



## SPIS TREŚCI NUMERU 1 (392)

Gdy nie da się uniknąć ściągnięcia rękawiczek <i>Piotr Chrzastowski-Wachtel</i>	str. 1
Czym właściwie jest Pluton? <i>Tomasz Kwast</i>	str. 4
Przewodnictwo ciepłe <i>Jerzy Ginter</i>	str. 6
$\delta$ Węzły bliskie każdemu <i>Maciej Pająk</i>	str. 8
Aktualności	str.11
Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki	str.12
Ogólnopolski Sejmik Matematyków	str.13
Stała szerokość	str.13
Zadania	str.13
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Styczeń	str.16
$\Omega$ Kod Huffmiana <i>Rafał Sztencel</i>	str.17

W następnym numerze:  
Twierdzenie Newtona

## Nagrodę Dziekanów

dla Autora najlepszego artykułu w *Delcie*  
w roku akademickim 2005/2006

uzyskał

**Andrzej Niedzielski**

za artykuł *Precyzyjne pomiary radialnych prędkości gwiazd*  
zamieszczony w *Delcie* 9(388)/2006

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego.

Komitet Redakcyjny: prof. dr hab. Andrzej Białynicki-Birula (członek rzeczywisty PAN), prof. dr hab. Bogdan Cichoński, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, dr hab. Armen Edigarian, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, dr hab. Maciej Geller, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Agnieszka Janiuk, prof. dr hab. Wiesław A. Kamiński, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, prof. dr hab. Janusz Matkowski, mgr Andrzej Mąkowski, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Ryszard J. Pawlak, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Grzegorz Sitariski, dr Weronika Śliwa, prof. dr hab. Andrzej Woszczyk, prof. dr hab. Wiesław Żelazko.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Marcin Hauzer, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac. Okładki i rysunki: Emilia Bojańczyk. Rysunki techniczne: Marcin Adamski.

Adres do korespondencji:  
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delt”, ul. Banacha 2, pokój 5450,  
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 022-55-44-545.

Skład systemem  $\TeX$  wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej, Oddział PAP S.A. w Warszawie,  
ul. Mińska 65.

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 022-663-87-52, 022-663-11-46)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2007 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2007 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl

Cena prenumeraty w 2007 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują jednostki kolportażowe „RUCH” SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania prenumeraty: do 5 każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 022-5328-731 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -734, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Oddziału lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), infolinia 0-800-1200-29.

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto SWIFT banku: PKOPPLPWWA4; w USD PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu należy przesłać faksem pod numer +48-22-5328-731.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

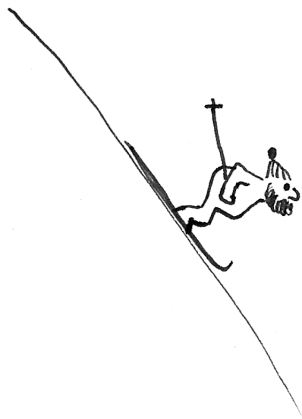
<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

# Gdy nie da się uniknąć ściągania rękawiczek

Piotr CHRZĄSTOWSKI-WACHTEL \*



Poprzedniej zimy jeździłem na nartach w wyjątkowo sympatycznym dwudziestoosobowym towarzystwie. Wynajęliśmy wspólnie domek w Alpach, zrobiliśmy podstawowe zakupy w Polsce, resztę jedzenia kupowaliśmy na miejscu. Oczywiście, trzeba było rozwiązać problem bieżących zakupów. Ustaliliśmy, że każdy z nas co parę dni robi obiad dla pozostałych, dokupując w razie potrzeby konieczne produkty. W czasie całego pobytu zapisywaliśmy wydatki i pod koniec trzeba było zrobić rozliczenie i wyrównać rachunki. Po podliczeniu i obliczeniu średniej wydatków okazało się, że niektórzy zapłacili za dużo, inni za mało – inaczej mówiąc, niektórzy byli wierzycielami, inni dłużnikami. Wiadomo było, ile kto nadpłacił, a ile kto niedopłacił.

Pozostało stwierdzić, kto komu powinien przekazać ile pieniędzy. Żeby nie komplikować rozliczeń, polecono mi, jako informatykowi, opracowanie algorytmu, który doprowadziłby do wyrównania rachunków za pomocą minimalnej liczby transferów. Pojedynczy transfer powinien polegać na tym, że jedna osoba drugiej przekazuje jakąś sumę pieniędzy.

Z początku wydawało mi się, że może zadziałać następujący zachłanny algorytm. Największy dłużnik przekazuje tyle, ile powinien, największemu wierzycielowi. Tyle, ile powinien, czyli albo wszystko, co jest dłużny, albo całą nadpłatę wierzyciela, o ile jest ona mniejsza od długu. Po takiej transakcji ktoś przestaje być dłużnikiem lub ktoś przestaje być wierzycielem, wypada z puli i sprowadzamy problem do  $n - 1$  uczestników. Aktualizujemy wierzycielności i długi, określając znowu, kto ma największy dług i kto jest największym wierzycielem. Pozostały w grze uczestnik ostatniej transakcji może przestać już być największym w swojej klasie. Dla nowych danych, po uwzględnieniu efektu transakcji, powtarzamy opisany krok: wybieramy największego wierzyciela i największego dłużnika i każemy im dokonać możliwie największego sensownego transferu. I tak aż do wyczerpania dłużników i wierzycieli.

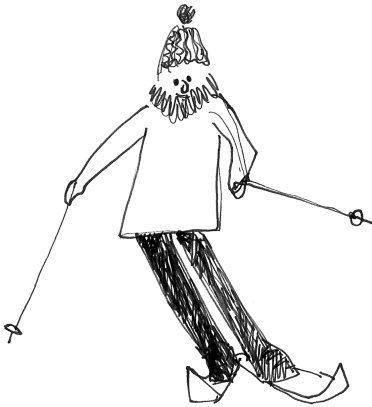
Okazało się szybko, że taka metoda nie jest optymalna. Spróbujmy wyobrazić sobie sytuację, w której jest 7 dłużników i 2 wierzycieli. Obaj wierzyciele spodziewają się dostać po 10 jednostek długu, a dłużnicy są winni kolejno 4, 4, 3, 3, 2, 2, 2. Teraz, jeśli zastosujemy nasz przepis, to 4 powędruje do 10, sprowadzając problem do szóstki (4, 3, 3, 2, 2, 2) po stronie dłużników i pary (10, 6) po stronie wierzycieli. Po kolejnym kroku dłużnikami będą (3, 3, 2, 2, 2), a wierzycielami będą (6, 6). Dalej otrzymamy kolejno układy: [(3, 2, 2, 2), (6, 3)], [(2, 2, 2), (3, 3)], [(2, 2), (3, 1)], [(2), (1, 1)], [(1), (1)], [( ), ( )]. Razem 8 transferów. Tymczasem możliwe było dokonanie wyrównania za pomocą 7 transferów – wystarczyło, że jednemu wierzycielowi oddali całkowicie dług dłużnicy: 4, 4, 2, a drugiemu: 3, 3, 2, 2.

Wkrótce stało się dla mnie jasne, że nie ma prostego algorytmu rozwiązującego ten problem. Jest to bowiem problem NP-zupełny. W *Delcie* były już artykuły o problemach NP-zupełnych, ale przypomnijmy podstawowe sprawy. Po pierwsze, problemy NP-zupełne są problemami decyzyjnymi, czyli takimi, że wynikiem algorytmu jest odpowiedź TAK lub NIE. Zacznijmy nasze przypomnienie od określenia, które problemy są NP-trudne. Nieco upraszczając, powiedzmy, że problem jest NP-trudny, jeśli istnieje algorytm o złożoności wielomianowej, który na podstawie dostarczonego przykładu rozwiązania jest w stanie sprawdzić, czy przedstawione rozwiązanie faktycznie jest poprawne. Zbiór wszystkich problemów NP-trudnych tworzy klasę NP. Przykładem problemu NP-trudnego jest problem spełnialności formuły logicznej. Jeśli mamy daną formułę o  $n$  zmiennych, to pytanie o to, czy istnieje takie wartościowanie zmiennych, że ta formuła stanie się prawdziwa, może być rozwiązane pozytywnie przez podanie konkretnego wartościowania, które czyni ją prawdziwą. Sprawdzenie, czy takie konkretne wartościowanie wybrane spośród  $2^n$  możliwych wartościowań czyni naszą formułę prawdziwą, wymaga jedynie obliczenia

Mówimy, że algorytm ma złożoność wielomianową, jeśli liczba kroków, którą wykonuje, wzrasta wielomianowo wraz ze wzrostem rozmiaru danych. Inaczej mówiąc, dla każdego  $n$  i dla każdego danych rozmiaru  $n$  wykona nie więcej niż  $W(n)$  kroków dla pewnego wielomianu  $W$  zmiennej  $n$ . W szczególności, jeśli złożoność algorytmu wyraża się funkcją wykładniczą  $a^n$  dla  $a > 1$ , to jego złożoność nie jest wielomianowa.

\*Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski

wartości tej formuły dla tego wartościowania, a to się robi elementarnie w czasie liniowym, czyli wielomianowym ze względu na długość formuły. Jeżeli zatem mielibyśmy cudowną wróżkę, która dla naszego problemu spełniałaby dostarczałaaby certyfikatów poprawności pozytywnej odpowiedzi (na przykład w postaci dostarczenia takiej formuły), to sprawdzenie, czy wróżka się nie pomyliła i upewnienie się, że dane wartościowanie jest prawidłowe, nie nastroczałoby problemów. Pytanie, skąd taką wróżkę wziąć? Niestety, takich wróżek nie ma i na razie nie pozostaje nam nic innego, niż przebadanie wszystkich  $2^n$  (lub prawie wszystkich, ale też wykładniczo wielu) wartościowań. A nasza wróżka jest stworzeniem niedeterministycznym – stąd się bierze skrót: NP oznacza „Nondeterministic Polynomial”, czyli wróżka losuje od razu dobry certyfikat, posługując się niedeterministycznym wyczuciem i w wielomianowym czasie generuje rozwiązanie – trochę przez przypadek, ale od czego są wróżki z ich niezawodną intuicją?



Przy okazji uwaga: nie wiadomo, czy problem tautologiczności formuły jest problemem w klasie NP, bo nie znamy sposobu na przedstawienie pozytywne świadectwa tautologiczności, nieodwołującego się do *wszystkich* wartościowań. Za to problem nietautologiczności formuły jest w klasie NP, bo wystarczy znaleźć wartościowanie falsyfikujące formułę. Jeśli jakiś problem jest w klasie NP, to mówimy, że jego zaprzeczenie jest w klasie co-NP. Zatem problem tautologiczności formuły jest w klasie co-NP.

Teraz najciekawsze. Okazuje się, że w klasie NP istnieją problemy najtrudniejsze, czyli takie, że jeśli rozwiążemy którykolwiek z nich w czasie wielomianowym, to dowolny inny problem będziemy w stanie rozwiązać w czasie wielomianowym, sprowadzając go do któregoś z tych problemów najtrudniejszych. Te najtrudniejsze problemy w klasie NP tworzą klasę problemów NP-zupełnych. Należy do nich m.in. problem spełnialności formuły logicznej, ale i wiele, wiele innych. Nikt nie wie, czy istnieje choć jeden algorytm wielomianowy, który rozwiązałby przynajmniej jeden z problemów NP-zupełnych (gdyby rozwiązał jeden, to rozwiązałby wszystkie problemy z tej klasy wielomianowo). Za znalezienie takiego algorytmu lub za pokazanie, że takiego algorytmu nie ma, została wyznaczona nagroda miliona dolarów ([http://www.claymath.org/millennium/P\\_vs\\_NP/](http://www.claymath.org/millennium/P_vs_NP/)) i to zagadnienie jest uznawane za największy otwarty problem informatyki teoretycznej.

Co to znaczy, że problem  $A$  jest trudniejszy niż problem  $B$ ? Przyjmijmy, że jest tak wtedy, kiedy mając konkretny przypadek problemu  $B$ , możemy go rozwiązać, tłumacząc dane problemu  $B$  na dane problemu  $A$ , a następnie rozwiązując problem  $A$  i uzyskując odpowiedź pozytywną wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiedź na problem  $B$  jest pozytywna. Przyjmujemy tu, że takie tłumaczenie danych nie może być zbyt kosztowne (czyli powinno być też wielomianowe).



Żeby przybliżyć zagadnienie sprowadzalności, wyobraźmy sobie, że ktoś szuka dobrego algorytmu sprawdzającego, czy w nieuporządkowanej tablicy znajdują się choć dwa takie same elementy. Można to, oczywiście, zrobić w czasie kwadratowym, badając wszystkie możliwe pary. Ale można to zrobić szybciej, sortując dane. Wiadomo, że istnieją algorytmy sortujące  $n$  wartości wykonujące nie więcej niż  $n \log n$  działań. Zatem sprowadźmy nasz problem do problemu sortowania: jeśli potrafimy sortować szybciej niż kwadratowo – a potrafimy, choćby stosując metodę kopcowania czy scalania – to problem istnienia powtarzających się wartości można rozwiązać następująco. Sortujemy dane, a potem sprawdzamy, czy jacyś dwaj sąsiedzi są sobie równi. Zatem problem istnienia dubletów nie jest bardziej złożony niż problem sortowania, czyli da się go rozwiązać w czasie proporcjonalnym do  $n \log n$ . Pokazanie, że nie da się go rozwiązać szybciej – a nie da się! – jest znacznie trudniejsze.

Pokażemy teraz, że nasze zadanie minimalizacji liczby transferów jest problemem o złożoności niemniejszej niż złożoność problemów NP-zupełnych. W naszym przypadku rozmiarem zadania jest liczba uczestników wyjazdu. Zagadnienie minimalizacji transferów można sprowadzić do problemu decyzyjnego w prosty sposób, modyfikując zadanie do takiego: *czy wystarczy  $k$  transferów, aby*



### Rozwiązanie zadania M 1156.

Jeśli  $547 \mid n$ , to teza zadania jest oczywiście spełniona. Przyjmijmy więc, że liczba  $n$  nie jest podzielna przez 547. Ponieważ

$$n^{n^4} - n^{n^2} = n^{n^2} (n^{n^4 - n^2} - 1),$$

więc wystarczy dowieść zależności

$$n^{n^4 - n^2} \equiv 1 \pmod{547}.$$

Liczba 547 jest pierwsza, więc z małego twierdzenia Fermata wynika, że powyższa kongruencja będzie spełniona, jeśli wykazemy, że liczba

$$(*) \quad n^4 - n^2 = n^2 (n^4 - n^2 - 1)$$

jest podzielna przez  $546 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$ .

Niech  $p$  będzie jedną z liczb 2, 3, 7 lub 13. Jeśli  $p \mid n$ , to oczywiście wyrażenie (\*) jest podzielne przez  $p$ . Możemy więc przyjąć, że liczba  $n$  nie jest podzielna przez  $p$ . Korzystając ponownie z małego twierdzenia Fermata, stwierdzamy, że aby dowieść podzielności przez  $p$  wyrażenia (\*), wystarczy wykazać, że liczba  $n^4 - n^2$  dzieli się przez  $p - 1$ .

Ale  $p - 1$  jest dzielnikiem liczby 12, więc wystarczy dowieść, że liczba

$$n^4 - n^2 = n^2 (n - 1)(n + 1)$$

jest podzielna przez 12. Istotnie: iloczyn  $(n - 1)n(n + 1)$  trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez 3, a ponadto wśród liczb  $n, n, n - 1, n + 1$  są dokładnie dwie liczby parzyste.

wyrównać rachunki? Jeżeli dla każdego  $k$  rozwiążemy takie zadanie w czasie wielomianowym, to zapuszczając je kolejno dla  $k = 1, 2, 3, \dots$ , uzyskamy szereg odpowiedzi NIE i w końcu pierwsze TAK dla pewnego  $k < n$ . To będzie minimalna liczba transferów. Ograniczenie  $k < n$  wynika z przedstawionego nieoptymalnego algorytmu z początku artykułu. Tam na pewno po co najwyżej  $n - 1$  transferach, w czasie których za każdym razem ubywa jedna osoba, a po ostatnim transferze nawet dwie, wyrównywanie długów zakończy się. Więc optymalna strategia nie może być gorsza. Jeśli zatem dla konkretnego  $k$  złożoność naszego algorytmu decyzyjnego wyniosłaby  $W(n)$  dla pewnego wielomianu  $W$ , to rozwiązanie problemu minimalizacji transferów kosztowałoby co najwyżej  $nW(n)$ , czyli koszt też byłby wielomianowy.

W celu wykazania, że problem decyzyjny, czy wystarczy  $k$  transferów, aby wyrównać rachunki, jest NP-zupełny, wystarczy, po pierwsze, pokazać, że nasz problem jest w klasie NP, a po drugie, sprowadzić dowolny problem NP-zupełny do naszego problemu. Wykazanie, że nasz problem jest w klasie NP, jest proste. Jeśli ktoś nam przedstawia scenariusz dokonania  $k$  transferów, to sprawdzić, że faktycznie jest on poprawny, jest łatwo – po prostu wystarczy wykonać przedstawiony scenariusz, weryfikując, czy faktycznie działa. I zajmie to nam czas proporcjonalny do liczby transferów, czyli liniowy. Aby wykazać, że nasz problem jest pośród najtrudniejszych problemów w klasie NP, musimy znaleźć problem NP-zupełny, który sprowadzimy do naszego. Takim problemem może być np. problem połowienia zbioru. Jest to jeden ze znanych problemów NP-zupełnych. Dla zadanego zbioru liczb naturalnych  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  stwierdzić, czy istnieje taki podzbiór indeksów  $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ , że

$$\sum_{j \in J} a_j = \frac{1}{2} \sum_{j \in \{1, \dots, n\}} a_j.$$

Czyli czy można tak wybrać podzbiór zbioru  $A$ , aby suma jego elementów była dokładnie połową sumy wszystkich elementów zbioru  $A$ . Oczywiście, można ten problem rozwiązać w czasie wykładniczym, badając wszystkie możliwe podzbiory zbioru  $A$  i sumując dla każdego z nich jego elementy. Dramat polega na tym, że takich podzbiorów jest wykładniczo dużo i już dla stosunkowo niewielkich  $n$  czas wykładniczy oznacza, że algorytm będzie działał zbyt długo, a ogólnego algorytmu działającego istotnie szybciej nie znamy, i pewnie takiego algorytmu nie ma.

Pokażemy teraz, jak problem połowienia zbioru sprowadzić do naszego problemu transferów. Załóżmy, że mamy konkretny przypadek problemu połowienia zbioru  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ . Niech

$$s = \frac{1}{2} \sum_{j \in \{1, \dots, n\}} a_j.$$

Tworzymy problem transferów w następujący sposób. Ustalamy  $n$  dłużników i dwóch wierzycieli następująco:  $[(a_1, \dots, a_n)(s, s)]$  i pytamy, czy  $n$  transferów wystarczy, aby uregulować należności. Jeśli wystarczy, to znaczy, że zbiór nasz da się podzielić na połowy, jeśli nie, to znaczy, że się nie da. Czyli w szczególności, gdybyśmy umieli w czasie wielomianowym rozwiązać nasze zadanie minimalizacji liczby transferów, to umielibyśmy w czasie wielomianowym rozwiązać problem połowienia zbioru. W każdym razie nasz problem transferów jest co najmniej tak trudny, jak problem połowienia zbioru. Koniec dowodu.

Oczywiście, przy naszych narciarskich rozliczeniach te wszystkie rozważania potraktowaliśmy jako zabawę i rozwiązaliśmy problem regulowania długów w następujący sposób: każdy dłużnik wyłożył to, co był winien, na stół, a każdy wierzyciel zabrał to, co nadpłacił i tym samym sprawa została załatwiona. Zauważmy, że to był jednak inny model. Problem powstaje, gdy takiego stołu nie ma, np. gdy jesteśmy na stoku narciarskim i wiatr dmie, a pieniędzy nie ma gdzie położyć, tylko trzeba przekazywać je z ręki do ręki, a ręce marzną i trzeba zdejmować rękawiczki. Albo gdy komputery, chcąc zrównoważyć obciążenie, wymieniają się przetwarzanymi zadaniami i chcą zminimalizować liczbę transmisji... Ale to jest nieco inna bajka.





# Czym właściwie jest Pluton?

Tomasz KWAST

## Rozwiązanie zadania M 1157.

Dla dowolnej grupy  $X$  osób obecnych na przyjęciu niech  $p(X)$  oznacza liczbę par nieznanymi w obrębie grupy  $X$ . Rozpatrzmy następnie taki podział na dwie grupy  $A$  i  $B$ , dla którego wartość  $p(A) + p(B)$  jest najmniejsza. Twierdzimy, że tak znaleziony podział spełnia warunki zadania.

Przyjmijmy, wbrew tezie, że w grupie  $A$  znajduje się osoba, która ma co najmniej dwóch nieznanymi w tej grupie. Wówczas osoba ta ma w grupie  $B$  co najwyżej jednego nieznanego. Przesuwając więc tę osobę z grupy  $A$  do grupy  $B$ , uzyskujemy nowy podział na grupy  $A'$  i  $B'$ , dla którego

$$p(A') + p(B') < p(A) + p(B)$$

– sprzeczność.

Przez wieki najdalszą planetą był Saturn. W roku 1781 za pomocą teleskopu o bardzo skromnych rozmiarach Frederick W. Herschel odkrył Urana. Jako planetę rozpoznał go po jego ruchu na tle gwiazd, przy czym okazało się, że jego jasność była taka, iż przy sprzyjających okolicznościach można byłoby go dostrzec gołym okiem. Oczywiście gdyby było wiadomo, gdzie go szukać.

W każdym razie Układ Słoneczny rozbudował się o jedną planetę, a tym samym padł mistyczny system Keplera, według którego między kulami (o środku w Słońcu) o rozmiarach orbit planet mieściły się w odpowiednim porządku wszystkie wielościany foremne. Jak wiadomo, jest tylko pięć wielościanów foremnych. Tymczasem na początku XIX wieku Carl F. Gauss podał algorytm wyznaczania elementów orbit, orbita Urana została więc wyznaczona i wszystko było w zgodzie z prawami przyrody, dopóki z czasem nie okazało się, iż obserwowane położenia Urana na niebie nie zgadzają się z przewidywanymi. Wysunięto hipotezę, że może ruch Urana zakłóca jeszcze odleglejsza planeta. Stosowne obliczenia wykonał Urbain Leverrier, a na ich podstawie Johann G. Galle w 1846 r. rzeczywiście w przewidywanym miejscu nieba (z błędem poniżej jednego stopnia) odkrył planetę nazwaną Neptunem. Nawiasem mówiąc, analogiczne obliczenia wykonał też John C. Adams, ale obliczenia te zostały wówczas – wstyd powiedzieć – zlekceważone. Po tak spektakularnym sukcesie mechaniki newtonowskiej naturalną koleją rzeczy zaczęto poszukiwać następnej planety. Gdyby wystąpiły niezgodności ruchu Neptuna z mechaniką, można by je zapewne wytłumaczyć obecnością kolejnej planety i po prostu odkryć ją. Wystarczyłoby przecież jedynie powtórzyć sprawdzoną już procedurę.

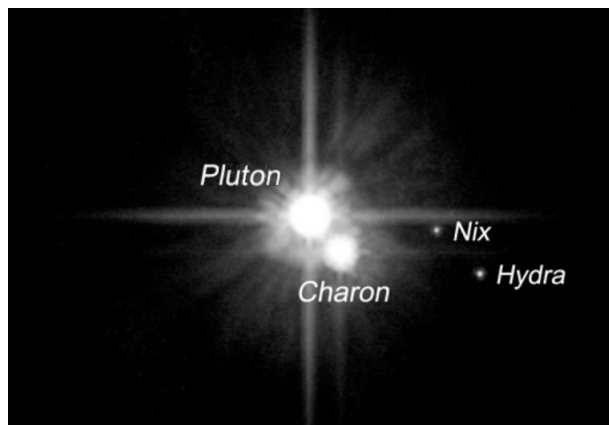
Tak też zrobiono. Tym razem nie szło jednak tak świetnie, co opisała Magdalena Kożuchowska w *Delcie* 8/2002. Całą historię można streścić następująco: na podstawie obliczeń, które wykonał głównie Percival Lowell, obserwator i wówczas miłośnik astronomii Clyde Tombaugh (1906–1997) odkrył w 1930 r. planetę nazwaną wkrótce Plutonem. Bardzo szybko rozpoczęły się też spory o to, co właściwie odkryto, a to z kilku powodów. Okazało się bowiem,

- że orbita Plutona jest silnie spłaszczone, tak że w rzucie na płaszczyznę Układu Słonecznego przecina się z orbitą Neptuna,
- że jest też silnie odchyłona od płaszczyzny Układu (o  $17^\circ$ ),
- na podstawie późniejszych (zresztą kiepskich) ocen, że masa Plutona jest zbyt mała, by wywoływać obserwowane zakłócenia ruchu Neptuna i Urana; wysunięto nawet pogląd, że owe perturbacje wywołało oddziaływanie centralnego zgęszczenia Galaktyki, a Plutona odkryto przypadkiem. Sprawa nie jest do końca wyjaśniona,
- że Plutona znaleziono w odległości aż  $6^\circ$  od położenia przewidywanego.

Ocena masy planety, oczywiście, wiąże się z oceną rozmiarów i średniej gęstości: masa to gęstość razy objętość. Jeżeli nawet z braku innych pomysłów zapostulować gęstość „przeciętną”, to masa i tak silnie zależeć będzie od rozmiarów. Tymczasem tarczka Plutona widziana nawet w największych teleskopach nie musi mieć wiele wspólnego z rzeczywistą tarczą planety. Jeżeli bowiem powierzchnia jest lodowa, to obserwator zobaczy raczej odbicie Słońca w mniej lub bardziej lśniącej kuli, a nie całą tarczę. Jedynym sposobem na porządne wyznaczenie masy jest obliczenie jej z prawa Keplera, ale do tego planeta musi mieć satelitę, którego odkrył dopiero w 1978 r. James W. Christy. Satelita otrzymał imię Charona i masa Plutona została wyznaczona porządnie. Zarazem wzajemne zakrycia Plutona i Charona umożliwiły wyznaczenie rozmiarów ciał, gdyż szczęśliwym zbiegiem okoliczności Ziemia znalazła się wtedy w przybliżeniu w płaszczyźnie równikowej Plutona. Na dodatek towarzyszyło temu zaobserwowanie bardzo rzadkiej atmosfery

Plutona, która – jak słusznie sądzono – w ogóle pojawiła się dlatego, że pod koniec XX wieku Pluton znalazł się na swojej osobliwej orbicie wyjątkowo blisko Słońca.

W sumie, pod koniec XX wieku wiadomo było, że Pluton ma rozmiary niewiele większe od rozmiarów największej planetoidy, jest na ogół zamrożony i tylko sezonowo miewa rzadką atmosferę (jest więc lodową planetoidą), ma osobliwą orbitę (jak większość planetoid), a posiadanie satelity trudno uznać za



zdecydowaną cechę planet, gdyż u kilku planetoid odkryto już satelity. Nie zmienia tego nawet fakt, że w połowie 2005 roku odkryto jeszcze dwa satelity Plutona. Księżyc wewnętrzny, Nix (mitologiczna bogini ciemności i matka Charona), ma średnicę 40 km, a zewnętrzny, Hydra (mitologiczny siedmiogłowy potwór) – 160 km. Jak można się domyśleć, obraz wszystkich trzech satelitów Plutona uzyskano za pomocą Teleskopu Hubble'a. Można tu wspomnieć również o sprawach nie do końca poważnych. Mianowicie pierwsze dwie litery nazwy słynnej planety (?) to inicjały wspomnianego już zasłużonego poszukiwacza Plutona – Percivala Lowella, a pierwsze litery małych satelitów to inicjały sondy New Horizons, która rok temu poleciała właśnie ku Plutonowi. Ma tam dotrzeć, o ile wszystko dobrze pójdzie, w lipcu 2015 r.

Autorka artykułu z 2002 roku napisała, że spór o to, czy Pluton jest planetą czy planetoidą, mogłaby rozstrzygnąć jedynie Międzynarodowa Unia Astronomiczna, ale „postanowiła (jak do tej pory) nie wypowiadać się na ten temat”. Otóż Unia właśnie wypowiedziała się! W sierpniu 2006 r. odbyło się w Pradze Walne Zgromadzenie MUA, na którym podjęto (m.in.) dwie uchwały dotyczące definicji planety i definicji obiektów typu Plutona. W pierwszej uchwale ustalono, że „planetą” jest ciało niebieskie, które:

- obiega Słońce,
- ma masę dostatecznie dużą, by siły jego własnej grawitacji przeważyły siły sztywności, w wyniku czego ciało jest w przybliżeniu kuliste,
- przestrzeń w pobliżu jego orbity jest pusta.

Oznacza to, że od sierpnia 2006 Układ Słoneczny ma osiem planet.

Zgodnie z drugą uchwałą wprowadza się nowy typ obiektów, tzw. karłowatych planet. Obiektem takim jest ciało, które:

- obiega Słońce,
- ma masę dostatecznie dużą, by siły jego własnej grawitacji przeważyły siły sztywności, w wyniku czego ciało jest w przybliżeniu kuliste,
- przestrzeń w pobliżu jego orbity nie jest pusta,
- nie jest satelitą.

Przedstawicielami tej klasy obiektów są Pluton, Ceres i Eris (obiekt o dotychczasowym symbolu 2003 UB 313 – *Patrz w niebo w Delcie 4/2006*). Obecnie jest około tuzina kandydatów do tej klasy ciał i ich liczba będzie niewątpliwie rosła. Wszystkie inne obiekty (oprócz satelitów) obiegające Słońce będą nazywać się „małymi ciałami Układu Słonecznego”. Do tej klasy zalicza się większość planetoid, większość tzw. obiektów pozaoneptunowych, komety i in.

Można długo i bezowocnie dyskutować, czy takie rozwiązanie sprawy Plutona jest jego degradacją, czy mnożeniem bytów ponad potrzebę. Chyba jednak trzeba to widzieć nie w tych kategoriach. Co do degradacji, to – jak pisze M. Kożuchowska – sam C. Tombaugh nie dbał o to, że odkrył, być może, nie planetę, lecz cieszył się, iż Plutonem niezmiennie astronomowie się interesują. Wprowadzenie nowej klasy obiektów wydaje się też całkiem usprawiedliwione. Po prostu przyroda jeszcze raz pokazała, że różnorodność obiektów kosmicznych jest większa, niż się dotąd wydawało i nie ma powodów na siłę wtlaczać Plutona do klasy planet lub planetoid, skoro tak bardzo nie pasuje ani do jednej, ani do drugiej. Ciekawe, czy nasze poglądy na naturę tego nieogłdanego jeszcze z bliska ciała nie zmieniają się, gdy doleci do niego New Horizons.

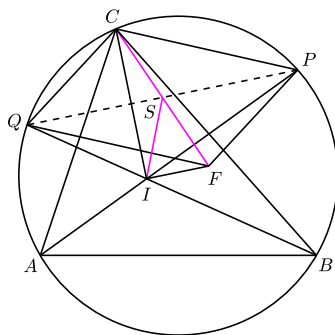


#### Rozwiązanie zadania M 1158.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \sphericalangle ICQ &= \sphericalangle ICA + \sphericalangle ACQ = \\ &= \sphericalangle ICB + \sphericalangle ABQ = \\ &= \sphericalangle ICB + \sphericalangle IBC = \sphericalangle CIQ, \end{aligned}$$

skąd otrzymujemy  $CQ = IQ$ . Analogicznie dostajemy  $CP = IP$ . Wobec tego punkty  $C$  oraz  $I$  są symetryczne względem prostej  $PQ$ .



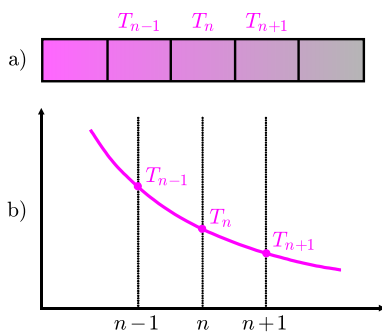
Oznaczmy przez  $S$  punkt przecięcia przekątnych  $CF$  i  $PQ$  równoległoboku  $PCQF$ . Wówczas  $SF = SC = SI$ . Stąd wynika, że punkt  $S$  jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie  $ICF$ , a więc  $\sphericalangle CIF = 90^\circ$ .

# Przewodnictwo ciepłe

Bezustannie stykamy się w życiu codziennym z przewodzeniem energii cieplnej przez najróżniejsze przedmioty: garnek postawiony na gazie czy łyżeczkę zanurzoną w herbacie. Przykłady można byłoby oczywiście dowolnie mnożyć. W każdym z takich przypadków można by zapytać, jak temperatura w różnych miejscach rozważanego ciała zależy od czasu. W ogólnym przypadku odpowiedź na takie pytanie byłaby trudna, ograniczmy się więc do najprostszego przypadku „jednowymiarowego”: długiego i cienkiego pręta o stałym przekroju z jednorodnego materiału. Będziemy przy tym zakładać, że energia płynie wzdłuż pręta i nie ma strat „na boki” – co jest pewną idealizacją sytuacji rzeczywistych.

## Równanie przewodnictwa ciepłego

Rozważmy taki właśnie pręt. Aby móc prowadzić rozumowanie, podzielmy go myślowo na  $N$  fragmentów o jednakowej długości (rys. 1a).



Rys. 1. Rozkład temperatury w pręcie.

### Analityczny opis zagadnienia

Analityczny opis zagadnienia wymaga „uciąglenia” naszego równania. Trzeba wprowadzić funkcję dwóch zmiennych – położenia  $x$  i czasu  $t$  – czyli  $T(x, t)$ . Następują:

1. człon  $\Delta T_n$  należy zastąpić czasową pochodną funkcji  $\frac{\partial T(x, t)}{\partial t}$ ;
2. człon  $(T_{n-1} + T_{n+1} - 2T_n)$  zastąpić drugą pochodną przestrzenną  $\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$  (por. rozważania w artykule *Trzeba podleć...*, *Delta* 01/2006.).

Prowadzi to do „prawdziwego” równania przewodnictwa ciepłego

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\kappa}{c\rho} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2};$$

w którym  $\kappa$  oznacza współczynnik przewodnictwa ciepłego,  $c$  ciepło właściwe substancji, a  $\rho$  jej gęstość.

Rozwiązywanie analityczne równania tego rodzaju jest dość skomplikowane. Na początku XIX wieku Jean Fourier stworzył w tym celu dział matematyki, nazywany obecnie „analizą fourierowską”.

## Jerzy GINTER\*

Przypuśćmy dalej, że w chwili  $t_i$  rozkład temperatury  $T$  przedstawia wykres 1b (symbol  $i$  numeruje kolejne chwile, odległe o  $\Delta t$ ). Symbol  $T$  oznacza temperaturę w skali Celsjusza (użyliśmy dużej litery  $T$ , bo  $t$  małe oznacza czas).

Co możemy powiedzieć o przepływie energii w tym pręcie? Średnia temperatura elementu  $n - 1$ , czyli  $T_{n-1}$ , jest wyższa od temperatury elementu  $n$ , czyli  $T_n$ . Zatem przez lewą granicę elementu  $n$  energia wpływa do jego wnętrza. Energia, która przepłynie w krótkim czasie  $\Delta t$ , jest proporcjonalna do różnicy temperatur elementów:

$$(1) \quad \Delta E_L = a(T_{n-1} - T_n).$$

O taką wartość wzrasta energia zawarta w elemencie  $n$ . Współczynnik  $a$  zależy od geometrycznych rozmiarów elementów i jest proporcjonalny do przewodnictwa ciepłego materiału. Nie będziemy tego jednak omawiać szczegółowo.

Przez prawą granicę elementu  $n$  wypłynie w tym samym czasie  $\Delta t$  porcja energii równa:

$$(2) \quad \Delta E_P = a(T_n - T_{n+1}).$$

Zatem zmiana energii elementu  $n$ , wywołana przepływami przez obie granice, jest równa:

$$(3) \quad \Delta E_n = \Delta E_L - \Delta E_P = a(T_{n-1} - T_n) - a(T_n - T_{n+1}) = \\ = a(T_{n-1} + T_{n+1} - 2T_n).$$

Zauważmy od razu:  $\Delta E_n$  byłoby równe zero, gdyby różnica temperatur  $T_n - T_{n+1}$  była równa różnicy temperatur  $T_{n-1} - T_n$ . Tyle samo energii wypływałoby przez prawą granicę, ile wpływa przez granicę lewą. Energia elementu  $n$  zmienia się w czasie wtedy, kiedy zależność temperatury  $T_n$  od położenia  $n$  jest nieliniowa.

Jeżeli pewna energia  $\Delta E_n$  „netto” dostanie się do elementu  $n$ , wzrośnie temperatura tego elementu. Można z dobrą dokładnością przyjąć, że przyrost temperatury  $\Delta T_n$  jest proporcjonalny do  $\Delta E_n$  i napisać:

$$(4) \quad \Delta T_n = b\Delta E_n.$$

Współczynnik  $b$  zależy od geometrycznych rozmiarów elementu, jego masy i – odwrotnie proporcjonalnie – od ciepła właściwego materiału.

Łącząc (3) i (4) dostajemy **równanie przewodnictwa ciepłego** (w formie „dyskretnej”):

$$(5) \quad \Delta T_n = c(T_{n-1} + T_{n+1} - 2T_n);$$

symbolem  $c$  oznaczyliśmy iloczyn stałych  $a$  i  $b$ .

Stan ustalony polega na tym, że temperatura we wszystkich punktach przestaje zależeć od czasu, czyli  $\Delta T_n = 0$ . Ze wzoru (5) wynika, że w takim stanie zależność  $T$  od  $n$  musi być zależnością liniową. W szczególności może to odpowiadać funkcji stałej.

### Opis numeryczny

Tutaj zajmijmy się jedynie rozwiązaniami numerycznymi. Przypuśćmy, że znamy dla czasu  $t_i$  wielkości  $T_{n-1}(t_i)$ ,  $T_{n+1}(t_i)$  i  $T_n(t_i)$ . Wielkość  $T_n(t_{i+1})$  obliczymy, stosując algorytm, wynikający ze wzoru (5):

$$(6) \quad T_n(t_{i+1}) = T_n(t_i) + c[T_{n-1}(t_i) + T_{n+1}(t_i) - 2T_n(t_i)].$$

Obliczenia należy rozpocząć, zadając w sposób dowolny dla  $t_0 = 0$  zbiór wielkości  $T_n(0)$ . Następnie obliczamy następne zestawy wartości, stosując wzór (6).

Konkretne obliczenia znajdują się na stronie internetowej *Delty* w pliku *Przewodnictwo ciepłe*. Tu przytoczymy tylko wyniki.

\* Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

## Warunki brzegowe 1, ustalona temperatura na końcach pręta

Dodatkowo trzeba określić, co dzieje się na granicach obszaru, bo do tych punktów wzór (6) nie może być zastosowany (na przykład dla  $n = 0$  nie ma elementu  $-1$ ). Na początku rozważymy przykłady, w których ustalona jest temperatura na końcach pręta, czyli – w naszym modelu – w elementach 0 i  $N$ .

### Przykład 1

Rozważmy długi pręt, który początkowo miał temperaturę równą zero. Reprezentować go będzie 11 punktów, numerowanych od 0 do 10. Zakładać będziemy, że prawy koniec pręta stale jest utrzymywany w temperaturze zerowej, co modelujemy, narzucając dla wszystkich czasów  $T_{10} = 0$ . W chwili  $t = 0$  pręt ten zetknął się z dużym ciałem o temperaturze równej 1, co modelujemy, narzucając dla wszystkich czasów  $T_0 = 1$ . Określiliśmy w ten sposób wspomniane powyżej warunki brzegowe. W obliczeniach przyjęty został parametr  $c = 0,3$ . Pytamy, jak zmieniać się będzie w czasie temperatura poszczególnych fragmentów pręta.

Wyniki obliczeń przedstawia rysunek 2 (arkusz *Skok*). Narysowanych zostało sześć wykresów, dla czasów 0, 2, 8, 18, 32, 50, 72 i 98 ( $2n^2$ ). Widać stopniowe przejście od stanu początkowego do stanu ustalonego, odpowiadającego liniowej zależności temperatury  $T$  od położenia  $n$ .

### Przykład 2

Przykład ten odpowiada innej sytuacji: oba końce pręta mają stale temperaturę równą zero. Natomiast środek pręta podgrzewany był małym piecykiem tak długo, aż w obu połówkach ustalił się stan stacjonarny. W chwili  $t = 0$  piecyk wyłączono. Pytamy: jak pręt będzie osiągał stan ustalony, w którym temperatura wszędzie będzie równa zero?

Wyniki obliczeń na identycznej, jak w przykładzie 1, siatce punktów przedstawia rysunek 3 (arkusz *Trójkąt*). Narysowanych zostało osiem wykresów, dla tych samych czasów, co poprzednio. Temperatura w całym pręcie stopniowo się obniża. Widać też, że dla dość dużych – ale nie nieskończonych – czasów wykres zależności temperatury  $T$  od położenia  $n$  jest fragmentem sinusoidy. Nie jest to przypadek, ale na naszym poziomie trudno byłoby to uzasadnić.

## Warunki brzegowe 2, układ izolowany termicznie

Jeżeli układ jest izolowany i nie wymienia energii z otoczeniem, warunki brzegowe musimy zmodyfikować. Do elementu 0 energia dopływa tylko z prawej strony, od elementu 1. Możemy więc napisać (por. wzór (1)).

$$\Delta E_0 = a(T_1 - T_0).$$

Łącząc to z wyrażeniem (4) i stosując identyczne rozumowanie jak poprzednio, dostajemy algorytm

$$T_0(t_{i+1}) = T_0(t_i) + c[T_1(t_i) - T_0(t_i)].$$

Podobnie – do skrajnego prawego elementu o liczbie  $N$  energia dociera tylko z lewej strony. Stąd:

$$T_N(t_{i+1}) = T_N(t_i) + c[T_{N-1}(t_i) - T_N(t_i)].$$

### Przykład 3

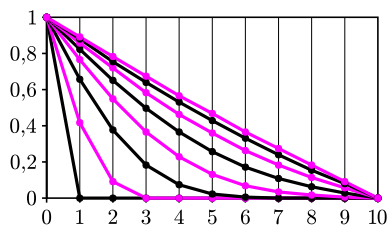
Jako przykład układu izolowanego rozważmy sytuację, w której w chwili  $t = 0$  lewa połowa pręta ma temperaturę  $T = 1$ , a prawa temperaturę  $T = 0$ . Można sobie wyobrazić, że w chwili  $t = 0$  zetknięto dwa identyczne pręty, ale o różnych temperaturach. Obliczenia zawarte są w arkuszu 2 *Pręty* (rys. 4).

Widać, że w układzie zachodzi wyrównanie temperatur. W granicy  $t \rightarrow \infty$  temperatura wszędzie będzie jednakowa i równa 0,5.

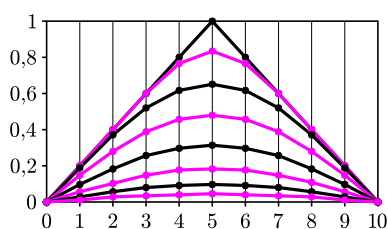
Widać także, że dla dostatecznie długich czasów funkcja, opisująca zależność  $T_n$  od  $n$ , jest fragmentem sinusoidy – podobnie, jak w przykładzie 2.

## Zadanie domowe

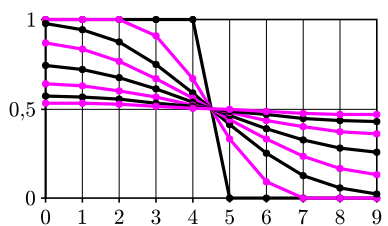
Zmodyfikuj warunki początkowe w arkuszu *Trójkąt*. Niech dla  $t = 0$  temperatura będzie równa zero wszędzie, z wyjątkiem punktu środkowego, dla którego  $T_5(0) = 1$ . Propozycja: w obliczeniach zmniejsz  $c$  do 0,05. Jak można byłoby podobną sytuację uzyskać w prawdziwym pręcie?



Rys. 2. W chwili początkowej temperatura w pręcie zmieniała się w zależności od  $n$  skokowo. Krzywe odpowiadają czasom  $t_i = 0, 2, 8, 18, 32, 50, 72$  i  $98$ .

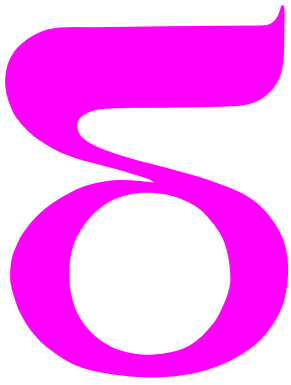


Rys. 3. Trójkątny rozkład temperatury w chwili początkowej. Krzywe odpowiadają czasom  $t_i = 0, 2, 8, 18, 32, 50, 72$  i  $98$ .



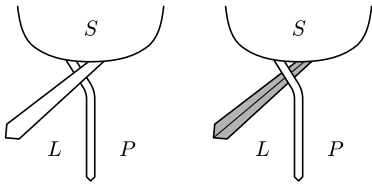
Rys. 4. Wyrównanie temperatur w układzie izolowanym. Krzywe odpowiadają czasom  $t_i = 0, 2, 8, 18, 32, 50, 72$  i  $98$ .





# mała delta

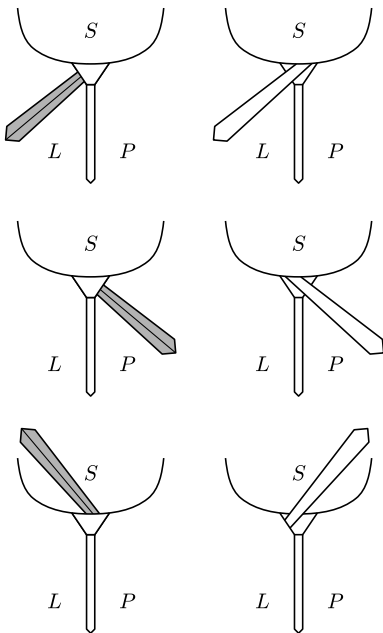
## Węzły bliskie każdemu



Rys. 1

Z krawatami mamy do czynienia często, a temat ich wiązania nierzadko chcielibyśmy zbyć milczeniem. Jednak procesu wiązania tego niewielkiego paska materiału nie wolno bagatelizować. Nawet ignorując względy estetyczne, które – jak się później okaże – mają ścisły związek z obliczeniami, węzły krawatowe mogą być ciekawym obiektem badań dla matematyka.

Na początku należałoby określić, które węzły nazywać będziemy **krawatowymi**. Oczywiście, istnieje wiele wariantów łamiących poniższe reguły, lecz wszystkie rozważania matematyczne dotyczyć będą węzłów utworzonych zgodnie z następującymi zasadami:



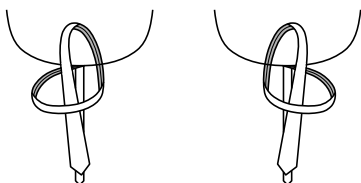
Rys. 2

1. Pierwszym krokiem jest ułożenie szerszego końca, którym będziemy wykonywać wszystkie ruchy podczas wiązania, na lewo, podczas gdy wąski wisi swobodnie (rys. 1). Jeśli przekładamy szerszy koniec nad wąskim, oba kierujemy gładką (reprezentacyjną) stroną na zewnątrz, jeśli zaś pod węższym, końcówki obracamy tak, by gładka strona obrócona była w kierunku koszuli. Dla matematycznej interpretacji nie ma to najmniejszego znaczenia, lecz w praktyce skutkuje to właściwą orientacją szerokiego końca krawata w gotowym węźle.

2. Otrzymujemy 3 strefy – lewą  $L$ , środkową  $S$  i prawą  $P$ . Teraz możemy wykonywać ruchy wewnątrz tego układu 3 stref. Oznaczamy je symbolem strefy, do której kierujemy końcówkę krawata. Możemy wykonywać ruchy od i do koszuli, co oznaczać będziemy indeksowaniem poszczególnych ruchów, odpowiednio  $\odot$  i  $\otimes$ . Dwoch kolejnych ruchów nie można skierować do tej samej strefy i nie mogą mieć tej samej orientacji. Zatem zbiór wszystkich ruchów to  $\{L\odot, L\otimes, P\odot, P\otimes, S\odot, S\otimes\}$  (rys. 2).

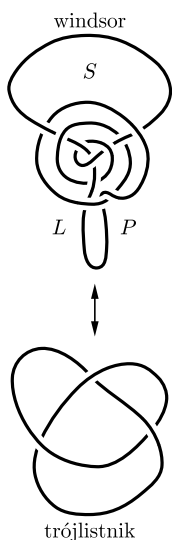
3. Końcową sekwencję tworzącą pętlę – potrzebną do ostatniego ruchu – tworzy się poprzez kolejne ruchy  $P\odot L\otimes S\odot$  lub  $L\odot P\otimes S\odot$ .

4. Ostatnim ruchem jest przełożenie szerokiego końca przez utworzoną pętlę, tak by uzyskać charakterystyczny kształt węzła krawatowego (rys. 3). Ruch ten oznaczać będziemy przez  $T$ . Nie uwzględnia się go, gdy pytamy o **liczbę ruchów** prowadzących do danego węzła.

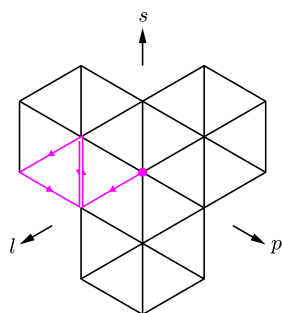


Rys. 3

Najprostszym węzłem jest tzw. węzeł orientalny, w którym pierwszy, odgórnie ustalony ruch jest zarazem pierwszym ruchem sztywnej sekwencji końcowej. Wiąże się go w 3 ruchach –  $L\odot P\otimes S\odot T$ . Inne



Rys. 4



Rys. 5

znane, przynajmniej ze słyszenia, węzły krawatowe to:

- prosty – 4 ruchy –  $L \otimes P \odot L \otimes S \odot T$
- pratt – 5 ruchów –  $L \odot S \otimes L \odot P \otimes S \odot T$
- windsor – 8 ruchów –  $L \otimes S \odot P \otimes L \odot S \otimes P \odot L \otimes S \odot T$

Ze względu na skończoną długość krawata specjaliści uznali, że liczba ruchów przy wiązaniu węzła nie powinna przekraczać 9. Łącząc węzły z matematyką, można oczekiwać, że rezultatem będą rozważania dotyczące teorii węzłów. Tymczasem nic bardziej mylnego. Węzły krawatowe rozważane jako obiekty topologiczne (oczywiście po połączeniu wolnych końców) okazują się być w większości najprostszymi z węzłów – trywialnym, trójlistnym i ósemkowym (przykład rys. 4). Nie ukazują one różnicowania i nie dają nam dodatkowych informacji na temat ich własności.

Skoro klasyczna teoria węzłów nie jest dobrym językiem do opisu węzłów krawatowych, fizycy T. Fink i Y. Mao opracowali interpretację samego procesu wiązania krawatów jako błądzenia po sieci trójkątnej (rys. 5). Ośie  $p, s, l$  wskazują strefy w czasie wiązania, a wektory jednostkowe  $\vec{p}, \vec{s}, \vec{l}$  odpowiadają poszczególnym ruchom  $P, S, L$ . Na przykład, węzeł pratt odpowiada błądzeniu  $\vec{l}\vec{s}\vec{l}\vec{p}\vec{s}$ . O symbolach  $\otimes$  i  $\odot$  można na chwilę zapomnieć, bo to, jak należy wykonać pierwszy ruch, by na końcu otrzymać prawidłowo ułożony krawat, zależy tylko od liczby ruchów. Można teraz pokusić się o postawienie pewnego pytania.

### Problem

*Ile jest węzłów krawatowych?*

### Rozwiązanie

Oznaczmy przez  $F_{\vec{p}}(n)$  liczbę błądzeń o długości  $n$  spełniających warunki węzła krawatowego i rozpoczynających się  $\vec{l}$ , a kończących  $\vec{p}$ . Analogicznie wprowadzamy oznaczenia  $F_{\vec{s}}(n)$  i  $F_{\vec{l}}(n)$ . W każdym miejscu (prócz pierwszego ruchu –  $\vec{l}$ ) wybieramy między dwoma ruchami, zatem

$$(1) \quad F_{\vec{p}}(n) + F_{\vec{s}}(n) + F_{\vec{l}}(n) = 2^{n-1}.$$

Zauważmy, że każdy ruch może zachodzić po dwóch innych, stąd

$$(2) \quad F_{\vec{l}}(n+2) = F_{\vec{s}}(n+1) + F_{\vec{p}}(n+1),$$

co zastosowane dwukrotnie daje nam

$$(3) \quad F_{\vec{l}}(n+2) = F_{\vec{p}}(n) + F_{\vec{s}}(n) + 2F_{\vec{l}}(n).$$

Analogiczna zależność zachodzi dla  $F_{\vec{p}}(n+2)$ , a w połączeniu z równością (1) dostajemy zależności rekurencyjne z oczywistymi warunkami początkowymi

$$(4) \quad F_{\vec{l}}(n+2) = 2^{n-1} + F_{\vec{l}}(n) \quad F_{\vec{l}}(1) = 1 \quad F_{\vec{l}}(2) = 0$$

$$(5) \quad F_{\vec{p}}(n+2) = 2^{n-1} + F_{\vec{p}}(n) \quad F_{\vec{p}}(1) = 0, \quad F_{\vec{p}}(2) = 1.$$

Jednakże jedyne możliwe sekwencje końcowe to  $\vec{p}\vec{l}\vec{s}$  i  $\vec{l}\vec{p}\vec{s}$ , zatem interesuje nas suma

$$F_{\vec{p}}(r-2) + F_{\vec{l}}(r-2),$$

gdzie  $r$  to liczba ruchów. Wzór ogólny informujący o liczbie wszystkich węzłów krawatowych o  $r > 1$  ruchach ma postać

$$(6) \quad F(r) = \frac{1}{3} (2^{r-2} - (-1)^{r-2}).$$

Dowód jego poprawności można przeprowadzić indukcyjnie na podstawie zależności (4) i (5). Stąd możemy dowiedzieć się, ile jest wszystkich węzłów krawatowych.

$$\sum_{r=2}^9 F(r) = 85.$$

Jednak nie wszystkie węzły spośród tych 85 są *ładne*. Niektóre mogą okazać się płaskie, inne niesymetryczne, a inne z kolei niekształtne. Na szczęście nie trzeba wiązać danego węzła, aby się o tym przekonać. Wystarczy wyliczyć wartości pewnych współczynników na podstawie znajomości sekwencji ruchów danego węzła.

**Symetria** zależy od różnicy między liczbą ruchów w lewo i w prawo. Aby węzeł był symetryczny, wartość wyrażenia

$$|\text{liczba ruchów } P - \text{liczba ruchów } L|$$

powinna być jak najmniejsza. Gdy ruchów w jedną stronę jest więcej, nietrudno sobie wyobrazić, że węzeł będzie po tej stronie grubszy.

Na **grubość** danego węzła mają wpływ ruchy do środka, zatem za współczynnik grubości węzła długości  $r$  uznawać będziemy

$$\frac{\text{liczba ruchów } S}{r}.$$

Według różnych źródeł ten stosunek powinien wynosić przynajmniej  $\frac{1}{6}$  albo nawet  $\frac{1}{4}$ .

Ostatnim współczynnikiem jest **równowaga** określana w zależności od kolejnych kroków oplotu. Decyduje ona o utrzymywaniu właściwego kształtu.

Oznaczając  $\sigma_n$  jako  $n$ -ty krok błądzenia, definiujemy  $\omega_n$ . Mianowicie  $\omega_n(\sigma_n, \sigma_{n+1}) = 1$ , gdy przejście  $\sigma_n \rightarrow \sigma_{n+1}$  jest jednym z  $\vec{s}\vec{r}$ ,  $\vec{r}\vec{l}$ ,  $\vec{l}\vec{s}$ , a  $\omega_n(\sigma_n, \sigma_{n+1}) = -1$  w przeciwnym przypadku. Aby węzeł był możliwie najbardziej zrównoważony, wartość wyrażenia

$$\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{r-1} |\omega_n - \omega_{n-1}|$$

powinna być najmniejsza. Wyliczenie powyższych współczynników, przez podstawienie odpowiednich danych do wzorów, nie powinno nastęrczać poważniejszych kłopotów. Dzięki temu możemy dowiedzieć się, między innymi, że bodaj najsłynniejszy węzeł krawatowy – windsor wcale nie jest idealny. Istnieją 3 węzły o równowadze i symetrii równych 0 – orientalny, półwindsor i hanover. Są to 1, 2 i 3 razy powtórzone te same sekwencje  $\vec{l}\vec{p}\vec{s}$ . Warto zaznaczyć, że formalne dołączenie węzła hanover do rodziny węzłów krawatowych jest właśnie rezultatem matematycznych rozważań na temat własności tych węzłów.

Wiążąc krawat, mogliśmy zauważyć, że czasem po wyciągnięciu wąskiego końca z węzła na krawacie pozostaje węzeł, a czasem nie. Od czego zależy stan zawężenia danego węzła po wyjęciu wąskiego końca? To pytanie zostawiamy już Czytelnikom.

#### Literatura

- [1] T. Fink, Y. Mao, *Designing tie knots by random walks*, Nature **398** (4 III 1999) 31–32.  
 [2] T. Fink, Y. Mao, *Tie knots, random walks and topology*, Physica A **276** (2000) 109–121.

Małą Deltę przygotował Maciej PAJĄK  
 Pracownia Matematyki Pałacu Młodzieży w Katowicach



## Ciemna materia *in flagranti*

Od lat rośnie przekonanie, że większość materii we Wszechświecie jest niedostrzegalna i w dodatku nieznaną natury. Dowody na istnienie tej tzw. ciemnej materii były, jak dotąd, tylko pośrednie, ponieważ jedynie efekty jej grawitacyjnego oddziaływania ze zwykłą materią mogą być postrzegane.

Brak bezpośredniego dowodu istnienia ciemnej materii pozwalał na konstruowanie hipotez, w których obserwacje były wyjaśniane za pomocą modyfikacji prawa powszechnego ciężenia.

Nadal hipotetyczna, ciemna materia składa się najprawdopodobniej z nieodkrytych jeszcze, masywnych, słabo oddziałujących cząstek. Obserwacje struktur o coraz większej skali (galaktyk, gromad galaktyk) wskazują, że większość ich masy jest zawarta w kulistych otoczkach zawierających takie cząstki.

Z kolei większość pozostałej, zwykłej materii tych struktur też nie świeci, przynajmniej w promieniowaniu widzialnym, ponieważ występuje w postaci rozrzedzonego gazu. Tylko niewielka część zwykłej materii tworzy świecące gwiazdy.

Poprawność nakreślonego obrazu wielkoskalowych struktur może być sprawdzona tylko doświadczalnie. Coraz wyraźniej widać, że kosmologia i fizyka cząstek to dwa końce jednego kija, którym można sondować tajemnice Wszechświata. Dlaczego więc nie zastosować metod doświadczalnych fizyki cząstek? Jak wiadomo, są one, przynajmniej pojęciowo, niezwykle proste. Wywodzą się z epoki kamienia łupanego. Żeby otworzyć orzech, trzeba w niego czymś uderzyć. Można również zgnieść jeden orzech o drugi. Aby przeprowadzić doświadczenie w tym duchu, należy zaaranżować zderzenie gromad galaktyk. Jeżeli większość masy gromad stanowi ciemna materia, to powinna ona przetrwać eksperyment praktycznie bez zaburzenia. Skutki kolizji będą widoczne tylko dla zwykłej materii, zwłaszcza dla gazu, który rozgrzeje się i uformuje fale uderzeniowe.

Pomysł dobry, tylko jak go zrealizować? Jedynym sposobem jest poszukanie miejsca, gdzie taka kolizja nastąpiła sama z siebie.

Dobrą kandydatką wydawała się gromada galaktyk 1E0657-56. Jej dokładny obraz w promieniowaniu rentgenowskim, uzyskany niedawno za pomocą kosmicznego obserwatorium Chandra, ukazuje właśnie przewidywane fale uderzeniowe (ryc. 1), dowodząc, że obecny wygląd gromady jest wynikiem zderzenia dwóch innych. Gromada ta jest nazywana pociskiem (bullet), bo do złudzenia przypomina przestrzelenie czegoś uwiecznione szybką kamerą. Eksperyment został przeprowadzony, ale jak sprawdzić, co się stało z ciemną materią? Przewidujemy, że niezaburzona wyprzedziła gaz i objawiłaby się jako dwie oddalające się kule, o ile tylko udałoby się ją wykryć.

Ponieważ bezpośrednio jej nie widać, to jedyne, co można zrobić, to wykorzystać jej masę i związane z nią

oddziaływanie grawitacyjne. Rozkład masy ciemnej materii można uzyskać, badając jej soczewkowanie grawitacyjne.

To właśnie zrobiono za pomocą kosmicznego teleskopu Hubble'a, naziemnego teleskopu Magellana i VLT (wielkiego teleskopu ESO). Uzyskana mapa jest przedstawiona jako rozjaśnienia nałożone na obraz optyczny (ryc. 2). Widać, że obserwujemy dokładnie to, czego się spodziewaliśmy. Większość materii uczestniczącej w zderzeniu pozostała niezaburzona i wyprzedza rozgrzany w czasie kolizji gaz.

Jest to najbardziej bezpośredni dowód realności ciemnej materii – jeszcze dymiący pistolet znaleziony przez partyzantów ciemnej materii.



Rycina 1. Gromada galaktyk 1E0657-56. Obraz rentgenowski, uzyskany za pomocą kosmicznego obserwatorium Chandra, nałożony na obraz optyczny.

Obraz rentgenowski dzięki: M. Markevitch i inni; NASA/CXC/CfA.

Obraz optyczny dzięki: D. Clowe i inni; NASA/STScI; Magellan (U. Arizona).



Rycina 2. Gromada galaktyk 1E0657-56. Mapa gęstości materii uzyskana dzięki analizie obrazów galaktyk tła zniekształconych w wyniku soczewkowania grawitacyjnego, nałożona na obraz optyczny.

Mapa gęstości materii dzięki: D. Clowe i inni; NASA/STScI; ESO WFI; Magellan (U. Arizona).

Obraz optyczny dzięki: D. Clowe i inni; NASA/STScI; Magellan (U. Arizona).

Piotr ZALEWSKI

## Protokół posiedzenia Jury XXVIII Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki w składzie: Antoni Leon Dawidowicz – przewodniczący, Marcin Hauzer, Marek Kordos, Michał Stukow, Agnieszka Wojciechowska-Waszkiewicz, Jarosław Wróblewski, na posiedzeniu w dniu 5 września 2006 roku w Gdańsku, po wysłuchaniu prezentacji prac dopuszczonych do finału, biorąc pod uwagę dobór tematu, treść pracy i sposób jej prezentacji, postanowiło:

1) przyznać złoty medal i nagrodę pieniężną 500 zł

**Janowi Szejce** z XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie za pracę *Ciąg, który lubi nierówności*;

2) przyznać dwa srebrne medale i nagrody pieniężne po 400 zł

**Krzysztofowi Dorobiszowi** z V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie za pracę *Reszty potęgowe*

oraz

**Tomaszowi Tkoczowi** z II LO im. Andrzeja Frycza Modrzewskiego w Rybniku za pracę *O problemie związanym z twierdzeniem Rolle'a*;

3) przyznać brązowy medal i nagrodę pieniężną 300 zł

**Aleksandrowi Kubicy** z V LO w Bielsku-Białej za pracę *Od zadania olimpijskiego do twierdzenia*;

4) przyznać wyróżnienia i nagrody pieniężne po 200 zł

**Magdalenie Bojarskiej** z Gimnazjum Przymierza Rodzin im. Jana Pawła II w Warszawie za pracę *O liczbie kątów ostrych wielokąta*

oraz

**Jarosławowi Pyzikowi** z II LO im. Jana III Sobieskiego w Krakowie za pracę *Co je koza na śniadanie*;

5) wyrazić podziękowania i wręczyć dyplomy honorowe oraz nagrody pieniężne po 200 zł nauczycielom – opiekunom laureatów: Lucynie Cięciwie, Jackowi Dymelowi, Wojciechowi Guzickiemu, Karinie Łępickiej i Tomaszowi Szymczykowi.

Ponadto wszyscy finaliści i ich opiekunowie otrzymują nagrody książkowe i upominki ufundowane przez Firmę ABE, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Wydawnictwo PWN, Wydawnictwo WNT oraz Uniwersytet Gdański.

*podpisy Członków Jury*

Z przyjemnością informujemy, że

**w finałach XVIII Konkursu Prac Młodych Naukowców Unii Europejskiej w Sztokholmie, wrzesień 2006, II nagrodę zdobył Michał Marcinkowski**

laureat złotego medalu w Konkursie Prac Uczniowskich z Matematyki w 2005 roku. Skrót jego pracy można znaleźć w *Delcie* 4/2006.

## Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.

3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.

4. W eliminacjach bierze udział każdy uczeń, który w terminie do 1 maja prześle pod adresem redakcji *Delty* jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje:

- adres prywatny autora,
- klasa, nazwa i adres szkoły;
- imię, nazwisko i adres opiekuna pracy.

5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.

6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Jury Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną zakwalifikowane przez Jury do finału. Finał odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac i ich opiekunom przed końcem roku szkolnego.

8. Finaliści i opiekunowie ich prac otrzymają od Zarządu Głównego PTM zaproszenia do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.

9. Finał polega na wygłoszeniu (nie odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia Sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.

10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny, brązowy i wyróżnienia oraz nagrody pieniężne ufundowane przez Ministerstwo Edukacji Narodowej.

11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.

12. Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.

13. Jury Konkursu jest powoływane przez Zarząd Główny PTM na wniosek Redakcji *Delty*.

# Wyniki XXIII Ogólnopolskiego Sejmiku Matematyków

Konkurs polega na przedstawieniu opracowania jednego z tematów zaproponowanych przez Jury (wraz z bibliografią) lub tematu własnego oraz – w przypadku zakwalifikowania się do finału – krótkim publicznym zreferowaniu tego opracowania. W roku 2006/7 proponowane tematy to pewnik wyboru, generowanie liczb losowych, działania na zbiorach, aproksymacja funkcji, rodzaje zbieżności funkcji, rekurencje, ułamki proste, funkcje tworzące, sieci przepływowe, rozmycie, porządne i nieporządne funkcje, związki liczb  $i$ ,  $e$ ,  $\pi$ .

Sejmiki organizuje Pracownia Matematyki Pałacu Młodzieży w Katowicach; [www.pm.katowice.pl/pracownia/matematyka](http://www.pm.katowice.pl/pracownia/matematyka)

Jury w składzie: prof. dr hab. Maciej Sablik, dr Lech Bartłomiejczyk, mgr Tomasz Bielaczyc, dr Marzena Ciemała, mgr Żywilla Fechner, dr Erwin Kasperek, dr Michał Machura, dr Janusz Morawiec, dr Katarzyna Osiak, dr Marian Podhorodnyński, mgr Barbara Przebieracz, dr Anna Szczerba-Zubek, przyznało

I miejsce **Adrianowi Łańcuckiemu** z I LO w Legnicy za pracę

*Nowe spojrzenie na problem czterech barw;*

II miejsce **Tomaszowi Tkoczowi** z II LO w Rybniku za pracę

*O kilku nierównościach funkcyjnych;*

III miejsce **Kamilowi Kaczmarkowi** z V LO w Siemianowicach Śl. za pracę

*Od Cezara przez Enigmę do RSA, czyli podstawy kryptografii;*

IV miejsce **Maciejowi Pająkowi** z Pracowni Matematyki Pałacu Młodzieży w Katowicach za pracę (patrz *Mała Delta* w tym numerze)

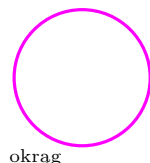
*Węzły i sploty. Klasyczna teoria węzłów a węzły używane w praktyce;*

oraz wyróżnienie **Maciejowi Chruścielowi** z II LO w Olkuszu za pracę

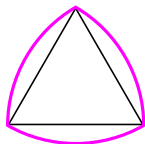
*Dlaczego ten obwód jest większy?*

W głosowaniu i nauczyciele, i uczniowie wybrali referat Adriana Łańcuckiego.

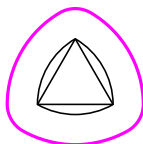
## Stała szerokość



okrąg



trójkąt Reuleaux



otoczka trójkąta Reuleaux

Krzywa zamknięta ma stałą szerokość  $d$ , gdy dla dowolnie obranego kierunku mieści się między dwiema prostymi równoległymi, mającymi ten kierunek i odległymi o  $d$ , a nie mieści się między żadnymi dwiema równoległymi odległymi o mniej niż  $d$ . Jak łatwo zauważyć, krzywą o stałej szerokości jest okrąg – jego (stała) szerokość to jego średnica. Łatwo też zauważyć, że figurą o stałej szerokości jest trójkąt Reuleaux, który konstruujemy, łącząc każde dwa wierzchołki trójkąta równobocznego łukiem okręgu o środku w trzecim wierzchołku – jego szerokość to długość boku wyjściowego trójkąta. Ta konstrukcja pozwoli zapewne zainteresowanym Czytelnikom skonstruować wiele innych figur o stałej szerokości (z wielokątów o nieparzystej – dlaczego? – liczbie boków). Jeszcze inne figury o stałej szerokości uzyskamy, rysując otoczki danych krzywych o stałej szerokości, czyli rysując te punkty leżące na zewnątrz nich, których odległość do najbliższego punktu wyjściowej krzywej jest daną z góry liczbą  $\varepsilon$ . Jeśli szerokość wyjściowej krzywej będzie  $d$ , to otrzymana figura będzie miała szerokość  $d + 2\varepsilon$ . To bogactwo jednak w pewnym sensie mieści się między okręgiem a trójkątem Reuleaux: z krzywych o stałej szerokości  $d$  największe pole ogranicza okrąg, a najmniejsze trójkąt Reuleaux (co wykazał Henri Lebesgue!), a różnica wynosi zaledwie  $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi - \sqrt{3}}{2}\right) d^2 \approx 0,080 d^2$ .

M.K.



## Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

**F 683.** Jedną okładkę kondensatora o pojemności  $C$  łączy z drugą przewodzącą kulką o promieniu  $r$  i ładunku  $q_0$  (rys. 1). Jaki ładunek zostanie na powierzchni kulki?

Rozwiązanie na str. 16

**F 684.** Dwie bardzo odległe, przewodzące kulki o promieniach  $r$  i  $R$  są podłączone do dwóch okładek kondensatora o pojemności  $C$ . Jedna kulka, o promieniu  $r$ , została odłączona od kondensatora, naładowana ładunkiem  $Q$  i znowu podłączona (rys. 2). Jaki ładunek pojawił się na powierzchni drugiej kulki?

Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Waldemar POMPE

**M 1156.** Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$  liczba  $n^{n^4} - n^{n^2}$  jest podzielna przez 547.

Rozwiązanie na str. 3

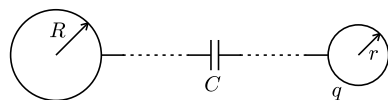
**M 1157.** Na przyjęciu spotkało się  $n \geq 2$  osób, przy czym każda z nich ma wśród pozostałych co najwyżej trzy nieznaną osobę. Wykazać, że uczestników przyjęcia można podzielić na dwie grupy tak, aby każdy z nich miał w obrębie swojej grupy co najwyżej jedną nieznaną osobę.

Rozwiązanie na str. 4

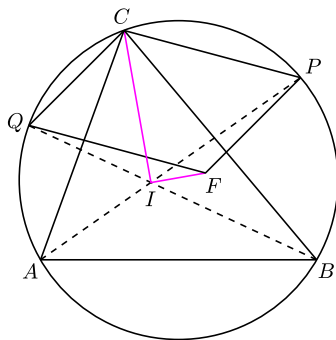
**M 1158.** Punkt  $I$  jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt  $ABC$ . Proste  $AI$  i  $BI$  przecinają okrąg opisany na trójkącie  $ABC$  odpowiednio w punktach  $P$  i  $Q$ , różnych od  $A$  i  $B$  (rys. 3). Punkt  $F$  jest takim punktem, że czworokąt  $CPFQ$  jest równoległobokiem. Udowodnić, że proste  $IC$  i  $IF$  są prostopadłe.

Rozwiązanie na str. 5

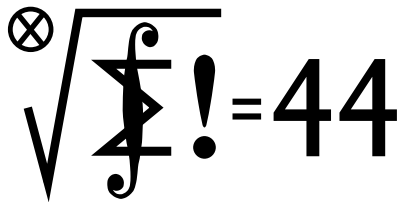
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Termin nadsyłania rozwiązań:

31 III 2007

Czołówka ligi zadaniowej

**Klub 44 M**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań

**521** ( $WT = 2,23$ ) i **522** ( $WT = 1,30$ )

z numeru 5/2006

Marian Łupieżowicz	- Zebrydowice	43,55
Michał Kieza	- Warszawa	41,38
Michał Jastrzębski	- Warszawa	39,81
Jerzy Cisło	- Wrocław	39,34
Łukasz Garncarek	- Opole	36,81
Piotr Kumor	- Olsztyn	34,47
Krzysztof Kamiński	- Pabianice	34,14
Dariusz Kurpiel	- Posada	
	Zarszyn	33,44
Krzysztof Dorobisz	- Kraków	33,20

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

### Zadania z matematyki nr 533, 534

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**533.** Ostrosłup ścięty prawidłowy ma kulę wpisaną (styczną do wszystkich ścian) oraz kulę półwspisaną (styczną do wszystkich krawędzi). Wyznaczyć liczbę wierzchołków oraz skalę podobieństwa podstaw ostrosłupa.

**534.** Czy istnieje taka funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , że dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$  wykres funkcji  $f \circ f \circ \dots \circ f$  ( $n$ -krotnej iteracji funkcji  $f$ ) przechodzi przez dokładnie  $n$  punktów kratowych (tj. punktów o obu współrzędnych całkowitych)?

Zadanie 534 zaproponował pan Michał Kremzer z Gliwic.

### Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/2006

Przypominamy treść zadań:

**525.** Rozwiązać w liczbach rzeczywistych  $a, b, c, d, e$  układ równań

$$a = c^2 + d^2, \quad b = d^2 + e^2, \quad c = e^2 + a^2, \quad d = a^2 + b^2, \quad e = b^2 + c^2$$

**526.** Ile jest par przekątnych rozłącznych w  $n$ -kącie foremym? (Przekątne rozłączne - nieprzecinające się wewnątrz wielokąta i niemające wspólnego końca).

**525.** Niech  $a, b, c, d, e$  będą liczbami spełniającymi podany układ; jasne, że są to liczby nieujemne. Ich suma jest równa podwojonej sumie ich kwadratów. W myśl nierówności Cauchy'ego-Schwarza,

$$(a + b + c + d + e)^2 \leq 5(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) = \frac{5}{2}(a + b + c + d + e).$$

Stąd  $2(a + b + c + d + e) \leq 5$  i wobec tego pewne dwie sąsiednie liczby w ciągu  $(a, b, c, d, e, a)$  mają sumę nie większą od 1. Przyjmijmy bez straty ogólności, że  $b + c \leq 1$ .

Odejmując stronami pierwsze i czwarte równanie układu oraz drugie i trzecie równanie, dostajemy zależności

$$a - d = c^2 + d^2 - a^2 - b^2, \quad b - c = d^2 - a^2,$$

z których wynika równość

$$(a - d)(1 + a + d) = c^2 - b^2 = (b + c)(a^2 - d^2),$$

czyli

$$(a - d)[(1 + a + d) - (b + c)(a + d)] = 0.$$

W nawiasie kwadratowym znajduje się liczba  $1 + (a + d)(1 - b - c) \geq 1$ . Zatem  $a = d$ . Stąd od razu  $b = c$ . To sprowadza układ równań do następującego:

$$(*) \quad a = a^2 + c^2, \quad c = a^2 + 4c^4, \quad e = 2c^2.$$

Tak więc

$$a = c^2 + (c - 4c^4),$$

co po podstawieniu do któregośkolwiek z pierwszych dwóch równań układu (\*) wnet daje równanie

$$c(2c - 1)(8c^6 + 4c^5 - 2c^4 - 5c^3 + c + 1) = 0.$$

Wielomian w ostatnim nawiasie przyjmuje dla  $c \geq 0$  wartości dodatnie; można to uzasadnić różnymi sposobami - na przykład zapisując go w postaci

$$\frac{11}{2}c^6 + 2c^2(c^2 - 1)^2 + \frac{1}{2}(c^3 - 1)^2 + (c + \frac{1}{2})(2c^2 - 1)^2.$$

W takim razie  $c = 0$  lub  $c = \frac{1}{2}$ . Po podstawieniu do układu (\*) otrzymujemy w pierwszym przypadku  $a = e = 0$ , a w drugim  $a = e = \frac{1}{2}$ .

Otrzymujemy pięć liczb  $(0, 0, 0, 0, 0)$  oraz  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  jako możliwe rozwiązania wyjściowego układu równań i sprawdzamy, że istotnie są one rozwiązaniami.

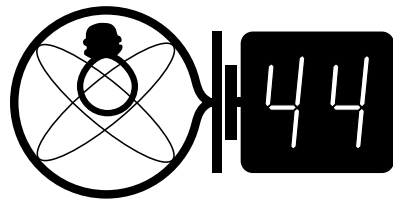
**526.** Wielokąt wypukły o  $n$  wierzchołkach ma  $m = \frac{1}{2}n(n - 3)$  przekątnych. Liczba wszystkich par przekątnych wynosi

$$M = \binom{m}{2} = \frac{n(n - 3)(n^2 - 3n - 2)}{8}.$$

Od tego trzeba odliczyć pary przekątnych (w liczbie  $K$ ) przecinających się wewnątrz wielokąta oraz pary przekątnych (w liczbie  $L$ ) mających wspólny koniec.

Każda czwórka wierzchołków wyznacza dokładnie jedną parę przekątnych przecinających się w punkcie wewnętrznym; zatem  $K = \binom{n}{4}$ . Każdy wierzchołek jest wspólnym końcem  $\binom{n-3}{2}$  par przekątnych; zatem  $L = n \cdot \binom{n-3}{2}$ . Stąd ostateczny wynik (postać po uproszczeniu):

$$M - K - L = \frac{n(n - 3)(n - 4)(n - 5)}{12}.$$



Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań:

31 III 2007

Czołówka ligi zadaniowej

**Klub 44 F**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań

420 (WT = 1,75) i 421 (WT = 2,09)

z numeru 6/2006

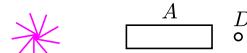
Mateusz Łącki	– Kraków	42,38
Tomasz Tkocz	– Rybnik	36,42
Marian Łupieżowicz	– Zebrydowice	32,79
Konrad Kapcia	– Częstochowa	32,13
Tomasz Wietecha	– Tarnów	26,08
Jerzy Witkowski	– Radlin	26,07
Krzysztof Magiera	– Łosiów	18,64
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	17,01

430. Oto fragment artykułu z gazety codziennej, dotyczący możliwości bezpośredniej obserwacji planet pozasłonecznych metodą zasłonięcia gwiazdy (której światło jest znacznie silniejsze):

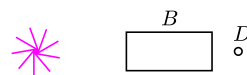
... satelita... rozwinie parasol o średnicy 30–50 m, który posłuży za przesłonę dla teleskopu. Żeby skutecznie wyeliminować światło gwiazdy docierające z odległości kilkudziesięciu lat świetlnych i równocześnie umożliwić obserwację układu planetarnego tej gwiazdy, przesłona musi znajdować się kilkadziesiąt tysięcy kilometrów przed teleskopem.

Skąd wynikają podane wyżej wartości średnicy przesłony i jej odległości? Czy nie mogłaby być ona np. 10 razy mniejsza i znajdować się odpowiednio bliżej? Przyjąć, że układ planetarny jest podobny do Układu Słonecznego, a obserwowany jest w świetle widzialnym.

431. Na osi betonowego walca  $A$  w dużej odległości od niego znajduje się małe źródło promieniowania gamma, a za walcem znajduje się detektor promieniowania  $D$ .



Drugi z narysowanych układów różni się od pierwszego tylko większą grubością walca  $B$ . Okazało się, że natężenia promieniowania zmierzone przez detektory nie były jednakowe. Który z detektorów wskazywał większe natężenie promieniowania i dlaczego?

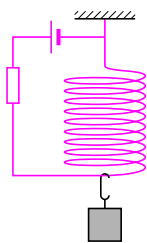


### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/2006

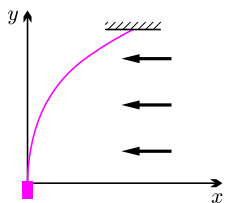
Przypominamy treść zadań:

422. Na nieważkim sznurku o długości  $l = 1$  m wisi ciężarek o masie  $m = 100$  g. Wieje wiatr, który na każdy odcinek sznurka o długości  $ds$  działa poziomo skierowaną siłą o wartości  $dF = f ds$ , gdzie  $f = 0,8$  N/m. O ile odchyła się ciężarek pod wpływem wiatru? Pytanie dotyczy poziomej składowej przesunięcia w stanie równowagi.

423. Ciężarek zawieszono na sprężynie z drutu metalowego, która jest częścią obwodu elektrycznego prądu stałego (rysunek obok). Czy natężenie prądu w obwodzie pozostanie stałe, gdy wprawimy ciężarek w drgania pionowe? Jeśli nie, to w których momentach będzie ono największe, a w których najmniejsze? Wystarczy odpowiedź jakościowa, dla niewielkiej amplitudy drgań.



422. Oznaczmy składową poziomą siły napięcia sznurka przez  $F_x$ , pionową przez  $F_y$ , a sam sznurek przedstawmy na wykresie  $x - y$  (rys.).



Ponieważ sznurek jest wiotki, więc siła napięcia musi być w każdym punkcie do niego równoległa, tzn.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x}$$

Składowa  $F_y$  jest stała i równa  $mg$ , natomiast składowa  $F_x$  rośnie „w górę” sznurka zgodnie z równaniem  $dF_x = f ds$ , czyli  $F_x = fs$ , gdzie  $s$  jest zmienną – długością sznurka od danego punktu do ciężarka. Po podstawieniu  $dy = \sqrt{ds^2 - dx^2}$  otrzymujemy równanie różniczkowe

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{mg}{fs}\right)^2}$$

Rozwiązaniem (spełniającym warunek  $x = 0$  dla  $s = 0$ ) jest funkcja  $x(s) = \sqrt{s^2 + (mg/f)^2} - mg/f$ . Podstawiając  $s = l$ , obliczamy szukaną wartość przesunięcia poziomego  $x = 0,356$  m. Można wykazać, że funkcja  $x(y)$  jest cosinusem

hiperbolicznym, czyli sznurek tworzy „położoną na boku” krzywą łańcuchową.

423. Wydłużenie sprężyny zmniejsza jej indukcyjność  $L$ , a przy ustalonym natężeniu prądu elektrycznego zmniejszeniu uległaby też wartość strumienia indukcji magnetycznej  $\Phi = LI$ . Zgodnie z regułą Lenza powstająca siła elektromotoryczna indukcji powoduje zatem zwiększenie natężenia prądu. Dokładniejsza analiza wymaga podstawienia wyrażen

$$L = L_0 + L_1 \sin \omega t, \quad I = I_0 + I_1 \sin(\omega t + \varphi)$$

do równania

$$\mathcal{E} = RI + \frac{d}{dt}(LI)$$

Podana wyżej postać zależności natężenia prądu od czasu jest poprawnym rozwiązaniem równania tylko w przypadku małych  $L_1$  i  $I_1$ . Okazuje się, że jeśli stała czasowa obwodu  $\tau = L/R$  jest znacznie krótsza od okresu drgań ciężarka  $T$ , to maksymalny wzrost natężenia prądu wystąpi w chwili, gdy szybkość ruchu ciężarka w dół będzie największa (podczas przejścia przez położenie równowagi). W przeciwnym skrajnym przypadku  $\tau \gg T$  natężenie prądu będzie rosło tak długo, jak długo sprężyna będzie się wydłużała, osiągając maksymalną wartość w chwili zatrzymania się ciężarka w dolnym położeniu. Gdy wielkości  $\tau$  i  $T$  są porównywalne, przesunięcie fazy  $\varphi$  ma wartość pośrednią między  $0$  a  $\pi/2$ . Oczywiście, minimum natężenia prądu będzie w każdym przypadku przesunięte o pół okresu względem maksimum.





**Rozwiązanie zadania F 683.**  
Potencjały kulki oraz podłączonej do niej okładki kondensatora są równe, a potencjał okładki uziemionej jest równy zeru. Stąd

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q_0 - q}{C}.$$

Zatem ładunek pozostały na powierzchni kulki jest równy

$$q = \frac{q_0}{1 + C/4\pi\epsilon_0 r}.$$



**Rozwiązanie zadania F 684.**  
Powiedzmy, że na okładce kondensatora jest ładunek  $q$ , wtedy na powierzchni kulki z nią połączonej zostanie ładunek  $Q - q$ . Na drugiej okładce indukuje się ładunek  $-q$ , a na powierzchni kulki o promieniu  $R$  – ładunek  $+q$ . Przyrównując wielkości potencjałów między okładkami i między kulkami, mamy

$$\frac{q}{C} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q - q}{r} - \frac{q}{R} \right).$$

Stąd otrzymujemy

$$q = Q \left[ 1 + r \left( \frac{1}{R} + \frac{4\pi\epsilon_0}{C} \right) \right]^{-1}.$$

## Patrz w niebo

W 1979 r. zaobserwowano po raz pierwszy zjawisko soczewkowania grawitacyjnego wśród galaktyk. Był to wielki sukces zarówno obserwatorów, jak i teoretyków, którzy zniekształcone przez grawitację obrazy galaktyk prawidłowo opisali (oczywiście, na gruncie ogólnej teorii względności). Obecnie tego rodzaju obrazy rejestruje się niemal rutynowo. Grawitacyjną soczewkę, którą bardzo często jest gromada galaktyk, udało się nawet wykorzystać jako dodatkową, umieszczoną przed teleskopem soczewkę, dzięki której obiekty odleglejsze od niej można zobaczyć powiększone i pojaśnione.

Tak właśnie udało się kilka lat temu zespołowi obserwatorów pracującemu przy Teleskopie Hubble'a wykorzystać obrazy gromady galaktyk Abell 2218 w Smoku. Oprócz standardowo zniekształconych (jakby przez zwykłą szklaną soczewkę) obrazów galaktyk położonych za tą gromadą widać tam kilka bardzo małych czerwonych plamek. Po zbadaniu ich widm (zresztą za pomocą 10-metrowego teleskopu Kecka na Hawajach – naziemnego!) okazało się, że dwie z nich mają widma jednakowo poczerwienione, uznano więc, że są rozdwojonym obrazem tego samego małego obiektu o przesunięciu ku czerwieni wynoszącym aż 5,58. Przy dopplerowskiej interpretacji światło opuściło ten obiekt, gdy wiek Wszechświata wynosił 4% obecnego wieku. Pole grawitacyjne gromady Abell 2218 (leżącej siedem razy bliżej niż ów zagadkowy obiekt) powiększyło jego obraz 5–6 razy i pojaśniło 30 razy. Jego rzeczywiste rozmiary oceniono na 150 pc. Obiekt ten nie jest wprawdzie rekordowo odległy, ale w ogóle nie mógłby zostać wykryty, gdyby nie gromada-soczewka Abell 2218. Nie sposób orzec, czy jest to fragment bardzo odległej protogalaktyki, jasny obszar gwiazdotwórczy w niewidocznej galaktyce, czy jakiś fragment pozostały po zderzeniu galaktyk. Za to na pewno obiekt ten będzie jednym z pierwszych obserwowanych przez większego następcę Teleskopu Hubble'a, który ma zostać uruchomiony w 2009 roku.

*Tomasz KWAST*

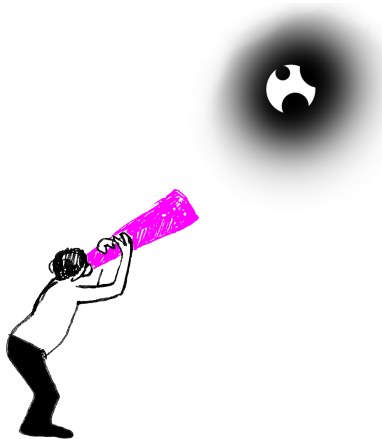
## Styczeń

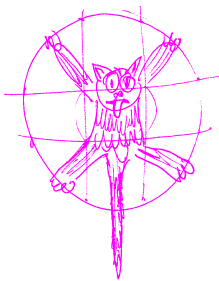
Chyba najefektowniejnymi zjawiskami niebieskimi są zaćmienia. Otóż w roku 2007 nastąpią dwa częściowe zaćmienia Słońca i dwa całkowite zaćmienia Księżyca. Mimo że zaćmienia Księżyca widać z całej półkuli Ziemi zwróconej akurat ku Księżycowi, to tak się teraz nieszczęśliwie składa, że z Polski nawet tych zaćmień nie zobaczymy. Bo słonecznych również, niestety, nie zobaczymy. Zobaczymy (o ile pogoda pozwoli) kilka zakryć Regulusa, dwa Saturna i jedno Marsa przez Księżyc – ale o tym we właściwych miesiącach. I czasami będą błyskać meteory, tylko że ich obfitości nie da się dobrze przewidzieć.

W styczniowe wieczory, jak zwykle, mamy – zwłaszcza we wschodniej połowie nieba – bardzo dużo jasnych gwiazd. Tam bowiem widać Oriona, Małego i Wielkiego Psa, Bliźnięta, a wysoko znajdują się słynne gromady: Plejady i Hiady. Do tego Droga Mleczna przecina niebo od południowego wschodu do północnego zachodu. Piękny widok!

Wenus jest w Koziorożcu i nie widać jej z powodu bliskości Słońca. Tak samo jest z Marsem w Strzelcu. Na południowym niebie, w Wężowniku, jest też Jowisz, który wschodzi dopiero w drugiej połowie nocy. Jedynie Saturna dobrze widać w Bliźniętach prawie przez całą noc. Pełnia Księżyca wypada 3 I, a nów 19 I. W styczniu Księżyc dokona aż pięciu zakryć jasnych obiektów, ale... Zakrycie Saturna będzie 6 I, choć widoczne tylko z obszarów arktycznych. Zakrycie Regulusa 7 I będzie akurat widoczne w Europie, ale w Polsce niezbyt korzystnie, bo nad ranem. Spikę Księżyc zakryje 11 I dla mieszkańców Antarktydy, Antaresa 15 I dla mieszkańców południowych krańców Afryki i Ameryki Południowej i podobnie będzie z zakryciem Wenus 20 I. Z jasnych meteorów przewiduje się (na ile to możliwe) dość obfity rój Kwadrantydów (dawna nazwa Kwadrant odpowiada obszarowi na styku Smoka, Herkulesa i Wolarza) z maksimum około 3 I.

*T. K.*





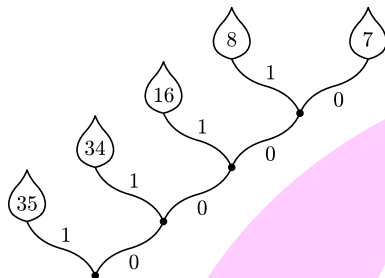
Kot Leonardo da Vinci

## Kod Huffmana Rafał SZTENCEL\* (scripsit et pinxit)

Rozwiążemy problem z poprzedniego odcinka. Przypuśćmy, że w pewnym miasteczku występuje tylko pięć imion żeńskich: Agnieszka, Barbara, Celina, Dorota i Elżbieta, z częstościami odpowiednio 35%, 34%, 16%, 8% i 7%. Mamy ustalić imię losowo wybranej kobiety, zadając pytania, na które otrzymujemy odpowiedź „tak” lub „nie”. Jak pytać, by średnia liczba pytań była najmniejsza?



Kot Huffmana



Imię	kod	częstość
Agnieszka	1	0,35
Barbara	01	0,34
Celina	001	0,16
Dorota	0001	0,08
Elżbieta	0000	0,07

Konstruujemy drzewko. Najpierw łączymy dwa „liście” o najmniejszej wadze (D i E), które będą w efekcie wyrastać ze wspólnego węzła. Otrzymujemy nową listę wag: 35, 34, 16, 15. Następnie łączymy dwie najmniejsze wagi i powtarzamy procedurę, dopóki się da. Rezultat widać na rysunku, drzewko sugeruje (mamy nadzieję) sposób zadawania pytań. Jeśli odpowiedź „tak” oznaczmy cyfrą 1, a odpowiedź „nie” cyfrą 0, to ciągi odpowiedzi (kody) identyfikujące wszystkie imiona będą wyglądać jak w tabeli na marginesie.

Do identyfikacji potrzebujemy średnio

$$q = 1 \cdot 0,35 + 2 \cdot 0,34 + 3 \cdot 0,16 + 4 \cdot 0,08 + 4 \cdot 0,07 = 2,11$$

pytania na osobę, podczas gdy entropia  $H$  odpowiedniego rozkładu prawdopodobieństwa jest równa 2,04. Przypominamy, że

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i,$$

gdzie w naszym przypadku  $p_1 = 0,35, \dots, p_5 = 0,07$ . Widzimy, że spełniona jest nierówność z poprzedniego odcinka:

$$H \leq q < H + 1.$$

Przedstawiona metoda pochodzi od Huffmana. Można udowodnić, że średniej liczby pytań nie da się zmniejszyć.

Wyobraźmy sobie, że mamy tekst, w którym występują wyłącznie litery A, B, C, D i E z podanymi wcześniej częstościami. Gdybyśmy chcieli go zakodować za pomocą ciągu cyfr dwójkowych, czyli zer i jedynek, to, na przykład, słowo BABA przybrałoby postać 011011. Kod o stałej długości wymagałby trzech cyfr dwójkowych (bitów) na znak. Kod Huffmana wymaga tylko 2,11 bita na znak. Rzut oka do tabeli pozwala stwierdzić, że więcej oszczędzamy na często występujących symbolach A i B o krótkich kodach, niż tracimy na rzadkich symbolach D i E o długich kodach.

Kod Huffmana jest w pewnym sensie optymalny, ale w jakim? Jeśli kodujemy pojedyncze znaki, to liczby bitów na znak nie da się już zmniejszyć. Stąd oczywiste zastosowania w programach archiwizujących pliki komputerowe. Z drugiej strony kodowanie tekstu BA...BA (powtórzone milion razy) metodą Huffmana jest, delikatnie mówiąc, nieoptymalne. W języku naturalnym takie teksty zdarzają się rzadko, choć, na przykład, w zapisie cyfrowym fotografii analogiczne ciągi nie są niczym dziwnym. Skoro jednak mowa o języku naturalnym, to doskonale wiadomo, że żaden język nie przypomina ciągu symboli generowanych niezależnie z ustalonymi częstościami. Przeciwnie, znając część wyrazu można na ogół odtworzyć całość.

Nad oszacowaniem faktycznej entropii tekstu w bitach na znak zastanawiał się już twórca teorii informacji, Claude Shannon. Jeśli wziąć pod uwagę tylko częstości występowania liter w języku angielskim, to wynosi ona 2,14 bita na znak. Shannon zaproponował zadziwiająco prostą i pomysłową metodę szacowania faktycznej entropii tekstu: odczytywał kolejne litery, a druga osoba

zgadywała dalszy ciąg. Okazało się, że entropia zawiera się w granicach 0,6–1,3 bita na znak. Jak wykorzystać ten fakt przy kodowaniu? Chyba będziemy musieli zastanowić się nad tym w przyszłości.

Czasem znając pierwszą literę tekstu, można odtworzyć całkiem pokaźny fragment, jak w przypadku artykułu z pierwszej strony „Trybuny Ludu” z lat siedemdziesiątych ubiegłego stulecia: „Pierwszy sekretarz KC PZPR Edward Gierek przebywał wczoraj z gospodarską wizytą w Zakładach Mięsnych im. Feliksa Dzierżyńskiego w Mławie...” – itd. w tym stylu. Przykłady współczesne tekstów o zawartości informacyjnej 0 bitów na znak każdy dośpiewa sobie sam.

**Podziękowania.** Kącik „Omega” ukazuje się już od roku. Docierają do mnie komentarze Czytelników, na ogół życzliwe, za które pragnąłbym w tym miejscu podziękować. Nie jest łatwo wyobrazić sobie modelowego czytelnika. Dlatego też większość tekstów przed publikacją przeczytała Agnieszka Strużyńska, studentka Wydziału Nauk Ekonomicznych UW. Co więcej, kilka tematów, w tym bieżący, ma bezpośredni związek z konsultacjami, jakich jej udzielałem. Ten przykład pożytków z działalności dydaktycznej zasługuje na wzmiankę, a osoba, która podjęła się krytycznej lektury – na podziękowanie.

\*Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski