w 1826 r. Obiektyw tego teleskopu był przecięty wzdłuż średnicy, jego połówki przesuwano się za pomocą śruby mikrometrycznej, a całość była obracana wokół osi teleskopu. Średnicę połowiącą obiektyw ustawiano się równoległe do łuku łączącego dwie gwiazdy. Każda połówka dawała niezależny obraz obu gwiazd i przesuwając te połówki należało doprowadzić do pokrycia się w okularze obrazu jednej gwiazdy z obrazem drugiej. Na podstawie odczytu śruby mikrometrycznej i przy znajomości ogniskowej teleskopu można było dość dokładnie określić kątową odległość gwiazd. Za pomocą heliometru Bessel w latach 1837–38 stwierdził, że gwiazda 61 Cygni zmienia w rytmie rocznym położenie na niebie (tzn. na tle gwiazd), a tym samym zmierzył jej paralaksę heliocentryczną.

δ

δ

δ

14. Panowała kiedyś zasada, że nowo odkrywane planetoidy nazywano imionami żeńskimi. Nie dało się tego jednak utrzymać z powodu wielkiej liczby ciągle odkrywanych planetoid. Jednak do dziś nazwy żeńskie nadaje się obiektom na powierzchni Wenus. Jedyna męska nazwa na tej planecie to Góry Maxwella.

δ

δ

δ

15. W tablicach księżycowych publikowanych w rocznikach astronomicznych znajduje się sporo luk oznaczających, że jakiegoś dnia Księżyc nie wschodzi, innego dnia nie góruje itd. Jak to możliwe? Otóż Księżyc porusza się po niebie dość szybko ($13^{\circ}176$ na dobę) i w dodatku z zachodu na wschód. Dlatego jeżeli pewnego dnia np. górował tuż przed północą, to kolejne jego górowanie wypadnie tuż po północy, ale nie zaraz następnego dnia, lecz jeszcze następnego. Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla wschodów i zachodów, stąd luki w tabeli.



16. Łapanie podczas łypania

Potrzebny jest karton, nożyczki, gumka i piłeczki. Z kartonu robimy stożek ścięty i mocujemy za pomocą gumki do twarzy (własnej, kolegi lub koleżanki) tak jak na rysunku.

Zadaniem osoby z „noskiem” jest próba łapania rzucanych do niej piłeczek. Okaze się to zadziwiająco trudne! Dlaczego?



17. Ważenie samochodu

Potrzebny jest samochód, równe podłoże, kilkanaście kartek papieru, taśma klejąca, miarka i przyrząd do mierzenia ciśnienia w oponach. Samochód stawiamy na równym podłożu. Każde koło otaczamy kartkami papieru tak, aby zmierzyć pole powierzchni styku opony z podłożem. Mierzymy tę powierzchnię styku dla każdego koła i ciśnienie w każdym kole.

Ile wynosi ciężar samochodu?



18. Sejsmograf drogowy

Potrzebne są: polska droga (polecam warszawskie ulice), samochód, biała tablica, ścieralny pisak. Siadamy w samochodzie stawiając przed sobą tablicę, tak byśmy mogli sięgnąć do niej pisakiem trzymany w wyciągniętej ręce. Po ruszeniu dotykamy do tablicy pisakiem, zamykamy oczy i wolno przesuwamy pisak poziomo po tablicy. Otwieramy oczy i oglądamy sejsmograficzny obraz naszej „równej” ulicy. Po wyjściu z samochodu możemy zmierzyć amplitudę zarejestrowanych „trzęsień samochodu”. Jeżeli wyrazimy te amplitudy w mikrometrach, i weźmiemy ich logarytm dziesiętny, to otrzymamy skalę analogiczną do np. skali Richtera.

Jaki stopień trzęsienia w tej skali okazałby się tragiczny w skutkach?

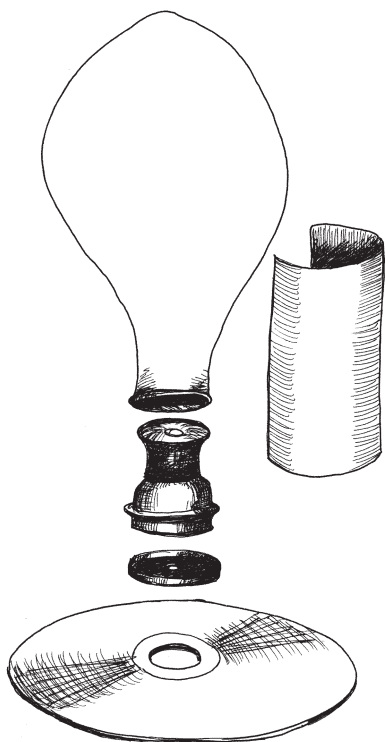


19. Poduszkowiec

Potrzebne są: niepotrzebna płyta CD, wieczko od pudełka po filmie, główka butelki po wodzie ze „sportowym” zamknięciem, rurka pozostała po rolce papieru toaletowego, klej (najlepiej pistolet z klejem na gorąco) i balon. W wieczku robimy dziurkę o średnicy około 2 mm i przyklejamy do CD, a do wieczka przyklejamy zamkniętą główkę butelki (patrz rysunek). Pompujemy balon i zakładamy na główkę. Przygotowujemy wspornik z rurki (należy wziąć około 2/3 rurki i rozciąć ją wzdłuż). Sprawdzamy, czy możemy go łatwo założyć na balon, następnie otwieramy zaworek główki butelki, szybko zakładamy wspornik i poduszkowiec gotowy!

Należy go wypróbować na gładkim stole.

v



20. Gwiazdy masywne ewoluują szybciej od mało masywnych, gdyż dużo rozrzutniej gospodarują zapasami swojego jądrowego paliwa. Po zużyciu wodoru w centrum gwiazda zwiększa jasność i rozmiary. Tzw. paradoks Algola polega na tym, że w wielu układach podwójnych gwiazdą jaśniejszą i większą – czyli zaawansowaną w ewolucji – jest gwiazda o mniejszej masie. Za taki stan odpowiedzialny jest przepływ masy z jednej gwiazdy na drugą. Mianowicie w przeszłości gwiazda masywniejsza jako pierwsza uległa rozdęciu, a wtedy jej materia zaczęła gwałtownie przepływać na gwiazdę towarzyszącą, czego skutkiem stało się odwrócenie stosunku mas. W takich układach podwójnych mamy więc gwiazdę o mniejszej masie, ale nadal rozdętą, czyli zaawansowaną ewolucyjnie, oraz gwiazdę o masie większej, ale która „przybrała na wadze” dopiero co i dlatego jeszcze nie przestała być gwiazdą młodą w sensie ewolucyjnym. Takim właśnie układem jest m.in. Algol (czyli β Persei), najwcześniej znana gwiazda zmienna zaćmieniowa i druga w ogóle gwiazda zmienna.

δ δ δ

21. Często słyszy się, że satelita obiega Ziemię po okręgu, ponieważ działająca na niego siła odśrodkowa równoważy dośrodkową (grawitacyjną). Tymczasem pierwsza zasada dynamiki głosi, że jeżeli działające na obiekt siły równoważą się, to porusza się on jednostajnie po prostej. Coś więc jest tu nie tak. Co?

δ δ δ

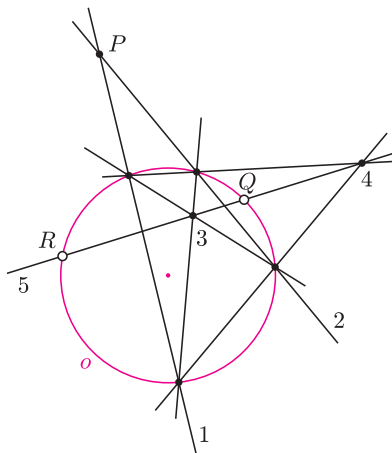
22. Miesiąc gwiazdowy (czas obiegu Księżyca wokół Ziemi) wynosi $G = 27,321661$ dni, a miesiąc synodyczny (odstęp czasu między kolejnymi np. nowiami) $S = 29,530589$ dni. Czy liczby te są jakoś związane? Tak! Mianowicie $360^\circ/G$ to prędkość kątowna Księżyca w układzie inercyjnym, $360^\circ/S$ to jego prędkość w układzie obracającym się w takim tempie, w jakim Słońce (pozornie) obiega Ziemię w ciągu roku gwiazdowego, a więc z prędkością $360^\circ/R$, gdzie $R = 365,256362$ dni. A prędkości kątowne też się dodają i odejmują, dlatego

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{G} - \frac{1}{R}.$$

Sprawdź!

δ δ δ

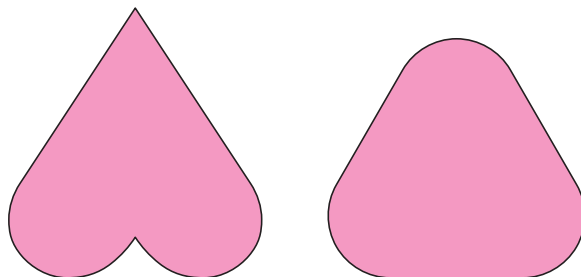
23. Studentom astronomii zadawano czasami na egzaminie złośliwe pytanie: Jak stała słoneczna zależy od długości fali? Stała słoneczna to ilość energii padającej ze strony Słońca w jednostce czasu na jednostkę powierzchni – zatem od długości fali nie zależy, bo jest wielkością „skałkowaną” po wszystkich długościach fal. Wynosi 1367 W/m^2 . Za to zmienia się w czasie, mianowicie jest nieco większa od powyższej wartości średniej podczas maksimum aktywności Słońca. Może wydawać się dziwne, że Słońce zaplamione wysyła więcej energii niż czyste. Jest jednak tak dlatego, że zmniejszoną wskutek obecności plam emisję energii z fotosfery rekompensują z nadwyżką burzliwe zjawiska towarzyszące plamom i zachodzące nad fotosferą, tj. pochodnie i rozbłyski. Wahania są na poziomie 1 W/m^2 .



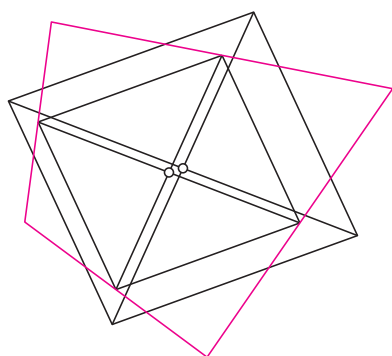
24. Rysowanie stycznej do okręgu wcale nie wymaga użycia cyrkla. Co więcej – bez niego jest o wiele szybsze i prostsze. Oto przepis na narysowanie stycznej do okręgu o przechodzącej przez dany punkt P poza okręgiem. Rysujemy dwie sieczne różnej długości, których przedłużenia przechodzą przez P (proste 1 i 2). Wyznaczają one cztery punkty na okręgu. Łączymy te punkty parami i znajdujemy przecięcia powstałych prostych (punkty 3 i 4). Prosta 5, przechodząca przez punkty 3 i 4, przecina okrąg w punktach Q i R . Otóż proste PQ i PR są styczne do okręgu o . Wielką zaletą tej metody jest to, że identycznie konstruuje się styczne do elipsy, paraboli i hiperboli. Wadą jednak jest fakt, że uzasadnienie tej konstrukcji jest proste dopiero, gdy użyjemy matematyki nieco wyższej niż szkolna. Ale pokazuje, że ta nieco wyższa matematyka też może się w praktyce uczniowskiej przydać.

δ δ δ

25. Koło ma tę własność, że każda prosta, która połowi jego obwód, połowi też jego pole. Bez trudu można zauważyć, że wiele figur ma tę własność. Na przykład wszystkie płaskie figury środkowosymetryczne. A czy są jeszcze inne? Okazuje się, że tak. Obok są narysowane dwie takie figury. Czy umielibyście wymyślić jeszcze jedną taką figurę? A wiele?



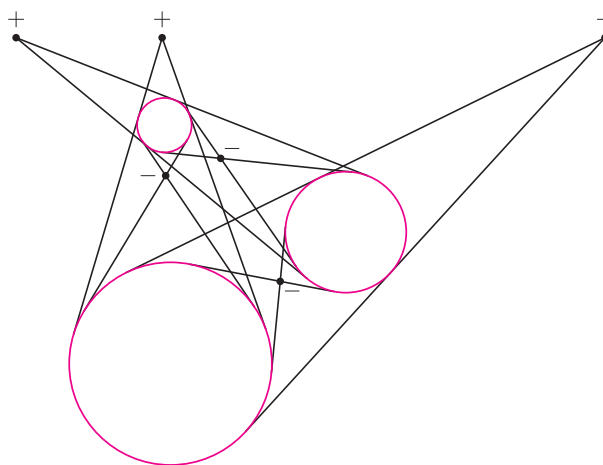
δ δ δ



26. Jeśli podzielić każdy bok jakiegoś czworokąta na połowy i połączyć środki sąsiednich boków, to powstaje równoległobok o polu równym połowie pola wyjściowego czworokąta, ale tu zajmie nas inny fakt. Mianowicie przekątne tego równoległoboku przecinają się w punkcie będącym środkiem ciężkości czterech jednakowych mas umieszczonych w wierzchołkach czworokąta. To teraz podzielmy bok czworokąta na trzy równe części i połączmy prostymi punkty sąsiadujące z tym samym wierzchołkiem. Też otrzymamy równoległobok (o jakim polu?). Jego przekątne przecinają się w punkcie, który jest środkiem ciężkości wyjściowego czworokąta o równo na całej powierzchni rozmieszczonej masie.

δ δ δ

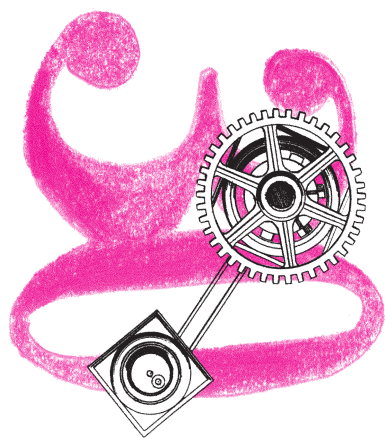
27. Dwa niewspółśrodkowe okręgi o różnych promieniach zawsze mają dwa środki jednokładności: można je nałożyć przez jednokładność o stosunku dodatnim (środek jest w punkcie przecięcia się wspólnych zewnętrznych stycznych, o ile istnieją) i o stosunku ujemnym (tu przecinamy wewnętrzne styczne, też o ile istnieją). Nazwijmy te środki, odpowiednio, dodatnim i ujemnym. Jeśli więc narysujemy trzy okręgi o trzech różnych promieniach i środkach, będziemy mieli trzy środki dodatnie i trzy ujemne. Okazuje się, że środki dodatnie leżą na jednej prostej! Ujemne nie, ale dowolne dwa ujemne leżą na jednej prostej z jednym dodatnim! Czy umiecie uzasadnić, dlaczego tak jest?



28. Grecy ze szkoły pitagorejskiej wysoce sobie cenili wszelkie oznaki harmonii i ładu wśród liczb, nie więc dziwnego, że zainteresowały ich tzw. **liczby bliźniacze**, czyli takie pary kolejnych liczb pierwszych, których różnica jest równa 2. Takimi parami są np. 3 i 5, 5 i 7, 11 i 13, 17 i 19, 29 i 31, 41 i 43. Temat jest interesujący do dziś, nie wiadomo bowiem, czy takich par jest skończenie, czy też nieskończenie wiele. A czy istnieją takie trójki liczb pierwszych, że każde dwie kolejne różnią się o 2? Na to pytanie znacznie łatwiej odpowiedzieć. Owszem, istnieje taka trójka: 3, 5 i 7, ale jest ona jedyna. Istotnie, rozpatrzmy liczby postaci $n, n + 2$ i $n + 4$, zakładając, że tym razem $n > 3$. Jeśli n jest podzielna przez 3, to, oczywiście, nie jest liczbą pierwszą. Jeśli n nie jest podzielna przez 3, to daje resztę 1 lub 2. W pierwszym przypadku liczba $n + 2$ jest podzielna przez 3, w drugim – liczba $n + 4$. Nie może się więc zdarzyć, że wszystkie trzy liczby są pierwsze.



29. Liczbą parzystą jest tylko co druga liczba naturalna, a jednak... liczb naturalnych parzystych jest „tyle samo” co wszystkich liczb naturalnych. Uznamy, że dwa zbiory mają „tyle samo” elementów (są **równoliczne**), gdy istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między ich elementami, czyli gdy istnieje funkcja różnowartościowa z jednego z tych zbiorów w drugi, przy czym wartości funkcji ten drugi zbiór wyczerpują. Taką funkcją ze zbioru \mathbb{N} wszystkich liczb naturalnych w zbiór $2\mathbb{N}$ wszystkich liczb naturalnych parzystych jest taka funkcja f , że $f(n) = 2n$. Podobnie zbiór wszystkich liczb naturalnych podzielnych przez ustaloną liczbę k jest równoliczny ze zbiorem \mathbb{N} . Można też wykazać, że każdy nieskończony podzbiór zbioru \mathbb{N} jest równoliczny z całym zbiorem \mathbb{N} .



Jak sprawdzić na wielkim balu, czy jest na nim tyle samo kobiet co mężczyzn? Wystarczy puścić odpowiednią muzykę. Kiedy każdy z Panów zaprosi do tańca jedną Panią, okaże się, czy został wolny jakiś Pan lub czy ten drugi zbiór został wyczerpany...



30. Paradoxy logiczne nieraz w historii matematyki ujawniały luki w rozumowaniu lub nie dość sprecyzowane pojęcia. Oto przykład paradoksu: udowodnimy istnienie jednorożca. Twierdzenie

istnieje jednorożec

jest, jak łatwo zauważyć, równoważne twierdzeniu

istnieje istniejący jednorożec.

Otóż mamy teraz dwie możliwości (gdyż opieramy się na logice dwuwartościowej):

1. albo *nie istnieje istniejący jednorożec*,
2. albo *istnieje istniejący jednorożec*.

To pierwsze zdanie jest w oczywisty sposób fałszywe, gdyż jeśli jednorożec jest istniejący, to nie może nie istnieć. Zatem prawdziwe musi być drugie zdanie, które stwierdza istnienie istniejącego jednorożca, a więc, jak zauważyliśmy, po prostu istnienie jednorożca. Przeoczenie biologów czy błąd w rozumowaniu?