

SPIS TREŚCI NUMERU 2 (369)

Wypełnianie przestrzeni <i>Marek Kordos</i>	str. 1
Pole magnetyczne leczy i... rozwesela <i>Stanisław Bednarek</i>	str. 4
Zadania	str. 6
1000 lat przed Euklidesem <i>Jarosław Górnicki</i>	str. 7
Mała Delta:	
Jak rozwiązać równanie Fibonacciego?	str. 8
Lines of Action – perła wśród gier	str. 9
Aktualności	str.10
Klub 44	str.11
Patrz w niebo	str.16
Luty	str.16
Kącik biologiczny	str.17

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu.

Komitet Redakcyjny: Andrzej Białynicki-Birula, Bogdan Cichocki, Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, Armen Edigarian, Jan A. Gaj – przewodniczący, Maciej Geller, Jerzy Ginter, Piotr Goldstein, Tadeusz Jarzębowski, Wiesław A. Kamiński, Marta Kicińska-Habior, Andrzej Majhofer, Zbigniew Marciniak, Janusz Matkowski, Andrzej Mąkowski, Adam Michalec, Ryszard J. Pawlak, Zdzisław Pogoda, Grzegorz Sitarski, Weronika Śliwa, Andrzej Woszczyk, Wiesław Żelazko.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Krzysztof Biesaga, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Anna Ludwika, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Okladki i ilustracje: Anna Ludwika Rysunki techniczne: Marcin Adamski

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delt”, ul. Banacha 2, pokój 5450,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel.: 55-44-545.

Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 663-87-52, 663-11-46)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2005 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2005 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na II kwartał 2005 r. wynosi 12 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.
Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494 lub kasa Oddziału.
5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego.

Numery archiwalne (od 1986 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

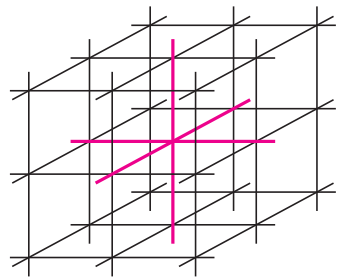
Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze:

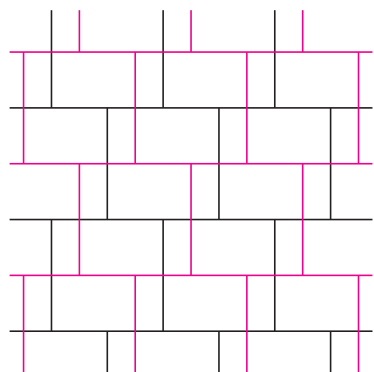
Oddziaływania elementarne
i wczesny Wszechświat

Ten artykuł ma w sieci (www.mimuw.edu.pl/delta) interaktywny odpowiednik, gdzie można manipulować wypełniającymi przestrzeń wielościanami.

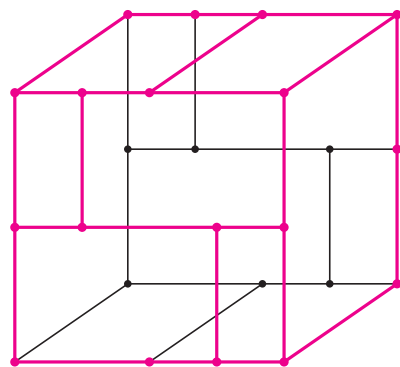
Problem wypełnienia przestrzeni bez luk jednakowymi wielościanami okazuje się wcale nie tak prosty, jak na pierwszy rzut oka można oczekiwać. Spośród pięciu wielościanów platońskich tylko jeden nadaje się do tego. Oczywiście jest to sześcian. O tym, że pozostałe nie mogą wypełnić przestrzeni, przekonać się łatwo: wystarczy zauważyć, że ich kąty dwuścienne nie składają się w żadnej liczbie na kąt pełny.



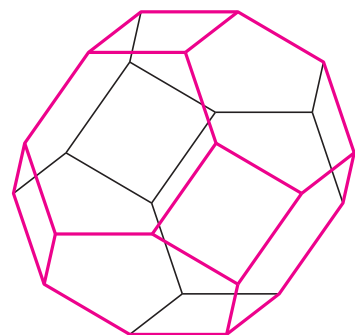
Normalne wypełnienie przestrzeni sześcianami



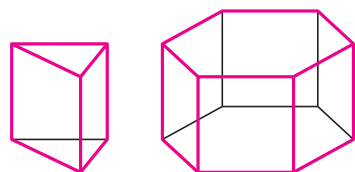
Minimalne wypełnienie sześcianami (widziane z kierunku jednej z krawędzi)



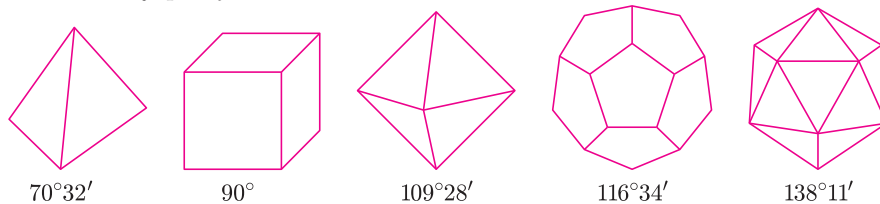
Sześcian jako czternastościan



Czternastościan archimedesowy



Wypełniające przestrzeń graniastosłupy archimedesowe (ten z prawej znany jest w budownictwie drogowym jako **trylinka**)



Wypełnienie przestrzeni sześcianami może być zrealizowane na wiele sposobów. Najbardziej oczywisty z nich to taki, gdy w każdym wierzchołku spotyka się 8 sześcianów. W tym wypełnieniu poszczególne wielościany stykają się całymi ścianami – wypełnienie o tej własności nazywa się **normalne**.

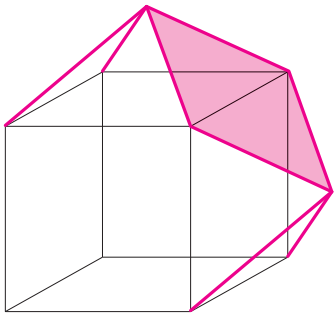
Można jednak sześciany tak ułożone poprzesuwać w ten sposób, by w żadnym punkcie nie stykało się ich więcej niż 4. Liczby tej nie można już zmniejszyć. Henri Lebesgue zauważył w 1911 roku (a potem udowodnił), że w każdym wypełnieniu przestrzeni (już niekoniecznie jednakowymi) wielościanami będą punkty, gdzie stykać się ich będzie co najmniej 4. Przyjęto to nawet za jedną z wersji definicji wymiaru: jeśli jakąś przestrzeń można wypełnić tak, że są punkty, w których styka się $(n + 1)$ wypełniających obiektów i nie ma punktów, w których styka się ich więcej, to ma ona wymiar co najwyżej n . Zatem to nowe wypełnienie sześcianami realizuje minimum takiego n dla naszej przestrzeni, która jest trójwymiarowa. Wypełnienie realizujące minimum n nazywa się, oczywiście, **minimalne**.

Mamy więc dla sześcianu wypełnienie normalne, mamy też wypełnienie minimalne, ale nie mamy wypełnienia, które miałoby równocześnie obie te własności. Powstaje pytanie, czy istnieje wielościan, wypełnienie którym obie te własności ma.

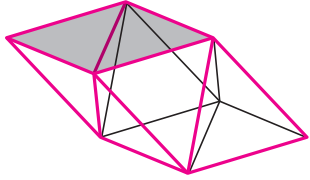
Piękną drogę do znalezienia pozytywnej odpowiedzi na to pytanie wskazał Hugo Steinhaus. Radzi on mianowicie, aby zaobserwować ślady, jakie na każdym sześcianie wypełnienia minimalnego zostawią krawędzie sąsiednich sześcianów. Widzimy, że są to prostokąty, z których 8 ma jednak po sześć śladów wierzchołków sąsiednich sześcianów. Można by je więc traktować jak sześciokąty. Przy takim podejściu nasz sześcian ma więc 8 ścian sześciokątnych i 6 czworokątnych, czyli jest czternastościanem. I nasuwa się pytanie, czy takiej bryły nie można zdeformować tak (nie zmieniając liczby obu rodzajów ścian), by wszystkie one stały się foremne.

Okazuje się, że jest to wykonalne, a otrzymany wielościan to **czternastościan archimedesowy** (wielościany archimedesowe mają wszystkie ściany foremne i jednakowe naroża). Można go inaczej otrzymać, obcinając ośmiościanowi foremnemu naroża do $\frac{1}{3}$ długości krawędzi. Okazuje się więc, że istnieje wielościan archimedesowy realizujący wypełnienie równocześnie normalne i minimalne. Można udowodnić, że jest on – wśród wielościanów mających ściany foremne – jedyny.

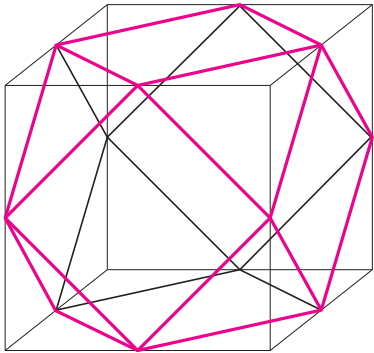
Jakie jeszcze wielościany archimedesowe mogą wypełnić przestrzeń? Tylko graniastosłupy o podstawach trójkątnych lub sześciokątnych (także czworokątnych, ale to są już wymienione sześciany). Wystarczy wypełnić płaszczyznę ich podstawami, by otrzymać warstwy w sposób oczywisty wypełniające przestrzeń.



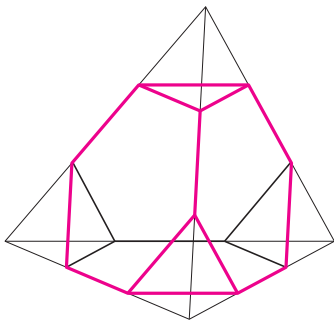
Powstawanie dwunastościanu rombowego



Równoległoscian z ośmiościanu i dwóch czworościanów



Sześcioośmiościan



Czworościan przycięty



Spośród dość regularnych wielościanów wypełniających przestrzeń jest jeszcze jeden, zresztą pochodzący od sześcianu **dwunastościan rombowy**. Powstaje on przez dołączenie do sześcianu po jednej szóstej stykających się z nim sześcianów z wypełnienia normalnego. Trójkąćiki, stanowiące boczne ściany dołączonych piramid, łączą się w romby, których jedną z przekątnych są krawędzie sześcianu. Sam sposób powstania dwunastościanu rombowego gwarantuje, że wypełnia on przestrzeń: wypełniające normalnie przestrzeń sześciany malujemy w szachownicę (mające wspólną ścianę są różnego koloru) i sześciany jednego z kolorów rozbijamy na piramidki doklejone do sąsiednich sześcianów.

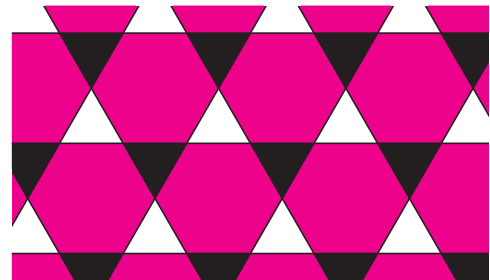
Dwunastościan rombowy kończy listę wypełniających przestrzeń wielościanów z przystającymi ścianami. Zajmijmy się więc wypełnieniami złożonymi z rytmicznie ułożonych wielościanów dwóch rodzajów.

Okazuje się, że można przestrzeń wypełnić dwoma wielościanami platońskimi, a mianowicie ośmiościanami i czworościanami o takich samych krawędziach. Tutaj wystarczy zauważyć, że jeśli do dwóch przeciwległych (równoległych) ścian ośmiościanu dokleimy czworościany, to powstanie równoległoscian (nawet równoległoscian), a wypełnienie przestrzeni równoległoscianami nie przedstawia problemu.

Wypełniającą przestrzeń parę: wielościan archimedesowy – wielościan platoński można utworzyć na dwa sposoby. Będzie to **sześcioośmiościan** (powstały przez obcięcie sześcianowi lub ośmiościanowi wierzchołków przez połowy krawędzi) i ośmiościan (oba wielościany muszą mieć krawędzie tej samej długości) oraz **czworościan przycięty** (obcinamy czworościanowi wierzchołki w jednej trzeciej długości) i ... czworościany. Ten ostatni przykład jest szczególnie interesujący, bo łączymy przycięte czworościany z tym, co im do bycia zwykłym czworościanem brakuje – a przecież wypełnić przestrzeni zwykłymi czworościanami się nie da.

Sześcioośmiościany sklejamy kwadratowymi ścianami, a to, co każdemu z nich brakuje do bycia sześcianem, to akurat jedna ósma ośmiościanu, więc ośmiościany wypełnią powstałe luki.

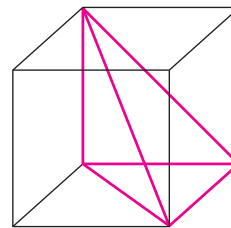
Znacznie trudniejsza jest sprawa z czworościanami przyciętymi. Aby wypełnić nimi przestrzeń, należy ustawić je sześciokątnymi ścianami na płaszczyźnie w sposób pokazany na rysunku. To, co „wyjdzie”, będzie przypominało paletę do jajek. Drugą taką paletę obracamy o 180° i nakładamy na pierwszą. Okaze się, że luki będą akurat czworościanami. I tak otrzymanymi warstwami wypełniamy przestrzeń – tutaj eksperyment manualny (bądź wirtualny) wydaje się konieczny.



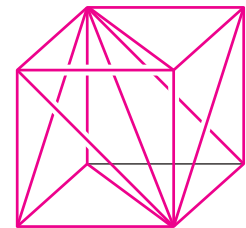
Tak ustawiamy na płaszczyźnie podstawy czworościanów przyciętych; na czarno zaznaczone są trójkątne ściany palety nałożonej z przeciwnej strony, białe trójkąty to luki na czworościany.

Zagadnienie wypełnienia przestrzeni pojedynczymi, ale mniej regularnymi wielościanami jest trudne i jedynie dla czworościanów (już niekoniecznie foremnych) zrobiono kilka kroków naprzód.

W szczególności przestrzeń można wypełnić **czworościanami Hilla**. Jednym z nich jest czworościan $H_1(\frac{\pi}{4})$, będący uwypukleniem trzech kolejnych, mających różne kierunki krawędzi sześcianu.

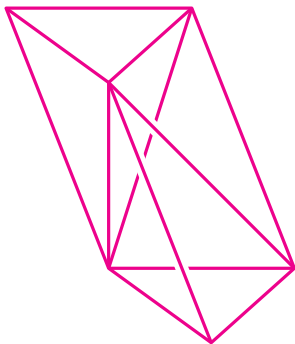


Czworościan $H_1(\frac{\pi}{4})$



Sześcian z czworościanów przystających do $H_1(\frac{\pi}{4})$

Pozornie rzecz wydaje się banalna, bo sześć takich czworościanów tworzy sześcian. Po chwili zauważamy, że czworościany tego wypełnienia są dwóch rodzajów – trzy mają jedną orientację, a pozostałe trzy inną. Można jednak, nieco inaczej układając te czworościany, wskazać prawdziwe wypełnienie.



Tutaj trzy czworościany $H_1(\frac{\pi}{4})$ składają się na pochylony graniastosłup o podstawie trójkątnej, a takimi graniastosłupami przestrzeń wypełnia się w sposób oczywisty.

O trudności problemu wypełnienia przestrzeni jednakowymi czworościanami świadczy fakt, że pierwsza praca na ten temat ukazała się dopiero w 1923 roku, kiedy to D.M.Y. Sommerville udowodnił, że T_0 , T_{12} , $H_1(\frac{\pi}{3})$ i $H_2(\frac{\pi}{4})$ (nazwy z tabeli) wypełniają przestrzeń. Lata późniejsze przynoszą publikacje wyników słabszych niż rezultat Sommerville'a. Dopiero M. Goldberg w 1974 roku udowodnił, że dobre są wszystkie $H_i(\alpha)$, czyli wszystkie wielościany Hilla (tabelka podaje dokładny opis takich czworościanów).

Trudno ten rezultat uznać za imponujący. Jest to ciekawe pole badań również dla naszych Czytelników, wymagające jedynie (czy też aż) sprawnej wyobraźni przestrzennej.

	krawędzie	długości	kąty dwuścienne
$H_1(\alpha)$	ab	$\sin \alpha$	α
	ac	$\sqrt{3} \cos \alpha$	$\pi/3$
	ad	1	$\pi/2$
	bc	1	$\pi/2$
	bd	$\sin \alpha$	$\pi - 2\alpha$
	cd	$\sin \alpha$	α
$H_2(\alpha)$	ab	$2 \sin \alpha$	α
	ac	$\sqrt{3} \cos \alpha$	$\pi/3$
	ad	2	$\pi/2$
	bc	$\sqrt{5 \sin^2 \alpha - 1}$	$\pi - \arccos(\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha)$
	bd	$2 \sin \alpha$	$(\pi/2) - \alpha$
	cd	$\sqrt{5 \sin^2 \alpha - 1}$	$\arccos(\frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \alpha)$
$H_3(\alpha)$	ab	$2 \sin \alpha$	α
	ac	$\sqrt{12} \cos \alpha$	$\pi/6$
	ad	$\sqrt{2 + \sin^2 \alpha}$	$\pi - \arccos(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \alpha)$
	bc	2	$\pi/2$
	bd	$\sin \alpha$	$\pi - 2\alpha$
	cd	$\sqrt{2 + \sin^2 \alpha}$	$\pi - \arccos(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \alpha)$
T_0	ab	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
	ac	$\sqrt{2}$	$\pi/2$
	ad	2	$\pi/4$
	bc	1	$\pi/2$
	bd	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
	cd	$\sqrt{2}$	$\pi/2$
T_{12}	ab	$\sqrt{3}$	$\pi/6$
	ac	$\sqrt{3}$	$\pi/6$
	ad	$\sqrt{5}/2$	$\pi - \arccos \frac{2}{3}$
	bc	2	$\pi/4$
	bd	$\sqrt{5}/2$	$\frac{1}{2}(\pi + \arccos \frac{2}{3})$
	cd	$\sqrt{5}/2$	$\frac{1}{2}(\pi + \arccos \frac{2}{3})$



Rozwiązanie zadania F 638.

Promień orbity kołowej o prędkości v_0 to $r_0 = \frac{GM}{v_0^2}$. Po hamowaniu prędkość to $v_0 - \Delta v$, a zatem, korzystając z rozwiązania poprzedniego zadania, w perygeum prędkość pojazdu wyniesie

$$v_p = \left(\frac{2GM}{(v_0 - \Delta v) \frac{GM}{v_0^2}} - 1 \right) (v_0 - \Delta v) = \left(\frac{2v_0^2}{(v_0 - \Delta v)^2} - 1 \right) (v_0 - \Delta v),$$

a odległość od centrum to

$$r_p = \frac{GM}{v_0^2} \left(\frac{2v_0^2}{(v_0 - \Delta v)^2} - 1 \right)^{-1}.$$

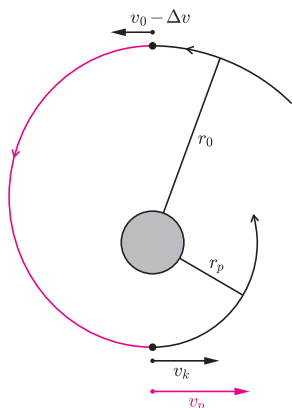
Prędkość na kołowej orbicie o promieniu r_p wynosi $v_k = \sqrt{\frac{GN}{r_p}}$, czyli po podstawieniu

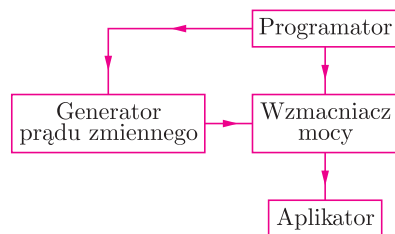
$$v_k = \left(\frac{2v_0^2}{(v_0 - \Delta v)^2} - 1 \right)^{-1/2} v_0,$$

więc pojazd musi zmniejszyć swoją prędkość o

$$\Delta v_2 = \left(\frac{2v_0^2}{(v_0 - \Delta v)^2} - 1 \right) (v_0 - \Delta v) - \left(\frac{2v_0^2}{(v_0 - \Delta v)^2} - 1 \right)^{-1/2} v_0.$$

Zauważmy, że chociaż pojazd dwa razy hamował (zmniejszał swoją prędkość), w wyniku manewrów jego prędkość wzrosła ($v_k > v_0$). Ten nieco zaskakujący wynik można łatwo zrozumieć, gdy zdamy sobie sprawę z tego, że przybliżając się do planety, statek zwiększył swoją energię kinetyczną kosztem potencjalnej.





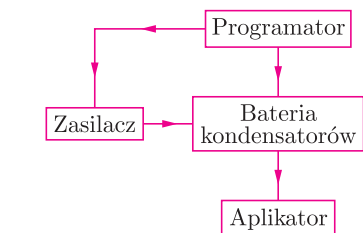
Rys. 1. Schemat układu do wytwarzania pól magnetycznych z możliwością modulacji.

Pierwsze próby wykorzystania pól magnetycznych do celów leczniczych miały miejsce już w starożytnym Egipcie i Grecji. Istnieją dowody na to, że Aesculapides, jeden z ówczesnych greckich uczonych, obserwował wpływ pól magnetycznych, wytworzonych zapewne przez kawałki rudy żelaza zwane magnetytem, na organizm człowieka. Istotne rozszerzenie zakresu zastosowań pól magnetycznych o niskiej częstotliwości do leczenia różnych schorzeń i poprawy funkcjonowania ludzkiego organizmu odbywa się w ostatnich kilkunastu latach. Badaniem zachodzących przy tym zjawisk i procesów zajmuje się stojąca na pograniczu fizyki i medycyny dziedzina naukowa zwana fizyką medyczną.

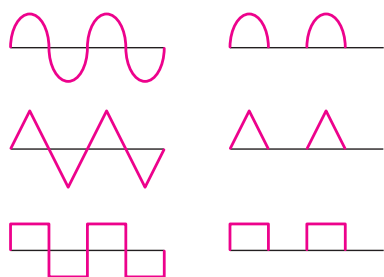
Współczesne oddziaływanie polem magnetycznym na organizm człowieka dzieli się na dwa rodzaje, zróżnicowane celami i parametrami pola: są to magnetostymulacja i magnetoterapia. Pierwszy z nich służy do pobudzania funkcji organizmu i wykorzystuje pola magnetyczne o indukcji nieprzekraczającej 10^{-4} T i częstotliwości do 3 kHz. Drugi rodzaj ma na celu leczenie istniejących schorzeń i posługuje się silniejszymi polami o indukcji od 10^{-4} do 0,02 T i częstotliwości nieprzekraczającej 1 kHz. Dla porównania, indukcja pola magnetycznego Ziemi wynosi od $3 \cdot 10^{-5}$ T do $7 \cdot 10^{-5}$ T. W magnetostymulacji stosuje się również pola zmodulowane, tak żeby ich amplituda zmieniała się z częstotliwością od kilku do 100 Hz.

Czas trwania pola w obu rodzajach oddziaływań wynosi od kilku do kilkunastu minut. Pola magnetyczne przykłada się do organizmu za pomocą tzw. aplikatorów. Są to różnego rodzaju cewki. Najmniejsze z nich to aplikatory punktowe – cewki o rozmiarach kilku centymetrów pozwalające na przyłożenie pola magnetycznego w ściśle określonym miejscu. Większe to aplikatory przestrzenne złożone z jednej dużej lub kilku mniejszych cewek, pozwalające na umieszczenie w polu magnetycznym pewnego obszaru ciała, np. kończyny czy klatki piersiowej. Największe są aplikatory dla całego ciała, mające postać mat lub materaców z umieszczonymi w nich wieloma cewkami.

Schemat blokowy układu do wytwarzania pól magnetycznych o mniejszych wartościach indukcji z możliwością modulacji przedstawia rysunek 1. Parametry pola oraz częstotliwość i głębokość modulacji ustalane są za pomocą programatora zadającego warunki pracy generatora prądu zmiennego i wzmacniacza mocy. Silniejsze pola magnetyczne wytwarzane są w układach zawierających baterię kondensatorów rozładowywaną przez aplikator. Schemat blokowy takiego układu pokazuje rysunek 2. W tym przypadku programator zadaje warunki pracy zasilacza i baterii kondensatorów. Zarówno w magnetostymulacji, jak i w magnetoterapii do zasilania aplikatorów stosowane są impulsy o przebiegu sinusoidalnym, trójkątnym lub prostokątnym albo tzw. impulsy połówkowe, np. półsinusoidalne, otrzymane przez obcięcie połowy wspomnianych przebiegów (rys. 3).



Rys. 2. Schemat układu do wytwarzania silniejszych pól magnetycznych.



Rys. 3. Kształty impulsów pola magnetycznego.



Rozwiązanie zadania F 637.

Korzystamy z zasady zachowania momentu pędu i zasady zachowania energii. W perygeum i apogeum mamy $E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}$, $J = mvr$ (poza tymi punktami energia kinetyczna zawiera też wyraz pochodzący od ruchu radialnego, tj. do lub od centrum planety). Eliminując v i rozwiązując równanie kwadratowe ze względu na r , dostajemy dwa pierwiastki

$$r = \frac{1}{2E} \left(-GMm \pm \sqrt{G^2 M^2 m^2 + \frac{2JE^2}{m}} \right).$$

Podstawiając $J = mv_a r_a$ i $E = \frac{mv_a^2}{2} - \frac{GMm}{r_a}$, dostajemy jako pierwiastki r_a oraz

$$r_p = r_a \left(\frac{2GM}{v_a^2 r_a} - 1 \right)^{-1}.$$

4

Aby obliczyć v_p , korzystamy jeszcze raz z zasady zachowania momentu pędu $mv_a r_a = mv_p r_p$ i otrzymujemy $v_p = v_a \left(\frac{2GM}{v_a^2 r_a} - 1 \right)$.



Rozwiązanie zadania M 1088.

Niech $ABCDE$ będzie pięciokątem wypukłym o wierzchołkach w punktach kratowych, zawartym w danym pięciokącie i mającym najmniejsze pole. Z zasady szufladkowej wynika, że wśród wszystkich par wierzchołków istnieje para o odpowiednich współrzędnych tej samej parzystości, a zatem środek pewnej przekątnej pięciokąta $ABCDE$ lub środek jednego z jego boków jest punktem kratowym. W pierwszym przypadku teza zadania jest spełniona. W drugim przypadku przyjmijmy, że X jest środkiem odcinka AB . Wówczas pięciokąt $XCDE$ ma wierzchołki w punktach kratowych, jest zawarty w wyjściowym pięciokącie oraz ma pole mniejsze od pola pięciokąta $ABCDE$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że istnieje punkt kratowy leżący wewnątrz danego pięciokąta.

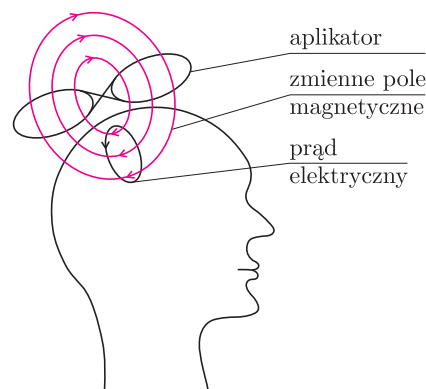
Ze względu na bardzo skomplikowaną strukturę i złożone funkcje organizmu człowieka wiele szczegółów związanych z oddziaływaniem pola magnetycznego o niskiej częstotliwości nie zostało jeszcze dokładnie poznanych i nadal pozostaje w sferze hipotez. Udało się jednak wykryć kilka niebudzących wątpliwości efektów zachodzących po przyłożeniu pola. Stwierdzono, że w organizmie przepływają słabe prądy elektryczne polegające na ruchu jonów przenoszących ładunki elektryczne. W polu magnetycznym na te ładunki działa siła Lorenza, powodująca zmianę kierunku ich ruchu. Tak więc pole magnetyczne powoduje w organizmie efekty elektrodynamiczne. Niektóre związki chemiczne lub nawet całe komórki mają wypadkowy moment magnetyczny – podobnie jak małe magnesy. Pole magnetyczne, oddziałując na takie magnesy, może doprowadzić do zmiany ich orientacji w przestrzeni lub kształtu albo osłabić wiązanie z innymi cząsteczkami. Są to przykłady efektów magnetomechanicznych powodowanych przez pole. W organizmie znajdują się duże ilości tzw. płynów ustrojowych, zawierających poruszające się jony. Pod działaniem siły Lorenza zakrzywiającej ich tor ruchu jony te zaczynają poruszać się po okręgach. Gdy częstotliwość zmian pola i jego indukcja będą odpowiednio dobrane, wówczas wystąpi jonowy rezonans cyklotronowy i częstotliwości ruchu jonów po okręgach oraz zmian pola staną się równe. Zmienne pole magnetyczne indukuje również zmienne pole elektryczne, które może powodować przepływ dodatkowych prądów elektrycznych, szczególnie w tkankach o niższej oporności elektrycznej, jak tkanka nerwowa.

Istotną zaletą magnetoterapii i magnetostymulacji jest ich nieinwazyjny charakter, polegający na braku mechanicznej ingerencji w struktury organizmu, np. nakłuwania tkanek, a także niskie koszty i prosty sposób zastosowania. Magnetoterapię z dobrymi skutkami wykorzystano w przypadku wielu schorzeń, a w szczególności zwyrodnienia stawów i kręgosłupa, stanów zapalnych, trudno zrastających się złamań kości, stłuczeń tkanek miękkich i dolegliwości bólowych. Magnetostymulacja stosowana jest z powodzeniem do poprawy oddychania komórek i przyspieszania regeneracji tkanek miękkich po kontuzjach, a także do obniżania poziomu stresu. Z magnetostymulacji korzystają znani sportowcy, m.in. Adam Małysz.

Bardzo obiecująco zapowiada się wykorzystanie magnetostymulacji do leczenia i poprawy funkcjonowania ludzkiego mózgu. Jedną z chorób dotyczących coraz więcej osób, zwłaszcza w krajach wysokorozwiniętych, jest depresja. Polega ona na zmniejszeniu ilości pewnych substancji zwanych neuroprzekaznikami, głównie dopaminy i serotoniny, które biorą udział w przekazywaniu informacji między komórkami nerwowymi, czyli neuronami. Skutkiem tego jest pogorszenie ogólnej sprawności fizycznej i umysłowej, przejawiające się m.in. mniejszą wydolnością fizyczną, spowolnieniem myślenia, gorszym

zapamiętywaniem oraz smutnym nastrojem. W ciężkich przypadkach do leczenia depresji oprócz środków farmaceutycznych stosowane są wstrząsy elektryczne. Polegają one na przyłożeniu do głowy pacjenta elektrod i spowodowaniu przepływu prądu elektrycznego. Zabieg ten, choć niezwykle prosty z technicznego punktu widzenia, jest bardzo nieprzyjemny dla pacjenta oraz ma skutki uboczne w postaci zaników pamięci i zaburzeń orientacji. Dlatego też pacjenci poddawani wstrząsom elektrycznym wymagają silnych środków przeciwbólowych i zwykle muszą przez pewien czas pozostać w szpitalu. Nic więc dziwnego, że lekarze i fizycy poszukiwali lepszych metod. Okazało się, iż podobny skutek leczniczy bez efektów ubocznych można osiągnąć, stosując stymulację mózgu wolno zmieniającym się polem magnetycznym.

W istocie rzeczy do stymulacji tej wykorzystywany jest również przepływ prądów elektrycznych, podobnie jak w przypadku wstrząsów elektrycznych. Prądy są tu wytwarzane jednak w inny sposób. Nad głowę pacjenta umieszcza się aplikator stanowiący zwykle podwójną cewkę w kształcie ósemki, zasilaną zmiennym prądem elektrycznym (rys. 4).

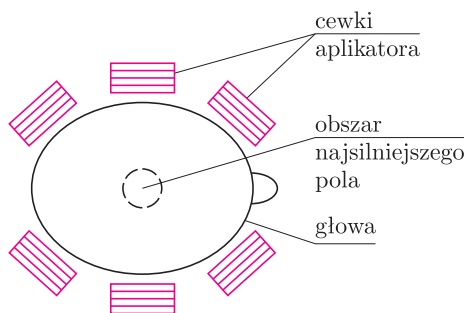


Rys. 4. Układ do magnetostymulacji mózgu.

Cewka taka wytwarza wokół siebie zmienne pole magnetyczne, które w znacznej części przenika przez skórę i kości czaszki do mózgu. Tkanka mózgowa charakteryzuje się dość dobrą przewodnością elektryczną. Zmienne pole magnetyczne indukuje wokół siebie również zmienne pole elektryczne, pod wpływem którego w tkance mózgowej następuje przepływ prądu elektrycznego. Zachodzi tutaj znane zjawisko indukcji elektromagnetycznej, które jest podstawą działania m.in. transformatora, z tą różnicą, że w przypadku magnetostymulacji rolę uzwojenia wtórnego spełnia fragment mózgu pacjenta.

Aplikatory z podwójną cewką w kształcie ósemki mają istotną wadę, polegającą na małej głębokości wnikania pola magnetycznego do tkanki. Skuteczna stymulacja przy użyciu takich aplikatorów ogranicza się do zewnętrznych fragmentów kory mózgowej, znajdujących się nie głębiej niż 2–3 cm pod powierzchnią czaszki. Dlatego też prowadzone są

prace zmierzające do zbudowania aplikatorów umożliwiających głęboką stymulację dowolnie wybranego fragmentu mózgu. Jedno z obiecujących rozwiązań polega na zastosowaniu sześciu pierścieniowych cewek umieszczonych po trzy z obu stron głowy pacjenta (rys. 5).



Rys. 5. Układ do głębokiej magnetostymulacji mózgu.

Cewki nawinięte są w tym samym kierunku i połączone szeregowo. Sumując wektory indukcji magnetycznej pól wytworzonych przez każdą z cewek, łatwo sprawdzić, że wypadkowe pole ulega wzmocnieniu w obszarze środkowym między cewkami. Położenie i wielkość tego obszaru oraz indukcję wypadkowego pola można regulować przez zmianę położenia cewek. Zwykle cewki takie przymocowane są do giętkiego pasa lub przegubów, co ułatwia dobranie optymalnych parametrów pola.

Stymulacja mózgu polem magnetycznym o niskiej częstotliwości stosowana jest nie tylko w przypadku chorych na depresję. Badania przeprowadzone w kilku ośrodkach w Stanach Zjednoczonych i Europie wykazały jej skuteczność u pacjentów cierpiących na chorobę Parkinsona, u których powodowała zmniejszenie drżenia kończyn i poprawę sprawności ruchowej. Stymulacji poddawano także osoby zdrowe. Stwierdzono, że pobudzając dostatecznie silnie określone obszary mózgu, można spowodować ruch pewnych części ciała, np. zginanie kciuka lub odbieranie wrażeń powodowanych przez nieistniejące bodźce, takie jak błysk światła czy dźwięk. Znaczna grupa osób poddanych stymulacji magnetycznej mózgu wykazywała zadowolenie i zwiększoną odporność na stres. Wzrost zadowolenia stwierdzono także przypadkowo u osób poddanych badaniu rezonansem magnetycznym, których głowa umieszczona była w polu magnetycznym. Te interesujące efekty są obecnie intensywnie badane, w celu ich dokładniejszego zrozumienia. Jeżeli rozpoczęte badania zakończą się sukcesem, to być może za kilka lat modne czapeczki z przenośnymi stymulatorami magnetycznymi, dającymi odpoczynek i wzrost zadowolenia, staną się przedmiotem codziennego użytku. Tę hipotezę uzasadnia fakt, że już obecnie kilka firm na świecie oferuje seryjnie produkowane stymulatory do użytku w warunkach stacjonarnych.

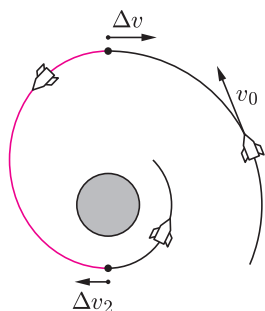


Zadania

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

F 637. Ciało krążące po eliptycznej orbicie wokół planety o masie M ma w apogeum prędkość v_a i odległość od centrum planety równą r_a . Jaką odległość od środka planety r_p i prędkość v_p będzie miało ciało w perygeum? Rozwiązanie na str. 4

F 638. Pojazd kosmiczny krąży po orbicie kołowej z prędkością v_0 wokół planety o masie M . W pewnym momencie hamuje bardzo krótkim impulsem, zmniejszając swoją prędkość o Δv . Po drugiej stronie planety (rys. 1) pojazd hamuje jeszcze raz. O ile musi zahamować, aby trafić znów na orbitę kołową? Jaka będzie wartość jego prędkości na tej orbicie? Skorzystać z wyników poprzedniego zadania. Rozwiązanie na str. 3



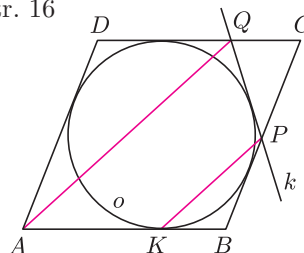
Rys. 1

Redaguje Waldemar POMPE

M 1087. Na każdym polu nieograniczonej szachownicy napisano liczbę całkowitą, przy czym każda napisana liczba występuje na szachownicy tylko raz. Dowieść, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a istnieją takie dwa sąsiednie pola szachownicy, że różnica liczb napisanych na tych polach jest większa od a . Rozwiązanie na str. 16

M 1088. Dany jest pięciokąt wypukły o wierzchołkach w punktach kratowych. Udowodnić, że wewnątrz tego pięciokąta znajduje się punkt kratowy. (Punktem kratowym nazywamy punkt płaszczyzny, którego obie współrzędne są liczbami całkowitymi.) Rozwiązanie na str. 4

M 1089. Okrąg o , wpisany w romb $ABCD$, jest styczny do boku AB w punkcie K (rys. 2). Styczna do okręgu o przecina odcinki BC i CD odpowiednio w punktach P i Q . Wykazać, że proste AQ i KP są równoległe. Rozwiązanie na str. 16



Rys. 2

1000 lat przed Euklidesem

Jarosław GÓRNICKI

3000 lat przed naszą erą w dolinie Nilu ukształtowała się cywilizacja starożytnego Egiptu. Zachowane dzieła architektury świadczą, że jej kultura materialna, techniczna i organizacyjna była na wysokim poziomie.

Okolo 2550 roku p.n.e., za panowania faraona Cheopsa (Chufu), została wybudowana na zachodnim brzegu Nilu Wielka Piramida. Do dzisiaj imponuje ona swoją wielkością. Boki niemal kwadratowej podstawy miały pierwotnie długości: północny 230,26 m, południowy 230,45 m, wschodni 230,39 m, zachodni 230,36 m, wysokość piramidy wynosiła zaś 146,7 m [dane według encyklopedii *Britannica, edycja polska*, t. 10, str. 322]. (Ciekawostka: obwód podstawy podzielony przez podwójną wysokość daje dobre przybliżenie liczby π .) O sposobach wznoszenia piramidy Cheopsa i jej przeznaczeniu napisano już wiele hipotez. Jej trwanie zdaje się być wynikiem dobrej jakości użytego do budowy materiału i precyzji wykonania (podobno skalna podstawa piramidy o powierzchni 5,3 hektara została wypoziomowana z dokładnością do 1 cm.).

Tysiąc lat później, w okresie Nowego Państwa, faraon Amenhotep III w ogromnym kompleksie świątyni Amona-Re w Karnaku (ówczesnej stolicy Egiptu) wybudował 12 kolumn, każda o średnicy 3,5 m i wysokości 23 m. Dało to początek Wielkiej Sali Hypostylowej. Jej ostateczną formę nadali faraonowie Seti I i jego syn Ramzes II. Dobudowali oni 122 kolumny o 20-metrowej wysokości i utworzyli największe w starożytności pomieszczenie kryte dachem (około 4850 m²), które było oświetlane i wentylowane dzięki centralnie położonej wyższej kolumnadzie (do dzisiaj przetrwał jedynie las kolumn). W Karnaku stoją też dwa obeliski (jeden królowej Hatszepsut, drugi faraona Tutmosa I), oba o wysokości 24 m, kwadratowej podstawie o boku 1,8 m i wadze około 143 ton. Zadziwia precyzja ich wykonania i ustawienia.

Realizatorzy tych budowli (architekci, robotnicy) udowodnili, że dysponowali wystarczającą wiedzą oraz umiejętnościami do ich wzniesienia. Jakimi pomysłami wykorzystywali, jakimi posługiwali się narzędziami, by „uchwycić” pion, poziom, zapewnić powtarzalność pewnych elementów w trakcie wznoszenia tych gigantycznych obiektów?

Nasza wiedza w tym zakresie jest skromna. Wiemy na przykład, że w starożytnym Egipcie wielkości i nazwy jednostek pomiarowych wywodziły się z naturalnych proporcji ludzkiego ciała. Podstawową jednostką długości był **łokiec** (około 52,5 cm) dzielony na 7 (szerokości) **dłoni**, a dłoń na 4 **palce**. 100 łokci tworzyło **pręt**. Podstawową jednostką powierzchni było pole kwadratu o boku 1 pręta. Konieczność ustawicznego odtwarzania działek po wylewach Nilu, ich wymiarowanie w celu nałożenia na właściciela lub dzierżawcę wielkości podatku, wymuszało ustalenie pewnych geometrycznych zależności i wyrażanie ich w postaci liczbowej. W zakresie „geometrii praktycznej” Egipcjanie potrafili dokładnie wyznaczać pola niektórych wielokątów, z zadowalającą dokładnością obliczali pole koła, wyznaczyli objętości walców oraz ściętej piramidy.

W muzeum w Luksorze prezentowane są eksponaty z okresu Nowego Państwa (około 1540–1075 r. p.n.e.). Jedną z ekspozycji (ostatnia strona okładki) to ówczesne narzędzia, które mogły służyć do wykonywania pomiarów. Czy stosowanie tych instrumentów mogło się obyć bez geometrycznych rozważań? Zapewne wiele satysfakcji dostarczyłoby odkrycie dróg, jakimi podążały myśli realizatorów wielkich budowli z tak odległej przeszłości... 1000 lat przed Euklidesem! Miejmy nadzieję, że prowadzone prace archeologiczne pozwolą nam lepiej poznać wiedzę starożytnych Egipcjan, a ich osiągnięcia będą dostępne dla wielu przyszłych pokoleń.





Jak rozwiązać równanie Fibonacciego?

W 1202 roku bogaty kupiec Leonardo z Pizy (1180–1240), znany dziś powszechnie jako Fibonacci (co oznacza syn Bonacciego), opublikował w wieku 22 lat dzieło *Liber Abbaci* (Księga Abaku, czyli rachunku). W książce tej opisuje w sposób matematyczny, aczkolwiek bardzo niedokładny, przyrost liczby par osobników w populacji królików w kolejnych pokoleniach. Problem został przez niego postawiony w stylu wschodnim, a więc jako zagadka:

Ile par królików może zrodzić się z jednej pary w ciągu roku, jeśli

– każda para rodzi nową parę w ciągu miesiąca,

– para staje się płodna po miesiącu,

– króliki nie zdychają?

Wiekopomną zasługą Fibonacciego jest oczywiście raczej zainteresowanie matematyków równaniem o bardzo ciekawych własnościach, a nie oszalamiająca adekwatność jego modelu do zaobserwowanej rzeczywistości. Zobaczmy zatem, do jakiego równania prowadzą dość nonszalanckie założenia Leonarda z Pizy.

Oznaczmy liczbę par królików w n -tym pokoleniu przez $y(n)$. Początkowo mamy $y(1) = 1$ i $y(2) = 1$. Zapiszmy teraz równaniem podaną przez Fibonacciego regułę wzrostu populacji królików:

$$(F) \quad y(n+2) = y(n+1) + y(n).$$

Oczywiście korzystając z warunku początkowego, możemy teraz obliczyć

$$y(3) = y(2) + y(1) = 1 + 1 = 2,$$

następnie, wstawiając do równania $y(2)$ i $y(3)$, wyliczamy

$$y(4) = y(3) + y(2) = 2 + 1 = 3,$$

i tak dalej. Otrzymujemy ciąg 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., zwany ciągiem Fibonacciego.

Podana metoda obliczania n -tego wyrazu ciągu ma tę wadę, że jest wysoce kłopotliwa, gdy chcemy obliczyć, powiedzmy, tysięczny wyraz ciągu. Czy mamy wcześniej dokonać 997 obliczeń poprzednich wyrazów? Spróbujmy inaczej, tzn. zastanówmy się, czy da się wyliczyć n -ty wyraz ciągu Fibonacciego bez wyliczania wyrazów poprzednich? Jak to zrobić? Do równania (F) podstawmy $y(n) = \lambda^n$. Otrzymamy

$$\lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + \lambda^n.$$

Dzieląc równanie przez λ^n (co możemy zrobić, bo rozwiązanie $\lambda = 0$ jest dla nas mało przydatne), otrzymujemy równanie kwadratowe

$$\lambda^2 = \lambda + 1.$$

Teraz przenosimy λ na lewą stronę, dodajemy do obu stron $\frac{1}{4}$

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$$

i, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia, mamy

$$\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

Stąd

$$\lambda = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{lub} \quad \lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Widzimy zatem, że zarówno ciąg $y_1(n) = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$, jak i ciąg $y_2(n) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n$ spełniają równanie (F). Niestety, żaden z nich nie spełnia warunku początkowego (tzn. warunku $y(1) = y(2) = 1$). Rozważmy jednak ciągi postaci

$$y(n) = a \cdot y_1(n) + b \cdot y_2(n),$$

gdzie a i b są dowolnymi stałymi. Z łatwością sprawdzamy, że każdy taki ciąg spełnia równanie (F). Spośród tych ciągów chcielibyśmy wybrać taki, który spełnia warunek początkowy. Szukamy zatem takich a i b , by był spełniony układ równań

$$\begin{cases} 1 = a \cdot y_1(1) + b \cdot y_2(1), \\ 1 = a \cdot y_1(2) + b \cdot y_2(2). \end{cases}$$

Rozwiązanie układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi nie jest sztuką nadmiernie trudną. W wyniku otrzymujemy

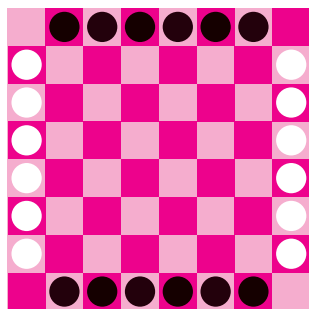
$$a = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{oraz} \quad b = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Czy potraficie teraz z pomocą kalkulatora obliczyć, ile – w przybliżeniu – będzie królików w pięćdziesiątym pokoleniu?

Małgorzata MIGDA i Ewa SCHMEIDEL

Lines of Action – perła wśród gier

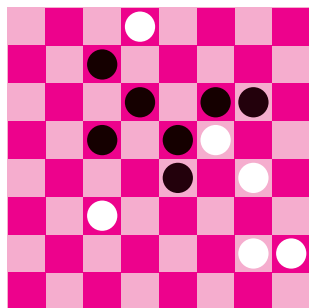
Naprawdę istnieje niewiele gier takich jak szyki, których piękno polega na prostocie, niewielkiej liczbie reguł i koniecznych rekwizytów, i jasnym celu gry, które łączą się z wielką złożonością i głębią koniecznych do gry strategii.



Rys. 1

Z punktu widzenia teorii gier szyki można scharakteryzować jako grę dwuosobową z zerową sumą wypłat i z pełną informacją. Nie wiemy, czy jest niesprawiedliwa, czy czczą, czyli czy istnieje strategia zapewniająca wygraną jednemu z graczy, czy takiej strategii nie ma.

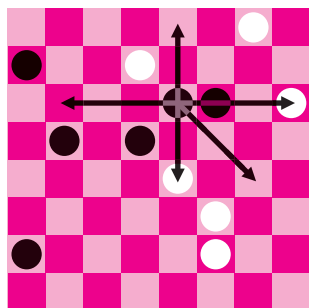
Grę wymyślił amerykański pisarz humorysta Claude Soucie około 43 lat temu. Sid Sackson opisał jej zasady w pierwszej edycji swojej książki *Gamut of Games* w 1969 roku. Jej angielska nazwa to *Lines of Action*, ja posługuję się nazwą „szyki” zaproponowaną przez Marka Penszko w pierwszym znanym mi polskim artykule na temat szyków, który ukazał się w czasopiśmie „Problemy” w listopadzie 1976 roku.



Rys. 2

Szyki przyciągnęły uwagę badaczy sztucznej inteligencji. Pierwszy program, który grał w tę grę, został napisany w Stanford w języku SAIL około 1975 roku. Dave Dyer napisał później lepiej grający program. Do lat dziewięćdziesiątych pojawiły się programy dla PC. Istnieje ich obecnie kilka: *Mona*, *YL*, *Loa2D*, *LoaW* itd. Autor tego artykułu też stworzył taki program, ustępujący innym skutecznością, ale bijący początkujących graczy.

Szyki nie są jedynie przedmiotem badań wąskiego grona naukowców, wręcz przeciwnie, ich popularność rośnie. Początkowo grano w nie na amerykańskich uniwersytetach, dziś są szeroko znane dzięki Internetowi. Istnieje szereg zawodów rozgrywanych za pomocą poczty internetowej. Pierwsze światowe mistrzostwa odbyły się w 1997 roku. Ich zwycięzcą został Holender Fred Kok.



Rys. 3

Przejdźmy jednak do rzeczy, czyli do zasad gry, które, natychmiast wypróbowane, pomogą zrozumieć rosnącą jej popularność.

Gra toczy się na zwykłej planszy do warcabów z kompletem warcabowych pionów – 12 białych i 12 czarnych. Kolor pól nie jest istotny. Położenie początkowe ilustruje rysunek 1. Czarne zaczynają.

1. Celem gry jest połączenie wszystkich swoich pionów pozostających na planszy w jedną całość.
2. Twoje piony są połączone, jeśli król szachowy (poruszający się zgodnie z zasadami szachów) może odwiedzić wszystkie zajęte przez nie pola, nie będąc zmuszony do zejścia na puste pole lub pole zajęte przez pion przeciwnika. (Patrz rysunek 2. – przykładowa pozycja końcowa.)
3. W przypadającym na ciebie ruchu możesz poruszyć dowolnym swoim pionem w dowolnym kierunku po linii prostej, jednakże dokładnie o tyle pól, ile pionów stoi na linii, po której się poruszasz (licząc pionów zarówno swoje, jak i przeciwnika; patrz rysunek 3.).
4. Wolno przeskakiwać swoje piony, ale nie wolno skakać przez pion przeciwnika.
5. Możesz bić pion przeciwnika, zajmując pola, na których stoją (jak w szachach).
6. Gracz pozostający z jednym pionem na planszy wygrywa. (Nie można zatem wygrać, bijąc przeciwnikowi wszystkie jego pionów.)
7. Jeśli w wyniku ruchu obaj gracze osiągną zwycięski szyk, jest remis.
8. Jeśli któryś z graczy nie może wykonać przypadającego nań ruchu, opuszcza kolejkę.
9. Jeśli jakaś pozycja pojawi się na planszy dwukrotnie, gra kończy się remisem.

Wszystkich zainteresowanych odsyłam do stron internetowych poświęconych szynom, na przykład www.linesofaction.com

Niestety, nie słyszałem o polskiej stronie o tej tematyce. Wszelkie inicjatywy w tej sprawie powitam z radością. Mój e-mail: prawar@poczta.onet.pl

Dariusz LASKOWSKI

Sposób na rozładowanie napięcia

Dla Czytelników *Delty* oczywista jest niedorzeczność przenoszenia naszego codziennego, makroskopowego doświadczenia w świat mikroskopowy. Ale jeżeli to się już wie, to można pozwolić sobie na poszukiwanie analogii, antropomorfizmów i paraboli. Zadziwiająca jest łatwość znajdowania odpowiednich porównań. Nie wiem, dlaczego tak jest. Może, po prostu, ludzka natura i mechanika kwantowa, przy prostocie podstawowych reguł, mają podobnie skomplikowane realizacje?

Tematem aktualnych aktualności jest pierwsza obserwacja międzyatomowego rozpadu kulombowskiego (ang. *interatomic Coulombic decay*, ICD). Jest to kilka lat temu przepowiedziany [1] rodzaj deekscytacji wzbudzonego atomu (cząsteczki) sąsiadującego z innym atomem (cząsteczką).

Posłużmy się antropomorfizmem. Bardzo często zdarza się, że nasze napięcie wywołane jest konfliktem z osobą, na której, z jakiegoś powodu, nie możemy lub boimy się to napięcie rozładować. Tłumiona emocja, wcześniej czy później, owocuje jednak wybuchem, tylko skierowanym przeciwko komuś innemu... Zjawisko, które za chwilę omówimy, można porównać również do pozytywnej sytuacji znanej z literatury: „Ja nie mam nic, ty nie masz nic, to razem wystarczy nam na fabrykę...”.

Osiemdziesiąt lat temu Pierre Auger odkrył, że stan wzbudzony atomu może zostać deekscytowany nie tylko za pomocą emisji fotonu, ale również poprzez emisję jednego z elektronów. Na to, jakimi kanałami może odbywać się rozpad stanu wzbudzonego atomu, ma pewien wpływ środowisko, w którym atom się znajduje (piękny „naturalny” antropomorfizm), ale do niedawna sądzono, że nie może to prowadzić do zmian radykalnych, takich jak otwarcie nowych kanałów rozpadu. Jednak pionierska praca Cederbauma i współpracowników [1] podała ten pogląd w wątpliwość. Według jej autorów atom może przekazać swoje napięcie sąsiadnemu atomowi, powodując emisję elektronu z niewzbudzonego atomu.

Prototypem, dla którego zostały przeprowadzone obliczenia i który został użyty do pierwszego doświadczalnego potwierdzenia [2] przewidywań [1], jest układ ledwie związanych atomów neonu. Ze szkoły pamiętamy, że gazy szlachetne występują w postaci jednoatomowej, w odróżnieniu od „zwykłych” pierwiastków w stanie gazowym, które zazwyczaj tworzą dwuatomowe cząsteczki. Jednak w gazach szlachetnych tworzy się w sprzyjających warunkach niewielka domieszka luźno (za pomocą sił van der Waalsa) związanych par atomów. W przypadku neonu jest to taki układ (dimer, słowo o podobnym znaczeniu co polimer, tylko odnoszące się do związku dwóch składników) atomów, których jądra odległe są aż o 34 nm, czyli sześciokrotnie więcej niż w przypadku cząsteczki wodoru. W atomie neonu wypełnione są orbitale elektronowe 1s, 2s i 2p. Jeżeli jeden z elektronów 2s zostanie usunięty, to izolowany atom nie może deekscytować się augerowsko, bo przerwa energetyczna między elektronem 2p a czekającą na niego dziurą 2s jest zbyt mała, żeby wystarczyło energii na emisję najslabiej związanego elektronu. Jeżeli jednak w pobliżu jest drugi atom neonu, to ta sama energia wystarczyłaby na emisję jego elektronu, bo ten drugi atom nie jest jeszcze

zjonizowany. Z samego faktu istnienia takiej możliwości z energetycznego punktu widzenia nie wynika jednak, że miałyby ona być realizowana w przyrodzie. Emisja elektronu Augera nie jest przecież jedynym możliwym kanałem deekscytacji.

Jeżeli jednak taki rozpad stanu wzbudzonego jest możliwy, to dlaczego nikt go nigdy nie zaobserwował? Powodem jest bardzo niska energia elektronu, który w dodatku miałby być emitowany ze słabo związanych układów. W układach takich występuje tło niskoenergetycznych elektronów pochodzących z nieelastycznych zderzeń molekuł.

Odkrycie ICD było możliwe dzięki odtworzeniu pełnej informacji o rozpadającym się układzie. Najpierw jeden z atomów dimeru Ne₂ absorbuje foton o odpowiednio dobranej energii i emituje elektron Augera. Jeżeli możliwa jest deekscytacja przez ICD, to właśnie w tym momencie może ona zająć – jeden z elektronów 2p zjonizowanego atomu przeskakuje do orbitala 2s, wyzwolona energia jest przekazywana za pośrednictwem wirtualnego fotonu do drugiego atomu i wykorzystana do jego jonizacji. Powstaje para jonów Ne⁺, które nie mogą się już razem utrzymać. W rezultacie jednocześnie powstaje para jonów Ne⁺ i elektron. Z bilansu energetycznego wynika, że wspólnie muszą mieć one energię kinetyczną równą dokładnie 5,16 eV.

Eksperyment został przeprowadzony w Ośrodku Promieniowania Synchrotronowego BESSY w Berlinie. Dimery neonu były wytwarzane poprzez rozpylanie. Niezależnie zmierzony stosunek liczby powstających dimerów do pojedynczych atomów neonu wynosił co najmniej 0,5%. Promieniowanie synchrotronowe o energii 58,8 eV było używane do jonizacji. Powstające w eksperymencie elektrony i jony były kierowane do detektorów za pomocą kombinacji statycznych pól elektrycznego i magnetycznego. Rejestrowana była pozycja, energia i czas przelotu, co pozwoliło na odtworzenie pełnej informacji kinematycznej o produktach ICD.

Sygnałem poszukiwanego rozpadu było zaobserwowanie przypadku o określonym sumarycznym czasie przelotu jonów neonu, świadczącym o ich rozlocie w dwie strony z taką samą energią. Jednocześnie rejestrowano niskoenergetyczny elektron. Sumaryczna energia tych trzech produktów rozpadu musiała równać się oczekiwanej energii 5,16 eV. Wyniki eksperymentu świetnie zgadzają się z oczekiwaniami.

Czy to tylko kolejna ciekawostka? Okazuje się, że nie. To subtelne zjawisko może mieć kolosalne znaczenie. Układami, w których może ono zachodzić, są między innymi powszechnie występujące wiązania wodorowe. Stale są one obecne np. w zwykłej wodzie, dzięki której zachodzą wszelkie procesy życiowe. To nowo odkryte zjawisko umożliwi ich lepsze zrozumienie.

Możliwe, że nasze zachowania w sytuacjach stresowych byłyby inne, gdyby atomy nie znały tego sposobu wyluzowywania się.

Piotr ZALEWSKI

[1] L.S. Cederbaum, J. Zobeley, F. Tarantelli, *Giant Intermolecular Decay and Fragmentation of Clusters*, Phys. Rev. Lett. **79**(1997)4778

[2] T. Jahnke i inni, *Experimental Observation of Interatomic Coulombic Decay in Neon Dimers*, Phys. Rev. Lett. **93**(2004)163401



Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 2005

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z fizyki nr 392, 393

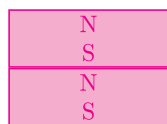
Redaguje Jerzy B. BROJAN

392. Izolowany termicznie cylinder jest podzielony nieprzewodzącym ciepła tłokiem na dwie równe części zawierające jednakowe ilości tego samego gazu o temperaturze T_0 pod ciśnieniem p_0 (rys. 1). Do wnętrza doprowadzamy pewną ustaloną ilość ciepła Q (np. grzałką elektryczną). W którym przypadku ciśnienie wzrośnie bardziej: gdy całe ciepło dostarczymy do jednej części cylindra, czy gdy do każdej części dostarczymy połowę?

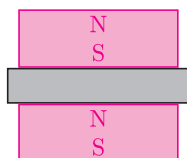


Rys. 1

393. Jak wiadomo, silny magnes wrzucony do pionowej rury miedzianej lub aluminiowej spada dość powoli ze względu na efekty indukcyjne (prądy wirowe wzbudzone w rurze). Czy dwa takie magnesy połączone ze sobą jak na rysunku 2a spadają szybciej, czy wolniej niż pojedynczy magnes? A jak szybko – w porównaniu z tymi dwoma przypadkami – spadają te dwa magnesy rozdzielone lekką niemagnetyczną przekładką (rys. 2b)? Należy podać fizyczne uzasadnienie odpowiedzi.



Rys. 2a



Rys. 2b

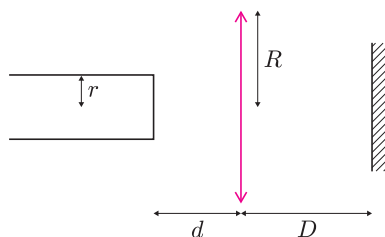
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/2004

Przypominamy treść zadań:

384. Na podstawie następujących danych:

- promień orbity Księżyca wokół Ziemi $R_K = 380\,000$ km,
- promień Ziemi $r = 6\,400$ km,
- przyspieszenie ziemskie g i długość roku (powszechnie znane...), oraz wiedząc, że pływy wywoływane przez Księżyc są około dwóch razy wyższe od wywołanych przez Słońce, ocenić przybliżoną wartość stosunku masy Księżyca do masy Ziemi.

385. Powierzchnia bardzo długiego walca o promieniu $r = 1$ cm wysyła światło. W odległości $d = 10$ cm od końca walca znajduje się przesłona z kołowym otworem o promieniu $R = 3$ cm, przy czym oś walca przechodzi przez środek otworu prostopadle do przesłony (rys. 3). Jaka powinna być ogniskowa f soczewki wypełniającej otwór, aby jasny krąg na ekranie odległym o $D = 15$ cm od przesłony był jak najmniejszy?



Rys. 3

384. Wysokość pływów zależy od różnicy między wartościami siły grawitacji działającej na część Ziemi bliższą i dalszą od ciała niebieskiego wywołującego pływy. Odejmujemy więc

$$\Delta F = \frac{GM_Z M}{(R-r)^2} - \frac{GM_Z M}{(R+r)^2} \approx \frac{4GM_Z M}{R^3} \cdot r,$$

gdzie M_Z jest masą Ziemi, M – masą Słońca lub Księżyca, a R – odległością do danego ciała. Widzimy, że decyduje stosunek masy ciała do sześciangu odległości od Ziemi.

Zakładając, że wysokość pływów jest proporcjonalna do tego ilorazu, otrzymujemy stosunek wysokości pływów księżycowych do słonecznych równy $2 = \frac{M_K R_S^3}{M_S R_K^3}$.

Ponadto według III prawa Keplera masa Słońca jest powiązana z okresem obiegu Ziemi T (długością roku) wzorem: $\frac{GM_S}{R_S^3} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$, a masa Ziemi – z jej promieniem i przyspieszeniem grawitacyjnym na jej

powierzchni: $\frac{GM_Z}{r^2} = g$. Szukany stosunek mas Księżyca i Ziemi wynosi więc

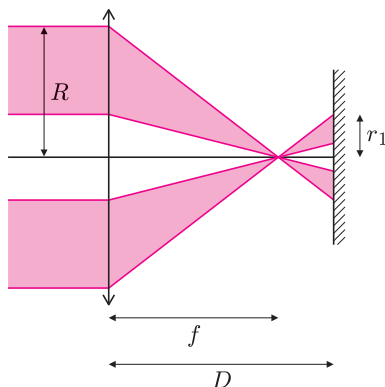
$$\frac{M_K}{M_Z} = \frac{2R_K^3}{g} \left(\frac{2\pi}{Tr}\right)^2 = 0,011.$$

Jego rzeczywistą wartością jest 0,0123, co wobec niedokładności oceny pływów oznacza bardzo dobrą zgodność.

385. Jeśli wziąć pod uwagę promienie nadbiegające z bardzo odległych części walca, to optymalną wartością f byłoby, oczywiście, $f_1 = D$. Promienie wybiegające z podstawy walca najlepiej zaś zogniskować, dobierając f zgodnie ze wzorem $\frac{1}{f_2} = \frac{1}{D} + \frac{1}{d}$. Gdy ogniskowa ma wartość pośrednią między f_1 a f_2 , to nietrudno wykazać, że ze wzrostem f maleje r_1 (zewnątrzny promień kręgu na ekranie, utworzonego przez promienie nadbiegające z dużej odległości), a rośnie r_2 (promień kręgu promieni nadbiegających z podstawy). Z analizy

geometrycznej wynika ponadto, że promienie wybiegające z dowolnego punktu powierzchni bocznej walca nie oświetlają żadnej części ekranu wykraczającej poza powyższe dwa kręgi. Dlatego optymalną wartość f należy wybrać tak, aby r_1 i r_2 się pokryły.

Z rysunku 4 znajdujemy natychmiast $r_1 = R(D - f)/f$. Nieco bardziej skomplikowana jest analiza rysunku 5, na którym zaznaczono promienie wybiegające z punktu na brzegu podstawy walca. Obraz tego punktu leży w odległości $y = \frac{fd}{d-f}$ od soczewki i w odległości $r' = r\frac{y}{d} = \frac{rf}{d-f}$ od osi optycznej.



Rys. 4

Promień r_2 kręgu na ekranie znajdziemy z proporcji

$$\frac{R - r'}{y} = \frac{R - r_2}{D}$$

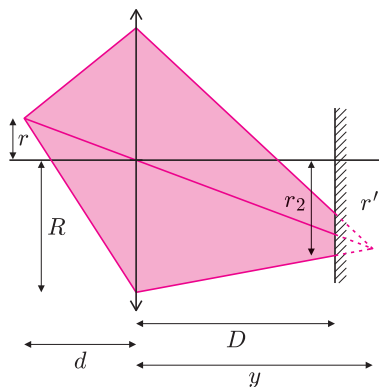
Stąd

$$r_2 = R - \frac{RD}{fd}(d - f) + \frac{Dr}{d}$$

Po przyrównaniu r_1 do r_2 znajdujemy rozwiązanie

$$f = \frac{2RDd}{2Rd + RD + rD} = 7,5 \text{ cm.}$$

Wtedy $r_1 = r_2 = (R + r)D/(2d) = 3 \text{ cm}$. Podany wzór algebraiczny obowiązuje tylko dla $R \geq r$. W przeciwnym wypadku, oczywiście, $f = \frac{Dd}{D+d}$.



Rys. 5

A oto najbardziej istotne uwagi w związku z rozwiązaniami przysłanymi w ostatnim roku.

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po 381 zadaniach

Zbigniew Galias	Kraków	42,38
Andrzej Idzik	Bolesławiec	5-40,42
Tomasz Rudny	Warszawa	31,48
Jacek Piotrowski	Rzeszów	1-29,30
Jerzy Witkowski	Radlin	23,50
Marian Łupieżowiec	Zebrzydowice	22,14
Tomasz Wietecha	Tarnów	5-19,44
Michał Józwiowski	Blonie	14,77
Leszek Grzanka	Chechło	14,03
Piotr Kumor	Olsztyn	13,92
Jacek Konieczny	Poznań	12,77
Konrad Kąpcia	Częstochowa	11,85
Piotr Ładyżyński	Michalin	10,21
Kazimierz Gryszko	Gliwice	9,18
Radosław Poleski	Kołobrzeg	8,65
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	2-6,93
Ryszard Woźniak	Kraków	6,56

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2002–2004 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 6 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Weterani Klubu 44 F

(w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma (2),
P. Gworys, A. Idzik (5), T. Wietecha (5),
J. Łazuka, M. Wójcicki

(jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana została odpowiednia liczba).

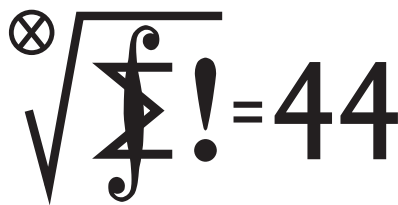
Zadanie 362 [Powietrze ucieka przez dziurkę w ścianie stacji kosmicznej] (współczynnik trudności $WT = 3,20$, liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 2$). Obaj autorzy dobrych rozwiązań – **A. Idzik** i **T. Wietecha** – obliczyli ilość wypływającego gazu w ten sposób, że rozpatrywali ruch poszczególnych cząsteczek, tak jakby trafiały one do otworu niezależnie od siebie. Długość drogi swobodnej cząsteczek w powietrzu pod normalnym ciśnieniem wynosi jednak tylko około 10^{-7} m , czyli znacznie mniej od średnicy otworu. Dlatego sądzę, że lepiej jest uznać powietrze za płyn ciągły, tak jak w rozwiązaniu wzorcowym. Z drugiej strony, ono też zawiera pewną niedokładność: ilość wypływającego gazu zależy nie tylko od powierzchni otworu, ale i od kształtu „dyszy”, a gdy krawędzie otworu są ostre, zwięźnienie się strumienia za otworem powoduje około dwukrotne zmniejszenie przepływu (tzw. efektywna powierzchnia otworu jest równa $\frac{1}{2}S$).

Zadanie 372 [Moc silnika, którego wirnik jest napędzany silnikami odrzutowymi] ($WT = 2,50$, $LPR = 1$). W rozwiązaniu pominięty został pewien istotny element: siła odśrodkowa „tłoczy” paliwo do silników, a dostarczana w ten sposób energia zwiększa prędkość wylotową gazu. Wiąże się to z błędem o poważniejszym charakterze – podane rozwiązanie (według którego maksymalna moc wystąpiłaby wtedy, gdy wylatujące gazy będą w spoczynku względem Ziemi) jest sprzeczne z zasadą zachowania momentu pędu! Po uwzględnieniu tej zasady zachowania okazuje się, że jeśli przyjmiemy ustaloną (jak w treści zadania) prędkość wylotową gazu, to maksymalna moc i prędkość kątowna, przy której ta moc jest osiągnięta, są dwukrotnie mniejsze od wartości podanych w *Delcie*.

Zadanie 374 [Maksymalna wysokość osiągnięta przez grudkę błota oderwaną od opony] ($WT = 1,57$, $LPR = 10$). **P. Ładyżyński** znalazł rozwiązanie tego zadania w podręczniku Butikowa, Bykowa i Kondratiewa *Fizyka*. Odnotujemy przy okazji wyjątkowo dużą liczbę rozwiązań nadesłanych w tej serii. Dla drugiego zadania **375** [Ciepło właściwe gazu zamkniętego tłokiem, na który działa sprężyna] wartości WT i LPR wyniosły odpowiednio 1,82 i 9.

Pozostali członkowie Klubu 44 F (alfabetycznie):

„dwukrotni”: J. Lipkowski, A. Nowogrodzki, P. Perkowski;
„jedenkrotni”: A. Borowski, P. Gadziński, A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak, B. Mikielwicz, L. Motyka, R. Musiał, J. Piotrowski, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, P. Wach.



Termin nadsyłania rozwiązań:

30 IV 2005

Lista uczestników ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań

483 (WT=2,04) i 484 (WT=1,84)

z numeru 6/2004

Józef Siwy	- 1-43,54
Witold Bednarek	- 2-43,23
Zbigniew Sewartowski	- 41,52
Andrzej Józwiak	- 40,64
Bartłomiej Dydka	- 3-40,39
Marian Łupieżowiec	- 39,64
Michał Józwiakowski	- 38,07
Jerzy Witkowski	- 3-35,83
Andrzej Daniluk	- 1-34,80
Tomasz Rawlik	- 5-33,74
Nikodem Szpak	- 33,42
Marcin Kasperski	- 2-33,10
Adam Dzedzej	- 31,71
Tomasz Warszawski	- 30,61
Tomasz Wietecha	- 6-29,76
Marek Prauza	- 3-29,42
Mieczysław Jędrzejowski	- 27,23
Leszek Grzanka	- 26,92
Paweł Walter	- 26,78
Jan Czarłybon	- 24,61
Piotr Kumor	- 8-22,89
Maciej Mostowski	- 1-20,04

Legenda (przykładowo): stan konta 8-22,89 oznacza, że uczestnik już ośmiokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (dziewiątej) rundzie ma 22,89 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

- stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
- przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2002, 2003 lub 2004.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy zostali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M

(w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałęcki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (5), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza, P. Kumor (8), P. Gadziński (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (7), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (6), T. Józefczyk, J. Witkowski, W. Bednorz, B. Dydka, M. Peczański, M. Adamaszek, P. Kubit, J. Cisko

(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

Zadania z matematyki nr 495, 496

Redaguje Marcin E. KUCZMA

495. Wyznaczyć zbiór tych liczb wymiernych dodatnich, które można przedstawić w postaci ułamka $\frac{a^3 + b^3}{c^3 + d^3}$ dla pewnych liczb naturalnych a, b, c, d .

496. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Prosta AI przecina okrąg opisany na trójkącie BIC w punktach I i D ; prosta BI przecina okrąg opisany na trójkącie CIA w punktach I i E ; prosta CI przecina okrąg opisany na trójkącie AIB w punktach I i F . Wyznaczyć największą możliwą wartość iloczynu $\frac{|AI|}{|AD|} \cdot \frac{|BI|}{|BE|} \cdot \frac{|CI|}{|CF|}$.

Zadanie 496 zaproponował pan Michał Kieza z Warszawy.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2004

Przypominamy treść zadań:

487. Wyznaczyć wszystkie funkcje f , określone na zbiorze wszystkich liczb nieujemnych, o wartościach w tym samym zbiorze, mające ciągłą pochodną f' i spełniające nierówność $f'(x) \geq (f(x))^2$ dla $x \geq 0$.

488. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele układów 23 kolejnych liczb naturalnych, których suma kwadratów jest kwadratem liczby naturalnej.

487. Oczywiście $f(x) \equiv 0$ jest jedną z szukanych funkcji. Wykażemy, że nie ma innych. Przypuśćmy, że f jest inną taką funkcją i że $f(a) = c > 0$ dla pewnego $a \geq 0$.

Funkcja f ma nieujemną pochodną, więc jest niemalejąca. Zatem dla $x \geq a$ mamy $f'(x) \geq (f(x))^2 \geq (f(a))^2 = c^2$, skąd wynika, że funkcja f rośnie nieograniczenie, przyjmując wszystkie wartości z przedziału $\langle c; \infty \rangle$. W szczególności każda liczba naturalna $n \geq N = \lceil c \rceil$ jest wartością $n = f(a_n)$ dla pewnego $a_n \in \langle a; \infty \rangle$; ciąg (a_n) jest rosnący, bo funkcja f jest rosnąca.

Dla $x \in \langle a_n; a_{n+1} \rangle$ zachodzi nierówność $f'(x) \geq (f(x))^2 \geq (f(a_n))^2 = n^2$. Wobec tego

$$f(a_{n+1}) - f(a_n) \geq n^2(a_{n+1} - a_n) \quad \text{dla } n \geq N.$$

Lewa strona tej nierówności ma wartość 1. Tak więc $a_{n+1} - a_n \leq n^{-2}$ dla $n \geq N$. Ze zbieżności szeregu $\sum n^{-2}$ wynika teraz, że ciąg (a_n) jest ograniczony.

Daje to żadaną sprzeczność; jeśli bowiem wszystkie liczby a_n leżą w pewnym przedziale $\langle a; b \rangle$, to znaczy, że funkcja f przyjmuje na tym przedziale wszystkie wartości naturalne $n \geq N$, wbrew temu, że – jako funkcja ciągła – musi być na tym przedziale ograniczona. Zatem jedyną funkcją spełniającą postawiony warunek jest funkcja równa tożsamościowo zero.

488. Mamy dowieść, że równanie

$$(x-11)^2 + \dots + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + \dots + (x+11)^2 = y^2$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych x, y ($x > 11$). Przekształcamy to równanie do postaci $23x^2 + 2(1^2 + \dots + 11^2) = y^2$, czyli $23x^2 + 23 \cdot 44 = y^2$. Jeśli para (x, y) jest rozwiązaniem, to $y = 23t$ dla pewnej liczby naturalnej t oraz $x^2 - 23t^2 = -44$. Próbując podstawień $t = 1, 2, 3, 4$, znajdujemy pierwsze rozwiązanie: $x_0 = 18, t_0 = 4$.

Określamy nieskończony ciąg par (x_n, t_n) wzorami rekurencyjnymi

$$x_{n+1} = 24x_n + 115t_n, \quad t_{n+1} = 5x_n + 24t_n$$

(ciągi (x_n) i (t_n) są rosnące, więc wszystkie te pary są różne). Tak określone liczby spełniają równość $x_{n+1}^2 - 23t_{n+1}^2 = x_n^2 - 23t_n^2$. Zatem wszystkie te pary są rozwiązaniami równania $x^2 - 23t^2 = -44$.

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, W. Bednarek, A. Czornik, P. Jędrzejewicz, M. Kasperski, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, D. Kurpiel, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, S. Solecki, G. Zakrzewski;

„jednokrotni”: T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, A. Daniluk, P. Figurny, M. Fiszer, Z. Galias, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewicz, K. Jachacy, M. Kieza, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matłega, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, P. Najman, W. Olszewski, R. Pikula, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, J. Siwy, Z. Skalik, A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach, K. Witek, A. Woryna, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawislowski, P. Żmijewski.

Są chwile, nie częste wprawdzie, ale są, kiedy redaktor matematycznej ligi zadaniowej zazdrości swojemu koledze od fizyki. O co poszło tym razem, zaraz się wyjaśni.

Otrzymujemy od Czytelników listy; korzystamy z okazji, aby za wszystkie pięknie podziękować. I za te z różnymi ciepłymi życzeniami, i za wyrazy sympatii, i za słowa krytyki, czy wręcz oburzenia. A właśnie dostało się nam, i to nieźle. Co gorzej, słusznie.

Akurat rok temu było w lidze zadanie dotyczące pewnego ciągu zbiorów; cztery miesiące później pojawiło się rozwiązanie firmowe, zaczynające się od słów: *Prowadzimy dowód, przyjmując jako milczące założenie, że badane zbiory są różne*. No, coś takiego nie mogło nie wywołać zjadłych protestów. „Milczące założenie – a co to takiego?!” Każde twierdzenie stanie się banalne do udowodnienia, gdy zaczniemy „milcząco” dokładać różne pozytywne założenia. Protestujący Czytelnicy świętą mają rację, nie da się ukryć...

Kłopot w tym, że bez owego „milczącego założenia” teza zadania po prostu nie jest prawdziwa. Czyli, nazywając rzecz po imieniu, daliśmy do udowodnienia fałszywe twierdzenie. Zwykła niestaranność przy redagowaniu tekstu zadania, zgubiony istotny warunek, a potem, przy pisaniu rozwiązania firmowego, próba udawania, że niby nic się nie stało. Teraz możemy tylko pięknie przeprosić. Szerzej o problemie niżej, w omówieniu szczegółowym, zadanie 476.

I wracamy do refleksji, od której zaczęliśmy, o lidze matematycznej i o fizycznej. Otóż do specyfiki zadań z fizyki należy to, że rozwiązujący sam powinien ustalić „rozsądne” warunki, niewspomniane w treści zadania, a dyktowane wycuciem sensowności kontekstu; zdecydować, kiedy trzeba uwzględnić opór ośrodka, efekty relatywistyczne, promieniowanie tła, a kiedy tego robić nie należy; doprecyzować warunki, w jakich odbywa się doświadczenie; itp. Takiej swobody nie ma w zadaniu z matematyki – a w przypadku omawianego właśnie zadania aż się o nią prosi: dopisać założenie, przy którym zadanie dopiero nabiera sensu.

Na różne ciekawe rzeczy potrafią się nasi Czytelnicy w swoich listach uskarżać. Autor jednego z listów oburzył się, że któreś z zadań było zbyt łatwe i opatrzył to takim komentarzem: *Myslałem, że liga zadaniowa jest dla poważnych matematyków, a nie dla przedszkolaków*.

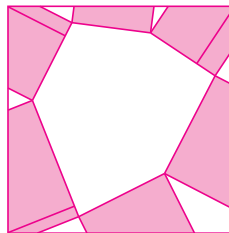
Już mniejsza o to, że regulamin ligi (<http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>) w punkcie 3 mówi wyraźnie: *Uczestnikiem ligi może być każdy* – nie zabrania więc udziału przedszkolakom. Wszelako z tą powagą... Redaktor ligi zadaniowej „poważnym matematykiem” raczej by się nie nazwał. Jakże więc wymagać od uczestników, by owo określenie do nich musiało pasować?

Krzepiąca jest jednak świadomość, że przynajmniej jeden uczestnik ligi za poważnego matematyka się uważa.

Przystąpmy teraz do omówienia wybranych zadań z minionego roku.

Zadanie 470 [*W*: *n*-kątem wypukłym w kwadracie o boku 1 ⇒ pewne trzy kolejne wierzchołki *W* rozpinają trójkąt o polu $\leq 8/n^2$] (współczynnik trudności $WT = 2,89$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 4$). Pełne rozwiązania podali **J. Cisło**, **M. Kieza**, **T. Warszawski**, **T. Wietecha** (oraz **P. Kumor**, który zadanie zaproponował). Wszyscy zaczęli od udowodnienia lematu, że obwód wielokąta *W* jest niewiększy niż obwód zawierającego go kwadratu; dowody

podane przez dwóch autorów wymienionych w pierwszej kolejności działają także w sytuacji ogólniejszej, gdy kwadrat zastąpimy dowolnym innym wielokątem wypukłym, co **M. Kieza** wyraźnie zaznaczył; a dowód, który pokazał **J. Cisło** sprowadza się do starogreckiego „patrz!” – rysunek wiernie reprodukuje (rys. 1). Z lematu od razu wynika, że pewne dwa kolejne boki mają łączną długość $\leq 8/n$ i rozpinają żądany trójkąt.



Rys. 1

Ponadto jeszcze dwaj inni uczestnicy przyjęli ten lemat bez dowodu i jakiegokolwiek komentarza; te rozwiązania zostały uznane za niepełne.

Zadanie 472 [Czy istnieje szereg zbieżny $\sum a_n$ taki, że szereg $\sum a_n^3$ jest rozbieżny?] ($WT = 1,37$; $LPR = 15$). Niestety, zadanie okazało się znane – kilku uczestników podało stosowne odsyłacze, z których najciekawszym jest wskazanie (przez **J. Klisowskiego**) książki W. Kaczor, M. Nowak, *Zadania z analizy matematycznej*, a w niej takiego szeregu zbieżnego $\sum a_n$, że dla każdej liczby naturalnej $k \geq 2$ szereg $\sum a_n^k$ jest rozbieżny; oto ów przykład:

$$\frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{2 \ln 2} - \frac{1}{\ln 2} + \dots + \underbrace{\frac{1}{n \ln n} + \dots + \frac{1}{n \ln n}}_n - \frac{1}{\ln 2} + \dots$$

Zadanie 473 [Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) wpisany w okrąg Ω ; okrąg ω – styczny wewnętrznie do Ω w punkcie T oraz do BC , CA ; okrąg wpisany w $\triangle ABC$ styczny do AB w punkcie $K \Rightarrow D, K, T$ współliniowe] ($WT = 3,70$; $LPR = 2$). Zadanie okazało się trudne – najwyższy WT od kilkunastu lat! Eleganckie rozwiązanie przedstawił **Tomasz Warszawski**:

Oznaczenia: $\alpha = |\sphericalangle BAC|$, $\beta = |\sphericalangle ABC|$, $\gamma = |\sphericalangle BCT|$, $\delta = |\sphericalangle ACT|$, $\varphi = |\sphericalangle ATK|$, $\psi = |\sphericalangle BTK|$. Należy udowodnić, że $\varphi = \alpha$ ($= |\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ATD|$).

Przez punkt R przecięcia odcinka CT z okręgiem ω prowadzimy prostą styczną do ω , przecinającą CA i CB w punktach M i N ; niech S będzie punktem styczności okręgu wpisanego w $\triangle NMC$ z bokiem NM ; mamy $|NS| = |MR|$ oraz $|MS| = |NR|$, bo ω jest okręgiem dopisanym do $\triangle NMC$ (rys. 2). Przez punkt P styczności ω z BC prowadzimy z punktu T prostą przecinającą Ω w punkcie, który – jak łatwo wykazać – połowi łuk BC . Zatem

$$\alpha = |\sphericalangle BTC| = 2 \cdot |\sphericalangle PTR| = |\sphericalangle MNC|,$$

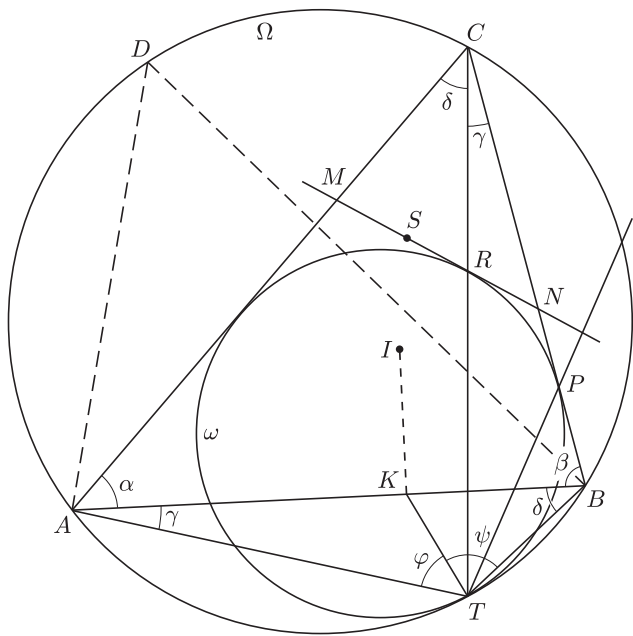
więc $\triangle ABC \sim \triangle NMC$. Stąd wynikają proporcje

$$\frac{|CM|}{|CN|} = \frac{|CB|}{|CA|} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \text{oraz} \quad \frac{|AK|}{|BK|} = \frac{|NS|}{|MS|} = \frac{|MR|}{|NR|};$$

a stosując wzór sinusów do trójkątów CNR , CMR oraz AKT , BKT dostajemy proporcje

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \delta} = \frac{|CM|}{|CN|} \cdot \frac{|NR|}{|MR|} \quad \text{oraz} \quad \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \delta}.$$

Zestawiając uzyskane równości otrzymujemy $\sin \varphi / \sin \psi = \sin \alpha / \sin \beta$; ponieważ zaś $\varphi + \psi = 180^\circ - |\sphericalangle ACB| = \alpha + \beta$, więc $\varphi = \alpha$.



Rys. 2

Autorem drugiego rozwiązania, bardziej zawilego, ale też bezbłędnego, jest **Michał Kieza**.

Zadanie 477 $[x_1, \dots, x_n \geq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{1+x_1^2+\dots+x_k^2} < \sqrt{n}]$ ($WT = 3,21; LPR = 5$). Tylko **J. Cisko** znalazł dowód indukcyjny, jak w rozwiązaniu firmowym. Inne rozumowanie przeprowadzili **M. Kieza, P. Kumor, J. Olszewski** oraz **T. Warszawski**, który dzięki właściwie dobranemu oznaczeniu $a_k = 1 + x_1^2 + \dots + x_k^2$ ($a_0 = 1$) był w stanie przedstawić to rozumowanie krótko i klarownie:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{a_k} &= \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{a_k - a_{k-1}}{a_k^2}} \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}} \leq \\ &\leq \sqrt{n \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} \right)} = \sqrt{n \left(1 - \frac{1}{a_n} \right)} < \sqrt{n}; \end{aligned}$$

pierwsza z nierówności (\leq) wynika z tego, że $a_{k-1} \leq a_k$, druga zaś jest zastosowaniem nierówności Cauchy'ego-Schwarza.

Zadanie 483 [O-R (orzel-reszka); stop, gdy po nieparzystej serii O wystąpi R; X : = liczba rzutów; $E(X) = ?$] ($WT = 2,04; LPR = 11$). Prawie wszystkie poprawne rozwiązania jak firmowe: sprowadzenie do ciągu Fibonacciego i sumowanie generowanego szeregu.

Ale w kilku pracach znalazło się coś takiego: niech E oznacza szukany średni czas. Startujemy; jeśli wypadnie R, wracamy do sytuacji początkowej (prawdopodobieństwo $P = \frac{1}{2}$); jeśli wypadnie OR, to koniec ($P = \frac{1}{4}$); jeśli wypadnie OO, wracamy do sytuacji początkowej ($P = \frac{1}{4}$); dostajemy równanie $E = \frac{1}{2}(E + 1) + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4}(E + 2)$ i wynik $E = 6$.

Pięknie, pod warunkiem, że $E < \infty$; a tego, *a priori*, nie wiemy. To istotna luka i dlatego nie można tych rozwiązań uznać za poprawne; jedynie **P. Najman**, który także (choć nie tak prosto) wprowadził równanie dla E , podał niezbędne uzasadnienie – sumowanie pewnego szeregu, skąd już w gruncie rzeczy niedaleko do rozwiązania firmowego.

Zadanie 476 $[(A_i) - \text{ciąg nieskończony zbiorów 4-elementowych; } \forall i, j: A_i \cap A_j \neq \emptyset \Rightarrow \exists a, b, c \forall i: A_i \cap \{a, b, c\} \neq \emptyset]$ ($WT = 2,88; LPR = 6? 4?$) To właśnie to zadanie z nieprawdziwą tezą; zachowaliśmy jego omówienie na koniec.

Kontrprzykład: A_1, \dots, A_{35} – wszystkie 4-elementowe podzbiory ustalonego zbioru 7-elementowego; a dla $i > 35$ przyjmujemy $A_i = A_{35}$.

Przy dodatkowym założeniu, że zbiory A_i są różne, już jest dobrze – vide rozwiązanie firmowe (wystarczy nawet tylko zażądać, żeby suma $\bigcup A_i$ była zbiorem nieskończonym).

Otrzymaliśmy dwie piękne prace, których autorzy **J. Cisko** i **P. Kumor** zauważyli brak tego istotnego warunku, podali stosowny kontrprzykład, a także dowód tezy po wprowadzeniu brakującego założenia. Sam kontrprzykład i stwierdzenie błędności tezy podali **A. Dzedzej** i **P. Kubit**; te prace, formalnie poprawne, otrzymały także ocenę maksymalną; stąd niższa wartość WT , niż w zamierzeniu redaktora ligi.

Natomiast **R. Dyja** i **J. Witkowski** przyjęli „milcząco” (bez komentarza) owo brakujące założenie (zresztą sugerowane przez użycie w treści zadania słowa *nieskończony* – tyle, że ciąg, nie zbiór) i udowodnili tezę; metoda jak w rozwiązaniu firmowym. Również i te rozwiązania zostały uznane za poprawne („poważny matematyk” zapewne się obruszy, jak można było uznać dowody dwóch wykluczających się zdań za dobre rozwiązania; i, jak w znanym żydowskim dowcipie, „on też będzie miał rację”...).

Odmienne dowód (przy warunku, że $S = \bigcup A_i$ jest zbiorem nieskończonym) przedstawił **Jerzy Cisko**: dla ustalonego n

$$\Phi_n := \{B \subset S: B \cap A_i \neq \emptyset \text{ dla } i \leq n\},$$

$$k_n := \min\{|B|: B \in \Phi_n\}, \quad \Omega_n := \{B \in \Phi_n: |B| = k_n\}$$

(każda rodzina Ω_n jest skończona, bo $B \in \Omega_n \Rightarrow B \subset A_1 \cup \dots \cup A_n$). Nietrudno pokazać (korzystając z nieskończoności zbioru S), że $k_{n-1} \leq k_n \leq 3$, więc $\exists N \forall n \geq N: k_n = k_N$. Dla $n > N$ rodzina Ω_n zawiera się w Ω_{n-1} , więc $\exists M \geq N \forall n \geq M: \Omega_n = \Omega_M$; stąd łatwy wniosek, że dowolny zbiór $B_0 \in \Omega_M$ przecina wszystkie A_i (jeśli $|B_0| = k_N < 3$, uzupełniamy B_0 w dowolny sposób do trójki).

Autor zauważył ponadto, że to samo rozumowanie działa, gdy zamiast zbiorów 4-elementowych rozważa się zbiory ℓ -elementowe o nieskończonej sumie; w tezie uzyskuje się wówczas, zamiast trójki $\{a, b, c\}$, pewien zbiór $(\ell-1)$ -elementowy.

Taki sam dowód podał również **Piotr Kumor**; nie poprzestał na tym i dołączył jeszcze jeden dowód, który pokazuje słuszność tezy dla ciągów (A_i) zbiorów 4-elementowych parami różnych, nierozłącznych – nie tylko dla ciągów nieskończonych, ale i dla skończonych, dostatecznie długich. Idea: zbiory A_i to wierzchołki grafu pełnego o krawędziach pomalowanych trzema kolorami (kolor krawędzi ij zależy od tego, czy $A_i \cap A_j$ jest zbiorem jedno-, dwu-, czy trójelementowym) i można zastosować metody teorii Ramseya; okazuje się, że „jest dobrze”, gdy długość ciągu przekracza liczbę Ramseya $R(14, 20, 14)$. To ogromna liczba; ale autor pracy znacznie poprawił oszacowanie: ujrawszy rozwiązanie firmowe, dostał list z uwagą, że po niewielkiej modyfikacji daje ono tezę dla ciągów (A_i) długości skończonej ≥ 258 . Cała ta praca to kawał świetnej roboty, panie Piotrze!

(A jaka jest minimalna długość, gwarantująca słuszność tezy? Pytanie otwarte...)

Zadanie okazało się interesujące – wiele sposobów dowodu, ciekawe uogólnienia – szkoda, że przeoczenie w sformułowaniu treści obniżyło jego rangę w konkursie.



Rozwiązanie zadania M 1087.

Rozpatrzmy kwadrat Q składający się z n^2 pól danej szachownicy. Niech x będzie największą, a y najmniejszą liczbą napisaną w tym kwadracie. Ponieważ wszystkie liczby całkowite znajdujące się w kwadracie Q są różne, więc $x - y \geq n^2 - 1$. Z drugiej strony, gdyby liczby napisane na każdych dwóch sąsiednich polach różniły się o nie więcej niż a , to mielibyśmy $x - y \leq 2a(n - 1)$. Stąd $n^2 - 1 \leq 2a(n - 1)$. Wybierając na początku rozumowania liczbę naturalną $n > 2a - 1$, otrzymujemy sprzeczność.



Rozwiązanie zadania M 1089.

Sposób I: Niech O oznacza środek okręgu o .

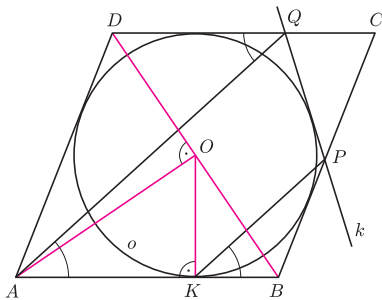
W rozwiązaniu zadania 1086 z poprzedniej „Delt” wykazaliśmy, że $BP \cdot DQ = BO \cdot DO = BO^2$. Z drugiej strony z podobieństwa trójkątów prostokątnych BOK i BAO otrzymujemy $BK \cdot AB = BO^2$. Łącząc ostatnie równości, mamy $BK \cdot AB = BP \cdot DQ$, czyli

$$\frac{BP}{BK} = \frac{AB}{DQ} = \frac{DA}{DQ}.$$

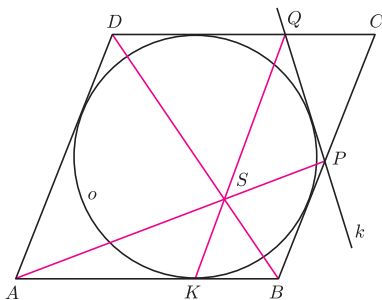
Trójkąty ADQ i PBK są więc podobne, skąd uzyskujemy

$$\sphericalangle PKB = \sphericalangle AQD = \sphericalangle QAB.$$

Stąd teza.



Sposób II: Na mocy twierdzenia Brianchona zastosowanego do „sześciokąta” $AKBPQD$, proste AP , KQ i BD przecinają się w jednym punkcie S .



Korzystając z twierdzenia Talesa, mamy

$$\frac{SK}{SQ} = \frac{SB}{SD} = \frac{SA}{SP}.$$

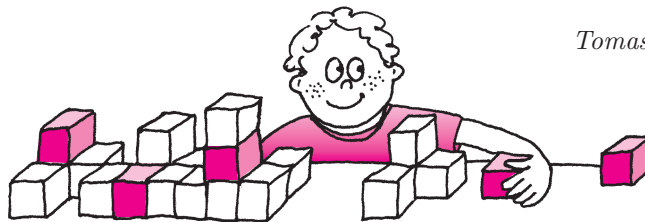
Stąd na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa uzyskujemy tezę.

Patrz w niebo

Już przez niewielki teleskop widać, że powierzchnia Księżyca – co prawda nierównomiernie – pokryta jest kraterami, a dokładniejsze badania dowodzą, że są to krateru uderzeniowe. Wielu z nich towarzyszą promieniste jasne smugi, stanowiące nieodparty dowód ich pochodzenia, a które, jak się okazało, mogą przyczynić się do określenia wieku tych obiektów. Bowiem powierzchniowe skały księżycowe, zawierające m.in. tlenki żelaza, wskutek długotrwałego oddziaływania próżni tracą z czasem tlen i ciemnieją. Rzeczywistość jest jednak bardziej skomplikowana. Teoretycznie smugi przestają być widoczne po kilkuset milionach lat, są jednak krateru bardzo stare (co wiadomo na podstawie innych oznak, np. obecności małych kraterów wewnątrz wielkich), a mimo to z jasnymi smugami. Chyba najślynniejszym z nich jest Kopernik, którego wiek ocenia się na nie mniej niż 800 mln lat. Przyczyną tego jest niska zawartość związków żelaza w skałach smug.

Nasuwa się pytanie, skąd wiemy, jaki jest skład chemiczny skał. Wprawdzie mamy na Ziemi próbki gruntu księżycowego, ale tylko z nielicznych miejsc. Otóż skład chemiczny skał można ocenić na podstawie ich widma promieniowania podczerwonego, a takie m.in. obserwacje prowadzi sonda Clementine, krążąca wokół Księżyca. Cała sprawa jest jednak dużo bardziej złożona. Smugi może przecież tworzyć materiał meteoroidu, który rozbił się o powierzchnię Księżyca, może to być materiał księżycowy wyrzucony z krateru, lub wreszcie materiał księżycowy jedynie zryty przez odłamki. Przy tym wszystkim materiał księżycowy może być też wymieszany z pozaksiężycowym w najróżniejszych proporcjach. Nie zapominajmy bowiem, że ciała meteorowe spadały na Księżyc z prędkościami sięgającymi wielu dziesiątek kilometrów na sekundę. Już przy prędkości rzędu 20 km/s objętość krateru tysiąckrotnie przekracza objętość samego meteoroidu! Badacze przyznają, że krateru ze smugami mają w zasadzie mniej niż 800 mln lat, nie przeszkadza to jednak istnieniu kraterów z jasnymi smugami liczącymi 3 mld lat. Zatem szanse zdalnego wyznaczania wieku kraterów księżycowych są raczej skromne. Wniosek ten może jednak być atrakcyjny dla młodych geologów: badania takie trzeba prowadzić bezpośrednio na miejscu.

Tomasz KWAST

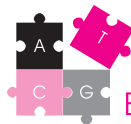


Luty

Jak zawsze w środku zimy największe wrażenie robi wieczorami Orion i Droga Mleczna przecinająca niebo od południowego wschodu do północnego zachodu. W pobliżu zenitu widać jedną z najjaśniejszych gwiazd nieba, Capellę, czyli alfę Woźnicy (0,08 mag), dzięki której łatwo zlokalizować sam gwiazdozbiór. A warto tam skierować lornetkę, aby zobaczyć przynajmniej cztery otwarte gromady gwiazdowe. Ciekawe, że np. gromada NGC 2281 o jasności 5,7 mag, leży w odległości 7,4 pc, natomiast M37, niewiele słabsza (6,2 mag), aż w odległości 1400 pc, czyli niemal 200 razy dalej. Fakt, że ta druga jest znacznie bogatsza w gwiazdy. W lutowe wieczory w Drodze Mlecznej lub w jej pobliżu widać jeszcze więcej gromad otwartych, z których dwie – gołym okiem: Plejady w Perseuszu i Hiady w Byku. Wszystko to, oczywiście, stanowi tylko część bogactw zimowego nieba.

Venus jest niewidoczna wskutek bliskości Słońca. Mars jest w Strzelcu i widać go przed wschodem Słońca. Jowisz jest w Pannie, przez co wschodzi dopiero przed północą. Wreszcie Saturn jest w Bliźniętach, czyli wieczorem znajduje się już wysoko na niebie i widać go praktycznie do rana. Nów Księżyca wypada 8 II, a pełnia 24 II. Księżyc zakryje Antaresa, najjaśniejszą gwiazdę Skorpiona, 4 II, co w Polsce będzie widoczne nad ranem. 27 II Księżyc zakryje Jowisza, ale to zjawisko będzie widoczne tylko w Australii i na Antarktydzie.

T. K.



Nasi ochroniarze

Komórki układu odpornościowego mają ciężkie zadanie. Z jednej strony muszą wykrywać każdy niespodziewany atak bakterii czy wirusów, z drugiej – nie powinny atakować naszego organizmu. A pasożyty ciągle się zmieniają, aby uniknąć zasadzek uniemożliwiających im opanowanie żywiciela. Potrafią się ukrywać, udawać komórki przeciwnika, atakować.

Systemy obronne organizmu wyewoluowały w niewiarygodnie skomplikowany mechanizm. Jednym z jego elementów są limfocyty T_k , zdolne do zabijania komórek opanowanych przez bakterie lub wirusy. Aby sprawnie działać, muszą nauczyć się odróżniać wrogów od własnych komórek. Do tego służy system specjalnych białek sygnałowych i rozpoznających je receptorów. Każda komórka naszego organizmu prezentuje na swojej powierzchni białka informujące limfocyty, że wszystko jest w porządku. Białka te umieszczone są w specjalnych cząsteczkach prezentujących, nazywanych MHC. Jeśli komórka jest zainfekowana, niektóre białka wirusowe lub bakteryjne również trafiają do cząsteczek MHC i wystawiane są na powierzchni komórek. Limfocyt rozpoznaje białka prezentowane przez komórkę dzięki specyficznym receptorom, które potrafią odróżnić, czy komórka jest zdrowa (jeśli w cząsteczkach MHC prezentuje własne białka) czy zainfekowana (gdy są to białka patogenów).

Limfocyt T powstaje z komórki krwiotwórczej w szpiku kostnym. Pierwsza faza jego rozwoju polega na wykształceniu receptora, który rozpoznaje cząsteczki prezentowane w MHC. Problem w tym, że takich cząsteczek – stanowiących zagrożenie dla organizmu, jak również prawidłowych białek komórkowych – jest dużo, dużo więcej, niż wszystkich genów genomu człowieka, które mogłyby kodować odpowiednie wersje receptorów.

Chytra sztuczka polega na tym, że każdy receptor powstaje w wyniku losowego składania fragmentów kilku genów. Każdy z tych genów istnieje przynajmniej w kilkunastu wersjach, które mogą być ze sobą dowolnie łączone. Kombinacja pojedynczych wersji kilku różnych genów tworzy gotowy receptor. To sprytny mechanizm umożliwiający wytworzenie ogromnej ilości różnych form receptora ze stosunkowo niewielkiej liczby białek składowych. Jeśli złożony gen nie może posłużyć do wyprodukowania czegoś, co choćby przypomina receptor, wtedy proces składania fragmentów genów się powtarza. Gotowy receptor łączy się na powierzchni komórki z innymi białkami, co uruchamia szlak sygnałów wewnątrzkomórkowych i umożliwia przejście do następnego etapu rozwoju.

Na tym etapie komórka, zaprogramowana do samobójczej śmierci w ciągu zaledwie kilku dni, opuszcza szpik. Jeśli w tym krótkim czasie dotrze do grasicy, będącej czymś w rodzaju akademii policyjnej naszego organizmu i zwiąże się z MHC tamtejszych komórek – wyrok zostaje odroczony. Komórka dostaje sygnał, że receptor, który wykształciła, może się związać z MHC pokazującym fragment jakiegoś białka z naszego organizmu.

Limfocyty T niezdolne do wiązania się z MHC są przecież bezużyteczne. Gdyby jednak to wiązanie było zbyt mocne, byłby to sposób na produkcję zabójców niszczących nasze własne tkanki. Dlatego również komórki zbyt silnie reagujące na prezentowane w grasicy białka umierają.

Tę selekcję przetrwa zaledwie 5% początkowych limfocytów, a te, które przetrwają, będą już uformowanymi limfocytami spoczynkowymi. Krążą po organizmie, szukając sygnałów obecności wroga, czyli fragmentów obcych białek prezentowanych przez MHC naszych komórek. Gdy je znajdą, wchodzi w stan częściowej aktywacji. Do ataku potrzebują jednak drugiego sygnału, potwierdzającego jego konieczność. Tym drugim sygnałem są białka znajdujące się w błonie komórek wyspecjalizowanych w pokazywaniu limfocytom, kto jest wrogiem (można je porównać do tajnych informatorów immunologicznej policji). Jeśli limfocyty nie dostaną drugiego sygnału, całkowicie tracą zdolność do aktywacji. Z kolei gdy limfocyt spotka się z bardzo dużą ilością stymulujących go cząsteczek prezentowanych przez MHC, ale zabraknie odpowiednich substancji sygnałowych świadczących o tym, że tkanki są uszkodzane, to zginie. Bo przecież tak duże zagęszczenie stymulujących limfocyt cząstek może świadczyć albo o tym, że organizm toczy bardzo poważną chorobę, albo mimo tych wszystkich zabezpieczeń limfocyt reaguje na coś, co w organizmie jest najzupełniej prawidłowe.

Po przejściu przez to sito komórka może stać się przedstawicielem jednej z klas limfocytów T: samodzielnym zabójcą. Teraz, jeśli spotka on komórkę zaatakowaną przez wirusy albo bakterie, to rozpozna obce białka na jej powierzchni i... zabije ją razem z rozwijającymi się w jej wnętrzu pasożytami.

Limfocyty w swym dojrzewaniu muszą przetworzyć informacje wewnętrzną o tym, czy produkują pewne białka, jak i zewnętrzną o tym, z czym, gdzie, kiedy i z jaką siłą te białka się wiążą. Od sprawności tego przetwarzania zależy, czy zwalczymy infekcję i czy unikniemy chorób autoimmunologicznych.

Anna LORENC, Jarek BRYK