

Nagrodę Dziekanów

Wydziału Fizyki i Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki
za najlepszy artykuł *Delta* w roku akademickim 2002/3

otrzymali

Andrzej Hryczuk i Robert Żak
za artykuł *Niebieski las* (*Delta* 8/2003)

SPIS TREŚCI NUMERU 3 (358)

Rola opóźnienia w modelowaniu zjawisk przyrodniczych <i>Urszula Forys</i>	str. 1
Od Galileusza do misji Galileo <i>Krzysztof Ziolkowski</i>	str. 4
Pierścień Kaca <i>Krzysztof Rejmer</i>	str. 6
Zadania	str. 8
Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki	
Aktualności	str. 9
Mała Delta	str.10
Zadanie o gwiazdzie <i>Michał Machura</i>	str.12
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Marzec	str.16
Gammalimatias	str.17

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny: Andrzej Białynicki-Birula, Bogdan Cichocki, Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, Jan A. Gaj – przewodniczący, Jerzy Ginter, Piotr Goldstein, Tadeusz Jarzębowski, Wiesław A. Kamiński, Marta Kicińska-Habior, Andrzej Majhofer, Zbigniew Marciniak, Janusz Matkowski, Andrzej Mąkowski, Adam Michalec, Zdzisław Pogoda, Grzegorz Sitarski, Weronika Śliwa, Andrzej Woszczyk, Wiesław Żelazko.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Krzysztof Biesaga, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Anna Ludwicka, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Rysunki techniczne: Marcin Adamski

Adres do korespondencji: Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delta”, ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa.

Skład systemem $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ wykonała Redakcja, e-mail: BARTOL@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2004 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2004 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP SA I O/W-wa, nr 30 10201013 122640143**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na III kwartał 2004 r. wynosi 12 zł.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 68124010531111000004430494 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl

6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII – na I kwartał roku następnego,

do 5 III – na II kwartał roku bieżącego,

do 5 VI – na III kwartał roku bieżącego,

do 5 IX – na IV kwartał roku bieżącego.

Numerzy archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze:

Kiedy Darwin spotka Mendla?

Rola opóźnienia w modelowaniu zjawisk przyrodniczych

Urszula FORYŚ

Wszystkie procesy, które obserwujemy w naturze, zachodzą z pewnym opóźnieniem w stosunku do momentu inicjacji danego procesu. Możemy w tym miejscu spytać, co oznacza określenie „moment inicjacji”. Odpowiedź zależy od rozpatrywanego zjawiska. Jeśli analizujemy podstawowe procesy zachodzące w komórkach (typu: proliferacja – czyli namnażanie, apoptoza – czyli śmierć programowa), to okazuje się, że momentem inicjacji jest wysłanie pewnego sygnału (najczęściej chemicznego) i od chwili wysłania tego sygnału do zajścia danego zjawiska upływa pewien czas, który nazywamy opóźnieniem tego zjawiska. Przechodząc na poziom całych organizmów, możemy omawiać bardzo różne procesy. W modelowaniu dynamiki populacji najczęściej bierzemy pod uwagę procesy rozrodczości i śmiertelności. Momentem inicjacji procesu rozrodczości jest zapłodnienie, a sam proces obserwujemy w chwili narodzenia nowego osobnika. Widzimy więc, że opóźnienie procesu rozrodczości może przyjmować bardzo duże wartości. W przypadku procesu śmiertelności jednoznaczne zdefiniowanie momentu inicjacji przysparza pewnych trudności. Niemniej jednak można również wyodrębnić pewne sygnały biochemiczne.

Porównując opóźnienia procesu proliferacji i rozrodczości, np. w populacji słońi, stwierdzamy, że ich wielkości są diametralnie różne. Wydawałoby się zatem, że mniejsze opóźnienie możemy zaniedbać, a tylko zastanawiać się nad braniem pod uwagę dużego. Takie podejście nie zawsze jest słuszne. Powinniśmy porównać wielkość opóźnienia z czasem trwania innych procesów. Może się wtedy okazać, że również małego opóźnienia nie powinniśmy pomijać.

W związku z pytaniami podajemy adres strony, na której można znaleźć informacje o prezentowanym w *Delcie* 1/2004 piśmie „Magazyn Miłośników Matematyki”: www.atut.ig.pl/mmm

Przejdziemy teraz do omówienia efektów wprowadzenia opóźnienia w modelu matematycznym. Dla uproszczenia będziemy mówić o modelu jednowymiarowym opisującym zmiany liczebności (zagęszczenia) pewnej populacji. Na początku oprzemy się na najpopularniejszym modelu tego typu, czyli równaniu logistycznym, a potem przejdziemy do trochę bardziej skomplikowanego modelu wzrostu nowotworu.

Równanie logistyczne.

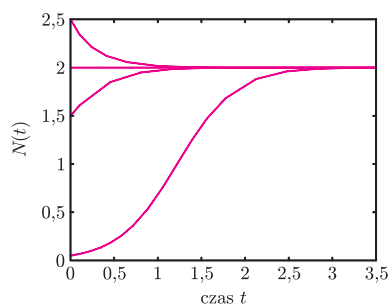
Niech $N(t)$ oznacza zagęszczenie populacji w chwili t , a $\dot{N} = \frac{dN}{dt}$ – chwilową zmianę zagęszczenia.

Wtedy:

$$\dot{N}(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right),$$

gdzie r – współczynnik rozrodczości, K – pojemność środowiska.

Badamy, w jaki sposób zmienia się liczebność populacji w czasie. W modelu logistycznym zakłada się, że liczebność ta wzrasta w procesie rozrodczości (średnia liczba osobników potomnych jednego rodzica jest stała), natomiast maleje na skutek konkurencji o ograniczone zasoby środowiska (osobniki konkurują, jeśli się spotykają, liczba spotkań jest losowa, modeluje się ją jako funkcję kwadratu liczebności populacji). Każde rozwiązanie równania logistycznego zmierza wraz z upływem czasu do pewnej wielkości, którą nazywamy pojemnością środowiska (rys. 1).



Rys. 1. Rozwiązania równania logistycznego dla różnych początkowych liczebności populacji.

Pojemność ta mierzy liczbę osobników, którą dane środowisko może wyżywić. Jak widzimy na rysunku 1, rozwiązania są zbieżne do pojemności środowiska monotonicznie (maleją lub rosną). Rozwiązanie stacjonarne (tzn. niezmiennie w czasie), które przyciąga inne rozwiązania ze swojego otoczenia, nazywamy stabilnym (taka jest właśnie pojemność środowiska w równaniu logistycznym). Natomiast jeśli rozwiązanie odpycha rozwiązania, które zaczynają się blisko, to jest ono niestabilne (np. rozwiązanie zerowe w równaniu logistycznym).

Spróbujmy teraz wprowadzić opóźnienie do równania logistycznego. W klasycznym podejściu robi się to w następujący sposób. Modelujemy wielkość, którą ekologowie nazywają przyrostem *per capita*, czyli zmianę liczebności przeskalowaną przez liczbę osobników. Zakłada się, że wielkość ta jest malejącą liniową funkcją liczebności, przy czym w równaniu z opóźnieniem bierzemy pod uwagę liczebność populacji

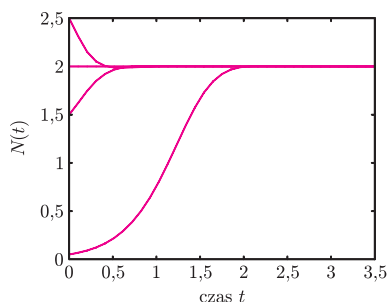
w chwili $t - \tau$, gdzie $\tau > 0$ obrazuje opóźnienie zmian liczebności (stałe dla uproszczenia).

Klasyczne równanie logistyczne z opóźnieniem

$$\dot{N}(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right).$$

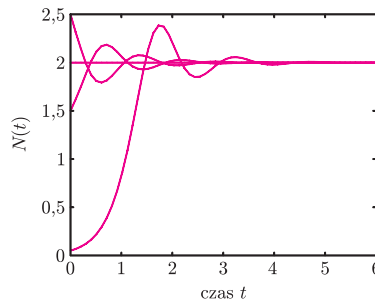
Równanie to ma kilka interpretacji biologicznych. Zaprezentujemy jedną z nich. Rozważamy populację roślinożerców, które żywią się pewnymi roślinami, ale rośliny te nadają się do zjedzenia tylko gdy osiągną wiek τ . Jednocześnie w wieku τ rośliny rozsiewają nasiona. Jeśli zostały zjedzone, to nie rozsiewają nasion. Wobec tego ilość pożywienia dostępnego dla populacji w chwili t zależy od tego, ile roślin zostało zjedzonych w chwili $t - \tau$, a zatem od liczby osobników w tej chwili. Stąd w przyroście *per capita* rozpatrujemy funkcję zależną od chwili $t - \tau$, a nie od obecnej chwili t . Jaki ma to wpływ na zachowanie rozwiązań? W szczególności – jak od wielkości opóźnienia zależy stabilność rozwiązań stacjonarnych?

Okazuje się, że jeśli dane rozwiązanie stacjonarne jest niestabilne w modelu bez opóźnienia, to pozostaje niestabilne dla dowolnego $\tau > 0$. Znacznie ciekawsze efekty uzyskujemy w przypadku rozwiązań stabilnych dla $\tau = 0$. W zależności od parametrów modelu może się zdarzyć, że rozwiązanie pozostaje stabilne bez względu na wielkość opóźnienia lub, jak w przypadku równania logistycznego, istnieje pewna krytyczna wielkość opóźnienia $\tau_c > 0$, w której następuje zmiana stabilności. Konkretnie – dla $0 \leq \tau < \tau_c$ rozwiązanie pozostaje stabilne, natomiast po przekroczeniu tej wielkości następuje utrata stabilności. Bardzo często zdarza się, że w momencie utraty stabilności rozwiązania stają się oscylujące. Tego typu zachowanie, gdy rozwiązanie stacjonarne przestaje być stabilne i pojawiają się rozwiązania okresowe, nazywamy bifurkacją Hopfa. W równaniu logistycznym z opóźnieniem obserwujemy właśnie bifurkację Hopfa. Rysunki poniżej obrazują zachowanie rozwiązań w zależności od opóźnienia. Jeśli opóźnienie jest niewielkie (rys. 2), to rozwiązania niewiele różnią się od tych, które otrzymujemy bez opóźnienia (rys. 1).



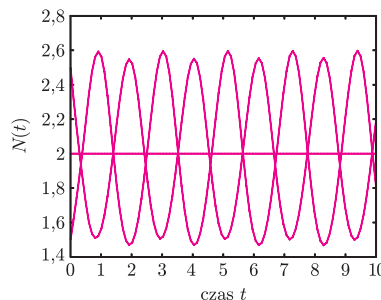
Rys. 2. Rozwiązania równania logistycznego z opóźnieniem dla małego opóźnienia.

Wraz ze wzrostem opóźnienia (ale $\tau < \tau_c$) rozwiązania zaczynają oscylować wokół pojemności środowiska, przy czym w dalszym ciągu są przyciągane przez rozwiązanie stacjonarne – rysunek 3.



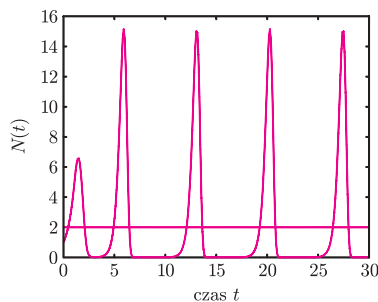
Rys. 3. Rozwiązania równania logistycznego z opóźnieniem dla większego opóźnienia.

Dalszy wzrost opóźnienia ($\tau \approx \tau_c$) powoduje powstawanie oscylacji niegasnących – rysunek 4.



Rys. 4. Rozwiązania równania logistycznego z opóźnieniem dla opóźnienia krytycznego.

Jeśli opóźnienie znacznie przekracza wartość krytyczną, to początkowo amplituda oscylacji rośnie, ale po pewnym czasie ustala się i wszystkie rozwiązania pozostają ograniczone (rys. 5).



Rys. 5. Rozwiązania równania logistycznego z opóźnieniem dla dużego opóźnienia.

Inne równania z opóźnieniem mogą mieć rozwiązania nieograniczone.

Wyobraźmy sobie teraz następującą sytuację. Niech nasza populacja ma do wyboru co najmniej dwa typy pożywienia o podobnych własnościach, ale zjadane rośliny rozsiewają nasiona w różnym wieku. Mamy zatem zależność przyrostu *per capita* od co najmniej dwóch momentów w przeszłości, $t - \tau_1$, $t - \tau_2$, $\tau_1 \neq \tau_2$, $\tau_1, \tau_2 > 0$.

Równanie logistyczne z dwoma opóźnieniami

$$\dot{N}(t) = rN(t) (1 - b_1N(t - \tau_1) - b_2N(t - \tau_2)),$$

przy czym pojemność środowiska to $K = \frac{1}{b_1 + b_2}$.

Nasuwa się w tym momencie pytanie, czy wprowadzenie większej liczby opóźnień zmienia w istotny sposób

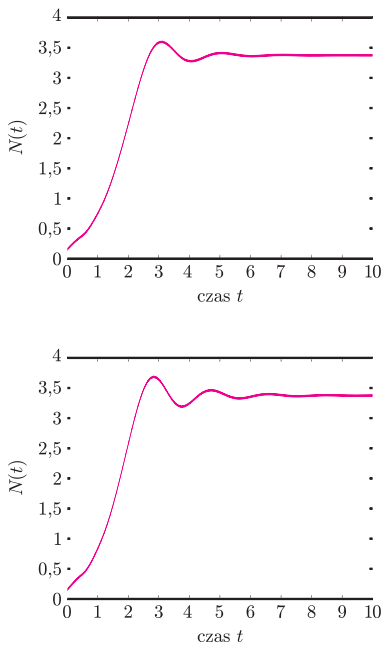
zachowanie rozwiązań. Oczywiście, znów zależy to od parametrów rozpatrywanego modelu. Równanie logistyczne nie jest najlepszą ilustracją dla tego przypadku, przejdziemy więc do modelu opisującego wzrost symetrycznego przestrzennie guza. W modelu tym uwzględnia się procesy proliferacji i apoptozy komórek nowotworowych. Jeśli założymy, że proliferacja zachodzi z opóźnieniem $\tau_1 > 0$, a apoptoza z innym opóźnieniem $\tau_2 > 0$, to otrzymujemy równanie, w którym możemy zaobserwować częste zmiany stabilności w zależności od wielkości opóźnień.

Równanie wzrostu guza

$$\dot{N}(t) = -cN(t - \tau_2) + \sigma_e N(t - \tau_1) - \frac{a}{15} N^{\frac{5}{3}}(t - \tau_1),$$

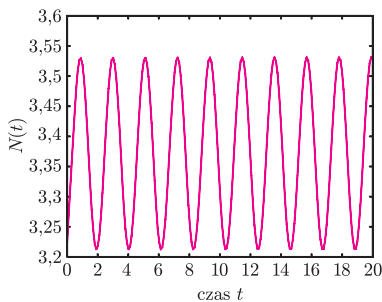
gdzie a oznacza stałą konsumpcji składników pokarmowych przez komórki nowotworowe, σ_e – zewnętrzne stężenie składników pokarmowych, c – stałą proliferacji.

Ustalmy pewną wielkość opóźnienia $\tau_1 > 0$ i zbadajmy, co się dzieje przy wzroście τ_2 . Dla małego τ_2 zachowanie jest podobne jak dla $\tau_2 = 0$ – rysunek 6.



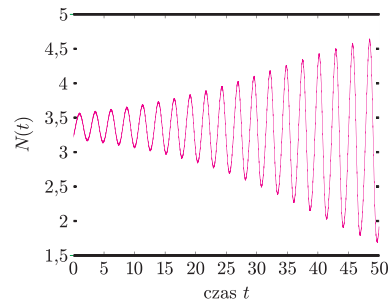
Rys. 6. Wzrost guza dla $\tau_2 = 0$ i $\tau_2 = 0,1$.

Następnie mamy pierwszą wartość krytyczną τ_2^{c1} , przy której występuje bifurkacja Hopfa (rys. 7).



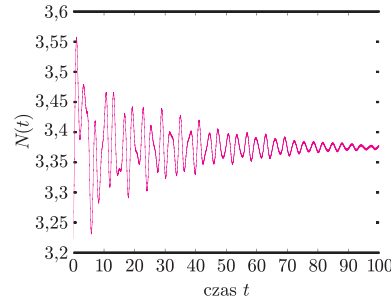
Rys. 7. Wzrost guza dla pierwszej wartości krytycznej opóźnienia τ_2^{c1} .

Potem obserwujemy niestabilność – rysunek 8.



Rys. 8. Wzrost guza dla opóźnienia τ_2 pomiędzy wartościami krytycznymi.

Kolejna wartość krytyczna $\tau_2^{c2} > \tau_2^{c1}$ daje stabilizację (rys. 9), itd.



Rys. 9. Wzrost guza dla opóźnienia τ_2 powyżej drugiej wartości krytycznej.

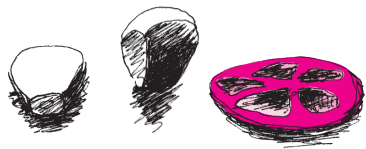
W zależności od parametrów takich wartości krytycznych może być więcej. Jest to główna różnica między modelem z jednym opóźnieniem i z większą liczbą opóźnień. Przy jednym opóźnieniu może być co najwyżej jedna wartość krytyczna, natomiast przy co najmniej dwóch opóźnieniach – wartości krytycznych może być znacznie więcej.

W omawianym przez nas modelu wzrostu guza występuje duże opóźnienie procesu apoptozy przy ustalonym (stosunkowo niewielkim) opóźnieniu procesu proliferacji. Nasuwa się w związku z tym pytanie, czy coś takiego ma sens biologiczny. Wieloletnie badania dotyczące procesu apoptozy u nicieni (Nagroda Nobla w 2002 r.) sugerują, że zablokowanie sygnału inicjującego apoptozę (w efekcie duże opóźnienie tego procesu) może mieć kluczowe znaczenie w rozwoju nowotworów. Wydaje się zatem, że również w przypadku modelowania tego zjawiska należy wziąć pod uwagę duże wartości opóźnienia.

Omówione przykłady pokazują, że wprowadzenie opóźnienia do modelu może zmienić zachowanie rozwiązań, przy czym istotny jest sposób, w jaki to opóźnienie wprowadzamy. Decyzja, czy można przy modelowaniu danego zjawiska pominąć opóźnienie (i w efekcie otrzymać prostszy model, który znacznie łatwiej analizować), należy, oczywiście, do naukowca modelującego dane zjawisko. Niekiedy wprowadzenie opóźnienia zastępujemy zwiększeniem liczby zmiennych w modelu. Trzeba sobie jednak zdawać sprawę z tego, że te dwa podejścia (tzn. zwiększenie liczby zmiennych w układzie równań różniczkowych zwyczajnych lub wprowadzenie opóźnienia) nie są z matematycznego punktu widzenia równoważne.

Od Galileusza do misji Galileo

Krzysztof ZIOŁKOWSKI



Jowisz – największa planeta Układu Słonecznego, a po Słońcu, Księżycu i Wenus czwarty pod względem jasności obiekt na niebie – intryguje ludzi „od zawsze”. Ale dopiero w 1610 roku Galileusz pierwszy skierował na Jowisza skonstruowaną przez siebie lunetę. Dokonane wtedy odkrycie czterech księżyców, zwanych do dziś galileuszowymi, nie tylko wzbogaciło wiedzę o Układzie Słonecznym, ale wpłynęło na rozwój nauki w ogóle. We wrześniu 2003 roku sonda kosmiczna o nazwie Galileo zakończyła wieloletnie badania Jowisza, rozpoczęte w XVII wieku przez tego prekursora nowożytnej nauki.

Misja Galileo jest dziełem amerykańskiej agencji NASA oraz współpracujących z nią naukowców i techników z Francji, Kanady, Niemiec, Szwecji i Wielkiej Brytanii. Jej przygotowania rozpoczęto w roku 1977, start sondy nastąpił jednak dopiero 18 X 1989 (jedną z przyczyn opóźnienia była katastrofa Challengeera). Optymalna pod względem energetycznym trasa sondy, wykorzystująca grawitacyjne oddziaływania planet, wymagała wtedy zbliżenia do Wenus (II 1990) i dwukrotnego zbliżenia do Ziemi (XII 1990 i XII 1992). W ten sposób po sześciu latach, w grudniu 1995 roku, Galileo osiągnął Jowisza, stając się jego sztucznym satelitą. Oddzielony od sondy kilka miesięcy wcześniej próbnik, przeznaczony do badań atmosfery, osiągnął Jowisza 7 XII 1995 i opadając na spadochronie, przekazywał wyniki pomiarów. Było to pierwsze „dotknięcie” tej wielkiej planety przyrządem skonstruowanym przez człowieka. Przez następne osiem lat Galileo 34 razy okrążył Jowisza po różnie zorientowanych orbitach eliptycznych, wielokrotnie przelatując w pobliżu jego satelitów.

Galileo poleciał do Jowisza pozbawiony głównej anteny. Miała nią być składana czasza o średnicy 5 m, jednak nie udało się jej otworzyć podczas obu zbliżeń do Ziemi. Dlatego wszystkie informacje zebrane przez przyrządy musiały być przekazywane na Ziemię za pomocą anteny przeznaczonej pierwotnie tylko do sterowania pracą sondy. Zaszła przy tym potrzeba przeprogramowania systemu kompresji danych oraz włączenia do ich odbioru trzech, a nie jednej, jak pierwotnie planowano, stacji odbiorczych (w Kalifornii, Australii i Hiszpanii).

Między pierwszym i drugim przelotem koło Ziemi Galileo zbliżył się do planetoidy Gaspra, mijając ją 29 X 1991 roku ze względną prędkością 8 km/s w minimalnej odległości 1600 km. Otrzymane wtedy pierwsze obrazy planetoidy z bliska potwierdziły, że planetoidami są nieregularne bryły pokryte kraterami uderzeniowymi. Rozmiary Gaspry oceniono na $19 \times 12 \times 11$ km. Nie udało się, niestety, oszacować jej masy (a więc i gęstości), gdyż odległość sondy od niej była zbyt wielka. Stwierdzono natomiast istnienie pola magnetycznego Gaspry. 28 VIII 1993 sonda przeleciała koło drugiej planetoidy, Idy, z prędkością 12,4 km/s w minimalnej odległości 2400 km. Ida okazała się także nieregularną i pokrytą kraterami bryłą o rozmiarach $55 \times 20 \times 24$ km. Największą sensacją

było odkrycie satelity tej planetoidy. Księżyc Idy, nazwany Daktylem, jest bryłą o rozmiarach około 1,5 km i okrąża planetoidę po prawdopodobnie kołowej orbicie o promieniu 100 km.

Odkrycie w marcu 1993 roku komety Shoemaker-Levy 9, która w lipcu 1994 zderzyła się z Jowiszem, stało się dla sondy Galileo nie lada wyzwaniem. Okazało się bowiem, że jest ona jedynym narzędziem obserwacyjnym zdolnym bezpośrednio zobaczyć to niecodzienne zjawisko (fragmenty komety spadały na niewidoczną z Ziemi stronę planety). Sprostanie temu zadaniu wymagało zmiany programu funkcjonowania sondy, co było niełatwe przy braku głównej anteny i niemożliwości dokładnego przewidzenia momentów zderzeń i spodziewanych efektów. Wysiłek się jednak opłacił. Galileo dostarczył jedynych wiadomości o przebiegu pierwszej minuty spektakularnego zjawiska wtargnięcia czterech fragmentów komety z prędkością 60 km/s w atmosferę Jowisza.

Ponad rok później do atmosfery Jowisza wpadł próbnik sondy. Przez prawie godzinę opadał na spadochronie, pokonując 200 km, zanim uległ zniszczeniu na głębokości, gdzie panowało ciśnienie 23 atm. Dokonane przezeń obserwacje wykazały m.in., że atmosfera Jowisza jest gorętsza i bardziej sucha niż dotychczas sądzono. Potwierdziły się informacje o wielkoskalowych ruchach materii (których spektakularnym przykładem jest obserwowana od ponad 300 lat Wielka Czerwona Plama, będąca najprawdopodobniej ogromnym wirami atmosferycznym). Maksymalna prędkość wiejących tam wiatrów (do 600 km/h) okazała się dużo większa, niż oczekiwano. Zjawisk tych nie da się wytłumaczyć jedynie ogrzewaniem planety przez Słońce, musi w nich brać udział jej wewnętrzne źródło energii, ale co może je stanowić, pozostaje nadal zagadką.

Wśród najdonioślejszych wyników pracy sondy Galileo na pierwszym miejscu trzeba wymienić dostarczenie wielu wiarygodnych danych świadczących o istnieniu kilkudziesięciokilometrowej warstwy płynnej wody pod niezbyt grubą lodową powierzchnią Europy. Liczne zdjęcia tego satelity, wykonane podczas 13 zbliżeń sondy (największe na odległość zaledwie 201 km od powierzchni), ukazały aktywną geologicznie, spękaną skorupę lodu pokrytą licznymi nierównościami świadczącymi o istnieniu cieplejszych warstw podpowierzchniowych. Przemawiają też za tym

nieliczne kratery uderzeniowe, płytkie i na ogół z gładkim wnętrzem oraz pomiary pola magnetycznego Jowisza w pobliżu tego satelity. Wskazują one na istnienie wewnątrz jego globu przewodnika elektryczności, odpowiadającego na zmianie pole magnetyczne Jowisza własnym polem indukowanym. Tym przewodnikiem może być słona woda podpowierzchniowa. O jej zasoleniu świadczą obserwowane plamy oraz różnice barw w pęknięciach skorupy lodowej, do których mogła napłynąć woda z rozmaitymi domieszkami. Odkrycie słonej wody pod powierzchnią Europy rodzi też podejrzenia o możliwości występowania tam prostych form życia.

Drugim równie frapującym dokonaniem sondy Galileo było zbadanie wulkanizmu Io, odkrytego dzięki sondom Voyager kilkanaście lat wcześniej. Io krążąc blisko Jowisza, znajduje się stale w obszarze bardzo silnej radiacji wewnątrz magnetosfery Jowisza. Aby więc nie narażać elektronicznych urządzeń sondy na możliwe uszkodzenia, zbliżenia do Io zaplanowano na koniec misji, gdy warto już było podjąć ryzyko nawet zniszczenia sondy. Od października 1999 roku Galileo sześć razy znalazł się w pobliżu Io; największe zbliżenie, na odległość zaledwie 102 km od powierzchni, nastąpiło w styczniu 2002 roku. Mimo kłopotów technicznych sonda przeżyła. Na Io znaleziono około 80 wulkanów, ale najważniejszym wynikiem okazało się stwierdzenie bardzo wysokiej – sięgającej aż 2000 K – temperatury materii wydobywającej się z wnętrza tego księżycy. Temperatura lawy ziemskich wulkanów nie przewyższa dziś na ogół 1400 K, ale w odległej przeszłości była zapewne wyższa. Dzięki Io można więc jak gdyby spojrzeć w geologiczną młodość Ziemi.

W czerwcu 1996 roku, podczas drugiego okrążenia Jowisza, sonda przeleciała w odległości 835 km od powierzchni Ganimedesa, największego księżycy w Układzie Słonecznym. Okazało się, że ma on własne, stosunkowo silne pole magnetyczne, a jego magnetosfera zanurzona jest w magnetosferze Jowisza. Niezwykłość tej struktury, trochę lepiej poznanej podczas następnego zbliżenia sondy do Ganimedesa, spowodowała powstanie pytania, co może być źródłem magnetyzmu satelity. Pojawiły się sugestie, że pierwotną przyczyną może

być rezonans orbitalny Io, Europy i Ganimedesa. Okres obiegu Ganimedesa jest w przybliżeniu równy okresowi 2 obiegów Europy i 4 Io. Ta współmierność może prowadzić do okresowych wzmocnień oddziaływań grawitacyjnych, w tym również pływowych, które powodują rozgrzanie wewnątrz globów tych księżyców. Ponieważ Ganimedes ma stosunkowo duże żelazne jądro (czego dowodzi analiza sygnałów radiowych wysyłanych z przelatującej koło niego sondy), to wzmocniane przez rezonanse grzanie pływowe podtrzymuje w nim konwekcję, która z kolei generuje pole magnetyczne.

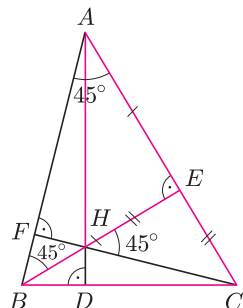
Siły pływowe pochodzące od masywnego Jowisza i pozostałych księżyców galileuszowych są także źródłem energii powodującej aktywność wulkaniczną Io oraz stopienie podpowierzchniowych lodów Europy. Za pomocą sondy Galileo odkryto, że podobnie jak Ganimedes również Io i Europa mają żelazne jądra otoczone płaszczem skalnym. W przeciwieństwie do nich Kallisto – najbardziej oddalony od Jowisza księżyc galileuszowy – ma wewnątrz wypełnione stosunkowo jednorodną mieszaniną skalno-lodową. Pomiary zmian pola magnetycznego Jowisza w pobliżu Kallisto sugerują natomiast obecność w globie tego satelity – analogicznie jak w przypadku Europy – podpowierzchniowej warstwy słonej wody o grubości kilkudziesięciu kilometrów.

Praca sondy Galileo w układzie Jowisza przewidziana była pierwotnie na dwa lata. Po tym czasie okazało się, że sonda jest ciągle w dobrym stanie i ma zapas paliwa. Oczywiście więc przedłużono jej służbę. Zużywszy paliwo, sonda mogłaby jeszcze długo krążyć wokół Jowisza jako nieczynny sztuczny satelita. Zachodziło jednak niebezpieczeństwo, że w przyszłości dojdzie do jej zderzenia z Europą i tym samym dostarczenia na jej powierzchnię ziemskich zanieczyszczeń, których obecności na pokładzie sondy nie dało się przecież wykluczyć (mimo jej sterylizacji przed startem). A to mogłoby zagrozić życiu, którego możliwość istnienia na Europie pokazał właśnie Galileo. Resztkę paliwa wykorzystano więc na wykonanie ostatniego manewru kierującego sondę ku Jowiszowi. 21 IX 2003 roku sonda wpadła do atmosfery Jowisza z prędkością 48 km/s, kończąc w ten sposób swój pracowity żywot. Od startu z Ziemi do zderzenia z Jowiszem przebyła 4632 mln km.



Rozwiązanie zadania M 1054.

Niech AD , BE , CF będą wysokościami w trójkącie ABC (rys. 1). Z równości $\sphericalangle BAC = 45^\circ$ wynika, że $\sphericalangle ABE = 45^\circ$, a to z kolei daje $\sphericalangle CHE = 45^\circ$. Zatem trójkąty ABE i CHE są prostokątne i równoramienne, czyli $AE = BE$ oraz $HE = CE$. Stąd wynika, że trójkąty prostokątne AHE i BCE są przystające, a więc $AH = BC$.



Rys. 1

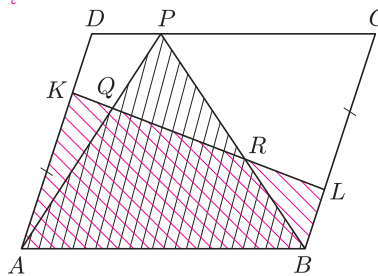
Rozwiązanie zadania M 1055.

Prosta KL rozcina równoległobok $ABCD$ na dwie przystające figury (rys. 2). Zatem pole czworokąta $ABLK$ jest równe połowie pola

równoległoboku $ABCD$. Również pole trójkąta ABP jest równe połowie pola równoległoboku $ABCD$. Stąd otrzymujemy

$$\text{pole czworokąta } ABLK = \text{pole trójkąta } ABP.$$

Odejmując od obu stron powyższej równości pole czworokąta $ABRQ$ uzyskujemy tezę.

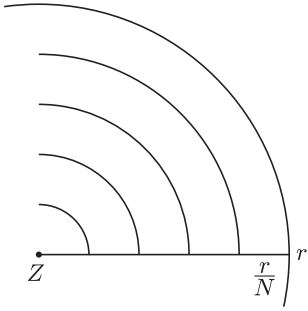


Rys. 2



Rozwiązanie zadania F 615.

Rozważmy kulę o środku w źródle światła i promieniu r (rysunek).



Kulę dzielimy za pomocą współśrodkowych sfer na N części o jednakowej grubości $\frac{r}{N}$. W k -tej części, licząc od środka, znajduje się

$$m = \frac{4\pi k^2 nr^3}{N^3}$$

drobin pyłu, które zasłaniają powierzchnię mA , czyli $\frac{mA}{N}$ całości powierzchni sfery. Drobiny w różnych warstwach ustawione są przypadkowo i niezależnie od siebie, więc całkowita niezasłonięta powierzchnia to

$$\left(1 - \frac{nA}{N}\right)^N$$

całej sfery, co po przejściu do granicy $N \rightarrow \infty$ daje $e^{-r/nA}$. Po podzieleniu na jednostkę powierzchni otrzymujemy

$$I = \frac{I_0}{r^2} e^{-r/nA}$$

Charakterystyczną cechą układów makroskopowych, złożonych z wielkiej liczby cząsteczek jest to, że zachodzą w nich procesy nieodwracalne, takie jak przepływ ciepła pomiędzy ciałami o różnych temperaturach. Dzieje się tak, mimo że prawa mechaniki klasycznej, rządzące ruchem cząsteczek, są odwracalne w czasie. Wprawdzie „natura” cząsteczek jest kwantowa, ale ich ruch pomiędzy zderzeniami można opisać klasycznie, o ile energia nie jest zbyt wysoka. Samo zderzenie cząsteczek należy opisywać prawami mechaniki kwantowej, ale jedyną wielkością, której potrzebujemy w analizie ich ruchu, jest tak zwany przekrój czynny na zderzenie, czyli – mówiąc niezbyt dokładnie – prawdopodobieństwo zderzenia. Najczęściej jednak traktujemy cząsteczki jako sztywne kule zderzające się sprężysto, bez wnikania w to, co dzieje się z nimi, gdy znajdują się bardzo blisko. Jeśli potraktujemy cząsteczki jako klasyczne sztywne kule, obliczenie przekroju czynnego na zderzenie jest zadaniem trywialnym. Sprzeczność między nieodwracalnością wielu fizycznych procesów a odwracalnością praw mechaniki klasycznej nosi nazwę **paradoksu Loschmita**. Co więcej, z twierdzenia Poincarégo o powrocie wynika, że dla prawie wszystkich stanów początkowych układ powróci w pobliże stanu początkowego, choć dla układów makroskopowych ten czas powrotu jest niesłychanie duży (większy niż czas życia Wszechświata). Porównanie konsekwencji twierdzenia Poincarégo z istnieniem procesów nieodwracalnych nazwano **paradoksem Zermelo**. Z obu paradoksów płynie wniosek, że nieodwracalności procesów w makroskopowych układach nie można wytłumaczyć w kategoriach czysto mechanicznych (niezbędne są pewne założenia o charakterze statystycznym), a poza tym nieodwracalność nie ma charakteru bezwzględnego, lecz związana jest z właściwą układowi skalą czasu. Należy wspomnieć, że twierdzenie Poincarégo dotyczy zachowawczych (izolowanych) układów mechanicznych, natomiast układy, z którymi mamy do czynienia w rzeczywistości, nie są izolowane, jednak nie tu tkwi istota rzeczy.

Dążenie makroskopowego układu do stanu równowagi – co jest procesem nieodwracalnym – w przypadku rozrzedzonego gazu opisywane jest równaniem Boltzmanna. Jednak analiza zachowania się wielkiego zbioru cząsteczek poruszających się w trójwymiarowej przestrzeni jest niesłychanie trudna, dlatego uprościmy sobie zadanie i przedyskutujemy własności bardzo prostego modelu, mającego wszystkie interesujące nas własności, zaproponowanego przez Marka Kaca. Model ten został nazwany **pierścieniem Kaca**. Rozważmy zatem okrąg podzielony przez N punktów na N komórek, każda z nich zawiera kulę białą lub czarną, założymy przy tym, że w stanie początkowym dominują kulki jednego koloru. W jednostkowych odstępach czasu każda z kulek przeskakuje do następnej komórki, umówmy się, że zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Pewna liczba punktów zawiera wskaźniki, które zmieniają kolor mijającej wskaźnik kulki. Przejście kulki przez znacznik jest tu odpowiednikiem zderzenia cząsteczek. Spodziewalibyśmy się, że układ dąży do stanu równowagi, w którym liczba białych kulek jest równa liczbie kulek czarnych.

Naszym celem jest znalezienie równań opisujących liczbę kulek białych $B(t)$ i czarnych $C(t)$ jako funkcji (dyskretnego, mierzonego liczbami naturalnymi) czasu t . Oznaczmy przez $b(t)$ i $c(t)$ liczby białych i czarnych kulek znajdujących się bezpośrednio przed znacznikami, a więc zmieniających kolor w najbliższym skoku.

Spełnione są równania

$$\begin{aligned} B(t+1) &= B(t) + c(t) - b(t), \\ C(t+1) &= C(t) + b(t) - c(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Oznaczmy przez Δ różnicę między liczbą białych i czarnych kulek. Spełnia ona równanie

$$\Delta(t+1) = \Delta(t) - 2[b(t) - c(t)]. \tag{2}$$

Jest to równanie wprawdzie ściśle, ale zupełnie bezwartościowe, nie znamy bowiem rozkładu kulek przed znacznikami. Wprowadzimy do modelu pewne założenie statystyczne. Założymy mianowicie, że ułamek cząstek zmieniających barwę w danym kroku jest równy prawdopodobieństwu μ tego, że wybrany punkt dzielący okrąg na komórki jest znacznikiem. Prawdopodobieństwo to możemy zdefiniować jako stosunek liczby znaczników do liczby wszystkich punktów. A zatem

$$\frac{b(t)}{B(t)} = \frac{c(t)}{C(t)} = \mu. \tag{3}$$

Przy tym założeniu równanie (2) daje się sprowadzić do postaci

$$\Delta(t+1) = (1 - 2\mu)\Delta(t), \tag{4}$$

które można iterować t razy, aby otrzymać rozwiązanie w postaci

$$\Delta(t) = (1 - 2\mu)^t \Delta(0). \tag{5}$$

W nieciekawym przypadku $\mu = 1$, kiedy w każdym punkcie znajduje się znacznik, w każdym ruchu każda kulka zmienia kolor, a zatem obserwujemy oscylacje, $\Delta(t)$ zmienia jedynie znak, co także odzwierciedla wzór (5). Jednak gdy $\mu < 1$, rozwiązanie, które otrzymaliśmy, odpowiada znikającej różnicy ilości białych i czarnych kulek ($|\Delta(t)| \rightarrow 0$), gdy t dąży do nieskończoności, co zgadza się z obserwowanym w przyrodzie dążeniem do stanu równowagi; takie zachowanie się układu nazwiemy boltzmannowskim. Z drugiej strony nasz wynik w oczywisty sposób jest błędny, ponieważ mamy

1. Paradoks Loschmita: równanie (4) i jego rozwiązanie (5) nie jest niezmiennicze względem odwrócenia czasu, podczas gdy dynamika układu jest odwracalna.

2. Paradoks Zermelo: w czasie $t = 2N$ każda z kulek dwukrotnie mijają każdy znacznik, a więc układ musi wrócić do pierwotnego stanu (twierdzenie Poincarégo o powrocie).

Dokładniej rzecz biorąc, zarówno równanie (4), jak i rozwiązanie (5) wcale nie muszą być złe, jedynie zakres ich stosowalności jest ograniczony. Sprzeczność między nieodwracalnym charakterem obserwowanych zjawisk i odwracalnością dynamiki, jak również paradoksy Loschmita i Zermelo zostają rozwiązane, jeśli wprowadzimy zespół statystyczny i wykażemy, że równania (4, 5) opisują nie ściśle zachowanie się dowolnego układu w zespole, lecz najbardziej prawdopodobne zachowanie się jednego z układów tworzących zespół. Zespół statystyczny zdefiniujemy jako zbiór pierścieni Kaca o tym samym początkowym rozmieszczeniu kulek czarnych i białych, ale o różnych rozmieszczeniach tej samej liczby znaczników. Niech i oznacza numer punktu, natomiast ułamek układów mających znacznik w punkcie i jest równy μ . Stan mikroskopowy układu opiszemy następująco:

$$\eta_i(t) = 1, \quad \text{gdy w chwili } t \text{ przed punktem } i \text{ znajduje się biała kulka,}$$

$$\eta_i(t) = -1, \quad \text{gdy w chwili } t \text{ przed punktem } i \text{ znajduje się czarna kulka,}$$

$$\epsilon_i = 1, \quad \text{gdy w punkcie } i \text{ nie ma znacznika,}$$

$$\epsilon_i = -1, \quad \text{gdy w punkcie } i \text{ znajduje się znacznik.}$$

Posługując się tymi definicjami, możemy napisać

$$(6) \quad \Delta(t) = \sum_i \eta_i(t)$$

oraz

$$(7) \quad \eta_{i+1}(t+1) = \epsilon_i \eta_i(t).$$

Możemy więc wyrazić Δ przez warunki początkowe

$$(8) \quad \eta_{i+1}(t+1) = \epsilon_i \epsilon_{i-1} \dots \epsilon_{i-t} \eta_{i-t}(0),$$

$$(9) \quad \Delta(t+1) = \sum_i \epsilon_i \epsilon_{i-1} \dots \epsilon_{i-t} \eta_{i-t}(0).$$

Odnajmijmy, że $\Delta(2N) = \Delta(0)$, ponieważ po czasie $t = 2N$ każdy z epsilonów pojawia się dwukrotnie. Uśrednijmy to wyrażenie względem zespołu.

$$(10) \quad \langle \Delta(t) \rangle = \sum_i \langle \epsilon_{i-1} \epsilon_{i-2} \dots \epsilon_{i-t} \rangle \eta_{i-t}(0).$$

Po prawej stronie równania (10) mamy średnią iloczynu t kolejnych epsilonów. Średnia iloczynu epsilonów nie zależy od i , więc możemy wyciągnąć ją przed sumę, a że są to kolejne epsilony, możemy ponumerować je od 1 do t .

$$(11) \quad \langle \Delta(t) \rangle = \langle \epsilon_1 \dots \epsilon_t \rangle \Delta(0).$$

Przedyskutujemy dwa przypadki, gdy t jest mniejsze i gdy jest większe niż N . Prawdopodobieństwo tego, że kulka mijają j znaczników w t krokach, jest równe iloczynowi

$$\mu^j (1 - \mu)^{t-j}$$

(jest to prawdopodobieństwo wystąpienia j znaczników w dowolnym układzie) przez

$$\frac{t!}{j!(t-j)!}$$

(jest to ilość możliwych rozmieszczeń j znaczników pośród t punktów). Dla j znaczników iloczyn epsilonów jest równy $(-1)^j$. Mamy zatem dla $t < N$

$$(12) \quad \langle \epsilon_1 \dots \epsilon_t \rangle = \sum_{j=1}^t (-1)^j \frac{t!}{j!(t-j)!} \mu^j (1 - \mu)^{t-j} = (1 - 2\mu)^t.$$

(W oryginalnej pracy Kaca ta średnia obliczona jest w zupełnie inny, niezwykle pomysłowy, choć trudniejszy sposób.) Powyższa procedura jest poprawna pod warunkiem, że $t \ll N$. Duże wartości j w sumie (12) mogą być większe od ilości znaczników i takie składniki sumy fałszują wynik. Wynik, który otrzymaliśmy, natychmiast prowadzi do wniosku

$$(13) \quad \langle \Delta(t) \rangle = (1 - 2\mu)^t \Delta(0),$$

przy czym jest on prawdziwy, gdy t jest mniejsze nie tylko od N , lecz i od liczby znaczników. Jest to wynik zgodny z równaniem opartym na założeniu (3), tyle tylko, że opisuje on nie dokładne zachowanie się pojedynczego układu (z całego zespołu możliwych układów), lecz najbardziej prawdopodobne zachowanie się jednego z układów w zespole. Dla $N < t \leq 2N$ zapiszemy $t = N + s$

$$(14) \quad \langle \epsilon_1 \dots \epsilon_{N+s} \rangle = \langle \epsilon_1 \dots \epsilon_N \epsilon_{N+1} \dots \epsilon_{N+s} \rangle = \langle \epsilon_{s+1} \dots \epsilon_N \rangle = \langle \epsilon_1 \dots \epsilon_{N-s} \rangle = \langle \epsilon_1 \dots \epsilon_{2N-t} \rangle,$$

gdzie najpierw pozbyliśmy się znaczników występujących dwukrotnie, a potem inaczej ponumerowaliśmy punkty. Dostajemy wynik taki sam jak poprzednio, tylko zamiast t mamy $2N - t$,

$$(15) \quad \langle \Delta(t) \rangle = (1 - 2\mu)^{2N-t} \Delta(0).$$

Wynik ten jest poprawny, gdy t jest bliskie wartości $2N$, z podobnych powodów jak w poprzednim przypadku. Gdy $t \rightarrow 2N$, średnia po zespole dąży do wartości początkowej. Nazwiemy to antyboltzmannowskim zachowaniem się układu.

Wykazaliśmy zatem, że typowy układ będzie dążył do stanu równowagi, w którym liczba czarnych kulek jest równa liczbie białych kulek i że jest to typowe zachowanie się tylko w pewnej skali czasu. Co więcej, można wykazać, że odchylenie standardowe maleje wraz z N zgodnie z prawem

$$(16) \quad \left(\left\langle \left[\frac{\Delta(t)}{\Delta(0)} - (1 - 2\mu)^t \right]^2 \right\rangle \right)^{\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{\sqrt{N}},$$

co oznacza, że w dużym zespole statystycznym większość układów zachowuje się (w odpowiedniej skali czasu) po boltzmannowsku. Nie wyklucza to faktu, że mogą istnieć w zespole także inne, bardzo szczególne

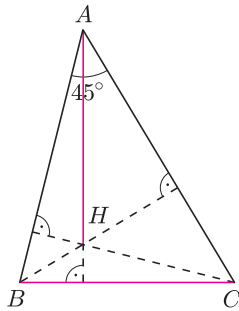
układy, które zachowują się w sposób zupełnie inny niż średnie opisane powyżej, na przykład gdy znaczni rozmieścimy na okręgu regularnie. Jeśli znacznik znajduje się w co drugim punkcie (wymaga to, by N było liczbą parzystą), to po dwóch skokach każda kulka dwukrotnie zmienia kolor, czyli układ wraca do stanu sprzed dwóch skoków, zachowując się periodycznie z okresem 2. Nie jest to ani boltzmannowskie, ani antyboltzmannowskie zachowanie się układu. Czytelnik bez trudu sam znajdzie inne przykłady. Jednak są to zawsze bardzo nieliczne w zespole układy. Zdecydowana większość układów zachowuje się w sposób bliski średniej.



Zadania

Redaguje Waldemar POMPE

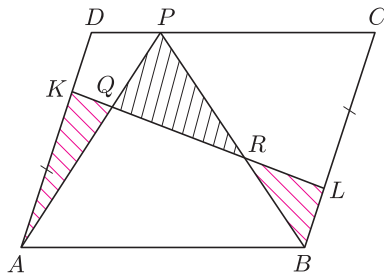
M 1054. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $\sphericalangle BAC = 45^\circ$.



Punkt H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC . Wykazać, że $AH = BC$.

Rozwiązanie na str. 5

M 1055. Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach AD i BC równoległoboku $ABCD$, przy czym $AK = CL$.



Punkt P leży na odcinku CD . Prosta KL przecina odcinki AP i BP odpowiednio w punktach Q i R .

Wykazać, że

$$[AKQ] + [BLR] = [PQR],$$

gdzie $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ .

Rozwiązanie na str. 5

M 1056. Liczbę rzeczywistą dodatnią nazwiemy *szczęśliwą*, jeśli jej rozwinięcie dziesiętne nie zawiera po przecinku cyfr różnych od 1 lub 7. (Np. liczba 13,71717777... jest szczęśliwa, a 77,07717171... nie jest.) Wykazać, że każdą liczbę rzeczywistą większą od 1 można przedstawić w postaci sumy dziewięciu liczb szczęśliwych.

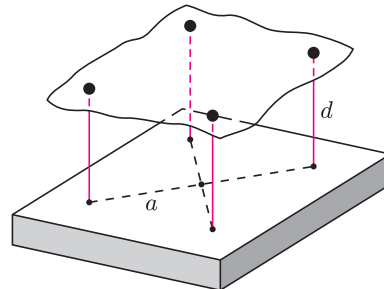
Rozwiązanie na str. 14

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

F 615. Natężenie światła w czystym powietrzu maleje według wzoru $I(r) = \frac{I_0}{r^2}$, gdzie r to odległość od źródła. Jak zmienia się ta zależność, gdy w powietrzu znajduje się pochłaniający światło pył o koncentracji n (liczbie drobin na jednostkę objętości) i polu powierzchni drobin A ?

Rozwiązanie na str. 6

F 616. Rozpatrzmy układ jak na rysunku.



Wiszącą płytę o masie $m = 3$ kg i momencie bezwładności $I = 0,1$ kg \cdot m², $a = d = 0,5$ m, wprowadzono w małe drgania poprzez skrócenie względem osi przechodzącej przez środek płyty. Obliczyć częstotliwość drgań.

Rozwiązanie na str. 16

Nadaktywne Słońce

Liczba plam słonecznych jest najdłuższą serią bezpośrednich pomiarów, jaką dysponuje ludzkość. Długość jej wynosi jednak zaledwie 400 lat. Pomiary te rozpoczął Galileusz w 1609 roku, niedługo po wynalezieniu teleskopu.

Dane te stanowią źródło bezpośredniej informacji na temat aktywności naszej gwiazdy. Uwidaczniają jedenastoletni cykl aktywności słonecznej, przy czym uśredniona aktywność rośnie ze skracaniem się tego cyklu i maleje z wydłużaniem.

Modelem tłumaczącym tę prawidłowość jest model dynamiki słonecznego, który wiąże liczbę plam z intensywnością magnetosfery Słońca. Magnetyczna aktywność naszej gwiazdy wpływa z kolei na wielkość strumienia galaktycznego promieniowania kosmicznego docierającego do Ziemi. Ten strumień z kolei jest odwrotnie skorelowany z tempem powstawania pierwiastków promieniotwórczych w atmosferze ziemskiej. Tym samym odtworzenie tempa produkcji takich izotopów pozwala na niezależne śledzenie zmian aktywności słonecznej.

Najbardziej znanym izotopem, którego tempo produkcji jest związane ze strumieniem promieniowania kosmicznego, jest ^{14}C . Jego koncentrację w atmosferze można odtworzyć, analizując słoje drzew [1]. Jest to jednak indykatorem wykazujący około dwudziestoletnie opóźnienie.

Innym izotopem wykorzystywanym do tego samego celu jest beryl ^{10}Be . Jego koncentrację w atmosferze w przeszłości można badać, analizując lodowe odwierty wykonywane w okolicach podbiegunowych. I właśnie niedawno ukazała się praca [2], w której ponad dwukrotnie wydłużono okres, w którym tego typu pomiary zostały wykorzystane do odtworzenia aktywności Słońca. Użyto danych z odwiertów w Arktyce i Antarktyce odpowiadających okresom odpowiednio 1424–1985 i 850–1900.

Odtworzony poziom aktywności naszej gwiazdy świetnie zgadza się ze zmianami koncentracji ^{14}C i z bezpośrednimi pomiarami liczby plam na Słońcu, po raz kolejny potwierdzając związek aktywności słonecznej ze średnią temperaturą ziemskiej atmosfery, o czym już niejednokrotnie pisaliśmy [3]. Świetnie odtwarza historyczne ekstrema temperatury: minimum Oorta około roku 1050, maksimum średniowieczne 1100–1230, minimum Wolfa 1280–1340, minimum Spörera 1430–1530, minimum Maundera 1650–1720 i minimum Daltona 1790–1830. Ostatnie dwa minima znane są również jako okresy o bardzo małej liczbie plam na Słońcu (dla wcześniejszych ekstremów nie ma danych). Najciekawsze jednak jest to, że okres od 1940 roku cechuje się nadzwyczajnie wysoką aktywnością Słońca. Podczas gdy we wcześniejszym analizowanym okresie średnia estymowana liczba plam na Słońcu nie przekracza 50 ze średnią 30, to w latach 1944–1985 wynosi średnio aż 76. Jest to kolejny przykład badania, które wskazuje na silny wpływ zmian aktywności Słońca na klimat na Ziemi, poddając w wątpliwość adekwatność tłumaczenia obserwowanego ocieplenia klimatu jedynie przez wzrost stężenia gazów cieplarnianych w atmosferze.

Mionowa dewiacja utrzymuje się

W styczniu zespół eksperymentu mionowego g-2 (g minus 2) ogłosił [4], że odchylenie pomiaru momentu magnetycznego mionu od przewidywań modelu standardowego oddziaływań fundamentalnych zostało potwierdzone dla ujemnie naładowanych mionów.

Wcześniej ten sam eksperyment wykazał takie odchylenie dla dodatnio naładowanych antymionów [5]. Wyniki dla mionów i antymionów świetnie zgadzają się, ale różnią się od przewidywań o około $3 \cdot 10^{-9}$. Tak, różnią się zaledwie o 3 miliardowe. W każdej innej dziedzinie uznano by to za niezwykle zgodność, tu jednak precyzja pomiarów jest bezprecedensowa i wynosi około jedną miliardową. Prawdopodobieństwo tego, że wynik i przewidywanie różnią się wyłącznie ze względu na fluktuację statystyczną, jest na poziomie 1%.

O eksperymencie g-2 już pisaliśmy [5], ale nie zaszkodzi przypomnieć (podstawowe informacje na temat fizyki cząstek elementarnych można znaleźć w [6]). Nazwa bierze się stąd, że gdyby nie fizyka opisywana przez kwantową teorię pola, w której każda cząstka otoczona jest rojem wirtualnych cząstek będących przejawem kwantowego „pulsowania” próżni, to stosunek żyromagnetyczny mionu, czyli stosunek momentu magnetycznego do momentu pędu (w naturalnych jednostkach) powinien wynosić dokładnie 2.

Eksperyment g-2 jest tak genialnie pomyślany [4,5], że mierzy tylko odchylenie tego stosunku od dwójki. Różnica na poziomie promila jest spowodowana głównie efektami elektrodynamiki kwantowej, czyli kwantowej i relatywistycznej teorii elektromagnetyzmu. Kolejnym wkładem powodującym różnicę jest fizyka opisywana przez chromodynamikę kwantową, czyli kwantową teorię oddziaływań silnych odpowiedzialnych za budowę nukleonów i jąder atomowych.

Najciekawszy jest jednak wkład od oddziaływań słabych, przenoszonych przez ciężkie bozony pośredniczące W^+ , W^- i Z^0 , gdyż tam może się przejawiać wpływ hipotetycznych masywnych cząstek wykraczających poza opis modelu standardowego. Wynik eksperymentu g-2 pozwala żywić nadzieję, że takie cząstki istnieją i będą mogły być odkryte w najbliższej przyszłości.

Piotr ZALEWSKI

[1] G. Wrochna, *Fizyczne metody datowania w badaniu prehistorii człowieka*, <http://eduseek.interklasa.pl/artykuly/artykul/ida/1899>

[2] I.G. Usoskin i inni, *Millenium-Scale Sunspot Number Reconstruction: Evidence for an Unusually Active Sun since the 1940s*, *Phys. Rev. Lett.* **91**.211101, 21 listopada 2003.

[3] P. Zalewski *Kosmiczny klimat*, *Delta* 2/2001

[4] The Muon (g-2) Collaboration, Brookhaven National Laboratory, *New g-2 Measurement Deviates Further From Standard Model*, <http://www.bnl.gov/bnlweb/pubaf/pr/2004/bnlpr010804.htm>, Szczegółowy artykuł został wysłany do publikacji w *Physical Review Letters* w styczniu 2004.

[5] P. Zalewski, *Ślepa precyzja*, *Delta* 4/2001

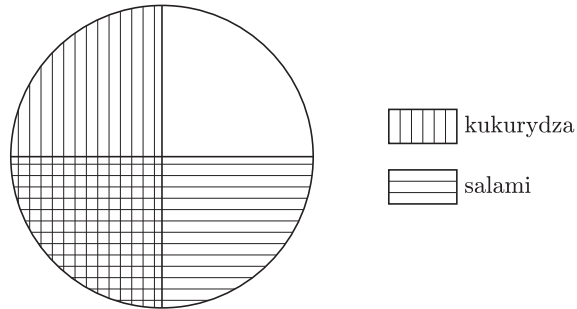
[6] *Delta* 5/2000, numer specjalny poświęcony fizyce cząstek elementarnych, <http://hep.fuw.edu.pl/delta/5-2000.html>, jeszcze bardziej podstawowe informacje można znaleźć za pośrednictwem strony <http://hep.fuw.edu.pl/edu>.



mała delta

Pizza Venna

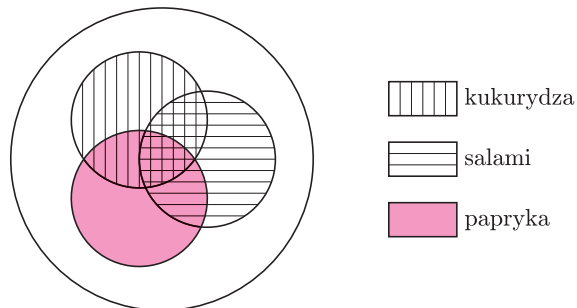
Moja rodzina lubi pizzę, a ja lubię ją piec. Jednak w naszej gromadce nikt nie lubi jeść takiej samej pizzy, jak pozostali członkowie rodziny. Jest nas tylko czworo, więc można sobie z tym poradzić bez trudu, używając tylko dwóch składników – typowa pizza wygląda więc tak.



Rys. 1

Oczywiście, pomidory i ser są wszędzie, a dodatki za każdym razem inne. Tym sposobem bez zbytecznego trudu dostaję na jednym placku cztery gatunki pizzy i mogę zadowolić indywidualne upodobania nas wszystkich.

Co by jednak było, gdyby było nas więcej, powiedzmy ośmioro? Też żadna fatyga, każdy widział taki rysunek.



Rys. 2

Układając go na blacie pizzy, można dostać 8 kombinacji smakowych, od Margherity (tylko ser i pomidory) na obrzeżu do wersji z wszystkimi trzema dodatkami w centrum.

A co dalej? Czy dałoby się w miarę regularnymi liniami ograniczyć złożone z jednego kawałka obszary do położenia czterech dodatków tak, żeby te linie dzieliły blat pizzy na 16 części i żeby każda z nich zawierała inną kombinację dodatków? Albo, w końcu jesteście matematykami i nie tylko jedzenie nas interesuje, n dodatków i 2^n kombinacji?

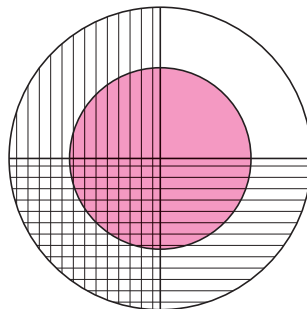
W tej ostatniej wersji pytanie jest już czysto matematyczne w swoim charakterze, a pierwszy je sformułował (i w tym samym artykule rozwiązał) John Venn w 1880 roku.

Ja wolę tu opisać trochę łatwiejsze do narysowania rozwiązanie Anthony'ego Edwardsa, które zostało opublikowane w późnych latach

W jego wersji mówi się o spójnych podzbiorach płaszczyzny z brzegiem wyznaczonym przez zamkniętą krzywą regularną, co w intuicyjnym sensie odpowiada naszym „złożonym z jednego kawałka obszarom ograniczonym w miarę regularnymi liniami”.

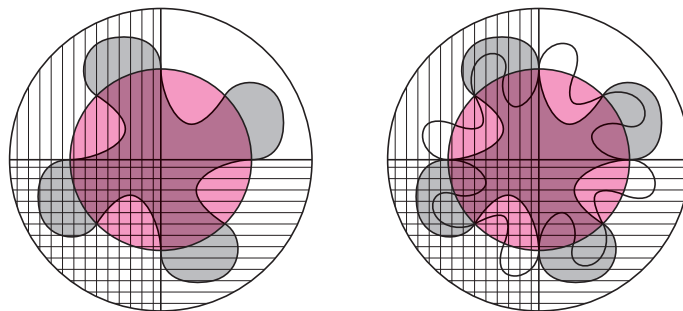
osiemdziesiątych ubiegłego wieku. Ma ono także tę zaletę, że chyba lepiej nadaje się do realizowania na powierzchni ciasta.

Zaczynamy tak jak na rysunku 1. W następnym kroku rysujemy okrąg współśrodkowy z brzegiem ciasta, który będzie granicą jednego z obszarów. (To daje nam alternatywne rozwiązanie problemu 8 smaków.)



Rys. 3

W tym momencie każdy ze smaków ma fragment swojej granicy przebiegający wzdłuż małego okręgu. To bardzo ważna własność naszego rysunku – będziemy ją zachowywać mimo zwiększającej się liczby obszarów i smaków. Następna granica wije się wokół wewnętrznego okręgu, odcinając kawałek od każdego smaku. Jeszcze następna jest podobna do poprzedniej, tylko jest dwa razy bardziej kręta (na ostatnim rysunku obszar przez nią ograniczony nie został już pokolorowany).



Rys. 4

Dalsze kroki konstrukcji każdy może sobie łatwo wyobrazić.

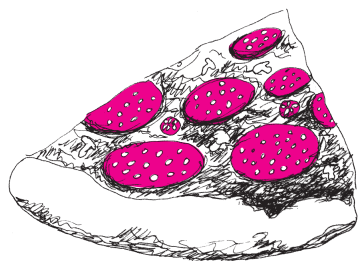
Pozostaje tylko pytanie, po co matematycy interesowali się problemem dotyczącym pizzy? Okazuje się jednak, że diagramy Venna (bo tak się one nazywają) mają całkiem matematyczne zastosowania. Oto jedno z nich, które tutaj podajemy „na wiarę”. Może Czytelnicy się zastanowią, dlaczego tak jest:

Twierdzenie. Dla każdych czterech zbiorów A, B, C, D zachodzi równość $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$.

Wskazówka: Narysować zbiory opisane wyrażeniami po lewej i po prawej stronie znaku równości na diagramie Venna. Jeśli okażą się równe, to równość będzie zachodziła dla dowolnych zbiorów A, B, C, D . W przeciwnym razie od razu stanowią kontrprzykład.

Ten artykuł został przygotowany na podstawie artykułu Franka Ruskey'a w *The Electronic Journal of Combinatorics*, <http://www.combinatorics.org/Surveys/ds5/VennEJC.html>. Gorąco polecam jego lekturę, a przede wszystkim podziwianie pięknych, animowanych ilustracji na tej stronie.

Małą Deltę przygotował Jerzy TYSZKIEWICZ



Wśród wielu zadań i zagadek matematycznych spotkałem poniższe zadanie.

Położyć pięć patyczków i dziesięć monet tak, by na każdym patyczku leżały cztery monety.

Zadanie to przedstawili mi koledzy górnicy, a jego prawdziwy autor i pochodzenie są mi nieznane. W naszym języku zadanie brzmi:

Pięć prostych i dziesięć punktów ułożyć na płaszczyźnie w ten sposób, by na każdej prostej leżały cztery punkty.

Oznaczmy przez a_i liczbę punktów (spośród 10), które leżą na i prostych. Oczywiście

$$\sum_{i=0}^5 a_i = 10.$$

Przeanalizujemy możliwe przypadki. Zauważmy, że jeżeli

na każdej prostej leżą 4 punkty, to liczba $s = \sum_{i=0}^5 i \cdot a_i$

musi równać się 20.

1. Wszystkie proste przecinają się w jednym punkcie.

Wówczas

$$s \leq 1 \cdot 9 + 5 \cdot 1 = 14.$$

2. W pewnym punkcie przecinają się cztery proste.

Wtedy

$$s \leq 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 17.$$

3. W jednym punkcie przecinają się trzy proste

i wówczas

$$s \leq 1 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 = 19.$$

4. W dwóch punktach przecinają się po trzy proste,

a wtedy

$$s \leq 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 19.$$

5. W żadnym punkcie nie przecinają się więcej niż dwie proste. W tym przypadku możliwe jest, by s było równe 20 – wystarczy jedynie, by nie było par prostych równoległych i wtedy punkty należy położyć tam, gdzie przecinają się proste.

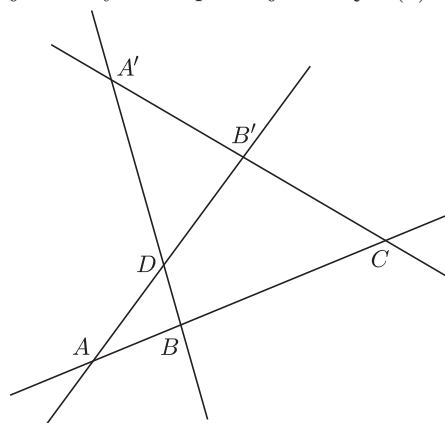
Jak widzimy, problem sprowadza się do ułożenia prostych tak, aby każda z każdą się przecinała i nie było punktów, w których przecinają się więcej niż dwie proste. W tym momencie jawi nam się nowy problem:

na ile sposobów można położyć pięć prostych na płaszczyźnie tak, by każda z każdą się przecinała i by nie było punktów przecięcia więcej niż dwóch prostych?

Doprecyzujmy, co znaczą różne ułożenia prostych.

Ułożenia prostych będziemy uważać za takie same (lepiej by rzec – izomorficzne), jeżeli proste rozetną płaszczyznę na tę samą liczbę trójkątów, czworokątów i pięciokątów, przy czym ich wzajemne ułożenie będzie takie same. Za chwilę uzasadnimy, że liczba $r(5)$ sposobów ułożenia pięciu prostych wynosi siedem.

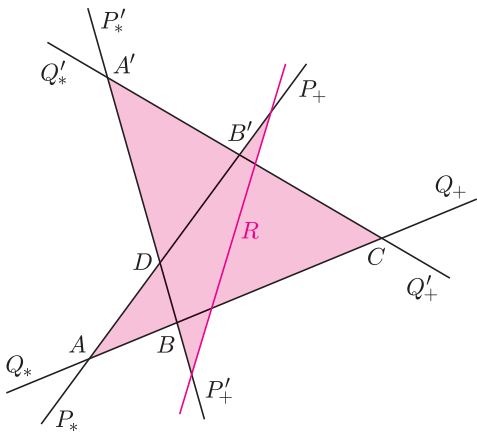
Zacznijmy od trzech i czterech prostych. Trzy proste (ułożone zgodnie z omówionymi zasadami) zawsze wyznaczają jeden trójkąt, a zatem $r(3) = 1$. Cztery proste zawsze wyznaczają jeden czworokąt i dwa trójkąty położone jak na rysunku poniżej. A więc $r(4) = 1$.



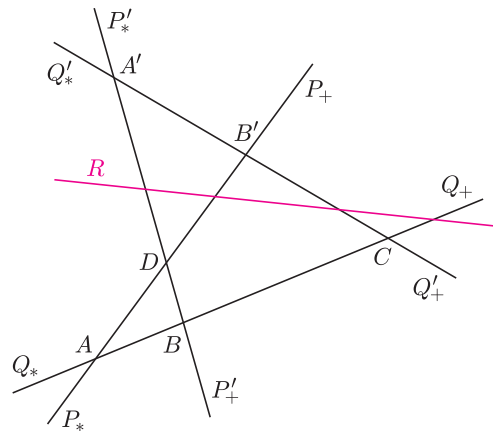
Zastanówmy się, jak powyższą figurę może przecinać piąta prosta. Wszystkie osiem możliwości przedstawiamy na rysunkach i w tabelce poniżej. Jedną z możliwości jest tytułowa pięcioramienna gwiazda.

Lp.	Prosta R przecina:	T	C	P	S	W
1	$BC, B'C, P_+, P'_+$	5	0	1	+	5
2	$B'C, B'D, A'D, Q_+$	4	1	1	+	6
3	$B'C, BD, AB, P_+$	3	3	0	-	3, 2
4	$B'C, BD, AD, Q_+$	3	3	0	-	1, 2
5	$B'D, BD, AB, A'B'$	3	3	0	+	7
6	AB, AD, Q'_+, P'_+	3	3	0	-	1, 3
6a	AB, AD, Q'_*, P'_*	3	3	0	-	1, 3
7	$A'B', A'D, AD, AB$	3	3	0	+	4

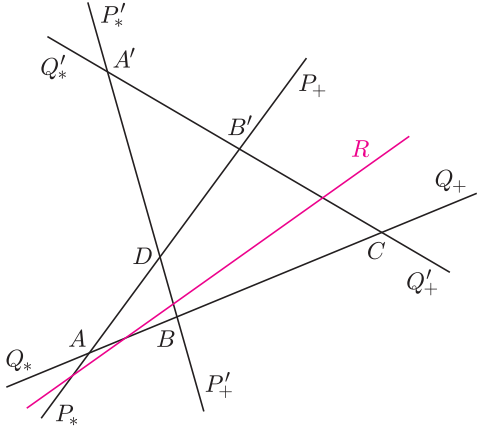
Przez T, C, P oznaczamy odpowiednio liczbę trójkątów, czworokątów i pięciokątów. W kolumnie S zaznaczyliśmy, czy figura będąca sumą trójkątów jest spójna, a w kolumnie W liczbę boków wspólnych z czworokątami i pięciokątami poszczególnych składowych spójnych. Jak widzimy, rozwiązania 6 oraz 6a są izomorficzne. Ostatecznie więc $r(5) = 7$. Co możemy powiedzieć w sytuacji, gdy dane jest n prostych? Jak szybko rośnie funkcja $r(n)$? Może ktoś z Czytelników coś wie na ten temat?



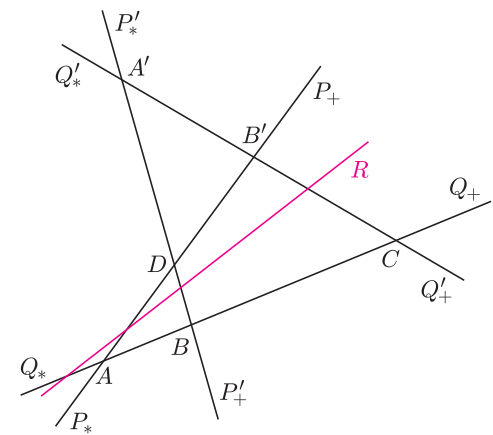
Rys. 1



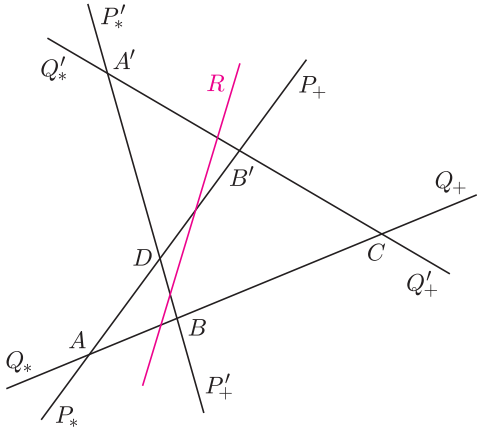
Rys. 2



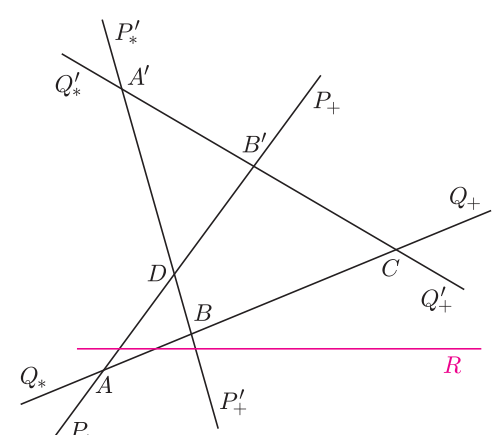
Rys. 3



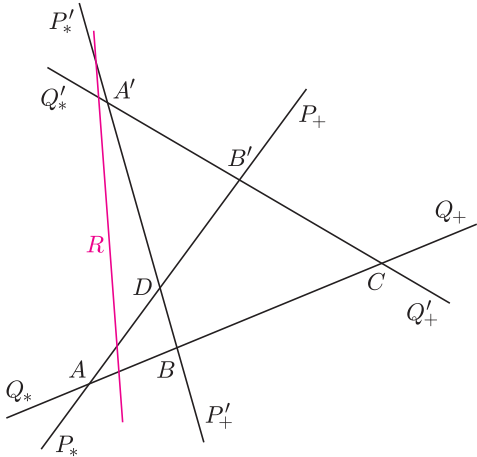
Rys. 4



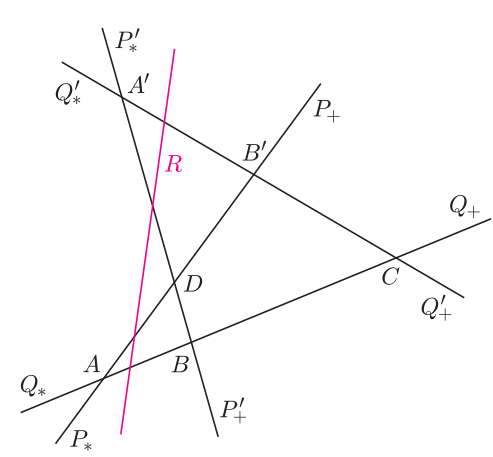
Rys. 5



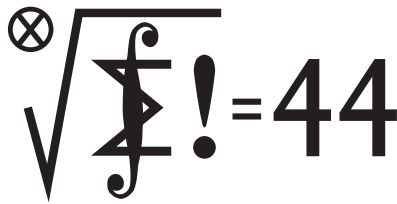
Rys. 6



Rys. 6a



Rys. 7



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 V 2004



Rozwiązanie zadania M 1056.

Niech a będzie dowolną liczbą rzeczywistą większą od 1. Wówczas liczba

$$b = \frac{1}{6}(a - 9 \cdot 0, 1111 \dots) = \frac{1}{6}(a - 1)$$

jest liczbą dodatnią. Liczbę tę możemy przedstawić w postaci sumy dziewięciu liczb dodatnich b_1, b_2, \dots, b_9 , z których każda ma w rozwinięciu dziesiętnym jedynie cyfry 0 lub 1. Można to zrobić tak, jak to pokazano na poniższym przykładzie:

$$\begin{array}{r} 1,1111111 \\ 1,0101111 \\ 1,0101101 \\ 0,0101101 \\ 0,0001101 \\ 0,0000101 \\ 0,0000100 \\ 0,0000100 \\ 0,0000100 \\ + 0,0000100 \\ \hline 3,1415926 \end{array}$$

Stąd uzyskujemy

$$a = 6b + 1 = (6b_1 + 0, 1111 \dots) + (6b_2 + 0, 1111 \dots) + \dots + (6b_9 + 0, 1111 \dots).$$

Pozostaje zauważyć, że każda z liczb $(6b_k + 0, 1111 \dots)$ dla $k = 1, 2, \dots, 9$ jest liczbą szczęśliwą.

469. Oznaczmy szukaną wartość przez $F(n)$. Ustalmy $n \geq 2$. Rodzina wszystkich zbiorów dopuszczalnych, które są zawarte w zbiorze $\{1, \dots, n\}$, składa się z tych zbiorów dopuszczalnych A , które są zawarte w zbiorze $\{1, \dots, n-1\}$, oraz zbiorów postaci $A = A_0 \cup \{n\}$, gdzie A_0 jest dopuszczalnym podzbiorem zbioru $\{1, \dots, n-2\}$. Suma kwadratów liczb $\pi(A)$ dla zbiorów A pierwszego typu wynosi $F(n-1)$. Suma kwadratów liczb $\pi(A)$ dla zbiorów A drugiego typu wynosi $n^2 F(n-2)$. Otrzymujemy zależność rekurencyjną

$$F(n) = F(n-1) + n^2 F(n-2)$$

z oczywistymi warunkami początkowymi $F(0) = 1$, $F(1) = 2$. Korzystając z uzyskanego wzoru rekurencyjnego, dostajemy przez łatwą indukcję odpowiedź: $F(n) = (n+1)!$.

470. Przyjmijmy, że kolejne boki wielokąta mają długości a_1, \dots, a_n . Rzutujemy je na dwa prostopadłe boki kwadratu AB i BC . Niech x_1, \dots, x_n będą długościami rzutów na odcinek AB , a y_1, \dots, y_n

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z matematyki nr 477, 478

Redaguje Marcin E. KUCZMA

477. Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych x_1, \dots, x_n zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{1 + x_1^2 + \dots + x_k^2} < \sqrt{n}.$$

478. W trójkącie ABC wysokość CD dzieli kąt przy wierzchołku C tak, że $|\sphericalangle BCD| = 2 \cdot |\sphericalangle ACD|$. Odcinek CE jest dwusieczną kąta BCD ; punkty D, E leżą na odcinku AB . Wykazać, że $|AD| \cdot |BC| = |CD| \cdot |BE|$.

Zadanie 478 zostało opracowane na podstawie propozycji, którą zgłosił pan Krzysztof Kamiński z Pabianic.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/2003

Przypominamy treść zadań:

469. Skończony zbiór liczb naturalnych A będziemy nazywać *dopuszczalnym*, jeśli nie zawiera żadnej pary liczb kolejnych. Dla każdego takiego zbioru oznaczmy przez $\pi(A)$ iloczyn wszystkich liczb w tym zbiorze (dla zbioru pustego przyjmujemy $\pi(\emptyset) = 1$). Dana jest liczba naturalna n . Obliczyć sumę kwadratów liczb $\pi(A)$, odpowiadających wszystkim zbiorom dopuszczalnym zawartym w zbiorze $\{1, \dots, n\}$.

470. W kwadracie o boku długości 1 leży n -kąt wypukły ($n \geq 3$). Dowieść, że pewne trzy kolejne wierzchołki tego wielokąta są wierzchołkami trójkąta o polu nie większym niż $8/n^2$.

długościami rzutów na odcinek BC . Wielokąt jest wypukły, więc rozważane rzuty pokrywają każdy z odcinków AB i BC co najwyżej dwukrotnie. Stąd

$$\sum x_i \leq 2, \quad \sum y_i \leq 2.$$

Przy tym

$$a_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \leq x_i + y_i,$$

więc $\sum a_i \leq 4$, i wobec tego

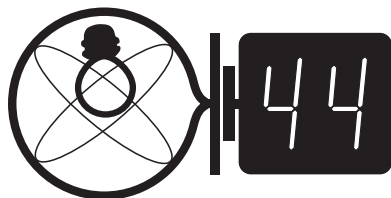
$$\sum_{i=1}^n (a_i + a_{i+1}) \leq 8$$

(numeracja cykliczna, $a_{n+1} = a_1$). Istnieje zatem co najmniej jeden numer k , dla którego

$$a_k + a_{k+1} \leq \frac{8}{n}.$$

Liczby a_k i a_{k+1} są długościami dwóch kolejnych boków wielokąta. Pole S trójkąta wyznaczonego przez te dwa boki spełnia nierówność, którą chcieliśmy uzyskać:

$$S \leq \frac{a_k a_{k+1}}{2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2} \right)^2 \leq \frac{8}{n^2}.$$



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 V 2004

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
362 (WT = 3,20) i 363 (WT = 1,65)
z numeru 9/2003

Jacek Piotrowski	- Rzeszów	14,10
Leszek Grzanka	- Chechło	14,03
Tomasz Wietecha	- Tarnów	12,27
Andrzej Idzik	- Bolesławiec	12,12

Pół roku temu tak się złożyło, że praktycznie cała czołówka ligowa zakończyła swoje kolejne 44-punktowe rundy. Dlatego w kilku numerach nie podawaliśmy wyników (nie było czołówki godnej tej nazwy), a i teraz punktacja jest wyjątkowo niska.

366. Niech pole przekroju liny S będzie funkcją wysokości h (równiej 0 na dolnym końcu i l na górnym). Lina będzie miała najmniejszą masę, jeśli dla każdej wartości h pole S będzie minimalne (na granicy zerwania). Oznacza to, że ciężar odcinka liny o długości dh

$$dP = \rho g S dh$$

równa się przyrostowi wytrzymałości liny wynikającemu ze wzrostu pola przekroju o dS :

$$dP = W dS.$$

Rozwiązaniem równania różniczkowego jest funkcja

$$S(h) = S_0 \exp(\rho g h / W).$$

Wartość pola przekroju na dolnym końcu wynika z zawieszoności ciężaru, tzn.

$$S_0 = P / W,$$

natomiast szukaną masę liny m wyznaczymy z pola przekroju na górnym końcu:

$$m = \frac{W(S(l) - S_0)}{g} = \frac{P}{g} \left(\exp\left(\frac{\rho g l}{W}\right) - 1 \right) = 117 \text{ kg}.$$

367. Pomijając na razie diodę, okres drgań obwodu LC wynosi

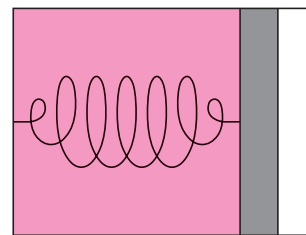
$$T = 2\pi\sqrt{LC} = 0,2513 \text{ s},$$

amplituda napięcia wynosi $U_0 = 3 \text{ V}$, a zatem amplituda natężenia prądu wynosi $U_0\sqrt{C/L} = 0,15 \text{ A}$.

Rozważmy teraz przebieg zmian zachodzących w obwodzie z diodą. Natychmiast po zamknięciu klucza napięcie na diodzie miało kierunek zaporowy o wartości

374. Koła roweru jadącego z prędkością 5 m/s mają średnicę 1 m . Na jaką maksymalną wysokość (nad ziemią) może się wznieść grudka błota oderwana od opony tego roweru?

375. Gaz doskonały jest zamknięty w cylindrze (rys. 1) tłokiem połączonym z dnem cylindra sprężyną o stałej sprężystości k i zerowej długości swobodnej (tzn. siła wywierana przez sprężynę jest równa zero, gdy tłok styka się z dnem cylindra). Na zewnątrz cylindra jest próżnia. Ile ciepła trzeba dostarczyć, aby ogrzać 1 mol tego gazu o 1 stopień, jeśli dla przemiany w stałej objętości analogiczne ciepło jest równe C_V ?



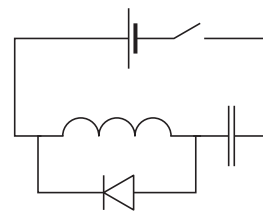
Rys. 1

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/2003

Przypominamy treść zadań:

366. Ile stali trzeba, aby wykonać linę o długości $l = 15 \text{ km}$, która zawieszona pionowo utrzyma doczepiony do jej dolnego końca ciężar równy $P = 1000 \text{ N}$? Gęstość stali wynosi $\rho = 7,8 \text{ g/cm}^3$, a jej wytrzymałość $W = 1,5 \cdot 10^5 \text{ N/cm}^2$. Rozciągliwość (sprężystość) stali, a także zmiany natężenia pola grawitacyjnego można zaniedbać. Grubość liny nie musi być stała.

367. Zestawiono obwód (rys. 2) składający się ze źródła napięcia 3 V , zwojnicy o indukcyjności $0,8 \text{ H}$, kondensatora o pojemności $2000 \mu\text{F}$ i doskonałej diody świecącej o napięciu progowym 1 V (o oporze zerowym, jeśli napięcie w kierunku przewodzenia przekroczy wartość progową, i oporze nieskończonym w innym przypadku). W chwili początkowej kondensator był nienaładowany. Po jakim czasie od zamknięcia klucza dioda zaświeciła i jak długo trwał ten sygnał?



Rys. 2

3 V , a napięcie na kondensatorze i natężenie prądu były równe zero. Po upływie ćwierci okresu ($0,0628 \text{ s}$) napięcie na kondensatorze zrównało się z napięciem źródła, napięcie na zwojnicy i diodzie spadło do zera, a prąd płynący przez zwojnicę osiągnął wartość maksymalną. Dalej natężenie prądu zaczęło maleć, napięcie na kondensatorze nadal wzrastało, a napięcie na zwojnicy zmieniło znak (przybrało kierunek przewodzenia diody). Gdy faza drgań osiągnęła wartość

$$\varphi = \arcsin(1/3) = 0,340$$

(co odpowiada $0,0541$ okresu, czyli $0,0136 \text{ s}$), dioda zaczęła świecić. Natężenie prądu płynącego przez zwojnicę miało wtedy wartość

$$(0,15 \text{ A}) \cdot \cos \varphi = 0,1414 \text{ A}.$$

Dopóki dioda przewodziła, wszystkie napięcia utrzymywały stałe wartości, a natężenie prądu płynącego przez zwojnicę i diodę malało w stałym tempie równym

$$dI/dt = 1 \text{ V/L} = 1,25 \text{ A/s}$$

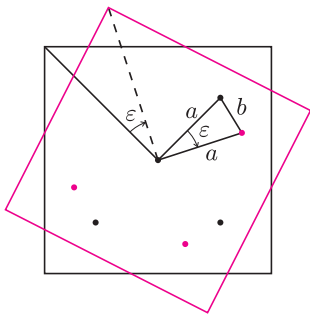
(przez źródło i kondensator prąd wtedy nie płynął). Po czasie wynoszącym

$$0,1414/1,25 = 0,1131 \text{ s}$$

natężenie prądu spadło do zera, a dalszy wzrost natężenia prądu w kierunku przeciwnym odbywał się „kosztem” rozładowania kondensatora (dioda była od tej chwili zablokowana). Drgania w obwodzie nie wygasły, ale ich amplituda była tak mała, że dioda już nie zaświeciła. Z dokładnością do $0,001 \text{ s}$, dioda zaświeciła po upływie $0,076 \text{ s}$ i świeciła przez $0,113 \text{ s}$.



Rozwiązanie zadania F 616.
Przypuśćmy, że płytę skreślono o kąt ε .



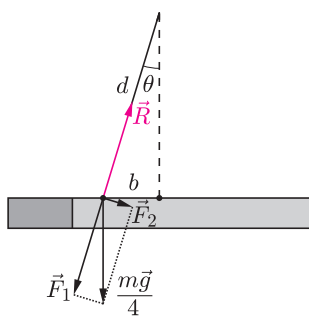
Rys. 1

Wówczas z rysunku 1

$$b = 2a \sin \frac{\varepsilon}{2} \approx \varepsilon a,$$

z rysunku 2 zaś

$$F_1 = \frac{mgb}{4\sqrt{d^2 - b^2}} \approx \frac{\varepsilon amg}{4d}.$$



Rys. 2

Moment przywracający położenie równowagi równy jest

$$\tau = 4 \frac{adF_1}{\sqrt{d^2 - b^2}} d \approx \frac{\varepsilon a^2 mg}{d}.$$

Równanie ruchu to

$$I\alpha = -\frac{a^2 mg}{d}\varepsilon,$$

czyli

$$\omega = \sqrt{\frac{a^2 mg}{dI}} \approx 12 \text{ s}^{-1}.$$

Od Redakcji.

W numerze 12/2003 na str. 12 zamieniłem omyłkowo licznik z mianownikiem w określeniu stałej Feigenbauma. Za pomyłkę przepraszam.

W. S.

Patrz w niebo

Natura błysków gamma ciągle nie jest do końca wyjaśniona. Z tego jednak, co wiadomo o nich obecnie, wydaje się, że błyski te emitowane są przez biegnące niemal z prędkością światła ku Ziemi strugi materii wyrzucane – być może – przez bardzo odległe zapadające się masywne gwiazdy. Błyski gamma obserwuje się obecnie z częstością jednego lub kilku dziennie. Po błysku czasami przez kilka dni widać gasnącą poświatę, a gdyby zjawisko to można było obejrzeć w ogromnym powiększeniu, widziałoby się powiększający się (pozornie z prędkością przekraczającą prędkość światła) gasnący cienki pierścień świetlny.

1 marca 2000 r. zaobserwowano w Koronie Północnej kolejny taki błysk gamma, który został zarejestrowany jako GRB 000301C (cyfry kodują datę błysku, a C oznacza, że był to trzeci błysk tego dnia). Udało się nawet zmierzyć jego przesunięcie ku czerwieni ($z = 2,04$), przez co jego odległość oceniono na 3 Gpc. Jego poświata jednak nie gasła: w cztery dni po błysku poświata osiągnęła maksimum jasności i dopiero potem już konsekwentnie bladła do ostatecznego zaniku. Ten przebieg jej jasności zinterpretowała grupa amerykańskich astronomów, w której znajdował się Polak, Krzysztof Stanek. Zauważyli oni mianowicie, że przebieg jasności poświaty przypomina krzywą jasności gwiazdy podczas mikrosoczewkowania, tylko że w przypadku GRB 000301C mikrosoczewkowaniu podlegałby fragment poświaty, czyli wspomnianego świetlnego pierścienia, przesuwany się w miarę swej ekspansji za jakimś obiektem soczewkującym. Za wywołanie tego efektu odpowiedzialna byłaby, zdaniem badaczy, zwykła pojedyncza gwiazda o masie rzędu 0,5 masy Słońca, należąca do halo pewnej zwykłej galaktyki o jasności 24 mag, położonej w przybliżeniu w połowie odległości samego źródła błysku. Byłby to pierwszy przypadek zarejestrowania zjawiska, którego przyczyną jest położona w odległości co najmniej 1 Gpc skromna gwiazda o jasności obserwowanej szacowanej na 51 mag.

Tomasz KWAST

Marzec

W marcowe wieczory dość wysoko na niebie widać gwiazdozbiór Raka. Nie jest łatwo go rozpoznać, nie ma bowiem w nim szczególnie jasnych gwiazd i łatwiej go znaleźć jako obszar między Bliźniętami a Lwem. Ale nawet gołym okiem, oczywiście przy dobrej pogodzie, można zauważyć tam mgiełkę, która w lornetce okaże się gromadą otwartą gwiazd. Jest to gromada Praesepe, czyli Żłóbek, albo też M 44. Niecałe 10° na południe i trochę na wschód leży druga, słabsza gromada otwarta M 67. Nie byłoby w tym nic nadzwyczajnego, gdyby nie wiek drugiej z nich oceniony na pięć miliardów lat (pierwszej na pół do półtora miliarda lat). Dla niezbyt masywnych gwiazd nawet 5 mld lat nie musi być wiekiem sędziwym, ale gromada otwarta, jako luźne zbiorowisko gwiazd, ma prawo zostać szybko rozproszona przez siły pływowe Galaktyki. Pamiętajmy bowiem, że obieg Słońca wokół centrum Galaktyki trwa w przybliżeniu ćwierć miliarda lat, gromada M 67 zachowuje więc swoją tożsamość przez 20 – jak to się mówi – lat galaktycznych. Może sprzyjają jej w tym niewielkie rozmiary – skupia ona około 100 gwiazd w obszarze o rozmiarach zaledwie 4 pc.

Merkury jest w Rybach, wraz ze Słońcem, a Wenus w Baranie. 29 III obie te planety znajdują się najdalej kątowno od Słońca, każda według swoich możliwości: Merkury o 19° , a Wenus o 46° – w obu przypadkach na wschód od Słońca. Można więc próbować zobaczyć obie planety dolne jednocześnie. Mars jest na granicy Barana i Byka, a więc wieczorem zachodzi. Jowisz jest w Lwie i widać go przez całą noc (4 III ma opozycję), a Saturn w Bliźniętach, przez co widać go w pierwszej połowie nocy. 20 III zaczyna się wiosna. Pełnia Księżycy wypada 6 III, a nów 20 III. 26 III Księżyc zakryje Marsa, ale zjawisko to będzie widać w północnych częściach Japonii, Rosji, Skandynawii, Wielkiej Brytanii, Kanady i w Arktyce.

T. K.

PARADOKSY ŚREDNICH (1)

Zostajesz dyrektorem średniej wielkości przedsiębiorstwa. Pierwszym problemem, z którym przychodzi Ci się zmierzyć, jest znalezienie choćby drobnych oszczędności w funduszu płac.

Dowiadujesz się, że Twoja firma wydaje na płace 844800 zł miesięcznie. Przyglądasz się temu bliżej. Firma zatrudnia 320 pracowników niewykwalifikowanych z płacą 1200 zł miesięcznie. Resztę otrzymują pracownicy wykwalifikowani, którzy mają statutowo zagwarantowaną pensję w wysokości dwukrotnej średniej płacy w całym przedsiębiorstwie.

Nie chcąc pozbywać się wykwalifikowanej kadry, decydujesz się na zwolnienie 20 niewykwalifikowanych pracowników.

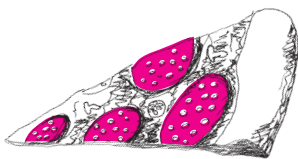
Liczysz na oszczędność 24 tysięcy zł w następnym miesiącu.

Z pewnym zdziwieniem przyjmujesz informację, że w kolejnym miesiącu firma wydała na płace 840 tysięcy zł. Zamiast planowanych 24 tysięcy, oszczędności są pięciokrotnie mniejsze. Widząc jednak, że zmierzasz w dobrym kierunku, przełamujesz opór związków zawodowych i zwalniasz kolejnych 20 pracowników niewykwalifikowanych.

W następnym miesiącu fundusz płac ani drgnął! Znowu 840 tysięcy zł. Nie rozumiesz, dlaczego nie ma oszczędności kolejnych 24 tysięcy, ale czujesz, że trzeba działać zdecydowanie. Tym razem zwalniasz 40 pracowników niewykwalifikowanych. Liczysz na 48 tysięcy zł oszczędności.

W kolejnym miesiącu Twoje przedsiębiorstwo wydaje na płace 864 tysiące zł, czyli więcej niż wtedy, gdy obejmowałeś stanowisko!!! Groźba bankructwa staje się coraz poważniejsza. Decydujesz się na desperacki krok. Zwalniasz kolejnych 60 pracowników niewykwalifikowanych, a pozostałym obniżasz pensję z 1200 do 1000 zł.

W kolejnym miesiącu przedsiębiorstwo wydaje na płace 900 tysięcy zł. Twoja firma upada z hukiem!



PARADOKSY ŚREDNICH (2)

Wyciągasz jednak wnioski z poprzedniej przygody. Udaje Ci się ulokować w firmie, która prosperuje znakomicie.

Pracownicy zatrudnieni na stanowiskach kierowniczych (100 mężczyzn i 100 kobiet) zarabiają po 2000 zł miesięcznie. Natomiast pracownicy zatrudnieni na stanowiskach niekierowniczych po 1000 zł miesięcznie. Liczysz na to, że wszechobecny Urząd do Spraw Obrony Kobiet przed Dyskryminacją da Ci spokój – w końcu płace u Ciebie nie zależą od płci, na stanowiskach kierowniczych zatrudniasz tyle samo kobiet, co mężczyzn, a w całym przedsiębiorstwie kobiety stanowią ponad połowę załogi.

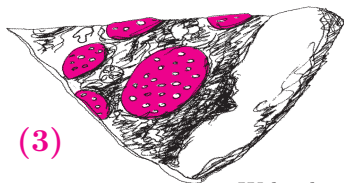
Jednak te wskaźniki nie są w ogóle brane pod uwagę. UdSOKpD odkrywa, że u Ciebie kobiety są dyskryminowane, gdyż ich średnia płaca wynosi 1400 zł, podczas gdy

średnia płaca mężczyzn to 1500 zł. Grożą Ci poważne kłopoty.

Jednak zdobyte doświadczenie procentuje. Wydajesz następujące polecenia:

1. Zwolnić 100 spośród kobiet zatrudnionych na stanowiskach niekierowniczych.
2. Na ich miejsce zatrudnić 100 mężczyzn.
3. Obniżyć płace wszystkich kobiet o 10%.
4. Podwyższyć płace wszystkich mężczyzn o 5%.

Mimo tak szokujących decyzji UdSOKpD jest zadowolony, bo teraz średnia płaca kobiet jest równa 1500 zł miesięcznie, a mężczyźni zarabiają średnio po 1400 zł. A Twoja firma wydaje na płace pracowników o 5000 zł miesięcznie mniej.



PARADOKSY ŚREDNICH (3)

Twoja kolejna firma musi walczyć na rynku pracy o najlepszych fachowców. Konkurencja stara się przyciągnąć do siebie najwyżej wykwalifikowanych specjalistów.

W Twojej firmie są trzy działy, z których każdy zatrudnia po 5 osób.

W Dziale Projektów Małoważnych średnia płaca wynosi 4000 zł miesięcznie.

W Dziale Wynalazków Nieprzydatnych średnia płaca wynosi 2000 zł miesięcznie.

Natomiast w Dziale Odkryć Dawnoznanych średnia płaca wynosi 1000 zł miesięcznie.

W konkurencyjnej firmie są takie same trzy działy, ale w każdym z nich średnia płaca jest o 100 zł wyższa niż w odpowiadającym mu dziale u Ciebie. Nic dziwnego, że boisz się stracić swoich pracowników na rzecz konkurencji. Nie masz, niestety, pieniędzy na podwyżki płac.

Ale i na to jest sposób. Przenosisz pana Grzesia (płaca 3200 zł) z DPM do DWN, a panią Zosię (płaca 2200 zł) z DWN do DOD.

Bez żadnych nakładów finansowych średnia płaca w każdym dziale wzrosła o 200 zł. I niech się teraz konkurencja martwi, że u Ciebie średnie płace są wyższe o 100 zł.

Korespondencję do Γ -limatiasu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl

Nagrodzone prace

XXV Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

Jak już pisaliśmy, XXV Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki był wyjątkowo udany. Otrzymaliśmy wiele wartościowych i ciekawych prac. Finał okazał się bardzo zacięty. Jury długo debatowało nad kolejnością laureatów, w wyniku czego przyznano aż dwa złote medale. Z tego powodu chcemy w tym roku przedstawić nie jedną (jak bywało zazwyczaj) pracę, lecz siedem. Mamy nadzieję, że pozwoli to na lepsze zorientowanie się, jakie prace są przez Jury najwyżej cenione i może podsunie tegorocznym uczestnikom KUPzM jakieś nowe pomysły.

Przypominamy, że w tym roku zwycięzca i jego opiekun otrzymają dzięki firmie **GAMBIT** dodatkową nagrodę: profesjonalne wersje programu *Mathematica*.

Waga szalkowa i uogólniony problem fałszywej monety

Hugo Steinhaus w „Kalejdoskopie matematycznym” przedstawił następujące zadania:

Mamy dziewięć monet pozornie jednakowych. Wiemy, że jedna z nich (nie wiemy która) jest fałszywa i waży mniej od pozostałych. Trzeba ją wykryć w dwóch ważeniach na wadze szalkowej bez użycia odważników (wolno kłaść po kilka monet na każdej szalce).

oraz

Mamy trzynaście monet, z których dokładnie jedna jest fałszywa, ale nie wiemy, czy jest cięższa, czy lżejsza od monet dobrych. Mamy ją wykryć w trzech ważeniach na wadze szalkowej.

W mojej pracy przedstawiam rozważania dotyczące możliwie szerokiej klasy podobnych problemów. Łącznie rozważam 48 wariantów zadań Steinhausa. Ze względu na dużą ich liczbę oraz znaczne podobieństwo podam treści wszystkich tych wariantów łącznie. Konkretny wariant jest wyznaczony przez wybór pięciu liter.

Dane są dwie liczby naturalne n i k .

Wiemy, że wśród n monet

A) na pewno B) być może

jedna moneta jest fałszywa i ma inną masę niż pozostałe monety.

C) Wiemy, D) Nie wiemy,

czy jest ona cięższa, czy lżejsza od pozostałych monet.

Oprócz tego mamy do dyspozycji

E) 0 F) 1 G) nieskończenie wiele

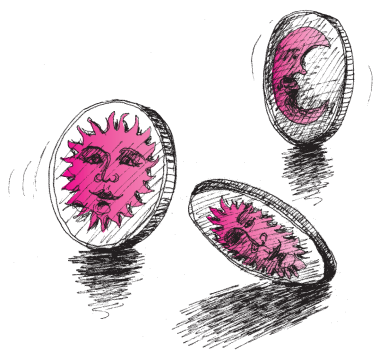
dotychczasowych monet dobrych.

Naszym zadaniem jest ustalić, czy da się za pomocą k wazeli na wadze szalkowej, bez użycia odważników (używamy tylko monet)

H) stwierdzić, czy któraś z monet jest fałszywa, a jeśli tak, to wskazać ją.

I) stwierdzić, czy któraś z monet jest fałszywa, a jeśli tak, to wskazać ją i określić, czy jest cięższa, czy lżejsza od dobrych monet.

i



Ponadto od tych k ważeń

J) wymaga się, **K)** nie wymaga się,

aby to, jakie monety biorą udział w kolejnych ważeniach, było wiadome jeszcze przed wykonaniem pierwszego ważenia (czyli nie możemy uzależnić wyboru monet do ważenia od wyników wcześniejszych ważeń).

Treść pojedynczego wariantu jest wyznaczona przez wybranie jednej z liter **A** lub **B**, jednej z liter **C** lub **D**, jednej z **E**, **F** lub **G** oraz **H** lub **I** i jednej z liter **J** lub **K**. Oryginalne zadania Steinhausa można określić zatem jako warianty **ACEHK** z $n = 9$ i $k = 2$ oraz **ADEHK** z $n = 13$ i $k = 3$ naszego uogólnionego zadania. Dla ustalonych n , k oraz wariantu zadania odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie może być twierdząca lub przecząca.

W przypadku odpowiedzi przeczącej trzeba uzasadnić, że faktycznie k ważeń nie wystarcza do wskazania fałszywej monety, natomiast w przypadku odpowiedzi twierdzącej trzeba podać algorytm wykonywania ważeń.

Podam teraz w tabelach wyniki, które uzasadniam w pracy. W wariantach, w których wiemy, czy fałszywa moneta jest cięższa, czy lżejsza od pozostałych monet (**C**), odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie jest pozytywna, gdy

	E		F/G
	J	K	
A Zadanie ma sens dla $n \geq 1$	$n \leq 3^k$	$n \leq 3^k$	$n \leq 3^k$
B	$n \leq 3^k - 1$ $n \neq 1$ $n \neq 3^k - 2$	$n \leq 3^k - 1$ $n \neq 1$	$n \leq 3^k - 1$

W wariantach, w których nie wiemy, czy fałszywa moneta jest cięższa, czy lżejsza od pozostałych monet (**D**), odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie jest pozytywna, gdy

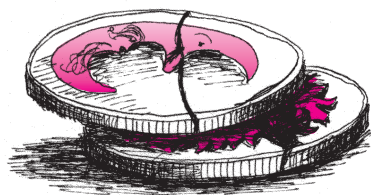
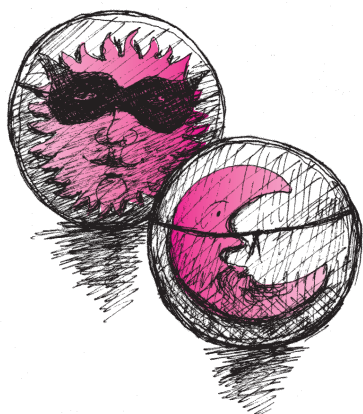
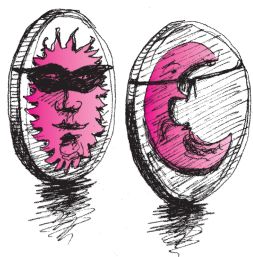
		E	F/G
A Zadanie ma sens dla $n \geq 1$	H	$n \leq (3^k + 1)/2$ $n \neq 2$	$n \leq (3^k + 1)/2$
	I	$n \leq (3^k - 3)/2$ $n \neq 1$ $n \neq 2$	$n \leq (3^k - 3)/2$
B		$n \leq (3^k - 3)/2$ lub $n = 0$ $n \neq 1$ $n \neq 2$	$n \leq (3^k - 1)/2$

Na przykład nie jest możliwe wskazanie wśród 40 monet fałszywej monety poprzez wykonanie 4 ważeń na wadze szalkowej, gdy nie mamy dodatkowych monet, nie wiemy, czy fałszywa moneta w ogóle istnieje i czy gdyby istniała, byłaby cięższa, czy lżejsza od pozostałych ($40 > 39 = (3^4 - 3)/2$).

Z powyższych tabel wynika, że gdy mamy do dyspozycji dodatkowe dobre monety, wówczas nie ma znaczenia ich liczba. Zawsze poradzimy sobie, wykorzystując tylko jedną z nich.

Niemal zawsze ważenia można zaplanować z góry. Jedynymi wyjątkami są warianty **BCEHK** oraz **BCEIK**, w przypadku których nie możemy zaplanować ważeń, gdy $n = 3^k - 2$.

Marcel KOŁODZIEJCZYK, I LO im. Kopernika w Łodzi – **ZŁOTY MEDAL**



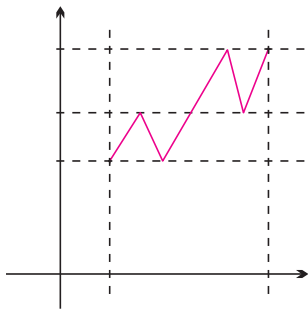
O istnieniu funkcji ciągłej przyjmującej każdą wartość z góry zadaną ilość razy

Interesuje nas następujący problem:

Dana jest funkcja $N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ (przyjmujemy, że $0 \in \mathbb{N}$). Czy istnieje funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, taka że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ funkcja f przyjmuje wartość x dokładnie $N(x)$ razy?

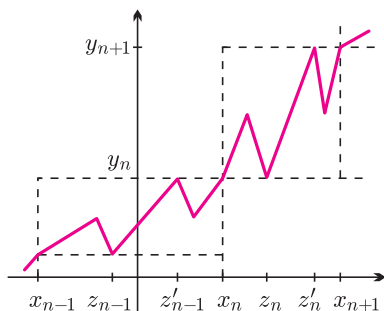
Przyjrzyjmy się na początek paru przykładom.

Dla $N \equiv 1$ żądana funkcja istnieje. Przykładem jej jest każda funkcja liniowa niestała. Również dla $N \equiv 3$ możemy skonstruować żadaną funkcję. Konstrukcja ta polega, mówiąc obrazowo, na „sklejaniu” funkcji takich jak na rysunku 1.



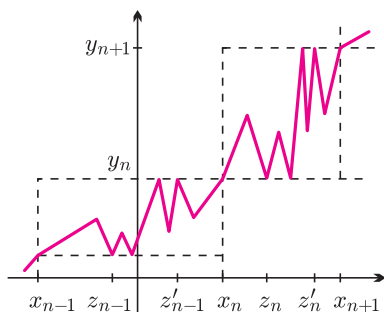
Rys. 1

Bardziej formalnie, ustalamy dowolne ciągi $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ i $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, rosnące, nieograniczone zarówno z góry, jak i z dołu. A następnie w każdy z prostokątów wyznaczonych przez $x_n, x_{n+1}, y_n, y_{n+1}$ wpisujemy taki „zygzak” jak na rysunku 1. Otrzymana funkcja ciągła jest przedstawiona na rysunku 2.



Rys. 2

Z takiej funkcji można w dość prosty sposób otrzymać funkcję ciągłą przyjmującą każdą wartość rzeczywistą 5 razy. Wycinamy funkcję na każdym z odcinków $[z_n, z'_n]$ i w to miejsce wklejamy „zygzak”, analogiczny do tego na rysunku 1. Wykres żądanej funkcji przedstawia rysunek 3.



Rys. 3

Analogicznie można otrzymać funkcję ciągłą wyznaczoną przez $N \equiv 7, N \equiv 9, N \equiv 11$, itd.

Zastanówmy się teraz, czy istnieje funkcja ciągła wyznaczona przez $N \equiv 2 \dots$. Otóż nie. Co więcej, można podać pełną charakteryzację funkcji N , które wyznaczają funkcje ciągłe. Przedstawimy ją tutaj przy dodatkowym założeniu, że $N > 0$. W ogólnym przypadku jest ona nieco bardziej złożona.

Twierdzenie. Niech $N > 0$. Wówczas na to, by istniała funkcja ciągła f wyznaczona przez funkcję N , potrzeba i wystarcza, by dla dowolnej liczby $z \in \mathbb{R}$ istniało $\varepsilon > 0$, takie że jeśli $x \in (z - \varepsilon, z)$ i $y \in (z, z + \varepsilon)$, to zachodzi zależność $\frac{N(x) + N(y)}{2} \geq N(z)$ w przypadku, gdy przynajmniej jedna z liczb $N(x)$ i $N(y)$ jest nieparzysta, natomiast $\frac{N(x) + N(y)}{2} > N(z)$ w przypadku, gdy każda z liczb $N(x)$ i $N(y)$ jest parzysta.

Dowód konieczności warunków twierdzenia.

Potrzebny będzie następujący lemat, którego dowód oparty na własności Darboux pozostawiamy Czytelnikowi.

Lemat. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, która każdą wartość rzeczywistą przyjmuje skończenie wiele razy i przynajmniej jeden raz. Wówczas

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

lub

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty.$$

Powróćmy do dowodu twierdzenia. Weźmy dowolne $z \in \mathbb{R}$. Niech $N(z) = n$. Niech $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ będą wszystkimi punktami o własności

$$z = f(a_1) = f(a_2) = \dots = f(a_n).$$

Rozważmy wówczas przedziały (a_k, a_{k+1}) , $k = 1, 2, \dots, n$. Dla każdego z nich wybierzmy $b_k \in (a_k, a_{k+1})$. Wartość $f(b_k)$ jest różna od z . Podobnie, weźmy $b_0 \in (-\infty, a_1)$ i $b_n \in (a_n, \infty)$. Wartości $f(b_0)$ i $f(b_n)$ są różne od z . Ustalmy

$$\varepsilon = \min\{|f(b_k) - z| : k = 0, 1, \dots, n\}.$$

Z własności Darboux wynika, że na każdym z przedziałów $(-\infty, a_1], [a_1, b_1], [b_1, a_2], \dots, [a_k, b_k], [b_k, a_{k+1}], \dots, [a_n, \infty)$ wartość $x \in (z - \varepsilon, z)$ lub wartość $y \in (z, z + \varepsilon)$ przyjmowana jest przynajmniej raz. Ponieważ tych przedziałów jest $2n$, to zachodzi

$$\frac{1}{2}(N(x) + N(y)) \geq N(z).$$

Z równości $(N(x) + N(y)) = 2N(z)$ wynika, że na każdym z przedziałów $[a_k, a_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots, n$ dokładnie jedna z wartości x lub y musi być przyjmowana dokładnie dwa razy, a na przedziałach $(-\infty, a_1], [a_n, \infty)$ dokładnie jeden raz. Przy dodatkowym założeniu parzystości $N(x)$ i $N(y)$ mamy, że na obu przedziałach $(-\infty, a_1], [a_n, \infty)$ jest przyjmowana wartość x (lub y). A to oznacza, że $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ nie mogą być jednocześnie różne i niewłaściwe. Sprzeczność.

Dla N spełniającego warunki twierdzenia można podać konstrukcję funkcji ciągłej f wyznaczonej przez to N .

O rozrzedzeniach zbioru liczb naturalnych i szeregach P -harmonicznych

Zacznijmy od następującego zadania: rozważmy zbiór wszystkich liczb naturalnych, które mają zero w zapisie dziesiętnym. Czy szereg ich odwrotności jest zbieżny? A jeśli zero zastąpimy inną cyfrą?

Aby znaleźć odpowiedź na postawione wyżej pytanie, nie wystarczy biegle posługiwać się kryteriami znanymi dobrze z kursu analizy matematycznej, ponieważ niemożliwe jest znalezienie ogólnej postaci liczb niemających danej cyfry w zapisie dziesiętnym. Można natomiast wyznaczyć ich gęstość (rozumianą intuicyjnie) w zbiorze liczb naturalnych i na tej podstawie określić zbieżność szeregu. Tym właśnie zajmowałem się w mojej pracy. Niżej przedstawię główny wynik otrzymany przeze mnie, chętnych do przeczytania całego artykułu proszę o kontakt ze mną (julek@interia.pl).

Poniżej wprowadzimy kilka pojęć potrzebnych w dalszym ciągu.

Definicja 1. Szereg odwrotności liczb naturalnych, tzn. szereg postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

nazywać będziemy szeregiem harmonicznym.

Definicja 2. Nieskończony zbiór $P \subseteq \mathbb{N}$ nazywamy rozrzedzeniem zbioru liczb naturalnych lub po prostu rozrzedzeniem.

Definicja 3. Niech $P \subseteq \mathbb{N}$ będzie rozrzedzeniem. Szereg $\sum_{n \in P} \frac{1}{n}$ nazywać będziemy szeregiem P -harmonicznym.

Oznaczmy teraz $P_n = P \cap \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $p(n) = \#P_n$, gdzie $\#P_n$ oznacza liczbę elementów P_n . Możemy teraz przedstawić główny wynik pracy.

Twierdzenie. Niech P będzie rozrzedzeniem zbioru liczb naturalnych. Wtedy

$$\sum_{n \in P} \frac{1}{n} < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(a_n)}{a_n} < \infty,$$

gdzie a_n jest dowolnym ciągiem liczb naturalnych, takim że $1 < c \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq C$, dla pewnych liczb rzeczywistych c, C .

Nie będziemy tu dowodzić powyższego twierdzenia, zajmiemy się tylko pokazaniem dwóch jego zastosowań.

1. Niech P będzie zbiorem liczb naturalnych niemających w zapisie dziesiętnym cyfry i . Weźmy ciąg $a_n = 10^n$ spełniający warunek z twierdzenia. W każdym z przedziałów $[10^k, 10^{k+1}]$ zostaje 9^{k+1} rozważanych liczb.

Stąd $p(10^n) = 9 + 9^2 + \dots + 9^n = \frac{9}{8}(9^n - 1)$.

$$\sum_{n \in P} \frac{1}{n} < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(10^n)}{10^n} < \infty.$$

Ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{9}{8}(9^{n+1}-1)}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{\frac{9}{8}(9^n-1)} = \frac{9}{10}$, to na mocy kryterium d'Alemberta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(10^n)}{10^n} < \infty \quad \text{i} \quad \sum_{n \in P} \frac{1}{n} < \infty.$$

2. Niech P będzie zbiorem liczb pierwszych. Wybierając ciąg $a_n = 2^n$, otrzymujemy

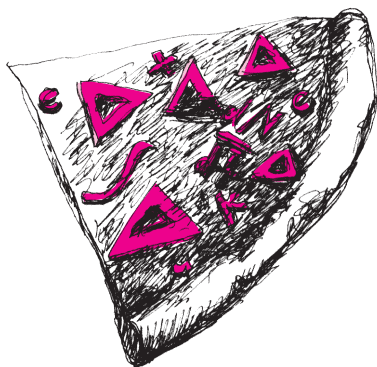
$$\sum_{n \in P} \frac{1}{n} < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(2^n)}{2^n}.$$

Ale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(2^n)}{2^n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{12 \log 2^n} = \frac{1}{12 \log 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Zatem szereg P -harmoniczny jest rozbieżny.

Juliusz JABŁECKI, III LO im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu – SREBRNY MEDAL



Problem komiwojażera

Problem komiwojażera przedstawia się następująco. Komiwojazer wyjeżdża z miasta nr 1, przejeżdża przez pewien zbiór miast, po czym wraca do miasta, z którego wyjechał. Im szybciej pokona tę drogę, tym lepiej. Nasze zadanie polega na znalezieniu najkrótszego cyklu przechodzącego przez wszystkie miasta dokładnie raz. Opiszę, jak znaleźć długość najkrótszej drogi, jednakże posługując się tymi metodami, otrzymuje się także trasę komiwojażera.

Problem można oczywiście rozwiązać, przeszukując wszystkie możliwości. Dla 2 miast jest jedna możliwość. Dla 3 miast dwie możliwości $\{ABCA; ACBA\}$, dla czterech miast liczba możliwości wynosi 6: $\{ABCD; ACDB; ACBD; ADCB; ABDC; ADBC\}$. Ogólnie mamy $(n - 1)!$ możliwych przypadków do przeanalizowania. Dla 49 miast liczba możliwości będzie sięgała 48! przypadków, czyli w zaokrągleniu około: $1,241391559 \cdot 10^{61}$. Przy założeniu, że jesteśmy w stanie liczyć miliard kombinacji na sekundę, program działałby $2 \cdot 10^{34}$ razy tyle co wiek naszego Wszechświata.

Problem ten można jednak rozwiązać metodą programowania dynamicznego. Oznaczmy przez $D(x, y)$ długość drogi z miasta x do miasta y . Niech $L(x, S)$ oznacza długość najkrótszej drogi z miasta x , przechodzącej przez wszystkie miasta ze zbioru S – przez każde dokładnie raz – kończącej się na mieście nr 1. Jeśli oznaczymy zbiór wszystkich miast jako X , to $L(1, X \setminus \{1\})$ jest interesującym nas rozwiązaniem problemu komiwojażera. $L(x, S)$ możemy łatwo obliczyć. Komiwojazer z miasta x pojedzie najpierw do jednego miasta ze zbioru S , a później możliwe krótką drogą przejedzie przez resztę miast ze zbioru S , aż do miasta nr 1. Tak więc $L(x, S) = \min_{y \in S} (D(x, y) + L(y, S \setminus \{y\}))$.

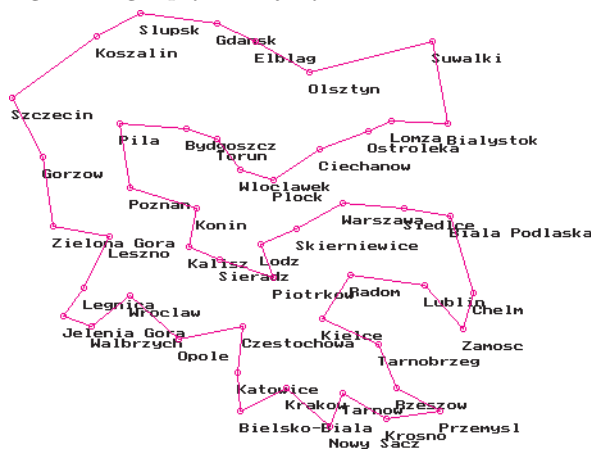
Metoda programowania dynamicznego jest szybsza od przeszukiwania wszystkich możliwości. Złożoność czasowa jest rzędu $n^2 2^n$. Niestety metoda ta wymaga sporej pamięci (złożoność pamięciowa jest rzędu $n 2^n$, już dla 22 miast potrzeba ponad 2 MB pamięci operacyjnej). Dodatkowo trudno jest taki algorytm optymalizować.

Przeszukiwanie wszystkich możliwości można jednak usprawnić, co, jak się okazuje, daje lepsze rezultaty. Załóżmy więc, że mamy najkrótszą dotychczas znaną drogę komiwojażera – cykl A . Mamy też jakąś drogę B przechodzącą przez k miast, gdzie $k < n$. Jeśli długość drogi B jest większa od długości cyklu A , to nie warto, oczywiście, już jej rozważać. W ten sposób nie będziemy analizować wszystkich możliwości.

Oczywiście usprawnienie to można także ulepszyć. Spróbujmy oszacować, o ile co najmniej wydłuży naszą drogę B dodanie do niej pozostałych $n - k$ miast. Są różne metody – jedne zabierają dużo czasu, inne z kolei dają mniej dokładny wynik. W tym przypadku opłaca się przeznaczyć więcej czasu na dokładniejsze oszacowanie. Na miastach skrajnych drogi B oraz miastach nieprzyłączonych do naszej drogi budujemy

minimalne drzewo spinające (MST). Długość takiego drzewa jest niewiększa od długości drogi, która będzie domykać naszą drogę. Co za tym idzie, cykl powstały z drogi B wraz z dołączonymi do niej pozostałymi miastami nie będzie dłuższy od sumy długości drogi B i długości MST. Pozostaje więc tylko zbudowanie MST. W tym celu posługuję się tzw. algorytmem Kruskala (dokładny opis oraz dowód poprawności algorytmu znajduje się w książce K.A. Ross, Ch.R.B. Wright, „Matematyka dyskretna”). Kolejne przyspieszenie można uzyskać na czasie budowania MST. Program budowałby MST dla tych samych miast wiele razy, można więc je zapamiętywać. W tym celu użyłem techniki haszowania – zapamiętywałem MST w tablicy list. Oczywiście nie zapamiętałem wszystkich drzew. Po pierwsze zabrakłoby pamięci operacyjnej, po drugie zaś i przede wszystkim nie opłaca się ich zapamiętywać, gdyż listy wydłużyłyby się za bardzo i wyszukiwanie interesujących nas MST trwałoby zbyt długo. Dlatego też zapamiętywałem tylko MST składające się z co najwyżej 5 miast.

Na koniec można jeszcze zauważyć, iż wszystkie dotychczasowe optymalizacje opierały się na założeniu, iż mam już jakąś drogę przybliżoną. Przed uruchomieniem głównej procedury program liczył więc drogę przybliżoną. W tym celu posługiwałem się algorytmami opisanymi w książce M.M. Sysło, N. Deo, J.S. Kowalik, „Algorytmy optymalizacji dyskretniej” oraz opisanymi w niej tzw. 2- oraz 3-optymalizacjami. W ten sposób uzyskana droga przybliżona była dłuższa od cyklu minimalnego o około 0–6%. Dane do programu zostały wprowadzone w formie współrzędnych na mapie. Długości między miastami były zaś odległościami pomiędzy punktami na mapie. Ostatecznie program dla 49 miast wojewódzkich według starego podziału administracyjnego Polski działał około 2 godzin 30 minut. Drogę przybliżoną liczył około 48 sekund. Długość drogi przybliżonej wynosiła około 3699 km, a długość drogi optymalnej wynosiła około 3580 km.



Aktualny światowy rekord pochodzi z 2001 roku. Ustanowili go D. Applegate, R. Bixby, V. Chvátal, i W. Cook, którzy rozwiązali problem komiwojażera dla 15112 miast. Tę i inne informacje dotyczące problemu komiwojażera można znaleźć na stronie internetowej: www.math.princeton.edu/tsp/index.html

Krzysztof MROCZEK, Liceum Przymierza Rodzin w Warszawie – BRAZOWY MEDAL

Wielowymiarowe muzeum i jego strażnicy

Punktem wyjścia moich rozważań jest rozdział 28 „Strażnicy w muzeum” książki M. Aignera i G.M. Zieglera „Dowody z Księgi”, gdzie przedstawiony został problem przedstawiony przez V. Klee oraz jego rozwiązanie.

W rogach wielokątnego muzeum umieszczamy strażników. Zakładamy, że muzeum jest pilnowane, gdy dowolny punkt wewnątrz łączy się przynajmniej z jednym z obranych wierzchołków (strażnikiem), nie przecinając żadnej z krawędzi. Ilu strażników potrzeba do pilnowania muzeum?

Z rozwiązania wynika, że do pilnowania dowolnego n -kąta wystarczy $\lceil n/3 \rceil$ strażników. Nasuwa się pytanie, czy podobne zależności istnieją w wyższych wymiarach?

Trójwymiarowe muzeum

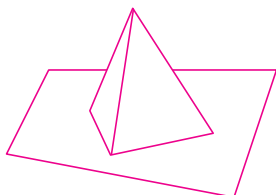
Dany jest wielościan o n krawędziach i m ścianach. Suma krawędzi wszystkich ścian wynosi $2n$. Tworzymy siatkę wielościanu i dokonujemy jej triangulacji (podziału na trójkąty). Ponieważ dowolny n -kątnik dzieli się na $n - 2$ trójkąty, więc liczba powstałych trójkątów wynosi:

$$x_1 - 2 + x_2 - 2 + \dots + x_m - 2 = 2n - 2m,$$

gdzie x_i oznacza liczbę krawędzi i -tej ściany. Potraktujmy siatkę jako wielokąt. Znajdźmy liczbę tworzących go trójkątów, wyznaczmy liczbę jego krawędzi: $2n - 2m + 2$. Z twierdzenia o strażnikach otrzymujemy liczbę strażników potrzebnych do pilnowania powierzchni siatki:

$$\lceil (2/3)(n - m + 1) \rceil.$$

Rozważmy teraz sytuację, kiedy poruszając się wzdłuż krawędzi, nie możemy dotrzeć do dowolnego wierzchołka.



Do pilnowania ściany o t krawędziach zewnętrznych i u wewnętrznych (wokół dziury) wystarczy

$$\lceil t/3 \rceil + \lceil u/3 \rceil$$

strażników ($\lceil u/3 \rceil$ strażników wokół dziury). Jako że $\lceil t/3 \rceil + \lceil u/3 \rceil \leq \lceil (t + u)/3 \rceil$, sytuacja ta nie wymusza umieszczania dodatkowych strażników.

Pozostaje sprawdzić, czy fakt obserwowania siatki wystarczy do pilnowania przestrzeni wewnątrz wielościanu. Weźmy dowolny punkt A wewnątrz wielościanu. Tworzymy odcinek łączący ten punkt z pewnym strażnikiem. Jeśli odcinek nie przecina żadnej ściany, jest to koniec dowodu. Jeżeli przecina, prowadzimy odcinek łączący punkt A ze strażnikiem na tej ścianie. Jeśli również ten odcinek przecina jakąś ścianę, powtarzamy rozumowanie. Jako że liczba

ścian jest skończona, powyższe rozumowanie też jest skończone. Wynika stąd, że znajdziemy odcinek nieprzecinający żadnej ściany, łączący punkt A ze strażnikiem. Wnioskujemy, że do pilnowania wielościanu o m ścianach i n wierzchołkach wystarczy

$$\lceil (2/3)(n - m + 1) \rceil$$

strażników.

Czterowymiarowe muzeum

Wyznaczenie liczby strażników w wielościanie czterowymiarowym nie jest już tak proste i wymaga znalezienia pewnych jego własności. W tym celu skorzystamy z założeń metody Fechnera. Mówi ona, że ze stosunku świata płaskiego do przestrzennego dadzą się wyprowadzić relacje, które powinny istnieć między światem trój- a czterowymiarowym (dla uproszczenia figury czterowymiarowe zapisywane będą jako figury 4D, natomiast trójwymiarowe jako 3D, itd.).

Znajdźmy analogie między światem dwu- i trójwymiarowym. Rozpatrzmy krzywą zamkniętą. Rozcinając ją, tworzymy jej jednowymiarową siatkę. Z kolei siatka wielościanu 3D jest dwuwymiarowa. Analogicznie siatka wielościanu 4D jest trójwymiarowa.

Zauważamy, że w dwóch wymiarach każdy wierzchołek należy do dwóch boków. W wielościanie krawędź należy do dwu ścian. Tak więc w wielościanie 4D każda ze ścian należy do dwu figur 3D. Zauważamy teraz, że w wielościanie 4D każda z krawędzi powinna łączyć się z co najmniej trzema ścianami (analogicznie w wielokącie 3D każdy wierzchołek łączy się z co najmniej 3 krawędziami). Wyznaczmy teraz liczbę strażników wielościanu 4D o n krawędziach i m ścianach. Suma liczby ścian figur 3D wielościanu wynosi $2m$. Wiemy, że każda krawędź należy do co najmniej trzech ścian, a więc i figur 3D. Jednocześnie nie należy ona do co najmniej dwu ścian każdej z nich. Wiedząc, że każda ściana należy do dwu figur 3D, wnioskujemy, że każda krawędź nie należy do co najmniej trzech ścian. Możemy teraz oszacować liczbę krawędzi figur 3D:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_s \leq n(m - 3),$$

gdzie a_i oznacza liczbę krawędzi i -tej figury. Potraktujmy figury 3D jako wielościany 3D.

Wyznaczamy sumę trójkątów powstałych w wyniku triangulacji ich siatek:

$$2a_1 - 2b_1 + 2a_2 - 2b_2 + \dots + 2a_s - 2b_s,$$

gdzie b_i oznacza liczbę ścian i -tej figury. Wiedząc, że każda ze ścian (trójkątów) należy do 2 wielościanów 3D, wyznaczamy liczbę trójkątów figury 4D i szacujemy ją z góry: $\{n(m - 3) - 2m + 2\}/3$. Analogicznie do dowodu twierdzenia o strażnikach w 3D muzeum, rozpatrujemy przypadek istnienia figur 3D z dziurą. Z twierdzenia o strażnikach otrzymujemy liczbę strażników potrzebnych do pilnowania 4D muzeum:

$$\lceil \{n(m - 3) - 2m + 2\}/3 \rceil.$$

O porządkowaniu zależności wektorów losowych związanym z pewną klasą funkcji

W pracy zajęliśmy się opisem zależności dla zmiennych losowych. W „klasycznej” probabilistyce szkolnej zakłada się zazwyczaj ich niezależność, np. przy próbach Bernoulliego. Założenie to nie jest jednak zawsze spełnione, np. przy schemacie urnowym i losowaniu bez zwracania. Co więcej, znacznie częściej mamy do czynienia ze zmiennymi zależnymi.

Badając zależne zmienne losowe, musimy umieć porządkować zależność i mierzyć jej siłę. Najpopularniejszą miarą siły zależności jest kowariancja. Ma ona jednak swoje poważne wady, m.in. są przykłady zmiennych losowych, które są zależne, a mimo to kowariancja dla nich wynosi 0, jak dla zmiennych niezależnych. Co więcej, kowariancja działa dla par zmiennych losowych, a są przykłady wektorów losowych, gdzie mimo, że każda z par zmiennych losowych jest niezależna, to cały wektor jest wektorem zależnych zmiennych losowych.

Dlatego zajęliśmy się innym podejściem do opisu zależności i jej porządkowania. Posługujemy się w tym celu tzw. funkcjami supermodularnymi. Jeśli funkcja $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna, to jest supermodularna wtedy, gdy każda jej druga pochodna cząstkowa jest nieujemna. Zaletą tej definicji jest to, że korzystając z niej w łatwy sposób bada się supermodularność danej funkcji. Wadą – założenie, że funkcja musi być dwukrotnie różniczkowalna, co wyklucza takie funkcje jak $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \min(x_1, \dots, x_n)$, które również są supermodularne przy odpowiednio zmodyfikowanej definicji (przykłady takich definicji podajemy w pracy). Inne funkcje supermodularne to: średnie – arytmetyczna i geometryczna,

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i),$$

gdzie $f \in C^1$ jest rosnąca i nieujemna, a także

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right),$$

gdzie $f \in C^2$ jest wypukła.

Funkcja f jest klasy C^k , jeśli jej k -ta pochodna jest ciągła.

Mając daną klasę funkcji supermodularnych można wprowadzić ogólną definicję zależności n -wymiarowych wektorów losowych, tzn. wektorów, których współrzędnymi są zmienne losowe. Powiemy, że wektor $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n)$ jest bardziej ϕ -zależny od wektora $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, co zapisujemy następująco

$$(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n) \succ_{\phi} (X_1, X_2, \dots, X_n),$$

jeżeli dla każdej ϕ supermodularnej zachodzi nierówność $E(\phi(\tilde{X})) \geq E(\phi(X))$.

Korzystając z tej definicji możemy już badać zależności między wektorami losowymi.

Interesuje nas, jakie wektory są maksymalnie, a jakie minimalnie ϕ -zależne.

W ogólnym, n -wymiarowym przypadku rozważamy wektory losowe $X = (X_1, \dots, X_n)$, które przyjmują z jednakowym prawdopodobieństwem wartości z pewnego zbioru skończonego $\{(x_1^1, \dots, x_1^n), \dots, (x_m^1, \dots, x_m^n)\}$. Okazuje się, że maksymalnie zależny (tzn. bardziej zależny od dowolnego innego, którego kolejne zmienne losowe przyjmują wartości $X_i \in \{x_1^i, \dots, x_m^i\}$ dla $i = 1, \dots, n$) jest wektor $\bar{X} = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n)$, taki że wartości zmiennych losowych są uporządkowane monotonicznie (np. rosnąco). Mamy więc

$$(X_1, \dots, X_n) \prec_{\phi} (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n).$$

Inaczej jest z minimalną zależnością. Nie można, tak jak w przypadku maksymalnej zależności, wskazać jakiegoś konkretnego wektora, który byłby mniej ϕ -zależny od dowolnego innego. Przez badanie minimalnej ϕ -zależności rozumieliśmy więc badanie zależności między wektorami

$$(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k, \underline{X}_{k+1}, \dots, \underline{X}_n)$$

oraz

$$(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_{k+1}, \underline{X}_{k+2}, \dots, \underline{X}_n)$$

dla $k \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ (w pierwszym z wektorów k kolejnych zmiennych losowych przyjmuje wartości uporządkowane rosnąco, a w drugim $k+1$, natomiast wszystkie pozostałe zmienne przyjmują wartości uporządkowane malejąco). Badaliśmy więc „nierówności”

$$(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k, \underline{X}_{k+1}, \dots, \underline{X}_n) \prec_{\phi}$$

$$\prec_{\phi} (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_{k+1}, \underline{X}_{k+2}, \dots, \underline{X}_n).$$

Okazało się, że supermodularność funkcji ϕ nie gwarantuje, że wszystkie te nierówności zachodzą. Dla pewnych supermodularnych ϕ bardziej ϕ -zależny był wektor

$$(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k, \underline{X}_{k+1}, \dots, \underline{X}_n),$$

a dla innych wektor

$$(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_{k+1}, \underline{X}_{k+2}, \dots, \underline{X}_n).$$

Nierówności te zachodzą tylko dla wąskiej klasy funkcji, i to tylko przy pewnych dodatkowych założeniach o wartościach, jakie przyjmują zmienne losowe.

Wyniki, jakie otrzymaliśmy mogą mieć kilka zastosowań. Tutaj powiemy może o jednym z nich, o porównywaniu czasów pracy złożonych układów. Wyobraźmy sobie, że układ składa się z elementów, których czasy pracy są zależnymi zmiennymi losowymi. Wówczas czas pracy całego takiego układu jest wektorem losowym. Okazuje się, że przy połączeniu równoległym elementów układu prawdopodobieństwo, że układ bardziej zależny będzie działał dłużej jest większe niż prawdopodobieństwo, że dłużej będzie działał układ mniej zależny. Odwrotnie jest natomiast przy połączeniu szeregowym elementów układu.

Juliusz JABŁECKI, Lech STAWIKOWSKI – WYRÓŻNIENIE

O ukrytej podzielności wielomianów

Interesować nas będą wielomiany (o współczynnikach całkowitych) w „ukryty sposób” podzielne przez ustaloną liczbę n , tzn. takie wielomiany, których wartości dla dowolnych całkowitych argumentów są podzielne przez n . Przypadek, gdy wszystkie współczynniki wielomianu są podzielne przez n , jest oczywisty. Do tworzenia innych wielomianów o zadanej podzielności wykorzystamy kongruencje oraz twierdzenia Fermata i Eulera.

Rozważmy najpierw wielomiany jednej zmiennej (bez wyrazu stałego) i zbadajmy ich podzielność przez liczby pierwsze. Wartość zmiennej x może należeć do jednego z dwóch zbiorów:

albo: x jest podzielne przez p i wartość wielomianu jest podzielna przez p ,

albo: x jest względnie pierwsze z p (oznaczenie: $x \perp p$).

Rozważenia wymaga tylko ten ostatni przypadek. Łatwo można wykazać, że nie istnieje wielomian stopnia niższego niż p , który miałby ukrytą podzielność przez p . Z Małego Twierdzenia Fermata

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, \quad \text{dla } x \perp p$$

i własności kongruencji wynika, że

$$(x^p - x) \equiv 0 \pmod{p}$$

oraz

$$(x^{k(p-1)+1} - x) \equiv 0 \pmod{p},$$

gdzie k jest dowolną liczbą naturalną. Wielomiany te możemy mnożyć przez x w dowolnej potędze lub dodawać do współczynników dowolne krotności p . Oddzielnym przypadkiem jest $p = 2$ (jedyna parzysta liczba pierwsza). Przez liczbę 2 podzielny jest wielomian, który ma parzystą liczbę nieparzystych współczynników.

Wielomiany podzielne przez liczby złożone można tworzyć na różne sposoby. Po pierwsze: jako iloczyny wielomianów podzielnych przez liczby pierwsze. Po drugie: w wielomianie podzielnym przez liczbę pierwszą za argument można podstawić wielomian podzielny przez inną liczbę pierwszą. Kolejny sposób polega na wykorzystaniu twierdzenia Eulera

$$x^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}, \quad \text{jeśli } x \perp m,$$

gdzie φ to funkcja Eulera:

$\varphi =$ liczba tych liczb ze zbioru $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$,

które są względnie pierwsze z m .

Weźmy $m = p \cdot q$, gdzie p i q są liczbami pierwszymi. Wtedy

$$\varphi(p \cdot q) = (p-1)(q-1)$$

i dla $x \perp (p \cdot q)$ mamy

$$x^{(p-1)(q-1)+1} \equiv x \pmod{m}.$$

Łatwo wykazać, że ta kongruencja zachodzi również wtedy, gdy x jest podzielne przez p lub q . Zatem wielomian $(x^{\varphi(p \cdot q)+1} - x)$ jest podzielny przez $p \cdot q$ dla dowolnego x .

Powyższe rozumowanie można uogólnić dla dwóch liczb złożonych, gdy x jest podzielne przez jedną z nich, a nie ma żadnego wspólnego czynnika z drugą. Wystarczy w odpowiednich miejscach zamiast $(n-1)$ wstawić $\varphi(n)$, gdzie n jest jednym z czynników. Można wtedy wykazać, że

$$x^{\varphi(mn)+1} \equiv x \pmod{mn}.$$

Okazuje się, że zachodzi także

$$x^{\frac{1}{s}\varphi(n)+1} \equiv x \pmod{n},$$

gdzie

$$n = m_1 \cdot m_2, \quad m_1 \perp m_2,$$

$$s = \text{NWD}(\varphi(m_1), \varphi(m_2)),$$

NWD – największy wspólny dzielnik, m_1 i m_2 różne od 2.

Osobnego rozpatrzenia wymaga przypadek $n = p^k$, bo tutaj nie można rozłożyć liczby n na czynniki względnie pierwsze, co było warunkiem poprzednich rozważań. Można więc tu użyć tylko pierwszego sposobu, tj. mnożenia wielomianów podzielnych przez liczby pierwsze będące czynnikami potęgi.

W przypadku liczb złożonych n , oprócz wspomnianych na początku iloczynów wielomianów, mamy zbiór „podstawowych” wielomianów podzielnych przez n :

$$\{x^{\frac{r}{s}\varphi(n)+1} - x\},$$

gdzie r jest dowolną liczbą naturalną, natomiast

$$s = \text{NWD}(\varphi(m_1), \varphi(m_2)),$$

$$n = m_1 \cdot m_2, \quad m_1 \perp m_2.$$

Oczywiście, te wielomiany można mnożyć przez x w dowolnej potędze oraz dokonywać „przesuwania” współczynników o dowolną wielokrotność n .

Jest kilka sposobów tworzenia wielomianów wielu zmiennych z ukrytą podzielnością. Najprostszy sposób to utworzenie wielomianu jednej zmiennej z ukrytą podzielnością i podstawienie dowolnego wielomianu wielu zmiennych za tę zmienną. Następny sposób to pomnożenie wielomianu jednej zmiennej z ukrytą podzielnością przez dowolne wielomiany jednej albo wielu zmiennych.

Innym sposobem jest następujące wykorzystanie Małego Twierdzenia Fermata. Weźmy liczby całkowite x , y oraz z . Albo któraś z nich dzieli się przez p i wówczas iloczyn xyz jest podzielny przez p , albo żadna nie jest podzielna przez p i wtedy

$$x^{p-1} \equiv y^{p-1} \equiv z^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

tzn. o każdej z liczb x, y, z w potędze $p-1$ możemy myśleć jak o liczbie 1. Stąd łatwo zobaczyć, że np. dla $p = 13$ podzielny przez p będzie następujący wielomian: $xyz(x^{12} + y^{12} + 2z^{12} - 4) =$

$$= x^{13}yz + xy^{13}z + 2xyz^{13} - 4xyz.$$

Czytelnik łatwo może skonstruować w podobny sposób wielomiany wielu zmiennych podzielne przez inne liczby pierwsze p .

Robert OBRYK – WYRÓŻNIENIE